

Численное моделирование воздействия форм каналов на трансформацию слабонелинейных возмущений границы раздела двух неглубоких жидкостей*

Д. Г. АРХИПОВ, Г. А. ХАБАХПАШЕВ
Институт теплофизики СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: theory@itp.nsc.ru

Предложен комбинированный подход для описания трансформации трехмерных возмущений границы раздела двух несжимаемых несмешивающихся жидкостей различной плотности, находящихся между неподвижными недеформируемыми крышкой и дном. Предполагается, что длины волн умеренно большие, их амплитуды малы, но конечны, крышка и дно могут быть слабонаклонными, а капиллярные эффекты не велики. Выведенная система уравнений применима для моделирования возмущений, которые одновременно разбегаются в произвольных горизонтальных направлениях. Численно найдены решения ряда характерных волновых задач и продемонстрировано влияние определяющих параметров.

Задача о волнах в двухслойных жидкостях, находящихся между неподвижными недеформируемыми дном и крышкой, является стандартным объектом гидромеханики. Если распространение линейных возмущений границы раздела несмешивающихся сред различной плотности изучено достаточно хорошо, то для волн малой, но конечной амплитуды исследованы, в основном, плоские и квазиплоские случаи (см., например, книги [1]–[3] и обзор [4]). В частности, для умеренно длинных возмущений были получены модельные уравнения типа уравнения Кортевега – де Вриза [5] и расширенного уравнения Кортевега – де Вриза [6], модифицированного уравнения Буссинеска [7] и его двумерного обобщения [8]. Эти уравнения удобны для анализа, но при их выводе предполагалось, что нелинейные волны бегут преимущественно в одном горизонтальном направлении. Лишь в таких ситуациях можно выразить векторы скоростей жидкостей, входящие в конвективные члены уравнений движения, через возмущения границы раздела и свести задачу к одному уравнению для скалярной переменной.

В противном случае для описания умеренно длинных волн конечной амплитуды, одновременно распространяющихся под любыми углами друг к другу, необходимо использовать системы уравнений, которые содержат как возмущения границы раздела, так и скорости сред. Однако в таких системах (см., например, обзор [9]) не только нелинейные, но и линейные члены всех уравнений зависят от скоростей жидкостей.

Для случая неглубокого слоя однородной среды в статье [10] была предложена новая комбинированная система уравнений, которая более удобна для анализа. Модель состоит из основного нелинейного волнового уравнения для возмущения свободной поверхности и двух обычных линейных вспомогательных уравнений, которые требуются

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по государственной поддержке ведущих научных школ России (грант № НШ-6686.2012.8) и гранта Правительства России для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских вузах № 11.G34.31.0035 (В. Е. Захаров – НГУ).

для определения вектора горизонтальной скорости, входящего только в члены второго порядка малости главного уравнения. Поэтому она обладает основными достоинствами упомянутых выше подходов, но свободна от их недостатков. Результаты только двух простых расчетов для случая горизонтального дна приведены в этой статье. Немного более компактная версия данной модели и более детальные вычисления, включая столкновение нескольких первоначально уединенных в пространстве возмущений над пологим дном, опубликованы в работе [11]. В частном случае плоских волн в статье [12] эта система сведена к одному новому уравнению, способному описать неупругое взаимодействие локализованных возмущений при их лобовом столкновении.

Целью данной работы является обобщение метода [10]–[12] на случай двухслойных жидкостей между пологими дном и крышкой. Кроме того, будет продемонстрирована его пригодность для решения плоских и пространственных гидродинамических задач.

