

Математическое моделирование образования гидратов при добыче природного газа

Э. А. БОНДАРЕВ,
И. И. РОЖИН,
К. К. АРГУНОВА

Институт проблем нефти и газа СО РАН,
e-mail: bondarev@ipng.yasn.ru, Россия, г. Якутск, ул. Октябрьская, 1,

Рассматривается сопряженная задача теплообмена между несовершенным газом в скважине и окружающей средой (горными породами), которая сводится к решению дифференциальных уравнений, описывающих неизоэнтальпическое течение газа в скважине, и уравнения распространения тепла в окружающих горных породах с соответствующими условиями сопряжения. При построении вычислительного алгоритма учитывалось существенное различие временных масштабов для процессов, происходящих в скважине и в горных породах: переходные процессы в скважине заканчиваются за достаточно короткое время и поэтому изменение температуры газа как бы отслеживает медленное изменение температуры горных пород. При этом в квазистационарной математической модели образования (диссоциации) гидратов в газовых скважинах учитывается зависимость коэффициента теплопередачи от газа к внутренней стенке трубы от изменяющейся со временем площади проходного сечения. На конкретных примерах показано, что при сопряженной постановке время образования гидратных пробок существенно возрастает в отличие от случая, когда температура окружающих горных пород считается неизменной.

Технологические режимы добычи газа в северных регионах в значительной степени определяются такими природными факторами как низкие климатические температуры и наличие мощной толщи многолетней мерзлоты. Следствием этих факторов являются осложнения, обусловленные возможностью образования гидратов как в призабойной зоне, так и в стволе скважин. Первое приводит к снижению продуктивности скважин, второе — к полному прекращению подачи газа. Такие аварийные ситуации могут иметь самые тяжелые последствия. В настоящее время единственное средство борьбы с этим нежелательным явлением — закачка в скважины метанола или других ингибиторов гидратообразования, что малоэффективно, так как метанол выносится из скважин вместе с добываемым газом, и существенно повышается себестоимость добычи и транспорта газа. Следовательно, актуальной является задача выбора таких режимов отбора газа, при которых эти аварийные ситуации можно исключить, или снизить их влияние на надежность газоснабжения.

Из-за теплового взаимодействия с горными породами, дросселирования и адиабатического расширения (сжатия) происходит изменение температуры добываемого газа, соответственно изменяется температура пород. Эти процессы взаимосвязаны, и поэтому данная задача может быть решена только в сопряженной постановке, то есть при одновременном определении изменения температуры газа в скважине и температурного поля окружающих горных пород. Таким образом, математическая модель исследуемого

процесса должна включать в себя: уравнение теплопроводности, описывающее распространение тепла в горных породах с учетом их возможного протаивания–промерзания, уравнения неизотермического течения газа в скважине, необходимые граничные и начальные условия, определяемые характером сопряжения тепловых потоков на стенке скважины.

Постановка задачи. Для описания образования и отложения гидратов в скважинах используется квазистационарная математическая модель [1], в которой движение несовершенного газа в трубах описывается в рамках трубной гидравлики, а динамика образования гидрата — в рамках обобщенной задачи Стефана, в которой температура фазового перехода "газ – гидрат" существенно зависит от давления в потоке газа. В этой модели, основанной на законах сохранения массы и энергии для потока газа, уравнения неразрывности, движения и энергии газа сведены к виду:

$$\frac{dp}{dx} = -\rho g \sin \varphi - \frac{\sqrt{\pi} \psi M^2}{4\rho S^{2.5} S_0^{2.5}}, \quad (1)$$

$$\frac{dT}{dx} - \varepsilon \frac{dp}{dx} = \frac{\pi D \alpha}{c_p M} (T_e - T) - \frac{g}{c_p} \sin \varphi, \quad (2)$$

где ρ – плотность газа, g – гравитационное ускорение, c_p – удельная теплоемкость газа; S, D – поперечное сечение и диаметр трубы; x – координата вдоль оси трубы, p – давление, φ – угол наклона трубы, отсчитываемый от фиксированной горизонтальной плоскости; ψ – коэффициент гидравлического сопротивления, T_e – температура окружающей среды (горных пород), T – температура газа, α – суммарный коэффициент теплопередачи, $M = \rho v S$ – массовый расход газа, являющийся константой; v – скорость течения газа; нулевой индекс обозначает начальное состояние.

