

# Применение метода SPH к задачам нелинейного взаимодействия жидкости с твердыми телами

К. Е. Афанасьев, Р. С. Макаrchук  
Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия  
e-mail: keafa@kemsu.ru, mak@kemsu.ru

В работе исследуются процессы входа и погружения бесконечных цилиндров в вязкую несжимаемую жидкость. Рассматриваются цилиндры с основаниями круглой и квадратной формы. В качестве инструмента проведения вычислительных экспериментов используется бессеточный метод сглаженных частиц. Приводятся картины течений, поле давления и гидродинамические силы, действующие на погружающиеся цилиндры.

## 1. Введение

Исследованию процессов взаимодействия твердых и упругих тел с жидкостью посвящены работы многих отечественных и зарубежных ученых: Л. И. Седова [1], Г. В. Логвиновича [2], В. В. Пухначева и А. А. Коробкина [3], А. Г. Терентьева, К. Е. Афанасьева и М. М. Афанасьевой [4], Э. И. Григолюка и А. Г. Горшкова [5], М. В. Норкина [6], В. И. Юдовича [7], Г. Г. Шахверди [8], R. Wagner [9], R. Zhao и O. Faltinsen [10], M. Greenhow и W. M. Lin [11], X. Zhu [12], S. Shao [13] и др. В работах применяются аналитические, численные и экспериментальные методы исследования.

Получение аналитических решений уравнений, описывающих моделируемые процессы, наиболее предпочтительно, однако в настоящее время возможности аналитических методов весьма ограничены, позволяя находить решения лишь в отдельных частных случаях. Проведение лабораторного эксперимента требует наличия дорогостоящего оборудования, тогда как вычислительный эксперимент с применением современных численных методов дает возможность исследовать сложные математические модели изучаемых процессов в большом диапазоне варьируемых параметров. В работе для проведения численных расчетов используется бессеточный метод сглаженных частиц [14, 15].

## 2. Общая постановка задачи

Пусть в области  $(t) \mathbf{R}^d$  ( $d$  – размерность области расчета) ищется решение системы уравнений Навье-Стокса, состоящей из уравнений движения вязкой жидкости:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (1)$$

и условия несжимаемости:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

где  $\mathbf{x}(t)$  – радиус-вектор точек области  $(t)$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  – вектор скорости,  $p(\mathbf{x}, t)$  – давление,  $\rho$  – плотность,  $\nu$  – коэффициент динамической вязкости,  $\mathbf{f}$  – вектор плотности массовых сил.

Здесь  $v$  и  $p$  – искомые характеристики процесса,  $\alpha$  и  $\beta$  – параметры задачи,  $x$  и  $t$  – независимые переменные.

Для разрешимости вышеприведенных систем уравнений необходимо задать начальные и граничные условия. Пусть  $\Gamma(t) = \Gamma_1(t) \cup \Gamma_2(t)$  – граница области  $\Omega(t)$ , где  $\Gamma_1(t)$  и  $\Gamma_2(t)$  – твердая и свободная границы соответственно. Тогда граничные и начальные условия имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|_{\Gamma_1(t)} = \mathbf{v}_1(t); \\ \mathbf{p}_n(\mathbf{x}, t)|_{\Gamma_2(t)} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} - p\mathbf{n} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|_{t=0} = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}); \\ \mathbf{x}(t)|_{t=0} = \mathbf{x}_0(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (4)$$

где  $\mathbf{v}_1(t)$  – скорость движения твердой границы  $\Gamma_1$ . Если граница  $\Gamma_1$  неподвижна, то  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ .

Если  $\mathbf{v}$  – скорость малых объемов (частиц) жидкости, тогда их координаты являются решением следующего дифференциального уравнения с начальными условиями:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} \quad (5)$$

$$\mathbf{x}(t)|_{t=0} = \mathbf{x}_0 \quad (6)$$

### 3. Численный метод

При проведении вычислительных экспериментов используется вариант метода сглаженных частиц для несжимаемых жидкостей [16]. С целью получения дискретного аналога системы уравнений Навье-Стокса область расчета представляется набором лагранжевых частиц, центры которых рассматриваются как расчетные узлы для построения функций формы на основе формулы усреднения функции по Стеклову. Между расчетными узлами не устанавливается жестких топологических связей, наличие которых характерно, например, для конечно-элементных сеток. Вместо этого используется понятие ближайших соседей, использование которых в качестве узлов интегрирования сводит интеграл в формуле усреднения к интегральным суммам. Полученная таким образом формула представления функции в виде суммы используется для аппроксимации дифференциальных операторов, входящих в уравнения Навье-Стокса. Для интегрирования уравнений по времени используется схема расщепления Чорина [17]. Более подробное описание метода можно найти в работах [16, 18].

### 4. Задача о входе и погружении бесконечного цилиндра в жидкость

В бассейн, заполненный жидкостью плотности  $\rho$ , первоначально находящейся в состоянии покоя, падает абсолютно твердый бесконечный цилиндр плотности  $\rho_b$  ( $\rho_b < \rho$ ), высота падения которого определяется положением его центра масс  $x_c$  в начальный момент времени. Задача решается для цилиндров с круглой (рис. 1, а) и квадратной (рис. 1, б) формами основания. При движении цилиндра с квадратным основанием одна из его диагоналей параллельна вектору ускорения силы тяжести. Таким образом, в этом случае процесс входа цилиндра в жидкость на начальном этапе аналогичен входу в жидкость клина с углом килеватости  $45^\circ$ .

Несмотря на свойство симметрии задачи относительно плоскости, проходящей через ось цилиндра ортогонально первоначально невозмущенной поверхности жидкости, задача решается в полной двумерной постановке, учитывающей также и моменты сил, действующих на цилиндр.

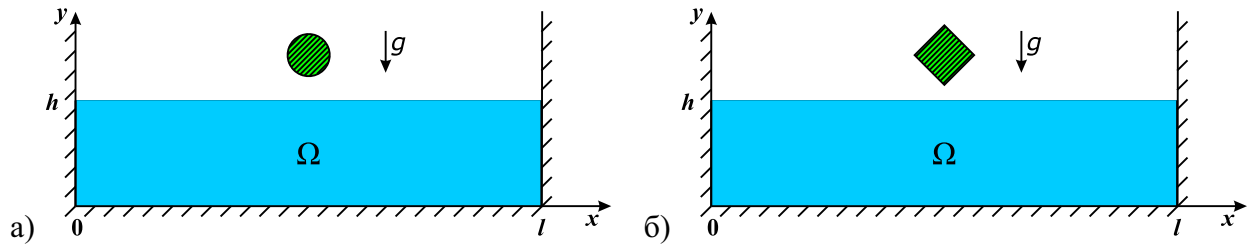


Рис. 1. К постановке задачи о входе бесконечного цилиндра в бассейн с жидкостью

При проведении численных расчетов использовались значения параметров, приведенные в таблице 1.

Т а б л и ц а 1. Параметры задачи о входе бесконечного цилиндра в бассейн с жидкостью

| Параметр задачи                                      | Значение                          |
|--|-----------------------------------|
| Плотность жидкости                                   | 1000 кг м <sup>3</sup>            |
| Плотность цилиндра $\rho_b$                          | 500 кг м <sup>3</sup>             |
| Ускорение силы тяжести $g$                           | 9.81 м с <sup>2</sup>             |
| Коэффициент кинематической вязкости жидкости         | 10 <sup>-6</sup> м <sup>2</sup> с |
| Длина бассейна $l$                                   | 0.12 м                            |
| Глубина бассейна $h$                                 | 0.02 м                            |
| Радиус $r$ (длина стороны $l_b$ ) основания цилиндра | 0.005 м (0.01 м)                  |
| Начальное положение центра масс цилиндра $x_c(0)$    | (0.06, 0.03) м                    |