1. Исходные уравнения, предположения и модельная система

Во-первых, будем исходить из того, что жидкости являются несжимаемыми, несмешивающимися и невязкими. Тогда исходную систему уравнений гидродинамики (уравнение неразрывности и уравнения Эйлера) для любого слоя можно записать в форме

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_l + \frac{\partial w_l}{\partial z} = 0, \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} + \mathbf{u}_l \cdot \nabla \mathbf{u}_l + w_l \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial z} + \frac{1}{\rho_l} \nabla p_l = 0, \quad \frac{\partial w_l}{\partial t} + \mathbf{u}_l \cdot \nabla w_l + w_l \frac{\partial w_l}{\partial z} + \frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p_l}{\partial z} + g = 0.$$

Здесь \mathbf{u} – горизонтальная компонента вектора скорости жидкости (см. рис. 1), w – его вертикальная составляющая, z – вертикальная координата, t – время, ρ – плотность жидкости, p – давление в слое, а g – ускорение свободного падения; индекс l равен единице для верхней жидкости и двойке для нижней.

Во-вторых, воспользуемся следующими предположениями: 1) стационарные составляющие движения равны нулю; 2) возникающие течения потенциальны внутри каждого слоя; 3) характерный горизонтальный размер возмущения границы раздела L существенно больше, а его амплитуда η_a значительно меньше равновесных глубин слоев

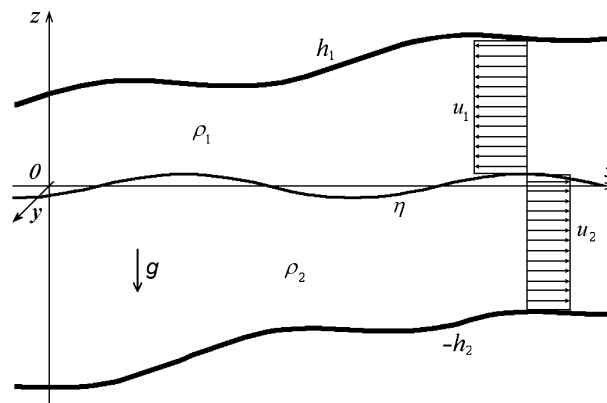


Рис. 1. Волны на границе раздела и скорости течения в неглубокой двухслойной жидкости с пологими неподвижными недеформируемыми дном и крышкой.

h_l ($h_l/L \sim \sim \varepsilon^{1/2}$ и $\eta_a/h_l \sim \varepsilon$, где ε – малый параметр); 4) неподвижные недеформируемые крышка и дно слабонаклонны ($|\nabla h_l| \sim \varepsilon^{3/2}$); и наконец, 5) капиллярные эффекты не велики (модифицированное число Бонда $Bo = (\rho_2 - \rho_1) g h_1 h_2 / \sigma > 1$, где σ – поверхностное натяжение). Сделанные допущения (конечно же, за исключением предположения об отсутствии вязкости) соответствуют условиям проведения экспериментов в различных гидродинамических лабораториях (см., например, [13]–[15]).

Далее примем обычные краевые условия (условия непротекания жидкости через неподвижные недеформируемые крышку и дно; кинематические условия на границе раздела и условие для скачка давления на этой поверхности):

$$w_l + (-1)^l \mathbf{u}_l \cdot \nabla h_l = 0 \quad \text{при} \quad z = (-1)^{l+1} h_l(x, y);$$

$$w_l = \partial \eta / \partial t + \mathbf{u}_l \cdot \nabla \eta \quad \text{и} \quad p_{1i} = p_{2i} + \sigma \nabla^2 \eta \quad \text{при} \quad z = \eta(t, x, y).$$

Здесь η – отклонение границы раздела, а индексом i помечены значения величин, относящиеся к этой поверхности.