Плотность газа связана с давлением и температурой уравнением состояния:

$$\rho = \frac{p}{zRT}, \quad z = z(p, T), \quad \varepsilon = \frac{RT^2}{c_p p} \left(\frac{\partial z}{\partial T} \right)_p, \quad (3)$$

где $R = 8.314/\mu$ – газовая постоянная, $\mu = \sum_{i=1}^n y_i \mu_i$ – молярная масса газовой смеси; y_i, μ_i – объемная доля и молекулярный вес i -го компонента природного газа; z – коэффициент несовершенства газа, ε – коэффициент дросселирования.

В работе [2] было показано, что при высоких давлениях и температурах достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными уравнение Латонова–Гуревича [3]

$$z = \left(0.17376 \ln \frac{T}{T_c} + 0.73 \right)^{\frac{p}{p_c}} + 0.1 \frac{p}{p_c}.$$

Критические параметры газовой смеси определяются по правилу Кау W.B. [4]:

$$p_c = \sum_{i=1}^n y_i p_{ci}, \quad T_c = \sum_{i=1}^n y_i T_{ci},$$

где p_{ci}, T_{ci} – критические давление и температура i -го компонента природного газа.

Уравнение, описывающее изменение площади проходного сечения скважины S с течением времени, записывается в безразмерном виде:

$$\frac{dS}{d\tau} = b_2 \frac{T_e - T_h(p)}{1 - b_2 \ln S} - b_1 \sqrt{S}(T_h(p) - T), \quad (4)$$

где $b_1 = \frac{\alpha_1 D_0}{4\lambda_h}$, $b_2 = \frac{\alpha_2 D_0}{4\lambda_h}$, α_1 – коэффициент теплообмена между газом и слоем гидрата, α_2 – коэффициент теплообмена между слоем гидрата и горной породой, D_0 – диаметр трубы до образования гидрата, λ_h – теплопроводность гидрата, $\tau = \frac{\lambda_h T_e}{\rho_h l_h D_0^2} t$ – безразмерное время, ρ_h – плотность гидрата, l_h – удельная теплота образования гидрата, t – время, $T_h(p) = a \ln p + b$ – равновесная температура образования гидрата. Эмпирические коэффициенты a и b находятся путем аппроксимации кривой термодинамического равновесия гидратообразования, определяемой по методике Sloan E.D. [5] по известному составу газа.

Начальные условия для уравнений (1), (2) и (4) сформулируем в виде:

$$p(0) = p_0, \quad T(0) = T_0, \quad S(0) = S_0. \quad (5)$$

Уравнение (4) модифицируется на случай зависимости коэффициента α_1 от изменяющейся во времени площади проходного сечения трубы S . Для вывода соответствующей зависимости используется известная полуэмпирическая формула для коэффициента теплопередачи при турбулентном течении газа в трубах [6]:

$$Nu = 0.023 Pr^{0.43} Re^{0.8}, \quad (6)$$

где $Nu = \frac{\alpha_1 D}{\lambda_g}$, $Pr, Re = \frac{v D \rho}{\mu}$ – параметры Нуссельта, Прандтля и Рейнольдса, соответственно; μ, λ_g – динамическая вязкость и теплопроводность газа.

Используя выражение для массового расхода газа из формулы (6) получим:

$$\frac{\alpha_1 D_0}{\lambda_g} = 0.023 Pr^{0.43} \left(\frac{M_0}{D_0 \mu} \right)^{0.8} \left(\frac{\pi}{4} \right)^{0.1} \frac{M^{0.8}}{S^{0.9}}. \quad (7)$$

В тех сечениях скважины, где образуется гидратный слой, то есть, где безразмерная величина проходного сечения S меньше 1, коэффициент теплообмена в уравнении (2) вычисляется по формуле (7), и при этом значение температуры горных пород T_e заменяется на температуру фазового перехода "газ – гидрат" T_h .

Уравнения (2) и (4), содержат температуру горных пород T_e , которая определяется из решения уравнения теплопроводности

$$\tilde{C}(T_e) \frac{\partial T_e}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(T_e) \frac{\partial T_e}{\partial r} \right), \quad r_1 < r < r_2, \quad t > 0, \quad (8)$$

где $\lambda(T_e)$ – коэффициент теплопроводности, $\tilde{C}(T_e)$ – объемная теплоемкость горных пород, являющиеся кусочно-постоянными функциями от температуры; r – радиальная координата, r_1 – наружный радиус скважины, r_2 – радиус теплового влияния.

