

Теоретическое и численное моделирование волновых течений жидкости в непрямоугольном канале*

О.А. КОВЫРКИНА

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН

e-mail: olyana@ngs.ru

В.В. ОСТАПЕНКО

e-mail: Ostapenko VV@ngs.ru

В рамках первого приближения пространственно одномерной теории мелкой воды решена задача о течениях, возникающих при разрушении плотины на скачке площади сечения прямоугольного канала, ширина которого в верхнем бьефе больше чем в нижнем. Проведено сравнение теоретических одномерных решений с результатами численного моделирования этой задачи на основе пространственно двумерных (плановых) уравнений теории мелкой воды.

Дифференциальные уравнения теории мелкой воды в непрямоугольном канале без учёта влияния трения и уклона дна имеют вид [1]:

$$w_t + q_x = 0, \quad (1)$$

$$q_t + (qv + ghw/2)_x = gh^2b_x/2, \quad (2)$$

где $h = h(t, x)$ — глубина воды, $q = q(t, x)$ — расход воды в поперечном сечении канала, $w = w(t, x) = bh$ — площадь поперечного сечения потока, $b = b(x)$ — ширина канала, $v = v(t, x) = q/w$ — средняя по сечению скорость потока, g — ускорение свободного падения. Уравнения (1) и (2) представляют собой дифференциальную форму записи законов сохранения массы и полного импульса.

Для системы (1), (2) рассмотрим задачу о разрушении плотины

$$h(0, x) = \begin{cases} h_l, & x \leq 0 \\ h_r, & x > 0 \end{cases}, \quad h_l > h_r, \quad v(0, x) = 0, \quad (3)$$

на скачке площади сечения

$$b(x) = \begin{cases} b_l, & x \leq 0 \\ b_r, & x > 0 \end{cases} \Rightarrow w(0, x) = \begin{cases} w_l, & x \leq 0 \\ w_r, & x > 0 \end{cases}, \quad (4)$$

где $w_l = b_l h_l$, $w_r = b_r h_r$, $b_l > b_r \Rightarrow w_l > w_r$ (рис. 1). Решение этой задачи будем искать в виде комбинации простых волн (т. е. прерывных волн, распространяющихся с постоянной скоростью, и центрированных волн понижения), неподвижного гидравлического разрыва, расположенного в начале координат на скачке площади сечения, и соединяющих их зон постоянного течения.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских учёных (грант МК-3477.2013.1), совместного проекта фундаментальных исследований НАН Украины и СО РАН № 8, проекта фундаментальных исследований Президиума РАН № 4.8.

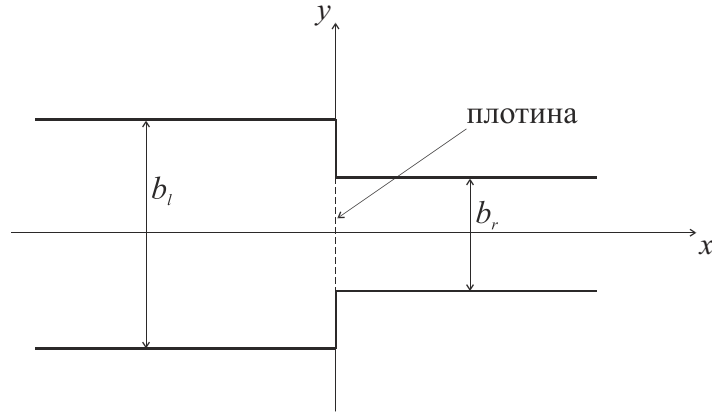


Рис. 1. Вид канала сверху.

Так как прерывная волна, возникающая после распада разрыва (3), (4), распространяется при $x > 0$ по той части русла, в которой его ширина $b = b_r$ является постоянной, т. е. $b_x = 0$, то соответствующие ей условия Гюгонио, получаемые из законов сохранения массы (1) и полного импульса (2), имеют вид

$$D[w] = [q], \quad (5)$$

$$D[q] = [qv + ghw/2], \quad (6)$$

где $D = x_t$ — скорость прерывной волны, $[f] = f_1 - f_0$ — скачок функции $f(t, x)$ на её фронте $x = x(t)$, где $f_0 = f(t, x(t) + 0)$, $f_1 = f(t, x(t) - 0)$.