После ряда преобразований, подобных тем, что использовались в статье [10] для однородной жидкости, получаем основное эволюционное уравнение новой модели в виде

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \eta - C_n \frac{c^2}{2} \nabla^2 \eta^2 - \frac{h_1 h_2}{\chi} \left[\rho_2 \nabla^2 (\langle \mathbf{u}_2 \rangle^2) - \rho_1 \nabla^2 (\langle \mathbf{u}_1 \rangle^2) \right] -$$

$$- C_d \nabla^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = (C_{b1} \nabla h_1 + C_{b2} \nabla h_2) \cdot \nabla \eta, \quad (1)$$

где $c^2 = g h_1 h_2 (\rho_2 - \rho_1) / \chi$, $C_n = (\rho_2 h_1^2 - \rho_1 h_2^2) / (h_1 h_2 \chi)$, $C_d = h_1 h_2 [(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) / (3\chi) - 1 / Bo]$, $C_{bl} = h_1 h_2 c^2 \rho_l / (h_l^2 \chi)$, а угловыми скобками обозначены величины, усредненные по глубинам слоев. Отметим, что коэффициенты при всех членах зависят только от геометрических (h_1 , h_2) и физических (g , ρ_1 , ρ_2 , σ) параметров задачи.

Уравнение (1) характерно тем, что величины горизонтальных компонент скоростей жидкостей входят лишь в члены второго порядка малости. Поэтому для их определения достаточно первого приближения законов сохранения массы. Введем также потенциалы для этих скоростей φ_l и перейдем к уравнениям Пуассона:

$$\langle \mathbf{u}_l \rangle = \nabla \varphi_l, \quad \nabla^2 \varphi_l = \frac{(-1)^{l+1}}{h_l} \frac{\partial \eta}{\partial t}. \quad (2)$$

Подчеркнем, что выведенная модель, т. е. система уравнений (1) и (2), пригодна для возмущений, распространяющихся под любыми углами друг к другу. Она принципиально проще и удобнее для анализа, чем известные системы дифференциальных уравнений (см., например, [16, 17]), в которых все уравнения содержат как линейные, так и нелинейные слагаемые.

2. Аналитические решения и результаты численных расчетов

Если волны бегут преимущественно в одном направлении, то в членах второго порядка малости величины горизонтальных компонент скоростей жидкостей можно приближенно выразить через возмущение границы раздела слоев с помощью простейших

равенств: $\mathbf{u}_l = (-1)^l c \eta / h_l$. В этом случае уравнения (2) становятся не нужны, а уравнение (1) согласуется с двумерным модифицированным уравнением Буссинеска, полученным в работе [8]. В ситуации плоских волн, если крышка и дно не зависят от трансверсальной координаты, то, конечно же, приходим к одномерному модифицированному уравнению Буссинеска [7].

Наконец, если дно и крышка горизонтальны, то у указанных уравнений есть стационарно-бегущие решения (возмущения распространяются с постоянной скоростью и неизменной формой). Среди них есть периодические кноидальные волны, а в предельном случае и уединенные возмущения, имеющие стандартную форму:

$$\eta = \eta_a / \cosh^2 \xi_L, \quad (3)$$

где $\xi_L = (x - x_0 - Ut)/L$, x_0 – координата, в которой в начальный момент времени ($t = 0$) возмущение максимально по абсолютной величине, U – скорость распространения волны, а L – ее характерный продольный размер. Формулы для этих параметров модифицированного уравнения Буссинеска приведены в статье [7]: $U = \pm c\sqrt{1 + \eta_a^*}$, $L = 2\sqrt{C_d(1 + 1/\eta_a^*)}$, а $\eta_a^* = \eta_a C_n$. Для данной модели величины U и L найдены в виде

$$U = \pm c\sqrt{(1 + \eta_a^*/3)/(1 - 2\eta_a^*/3)}, \quad L = 2\sqrt{C_d(1/3 + 1/\eta_a^*)}. \quad (4)$$

Таким образом, хорошо видно, что зависимости (4) согласуются с соответствующими равенствами для солитонных решений модифицированного уравнения Буссинеска.