При записи уравнения (8) было сделано предположение, что тепловой поток в каждом сечении скважины распространяется строго радиально. Связь для перехода от одного сечения к другому осуществляется через решения уравнения (2) и граничное условие на наружной стенке скважины

$$\lambda(T_e) \frac{\partial T_e}{\partial r} = \alpha(T_e - T), \quad r = r_1. \quad (9)$$

В области горных пород от забоя скважины до подошвы многолетней мерзлоты коэффициенты в уравнении (8) являются постоянными, и его решение может быть выполнено стандартными методами. В области многолетней мерзлоты эта задача осложняется, так как здесь необходимо учитывать фазовый переход лед-вода. Для численного решения задачи типа Стефана используются методы, основанные на подходе, изложенном в монографии [7]. Для этого метода авторы работ [8, 9] разработали экономичную разностную схему сквозного счета со сглаживанием разрывных коэффициентов в уравнении теплопроводности по температуре в окрестности фазового перехода. Эта схема характеризуется тем, что граница раздела фаз явно не выделяется, что позволяет использовать однородные разностные схемы. При этом скрытая теплота фазового перехода $W = l_{ph}\rho_r w_r$ вводится как сосредоточенная теплоемкость в коэффициент $\tilde{C}(T_e)$. Здесь l_{ph} – удельная теплота фазового перехода "лед – вода" с температурой T_{ph} , ρ_r – плотность, w_r – весовая влажность горных пород.

На условном радиусе теплового влияния принимаем условие тепловой изоляции:

$$\frac{\partial T_e}{\partial r} = 0, \quad r = r_2. \quad (10)$$

Начальное распределение температуры горных пород в момент пуска скважины после длительного простоя задается в виде:

$$T_e = \begin{cases} T_{e0} - \Gamma x, & 0 < x < L - H \\ T_{cr}, & L - H < x < L \end{cases}, \quad (11)$$

где T_{e0} – температура на забое скважины, Γ – геотермический градиент, T_{cr} – температура мерзлых горных пород, L – глубина скважины, H – мощность многолетней мерзлоты.

Следовательно, для определения изменения температуры газа и площади проходного сечения скважины при её тепловом взаимодействии с горными породами необходимо совместно решить уравнения (1)–(7) и (8)–(11). Вычислительный алгоритм численного решения сопряженной задачи теплообмена скважины с горными породами описывается следующим образом:

I. Задаются геометрические и физические параметры, а также начальные условия (5) и (11).

II. При фиксированной площади сечения по уравнениям (1)–(3) методом Рунге-Кутты 4-го порядка вычисляются давление $p(x)$ и температура $T(x)$ газа в скважине.

III. Из уравнений (4) и (7), делая шаг по времени, находится новое значение площади проходного сечения. При этом координата x входит в уравнение (4) как параметр.

IV. Определяется температурное распределение в массиве горных пород, то есть решается задача (8)–(11). Так как сглаженные коэффициенты в уравнении (8) зависят от температуры, получающаяся разностная задача будет нелинейной и ее решение находится методом простой итерации с использованием прогоночных алгоритмов.

На каждом временном шаге пункты II - IV повторяются.

Расчеты выполнялись при следующих значениях параметров, соответствующих двум месторождениям Республики Саха (Якутия):

1) Средне-Вилуйскому $\alpha = 5.82$ Вт/(м² · К), $D = 0.1$ м, $\varphi = 90^\circ$, $\psi = 0.02$, $\rho_h = 920$ кг/м³, $l_h = 510000$ Дж/кг, $\lambda_h = 1.88$ Вт/(м · К), $\lambda_g = 0.0307$ Вт/(м · К), $c_p = 2300$ Дж/(кг · К), $Pr = 0.886$, $\mu = 1.3 \cdot 10^{-5}$ Па · с, $R = 449.4$ Дж/(кг · К), $p_0 = 240 \cdot 10^5$ Па,