Поскольку уравнение для массы (1) является дивергентным в случае непрямоугольного русла, т. е. представляет собой точный закон сохранения при $b_x \neq 0$, то соответствующее ему условие Гюгонио (5) остается верным на гидравлическом разрыве, формирующемся на скачке площади сечения (4). Так как этот разрыв неподвижен ($D = 0$), то из условия (5) получим соотношение

$$[q] = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 = q_0 = q(t, 0), \quad (7)$$

означающее непрерывность расхода на скачке площади сечения (4).

Уравнение для полного импульса (2) не является точным законом сохранения в случае непрямоугольного русла, в силу чего его правая часть на разрыве (4) становится неопределённой. Это означает, что в рамках формальной теории мелкой воды [1, 2] соответствующее уравнению (2) условие Гюгонио (6) нельзя использовать для получения второго соотношения на разрыве (4). Отсюда следует, что если с такого разрыва уходят две характеристики системы (1), (2), то для замыкания соотношений на нём необходимо введение дополнительного условия.

В настоящей работе, следуя [3], соотношения на гидравлическом разрыве, формирующемся на скачке площади сечения (4), будем получать из законов сохранения системы (1), (2), допускающих запись в дивергентной форме в случае непрямоугольного русла. Наряду с законом сохранения массы (1), к таким законам сохранения относятся законы сохранения локального импульса

$$v_t + J_x = 0, \quad (8)$$

где $J = v^2/2 + gh$ — функция Бернулли, и полной энергии

$$e_t + (qJ)_x = 0, \tag{9}$$

где $e = h(v^2 + gbh)/2$ — полная энергия потока. Уравнения (8) и (9) можно получить как дифференциальные следствия системы (1), (2).

На неподвижном разрыве, возникающем на скачке (4), из условий Гюгонио для законов сохранения (8) и (9) получим эквивалентные при $q = q(t, 0) \neq 0$ соотношения

$$[J] = 0, \quad q[J] = 0. \tag{10}$$

При переходе из более широкой части канала в более узкую некоторая часть полной энергии потока теряется в результате удара воды о стенку канала, расположенную перпендикулярно к направлению основного течения. Такая потеря полной энергии e означает, что некоторая её часть переходит в энергию вихревого движения, которая в рамках одномерной модели теории мелкой воды не учитывается. Поэтому, если с разрыва (4) уходят две характеристики системы (1), (2), то в качестве дополнительного к (7) будем использовать модифицированное соотношение (10)

$$\sigma J_1 = J_0 \Leftrightarrow \sigma(v_1^2/2 + gh_1) = v_0^2/2 + gh_0,$$

в левую часть которого введён эвристический параметр $\sigma \in (0, 1]$, задающий часть полной энергии потока e , сохраняющуюся при переходе через разрыв (4). Значение этого параметра будем выбирать путём согласования с результатами численного моделирования данной задачи на основе пространственно двумерных (плановых) уравнений теории мелкой воды. При $\sigma = 1$ потери полной энергии потока на скачке площади сечения (4) не происходит.

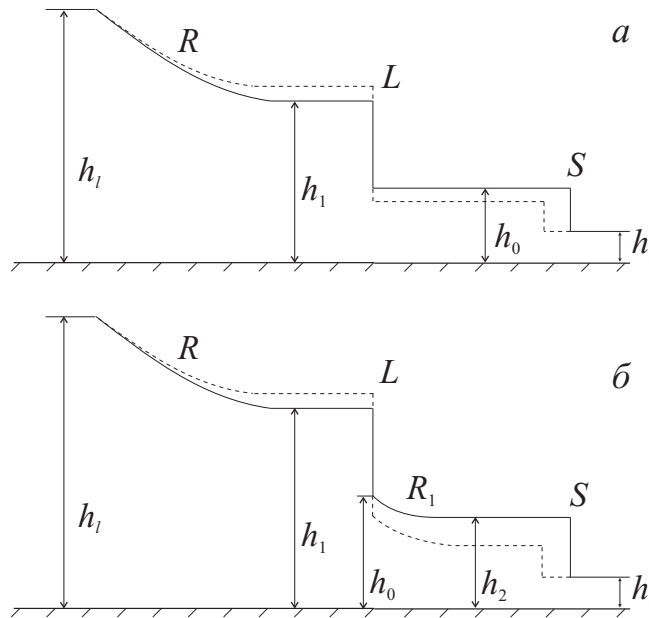


Рис. 2. Характерные профили волн в автомодельных решениях для докритического (а) и сверхкритического (б) течений за фронтом волны S .