Основное уравнение модели (1) очень похоже на эволюционное уравнение для волн на свободной поверхности слоя однородной жидкости над пологим дном, приведенное в статье [18]. Поэтому вычисления выполнены с помощью модификации неявной трехслойной конечно-разностной схемы, описанной в статье [18], и итерационного метода Зейделя в плоскости xOy . Кроме того, на шаге "предиктор" в расчетах использовались значения векторов скоростей жидкостей, определенные на предыдущем шаге по времени. Затем величины $\langle \mathbf{u}_l \rangle$ находилось из решения системы уравнений (2) по полученным значениям возмущений границы раздела. Для этого применялся еще один стандартный метод расчета – быстрое преобразование Фурье по обоим горизонтальным координатам. А на шаге "корректор" уже эти поля скоростей подставлялись в уравнение (1).

Ниже мы рассмотрим задачи, в которых начальными возмущениями были либо стационарно-бегущие уединенные волны (если неизвестные зависят только от одной горизонтальной координаты), либо первоначально покоящиеся возмущения (если неизвестные зависят от обеих горизонтальных координаты). Следовательно, задание частных производных по времени на первых двух шагах во всех точках канала выполнялось очевидным образом. Тестирование разностной схемы, алгоритма и программы вычислений было осуществлено с помощью аналитического решения (3)–(4). Результаты расчетов показали, что, как и ожидалось, такие возмущения распространялись с постоянной скоростью и неизменной формой.

На рис. 2 и 3 показаны результаты некоторых вычислений для различных пространственных возмущений ($\eta^* = \eta/H$, $x^* = x/H$, $y^* = y/H$, $t^* = tc_0/H$, $H = h_1 + h_2$). Указанные значения отношений плотностей (керосин и вода) и глубин слоев соответствуют реальным значениям параметров, при которых были выполнены лабораторные эксперименты [14] по динамике одиночных волн под горизонтальной крышкой.

На рис. 2 продемонстрировано образование цилиндрической волны из начального осесимметричного возмущения типа "впадина": $\eta(0, x, y) = \eta_0 \exp(-[(x^*)^2 + (y^*)^2]/100)$,

где $\eta_0 < 0$. Как и ожидалось, с некоторого момента времени за фронтом основной волны граница раздела поднимается выше равновесного уровня, а затем медленно стремится к этому уровню. Отметим, что масштаб вертикальной оси на правом рисунке изменен в четыре раза по сравнению с левым рисунком.

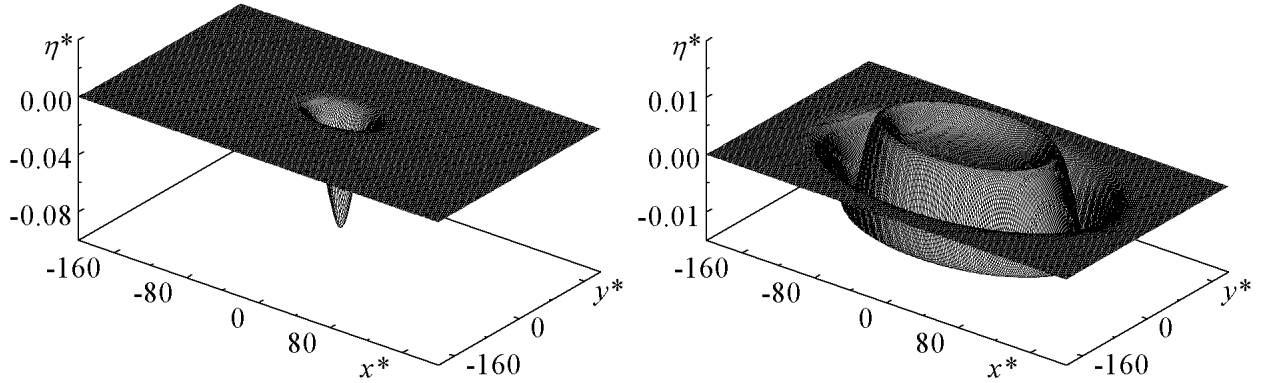


Рис. 2. Эволюция (слева – $t = 0$, справа – $t^* = 29$) первоначально колоколообразного возмущения "яма" между горизонтальными дном и крышкой при $\rho_1/\rho_2 = 0.8$ и $h_1/h_2 = 0.357$.