$T_0 = 323$ К, $p_c = 46.573 \cdot 10^5$ Па, $T_c = 205.239$ К, $a = 7.009$, $b = 178.28$, $L = 2550$ м, $H = 500$ м, $T_{e0} = 328$ К, $\Gamma = 0.0277$ К/м, $T_{cr} = 271.15$ К, $T_{ph} = 273.15$ К, $l_{ph} = 334400$ Дж/кг; состав газа (объемные доли, %): $CH_4 - 90.34$, $C_2H_6 - 4.98$, $C_3H_8 - 1.74$, $iC_4H_{10} - 0.22$, $nC_4H_{10} - 0.41$, $C_5H_{12+} - 1.55$, $CO_2 - 0.28$, $N_2 - 0.48$;

2) Отраднинскому $D = 0.146$ м, $R = 438.3$ Дж/(кг · К), $p_0 = 188.35 \cdot 10^5$ Па, $T_0 = 286.35$ К, $p_c = 44.71 \cdot 10^5$ Па, $T_c = 195.376$ К, $a = 6.635$, $b = 182.951$, $L = 2480$ м, $H = 680$ м, $T_{e0} = 286.48$ К, $\Gamma = 0.0085$ К/м; состав газа (об. %): $CH_4 - 83.15$, $C_2H_6 - 4.16$, $C_3H_8 - 1.48$, $iC_4H_{10} - 0.17$, $nC_4H_{10} - 0.50$, $iC_5H_{12} - 0.12$, $nC_5H_{12} - 0.17$, $C_6H_{14} - 0.17$, $C_7H_{16+} - 0.28$, $CO_2 - 0.07$, $N_2 - 9.50$; $H_2 - 0.02$, $He - 0.21$; остальные параметры имеют те же значения, что и в первом варианте.

Видно, что эти месторождения имеют существенно различные составы природного газа, пластовые и геотермические условия при примерно равной глубине продуктивного горизонта. Характеристики горных пород приняты одинаковыми (табл. 1, где нижние индексы означают: *th* – талый, *f* – мерзлый).

Т а б л и ц а 1. Физические характеристики горных пород

Интервал глубин, м	ρ_r , кг/м ³	w_r , %	λ_{th} , Вт/(м · К)	λ_f , Вт/(м · К)	C_{th} , кДж/(м ³ · К)	C_a , кДж/(м ³ · К)
0 – 86	2000	12.0	1.69	1.93	2570	2310
86 – <i>H</i>	2000	12.0	1.62	1.86	2680	2420
<i>H</i> – 980	2300	6.0	2.00	-	2440	-
980 – 1831	2350	5.5	2.27	-	2420	-
1831 – 2561	2380	5.3	2.38	-	2420	-
2561 – <i>L</i>	2330	5.7	2.10	-	2440	-

На начальном этапе вычислялся оптимальный массовый расход газа, соответствующий минимуму тепловых потерь в отсутствие гидратного слоя. Для Средне-Вилуйского месторождения он оказался равным 9 кг/с, а для Отраднинского такой расход примерно соответствует предельно свободному дебиту скважины, и поэтому расчеты проводились при массовом расходе 2.86 кг/с, что соответствует рабочему дебиту скважины 187000 м³/сут. В последующем вычислительном эксперименте варьировались начальные значения свободного сечения скважины и массовый расход.

Наиболее интересные результаты получены для Средне-Вилуйского месторождения. Они представлены на рис. 1 – 5. Прежде всего отметим, что при оптимальном расходе гидратная пробка образуется вблизи устья скважины, а ее нижняя граница находится много выше подошвы многолетней мерзлоты, что хорошо видно на рис. 1 *a*, где точка пересечения температуры газа (кривые 2 и 3) и равновесной температуры гидратообразования (кривая 4) соответствует глубине 2550 – 2504 = 46 м, то есть в этом интервале температура газа становится ниже температуры гидратообразования. Уменьшение проходного сечения сопровождается резким падением давления вблизи устья скважины (рис. 1 *б*). При сопряженной постановке задачи значения температуры и давления газа в верхней части ствола скважины оказываются немного выше, а интервал образования гидратной пробки немного меньше (34 м), чем при постоянной во времени температуре горных пород (кривые 3 на рис. 1 *a* и 1 *б*),

Рис. 2 иллюстрирует изменения площади проходного сечения скважины для двух значений массового расхода, когда в начальный момент скважина свободна от гид-