Для обоих цилиндров был проведен ряд численных расчетов при различном наборе частиц, используемых для представления подвижной сплошной среды, неподвижных границ расчетной области и границ цилиндров. Расчеты показали, что для получения достоверных результатов численного моделирования процессов взаимодействия с жидкостью цилиндров с круглым основанием целесообразным является использование в расчетах такого количества частиц, при котором значение отношения  $x/r$  не превышает 0.1, где  $x$  – шаг расчетной сетки, что обусловлено кривизной основания цилиндра.

В вычислительных экспериментах участвовало 17885 и 17905 частиц для цилиндров с круглым и квадратным основаниями соответственно. Шаг сетки при выбранном количестве частиц удовлетворяет приведенному выше условию.

На рисунке 2 представлены картины течения в моменты входа в жидкость цилиндров с круглым (а) и квадратным (б) основаниями ( $t = 0.03$  с и  $t = 0.024$  с соответственно). На рисунке 3 для сравнения приведены фрагменты течения при входе в жидкость цилиндров с круглой (слева) и квадратной (справа) формой основания в соответствующие моменты времени: 0.044 с (а, б), 0.072 с (в, г), 0.138 с (д, е), 0.3 с (ж, з). Цилиндр с квадратным основанием начинает процесс входа в жидкость раньше кругового, что продиктовано его большими линейными размерами. Процесс формирования поверхностных волн, производимых входом в жидкость цилиндра с квадратным основанием, также начинается раньше и, в дальнейшем, как можно видеть из рисунка 3, сгенерированные им волны несколько опережают волны, сформировавшиеся в результате взаимодействия с жидкостью кругового цилиндра.

Импульсов, приобретенных цилиндрами в процессе падения, достаточно для того, чтобы центры масс обоих цилиндров при погружении опустились ниже среднего уровня жидкости

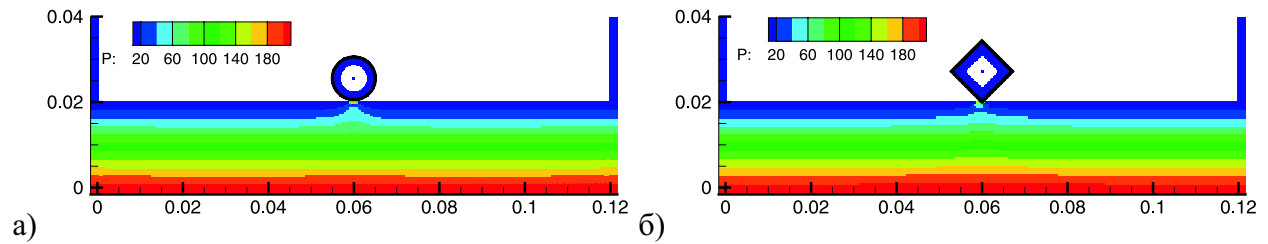


Рис. 2. Картины течений (закраска по давлению) в момент входа цилиндров с круглым (а) и квадратным (б) основанием в жидкость