На рис. 3 приведена динамика возмущения, имевшего в начальный момент времени следующую форму: $\eta(0, x, y) = \eta_x$, если $\eta_x > \eta_y$ и $\eta(0, x, y) = \eta_y$, если $\eta_x < \eta_y$, где $\eta_x = 2\eta_{ax} \operatorname{sech}^2(x/L_x)$, а $\eta_y = 2\eta_{ay} \operatorname{sech}^2(y/L_y)$. Хорошо видно, что образуются четыре квазиплоские волны, разбегающиеся в четыре стороны. Кроме того, возникли четыре пика возмущения границы раздела на пересечениях этих волн.

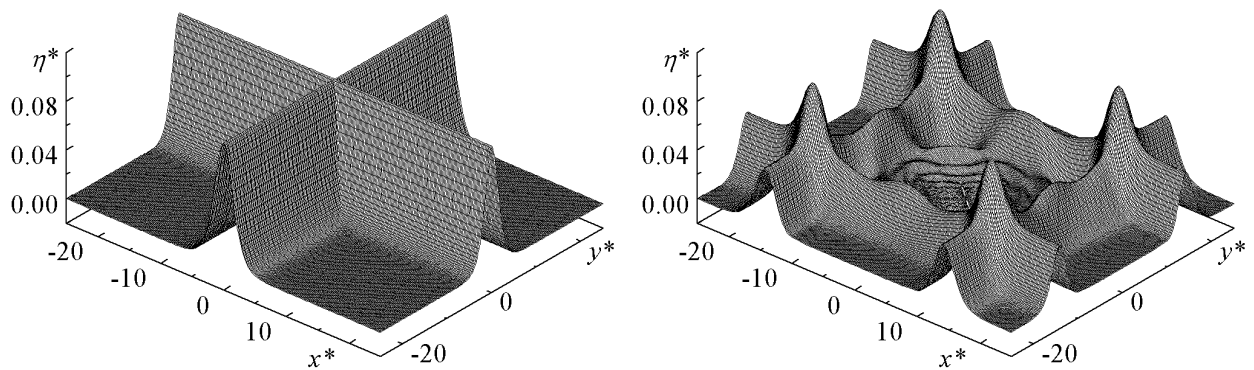


Рис. 3. Трансформация (слева – $t = 0$, справа – $t^* = 14$) первоначально крестообразного возмущения "хребты" между горизонтальными дном и крышкой при $\rho_1/\rho_2 = 0.8$ и $h_1/h_2 = 1.857$.

3. Уравнение для описания плоских волн и расчеты по нему

Рассмотрим трансформацию нелинейных двумерных локализованных возмущений границы раздела ($\eta \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$), одновременно распространяющихся как в направлении роста координаты x , так и в противоположную сторону. Если ввести вспомогательную функцию ψ с помощью равенств $\partial\psi/\partial t = -u_l(\eta + (-1)^l h_l)$ и $\partial\psi/\partial x = \eta$, то законы сохранения массы в слоях выполняются тождественно, а в члене второго порядка малости, содержащем u_l^2 , можно заменить u_l на $(-1)^{l+1}(\partial\psi/\partial t)/h_l$. Далее,

проинтегрируем новое уравнение по координате от x до ∞ . В итоге, система модельных уравнений (1) и (2) сводится к следующему уравнению волнового типа:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - C_n \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{c^2}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right] - C_d \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^2 \partial x^2} = 0. \quad (5)$$

Наиболее интересным применением уравнения (5) является исследование встречного столкновения двух уединенных волн. Благодаря тому, что время такого взаимодействия достаточно мало, можно воспользоваться теорией возмущений. Введем новые переменные $\xi_1 = x - ct$ и $\xi_2 = x + ct$, тогда уравнение (5) можно переписать в форме

$$4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = -C_n \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} \right)^2 \right] - C_d \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right)^2 \psi. \quad (6)$$