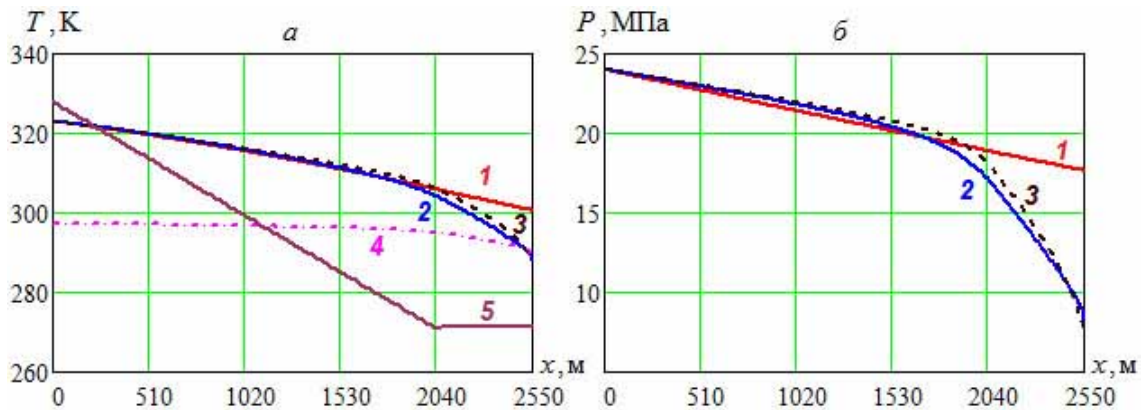


Рис. 1. Изменение температуры (а) и давления (б) газа с глубиной для скважины Средне-Вилуйского месторождения при $M = 9$ кг/с: 1 - $t = 0.34$ часа, 2 - $t = 251.6$ часа, 3 - $t = 423.6$ часа (при сопряженной постановке), 4 - равновесная температура гидратообразования, 5 - начальная температура горных пород

ратов, то есть $S(0) = 1$. Видно, что при сопряженной постановке время образования гидратных пробок существенно возрастает в отличие от случая (см. поверхности 2), когда температура окружающих горных пород считается неизменной (см. поверхности 1). С увеличением массового расхода возрастает длительность процесса полной закупорки скважины гидратами: для оптимального расхода она составляет примерно 424 часа при сопряженной и 252 часа при несопряженной постановке, а для меньшего расхода — 17 часов и 10 часов, соответственно. При этом наиболее интенсивное протаивание происходит вблизи подошвы мерзлоты, что объясняется сравнительно высокой температурой газа, а радиус протаивания примерно пропорционален массовому расходу (сравни рис. 3 а и рис. 3 б).

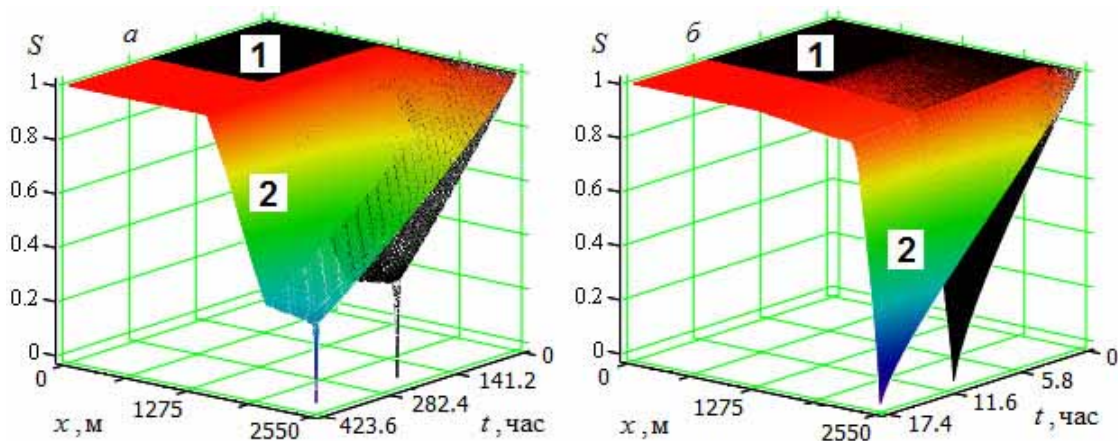


Рис. 2. Изменение площади проходного сечения скважины Средне-Вилуйского месторождения по глубине и во времени при $S(0) = 1$: а) $M = 9$ кг/с; б) $M = 2$ кг/с; 1 - несопряженная постановка, 2 - сопряженная постановка