Автомодельные решения задачи (1)–(4) при $\sigma = 1$, т. е. при сохранении полной энергии потока на скачке площади сечения, были построены в работе [4] (сплошные линии на

рис. 2). В настоящей работе автомодельные решения этой задачи построены при $\sigma < 1$ (пунктирные линии на рис. 2). При этом слева от гидравлического разрыва на скачке (4) (этот стационарный разрыв обозначим L) образуется зона постоянного докритического течения, соединяющая разрыв L с волной понижения R (рис. 2). Между разрывом L и прерывной волной S возможны два типа течения. В решении, приведённом на рис. 2, a , в этой области формируется зона постоянного докритического течения, а на рис. 2, b — зона постоянного сверхкритического (критического) течения, переходящая в волну понижения R_1 .

Проведём сравнение автомодельных решений задачи (1)–(4) с результатами её численного моделирования на основе плановых (пространственно двумерных) уравнений теории мелкой воды. Эти уравнения без учёта влияния трения и уклона дна имеют вид [1]:

$$h_t + (q_1)_x + (q_2)_y = 0, \quad (11)$$

$$(q_1)_t + \left(q_1 v_1 + gh^2/2 \right)_x + (q_1 v_2)_y = 0, \quad (12)$$

$$(q_2)_t + (q_2 v_1)_x + \left(q_2 v_2 + gh^2/2 \right)_y = 0, \quad (13)$$

где $h(t, x, y)$ — глубина воды, $\mathbf{q}(t, x, y) = (q_1(t, x, y), q_2(t, x, y))$ — вектор расхода воды, $\mathbf{v} = (v_1, v_2) = \mathbf{q}/h$ — осреднённый по глубине вектор скорости потока, g — ускорение свободного падения.

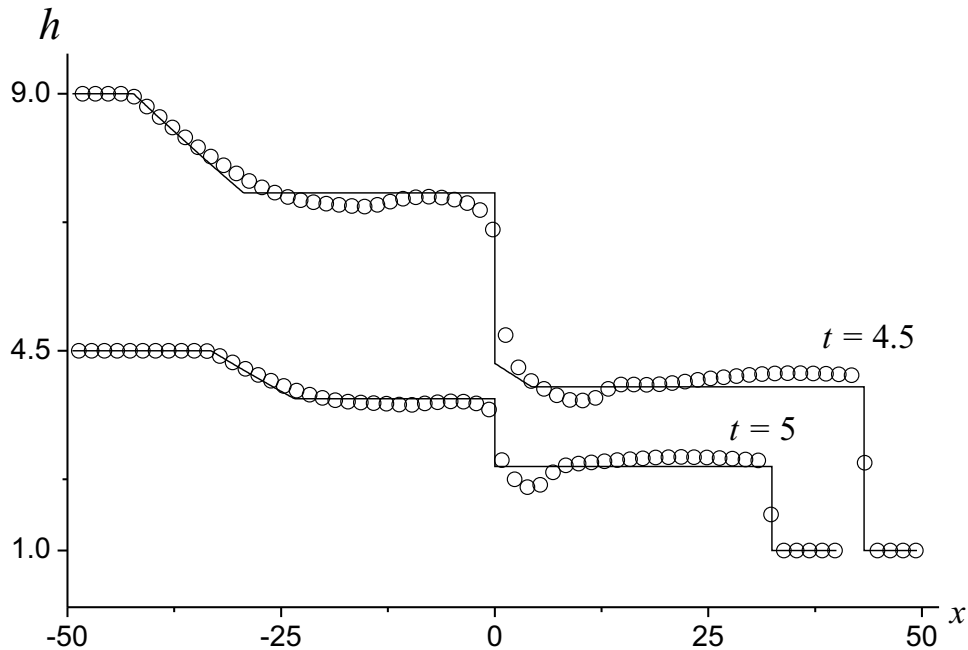


Рис. 3. Сравнение теоретических и осреднённых по ширине канала численных решений для докритического ($t = 5$ с) и сверхкритического ($t = 4.5$ с) режимов течений при $\sigma = 0.86$, $b_l/b_r = 2$.