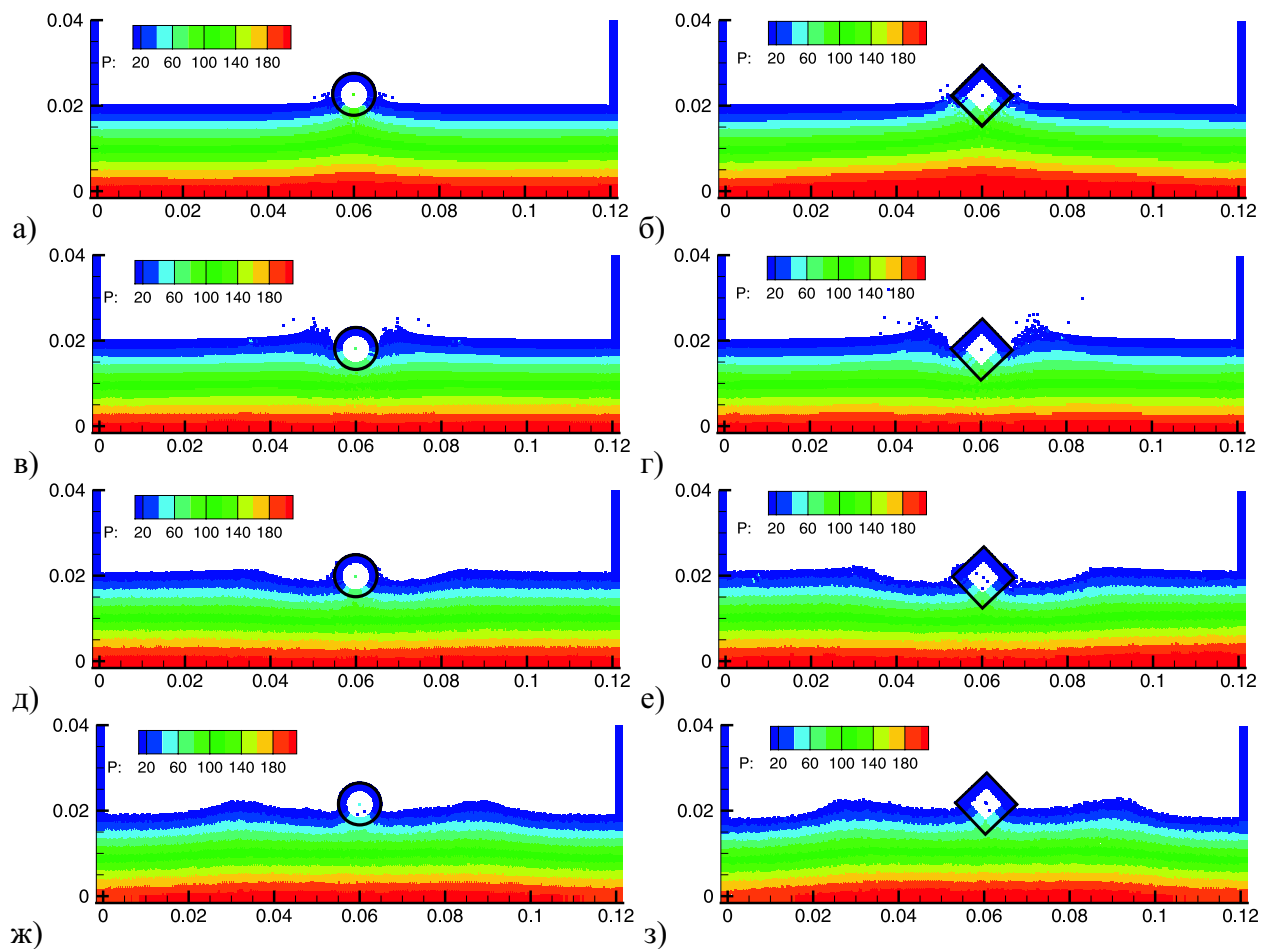


Рис. 3. Сравнение картин течений (закраска по давлению) для цилиндров с круглой и квадратной формами оснований в различные моменты времени

в бассейне. В процессе последующего всплытия небольшая часть жидкости прилипает к их поверхности, что особенно заметно в случае цилиндра с квадратным основанием (рис. 3, е). Захваченная жидкость впоследствии постепенно стекает с поверхности цилиндров.