Ситуация становится менее предсказуемой, если в начальный момент скважина только наполовину свободна от гидратов, то есть $S(0) = 0.5$ (рис. 4, 5). В этом случае оптимальный расход газа составляет 4.8 кг/с. При таком расходе гидратная пробка вблизи устья скважины образуется через 173 часа (рис. 4 а, поверхность 2) для сопря-

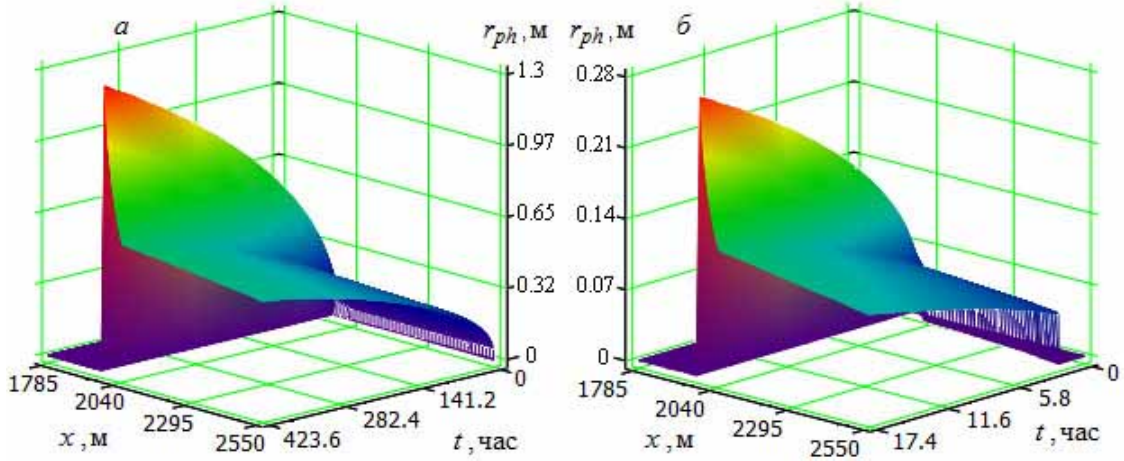


Рис. 3. Динамика изменения радиуса протаивания вокруг скважины Средне-Вилуйского месторождения по глубине и во времени при $S(0) = 1$: а) $M = 9$ кг/с; б) $M = 2$ кг/с

женной задачи и через 90 часов (рис. 4 а, поверхность 1) для несопряженной задачи. Нижняя граница пробки находится на глубине 105 м. При меньшем расходе - в нижней части скважины от забоя до глубины примерно 1300 м площадь проходного сечения со временем возрастает, и эта часть скважины полностью очищается от гидрата. Выше этой отметки толщина гидратного слоя со временем растёт, образуя гидратную пробку вблизи устья через 213 часов для сопряженной задачи и через 11 часов для несопряженной задачи (рис. 4 б). Отметим, что эта отметка превышает глубину, на которой температура газа становится равной равновесной температуре гидратообразования. Глубина протаивания горных пород в этом случае меньше, чем для скважины со свободным от гидратов в начальный момент сечением, и для этих двух расходов не превышает 1 м (рис. 5 а и рис. 5 б).