Предполагая, что канал (4) имеет продольную осевую симметрию, примем эту ось симметрии за ось x , а ось y направим перпендикулярно к ней (рис. 1). С учётом этого систему (11)–(13) будем решать в области

$$G = \{(x, y) : |x| \leq X; |y| \leq b_l/2, x \leq 0; |y| \leq b_r/2, x > 0\} \quad (14)$$

с начальными условиями

$$h(0, x, y) = \begin{cases} h_l, & x \leq 0 \\ h_r, & x > 0 \end{cases}, \quad v_1(0, x, y) = v_2(0, x, y) = 0, \quad (15)$$

соответствующими одномерным условиям (3), и условиями непротекания на границе области G .

Поскольку рассматриваемое течение содержит прерывную волну (в силу чего представляет собой быстропротекающий волновой процесс), то для его численного моделирования была использована условно устойчивая консервативная разностная схема с искусственными вязкостями, при реализации которой отсутствуют прогонки и итерации по нелинейности. Аналогичная схема применялась в [5] для моделирования волновых течений, вызванных сходом берегового оползня, в [6] — для расчёта процесса распространения прерывных волн по сухому руслу и в [7] — для моделирования эволюции однородной завихренности в прямоугольном бассейне с наклонным дном после резкого замедления его вращения.

На рис. 3 при $b_l/b_r = 2$ сплошными линиями показана глубина потока $h(t, x)$, полученная путём построения автомодельного решения одномерной задачи (1)–(4). Кружками на этом рисунке приведены осреднённые по ширине канала значения глубин $h(t, x, y)$, полученные в результате численного решения двумерной задачи (11)–(15) при тех же значениях входных параметров b_l , b_r , h_l и h_r . Осреднение проводилось по формуле

$$\bar{h}(t, x) = \frac{1}{b(x)} \int_{-b(x)/2}^{b(x)/2} h(t, x, y) dy,$$

в которой интеграл приближённо вычислялся по формуле трапеций.

На нижних графиках рис. 3 на момент времени $t = 5$ с показаны решения первого типа (рис. 2, *a*), для которых за фронтом прерывной волны S формируется докритический тип течения. На верхних графиках на момент времени $t = 4.5$ с приведены решения второго типа (рис. 2, *b*), для которых за фронтом прерывной волны S формируется сверхкритический тип течения. В обоих случаях начальная глубина нижнего бьефа $h_l = 1$ м, а начальная глубина верхнего бьефа $h_r = 4.5$ м для решений первого типа и $h_r = 9$ м для решений второго типа. Точные решения $h(t, x)$ получены при значении параметра $\sigma = 0.86$, которое выбиралось из условия согласования точного и численного решений по расположению фронта прерывной волны S .

Как видно из рис. 3 заметное отличие осреднённых разностных решений $\bar{h}(t, x)$ от точных автомодельных решений $h(t, x)$ наблюдается справа от разрыва L и проявляется в некотором "провале" глубин разностного решения, который более ярко выражен в случае решений первого типа (рис. 2, *a*), когда справа от разрыва L отсутствует волна понижения R_1 . Наличие этого "провала" связано с существенно двумерным характером течения в окрестности скачка (4). Для иллюстрации этого на рис. 4 в момент времени $t_1 = 4.5$ с приведён график численной функции $\eta(x, y) = h(t_1, x, y)$, задающей поверхность двумерной волны, получаемой при решении задачи (11)–(15) с параметрами $b_l/b_r = 2$, $h_l = 9$ м, $h_r = 1$ м, а на рис. 5 показано поле скоростей этой волны в окрестности разрыва L .