Если искать решения уравнения (6) в виде $\psi(\xi_1, \xi_2) = \psi_1(\xi_1, \varepsilon \xi_2) + \psi_2(\varepsilon \xi_1, \xi_2) + \varepsilon \psi'(\xi_1, \xi_2)$, где ψ_1 и ψ_2 – независимые решения уравнения (6), причем $\partial \psi_1 / \partial \xi_2 \sim \varepsilon \partial \psi_1 / \partial \xi_1$ и $\partial \psi_2 / \partial \xi_1 \sim \varepsilon \partial \psi_2 / \partial \xi_2$, то в членах второго порядка малости $\psi_1 \approx \psi_1(\xi_1)$ и $\psi_2 \approx \psi_2(\xi_2)$. После подстановки этого разложения в уравнение (6) ряд членов высоких порядков малости может быть опущен. Кроме того, благодаря тому, что ψ_1 и ψ_2 являются решениями уравнения (6), ряд других членов будет компенсировать друг друга. В итоге получаем следующее дифференциальное уравнение для поправки:

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \approx \frac{C_n}{4} \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_1^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_2^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_1} \right). \quad (7)$$

После интегрирования данного уравнения по обеим переменным найдем поправку

$$\psi'(\xi_1, \xi_2) \approx \frac{C_n}{4} \left\{ \frac{d\psi_1}{d\xi_1} [\psi_2(\xi_2) - \psi_2(-\infty)] + \frac{d\psi_2}{d\xi_2} [\psi_1(\xi_1) - \psi_1(\infty)] \right\}.$$

Очевидно, что $\eta(\xi_1, \xi_2) = \eta_1(\xi_1) + \eta_2(\xi_2) + \eta'(\xi_1, \xi_2)$, поэтому $\eta' = \partial \psi' / \partial \xi_1 + \partial \psi' / \partial \xi_2$.

Если крышка и дно канала горизонтальны, то солитонные решения уравнения (5), очевидно, могут быть записаны в форме $\psi_i = \eta_{si} L_i \tanh[(x - x_0 - U_i t) / L_i]$, где индекс i равен 1 или 2 в зависимости от направления распространения волны. В этом случае данный подход приводит к следующему выражению для искомой поправки:

$$\psi' = C_n \frac{U_1 U_2 - c^2 / 2}{U_1 U_2 + c^2} \left\{ \frac{d\psi_1}{d\xi_1} [\psi_2(\xi_2) - \psi_2(-\infty)] + \frac{d\psi_2}{d\xi_2} [\psi_1(\xi_1) - \psi_1(\infty)] \right\},$$

а новые независимые переменные записываются в форме $\xi_1 = x - U_1 t$ и $\xi_2 = x + U_2 t$.

Заметим, что лишь нелинейные члены в новом уравнении (5) отличаются от соответствующих в модифицированном уравнении Буссинеска [7]. Поэтому нижеприведенные результаты расчетов также выполнены с помощью модификации неявной трехслойной конечно-разностной схемы, описанной в статье [18]. В частности, на шаге "предиктор" определение первых производных по времени осуществлялось по двум предыдущим слоям (второму и первому), а на шаге "корректор" – по третьему и первому.

На рис. 4 показано встречное столкновение двух одиночных возмущений различной амплитуды (слева – $\eta_{1a} = 0.09 h_2$ и $\eta_{2a} = 0.045 h_2$, справа – $\eta_{1a} = 0.12 h_2$ и $\eta_{2a} = 0.06 h_2$) под локальным выступом (слева) и под протяженным участком понижения крышки (справа). В первом случае после взаимодействия за основными волнами возникают осциллирующие "хвосты" (значительно заметнее для возмущений большей амплитуды). А во втором случае у волны большей амплитуды существенные колебания на заднем фронте возмущения успевают образоваться еще до момента столкновения. Отметим, что для рассматриваемой пары жидкостей (керосин и вода) коэффициент при нелинейном члене C_n меняет знак при $h_1/h_2 \approx 0.9$, т. е. в наших случаях под выступами.