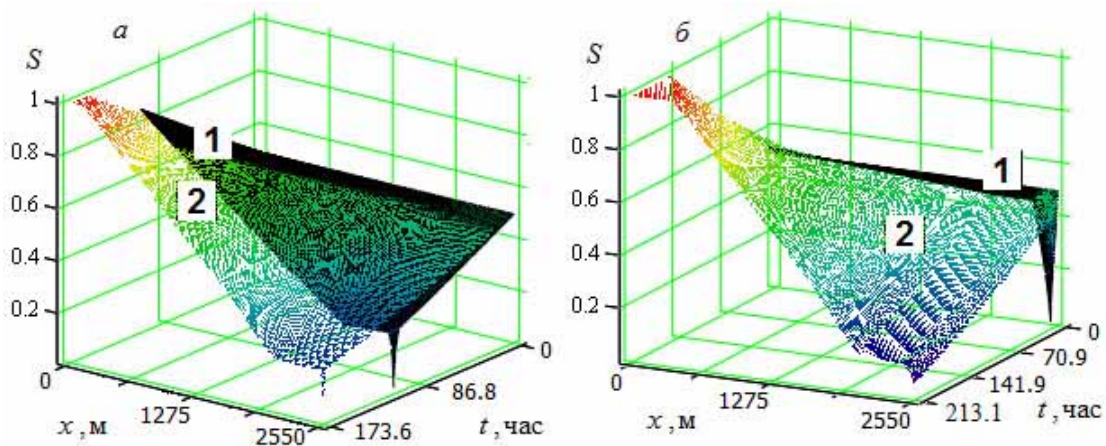


Рис. 4. Изменение площади проходного сечения скважины Средне-Вилуйского месторождения по глубине и во времени при $S(0) = 0.5$: а) $M = 4.8$ кг/с; б) $M = 2$ кг/с; 1 - несопряженная постановка, 2 - сопряженная постановка

Теперь рассмотрим соответствующие процессы для Отрадинского месторождения. Это месторождение отличается от Средне-Вилуйского низкой пластовой температурой, которая близка к равновесной температуре гидратообразования. Из динамики измене-

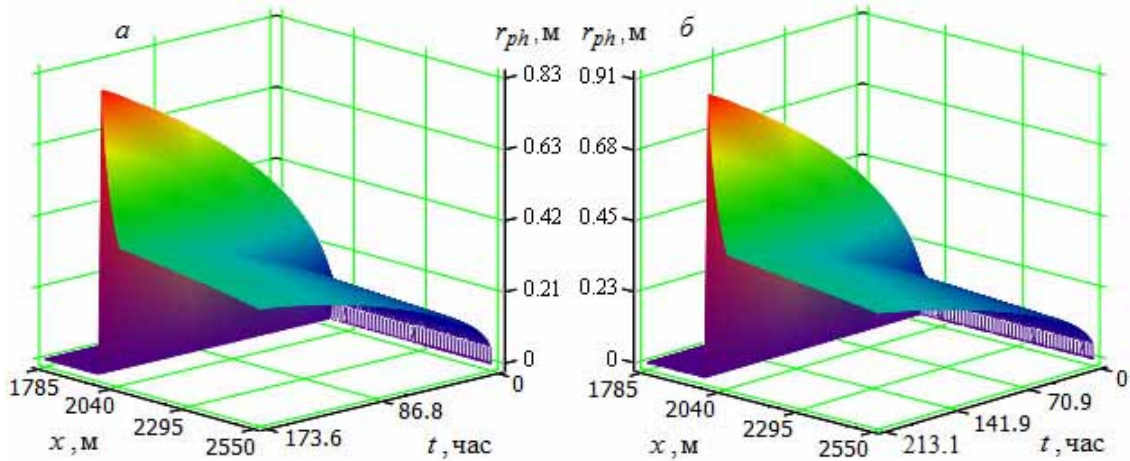


Рис. 5. Динамика изменения радиуса протаивания вокруг скважины Средне-Виллюйского месторождения по глубине и во времени при $S(0) = 0.5$: а) $M = 4.8$ кг/с; б) $M = 2$ кг/с