На рисунке 4 (а) представлены кривые, описывающие положения центров масс цилиндров с круглой (кривая 1) и квадратной (кривая 2) формами основания. Здесь же (рис. 4, б) приведены зависимости от времени гидродинамических сил, действующих на цилиндры. Видно, что в обоих случаях гидродинамические силы резко возрастают в моменты входа (рис. 2) цилин-

дров в жидкость, затем силы несколько уменьшаются, после чего начинают возрастать вплоть до максимального погружения цилиндров в жидкость. В дальнейшем максимальные значения гидродинамических сил достигаются в моменты максимального погружения цилиндров, минимальные значения сил – в моменты их максимального подъема.

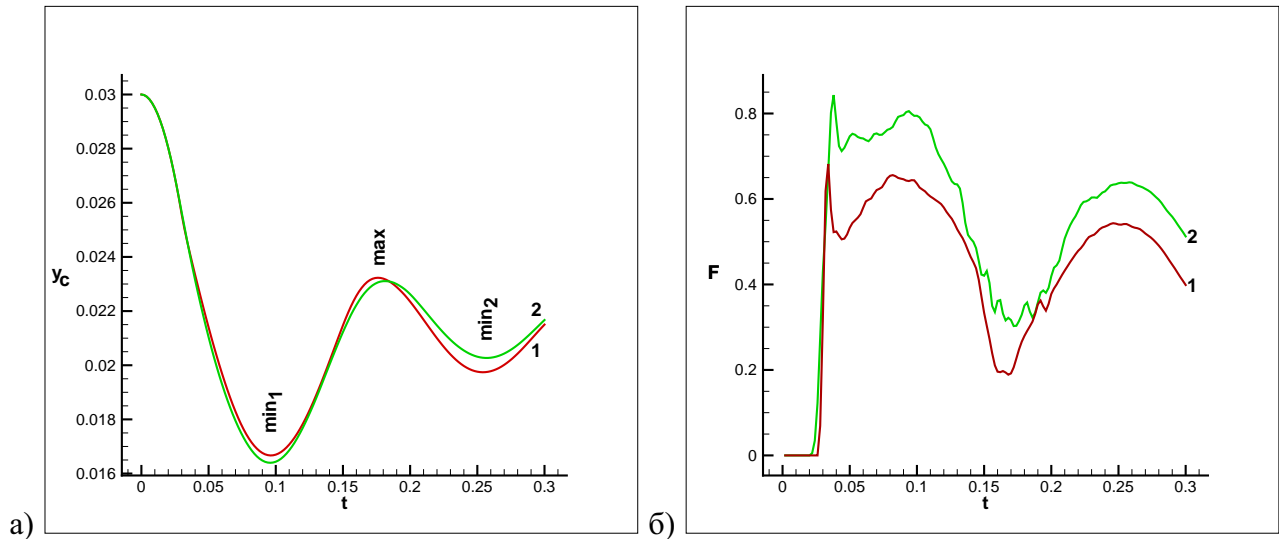


Рис. 4. Зависимость от времени положения центров масс цилиндров (а) и гидродинамической силы, действующей на цилиндры (б). Кривая 1 – цилиндр с основанием круглой формы, кривая 2 – цилиндр с основанием квадратной формы.

Следует отметить, что гидродинамическая сила, действующая на цилиндр с квадратным основанием в соответствующие моменты времени превышает силу, действующую на круговой цилиндр. Графики зависимости от времени центров масс цилиндров с различной формой основания, тем не менее, практически совпадают. Это связано с тем, что вес цилиндра с квадратным основанием превышает вес кругового цилиндра. В итоге, в рассмотренном случае форма основания цилиндра практически не влияет на его движение.

## 5. Заключение

В работе рассмотрены численные решения задач о входе и погружении бесконечных цилиндров в вязкую несжимаемую жидкость. В вычислительных экспериментах принимали участие цилиндры с круглой и квадратной формами основания. В силу значительных деформаций свободных границ, возникающих в таких задачах, целесообразно для их решения применять современные бессеточные методы. В работе использовался свободно-лагранжевый метод сглаженных частиц. Для сравнения приведены картины течений, а также кривые, описывающие зависимости положений центров масс цилиндров и действующих на них гидродинамических сил от времени. Несмотря на то, что рассмотренные задачи решаются в полной двумерной постановке, результаты вычислительных экспериментов демонстрируют высокую степень симметрии.