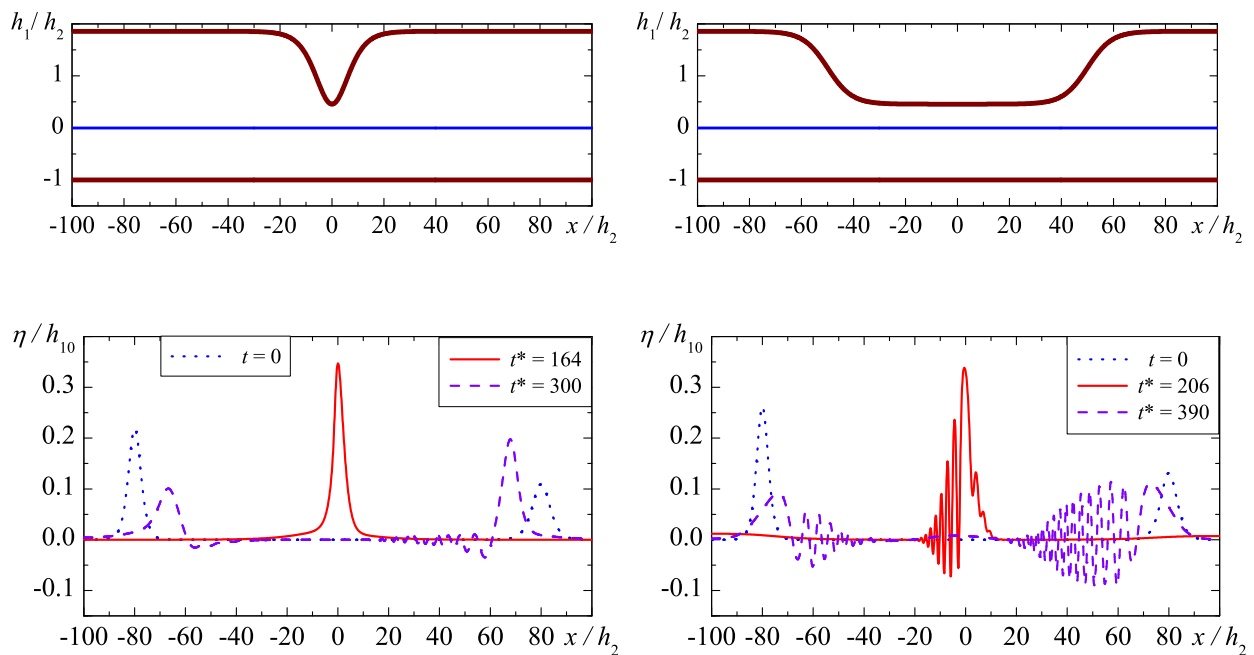


Рис. 4. Вверху – профили крышки, а также уровни невозмущенной границы раздела и дна; внизу – профили уединенных волн в разные моменты времени: пунктирные линии – $t = 0$, сплошные линии – $t^* = 164$ (слева) и 206 (справа), а штриховые линии – $t^* = 300$ (слева) и 390 (справа) при $\rho_1/\rho_2 = 0.8$, $h_{1\infty}/h_2 = 1.857$ и $h_{10}/h_2 = 0.457$, где $h_{1\infty} = h_1(\infty)$, $h_{10} = h_1(0)$.