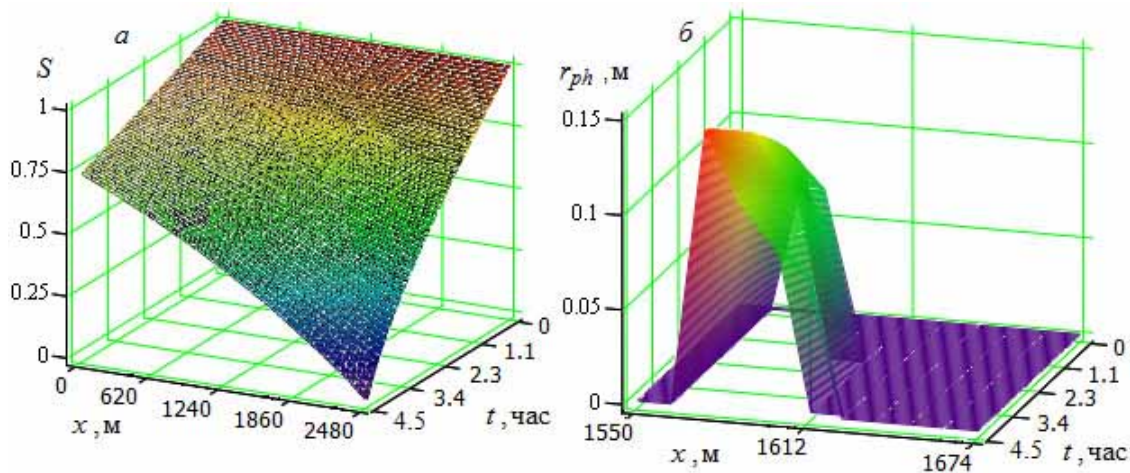


Рис. 6. Изменение площади проходного сечения (а) и радиуса протаивания (б) скважины Отграднинского месторождения по глубине и во времени при $S(0) = 1$ и $M = 2.86$ кг/с

ния площади проходного сечения скважины (рис. 6 а) следует, что если вначале проходное сечение скважины было свободно, то при расходе 2.86 кг/с полная закупорка гидратами происходит за 4.5 часа, при этом радиус протаивания горных пород составляет примерно 0.15 м (рис. 6 б) Поверхности 1 и 2 здесь практически сливаются, и поэтому эти обозначения не нанесены.

Представленные результаты позволяют сделать следующие практически важные выводы. Во-первых, задачи теплового взаимодействия потока газа в скважинах с окружающими горными породами в общем случае являются сопряженными. Упрощенная математическая модель, в которой температура горных пород считается неменяющейся во времени, приводит к существенному занижению времени таких внутренних процессов в скважинах, как образование гидратной пробки. Показано, что для глубоких скважин с пластовой температурой существенно превышающей равновесную температуру образования гидратов это занижение может быть кратным. Во-вторых, размер зоны протаивания горных пород косвенно зависит от расхода газа, ибо он определяет время теплового воздействия газа на окружающую среду. В частности, за 18 суток

максимальный радиус протаивания составил 1.3 м на подошве многолетней мерзлоты (рис. 3 а). В-третьих, для глубоких скважин с пластовой температурой примерно равной температуре образования гидратов гидратная пробка может образоваться за 4-5 часов (рис. 6 а), то есть время теплового воздействия на горные породы не велико, и в этом случае необходимые технологические параметры добычи газа можно определять в несопряженной постановке.

Список литературы

- [1] Термогидродинамика систем добычи и транспорта газа / Э.А. БОНДАРЕВ, В.И. ВАСИЛЬЕВ, А.Ф. ВОЕВОДИН, Н.Н. ПАВЛОВ, А.П. ШАДРИНА. Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1988.
- [2] АРГУНОВА К.К., БОНДАРЕВ Э.А., РОЖИН И.И. Возможности аналитического представления уравнения состояния природных газов // XIII Российская конференция по теплофизическим свойствам веществ: Тезисы докладов. Новосибирск: Изд-во Инст-та теплофизики СО РАН, 2011. С. 11–12.
- [3] ЛАТОНОВ В.В., ГУРЕВИЧ Г.Р. Расчет коэффициента сжимаемости природных газов // Газовая промышленность. 1969. № 2. С. 7–9.
- [4] KAY W.B. Density of hydrocarbon gases and vapors at high temperature and pressures // Industrial & Engineering Chemistry Research. 1936. Vol. 28. P. 1014–1019.
- [5] SLOAN E.D. Clathrate hydrates of natural gases. NY.: Marcel Dekker, 1998.
- [6] Теория теплообмена С.И. ИСАЕВ, И.А. КОЖАНОВ, В.И. КОФАНОВ и др./ Под ред. А.И. Леонтьева. М.: Высшая школа, 1979.
- [7] ТИХОНОВ А.Н., САМАРСКИЙ А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
- [8] САМАРСКИЙ А.А., МОИСЕЕНКО Б.Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерных задач Стефана // Журнал вычисл. матем. и мат. физики. 1965. Т. 5, № 5. С. 816–827.
- [9] БУДАК Б.М., СОЛОВЬЕВА Е.Н., УСПЕНСКИЙ А.Б. Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задачи Стефана // Журнал вычисл. матем. и мат. физики. 1965. Т. 5, № 5. С. 828–840.