## Список литературы

- [1] Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. – 3-е изд., перераб. / Л. И. Седов. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 448 с.
- [2] Логвинович Г. В. Гидродинамика течений со свободными границами / Г. В. Логвинович. – Киев: Наукова думка, 1969. – 208 с.
- [3] Korobkin A. A. Initial stage of water impact / A. A. Korobkin, V. V. Pukhnachov // *Annual Review of Fluid Mechanics*. – 1988. – Vol. 20. – pp. 159-185.
- [4] Terentiev A. G. Simulation of unsteady free surface flow problems by the direct boundary element method / A. G. Terentiev, K. E. Afanasiev, M. M. Afanasieva // *Proceeding of IUTAM Symposium on Advanced Boundary Element Methods*. – San Antonio, TX, Springer-Verlag. – 1987. – pp. 427-434.
- [5] Григолюк Э. И. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью (удар и погружение) / Э. И. Григолюк, А. Г. Горшков. – Л.: Судостроение, 1976. – 200 с.
- [6] Норкин М. В. Смешанные задачи удара твердых тел, плавающих на поверхности несжимаемой жидкости: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. / М. В. Норкин. – Казань, 2010. – 32 с.
- [7] Юдович В. И. Вертикальный удар по твердому эллипсоиду, полупогруженному в жидкое полупространство / В. И. Юдович // *Деп. в ВИНТИ 19.11.93, № 2870-В93*.
- [8] Шахверди Г. Г. Ударное взаимодействие судовых конструкций с жидкостью / Г. Г. Шахверди. – СПб.: Судостроение, 1993. – 256 с.
- [9] Wagner H. Über Stoss-und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten / H. Wagner // *Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Mechanik*. – 1932. – Band 12, Heft 4. – S. 193-215.
- [10] Zhao R. Water entry of two-dimensional bodies / R. Zhao, O. Faltinsen // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1993. – Vol. 246. – pp. 593-612.
- [11] Greenhow M. Non-linear free surface effects: Experiments and theory / M. Greenhow, W. M. Lin, // *Report № 83-19, Department of Ocean Engineering, MIT, Cambridge, MA*. – 1983.
- [12] Zhu X. Application of the CIP Method to Strongly Nonlinear Wave-Body Interaction Problems / X. Zhu // *Doctoral thesis for the degree of doktor ingenior*. – 2006.
- [13] Shao S. Incompressible SPH simulation of water entry of a free-falling object / S. Shao // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. – 2009. – Vol. 59, № 1. – pp. 91-115.
- [14] Gingold R. A. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars / R. A. Gingold, J. J. Monaghan // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 1977. – Vol. 181. – pp. 375-389.
- [15] Lucy L.B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis / L. B. Lucy // *The Astronomical Journal*. – 1977. – Vol. 82, № 12. – pp. 1013-1024.
- [16] Lee E.-S. Comparisons of weakly compressible and truly incompressible algorithms for the SPH mesh free particle method / E.-S. Lee, C. Moulinec, R. Xu, D. Violeau, D. Laurence, P. Stansby // *Journal of Computational Physics*. – 2008. – Vol. 227, № 18 – pp. 8417–8436.
- [17] Chorin A. J. Numerical solution of the Navier–Stokes equations / A. J. Chorin // *Mathematics of Computation*. – 1968. – Vol. 22, № 104 – pp. 745–762.
- [18] Afanas'ev K. E. Calculation of hydrodynamic loads at solid boundaries of the computation domain by the ISPH method in problems with free boundaries / K. E. Afanas'ev, R. S. Makarchuk // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. – 2011. – Vol. 26, № 5. – pp. 447-464.