4. Заключение

Предложена комбинированная модель, которая состоит из одного основного нелинейного эволюционного уравнения для пространственного возмущения границы раздела и нескольких простых вспомогательных линейных уравнений. Последние необходимы для нахождения векторов горизонтальных скоростей жидкостей, входящих лишь в члены второго порядка малости главного уравнения. Для плоских волн эту систему удалось свести к одному уравнению. Численные эксперименты подтвердили пригодность представленного подхода для решения ряда характерных плоских и пространственных задач динамики слабонелинейных волн. Использование полученных моделей позволило исследовать как трансформации одиночных возмущений, так и их взаимодействия.

Список литературы

- [1] Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн / Л. В. Овсянников, Н. И. Макаренко, В. И. Налимов и др. Новосибирск: Наука, 1985.
- [2] Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
- [3] Ильичев А. Т. Уединенные волны в моделях гидродинамики. М.: Физматлит, 2003.
- [4] OSTROVSKY L. A., STEPANYANTS Y. A. Internal solitons in laboratory experiments // *Chaos*. 2005. V. 15 P. 037111-1–037111-28.
- [5] DJORDJEVIC V. D., REDEKOPP L. G. The fission and disintegration of internal solitary waves moving over two-dimensional topography // *J. Phys. Oceanogr.* 1978. V. 8. № 6. P. 1016–1024.
- [6] KOOP C. G., BUTLER G. An investigation of internal solitary waves in a two-fluid system // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 112. P. 225–251.
- [7] ХАБАХПАШЕВ Г. А. Эволюция возмущений границы раздела двух слоев вязкой жидкости // *Изв. АН СССР, МЖГ*. 1990. № 6. С. 118–123.
- [8] ХАБАХПАШЕВ Г. А. Трансформация длинных нелинейных волн в двухслойной вязкой жидкости между пологими дном и крышкой // *ПМТФ*. 2005. Т. 46. № 6. С. 45–57.
- [9] HELFRICH K. R., MELVILLE W. K. Long nonlinear internal waves // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2006. V. 38. P. 395–425.
- [10] АРХИПОВ Д. Г., ХАБАХПАШЕВ Г. А. Новый подход к описанию пространственных нелинейных волн в диспергирующих средах // *Докл. Акад. наук*. 2006. Т. 409. № 4. С. 476–480.
- [11] АРХИПОВ Д. Г., ХАБАХПАШЕВ Г. А., САФАРОВА Н. С. Combined approach to numerical simulation of spatial nonlinear waves in shallow water with various bottom topography // *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*. 2011. Vol. 115. P. 297–312.
- [12] АРХИПОВ Д. Г., ХАБАХПАШЕВ Г. А. Новое уравнение для описания неупругого взаимодействия нелинейных локализованных волн в диспергирующих средах // *Письма в ЖЭТФ*. 2011. Т. 93. № 8. С. 469–472.
- [13] БУКРЕЕВ В. И., ГАВРИЛОВ Н. В. Экспериментальное исследование уединенных внутренних волн в двухслойной жидкости // *ПМТФ*. 1983. Т. 24, № 5. С. 51–56.
- [14] ГАВРИЛОВ Н. В. Уединенные внутренние волны большой амплитуды в двухслойной жидкости // *ПМТФ*. 1986. Т. 27. № 5. С. 49–54.
- [15] MICHALLET H., BARTHÉLEMY E. Ultrasonic probes and data processing to study interfacial solitary waves // *Experiments in Fluids*. 1997. V. 22. № 5. P. 380–386.
- [16] МАЛЬЦЕВА Ж. Л. Нестационарные длинные волны в двухслойной жидкости // *Динамика сплошной среды*. 1989. Вып. 93-94. С. 96–110.
- [17] SNOI W., SAMASSA R. Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system // *J. Fluid Mech.* 1999. V. 396. P. 1–36.
- [18] ЛИТВИНЕНКО А. А., ХАБАХПАШЕВ Г. А. Численное моделирование нелинейных достаточно длинных двумерных волн на воде в бассейнах с пологим дном // *Вычислительные технологии*. 1999. Т. 4. № 3. С. 95–105.