Серия расчётов с различными значениями b_l/b_r показала, что соответствие между точным автомодельным и осреднённым разностным решениями ухудшается с увеличением отношения b_l/b_r , т. е. с увеличением скачка площади сечения (4). Расчёты также

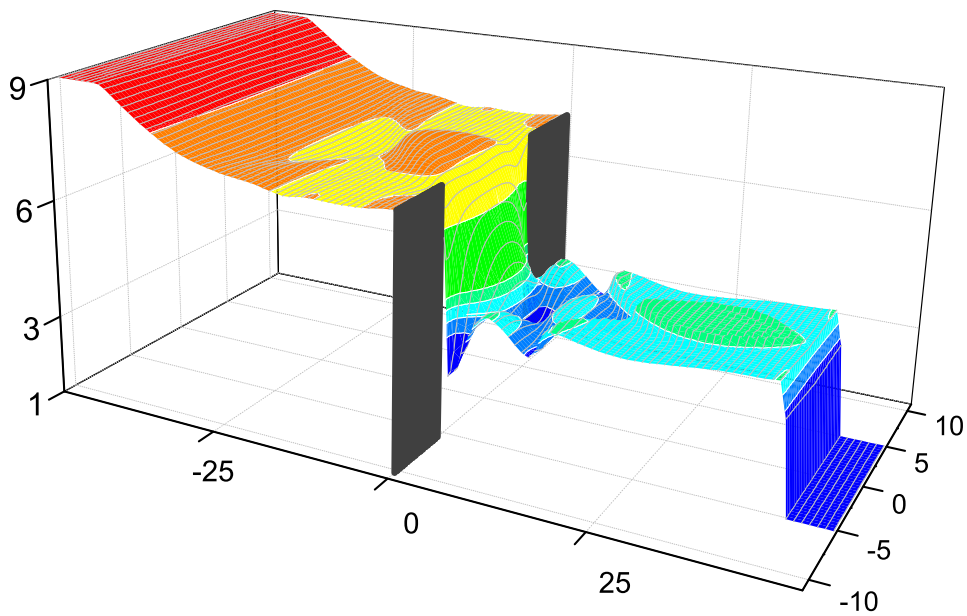


Рис. 4. Поверхность двумерной волны на момент времени $t = 4.5$ с при $b_l/b_r = 2$, $\sigma = 0.86$, $h_l = 9$ м, $h_r = 1$ м.

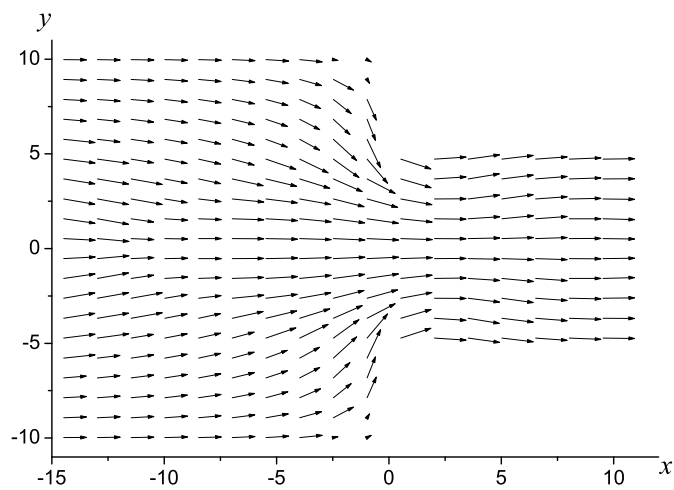


Рис. 5. Поле скоростей двумерной волны в окрестности скачка площади сечения канала на момент времени $t = 4.5$ с при $b_l/b_r = 2$, $\sigma = 0.86$, $h_l = 9$ м, $h_r = 1$ м.

показали, что с течением времени при удалении от разрыва L эти решения постепенно сближаются, что связано с асимптотическим переходом при $t, |x| \rightarrow +\infty$ двумерного решения задачи (11)-(15) к одномерному решению, описывающему плоскопараллельное течение жидкости.

Список литературы

- [1] СТОКЕР Дж.Дж. Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 618 с.
- [2] Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 608 с.
- [3] ОСТАПЕНКО В.В. Течения, возникающие при разрушении плотины над ступенькой дна // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 4. С. 51–63.
- [4] ОСТАПЕНКО В.В. О разрывных решениях уравнений теории мелкой воды в русле, имеющем скачок площади сечения // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76, № 6. С. 937–951.
- [5] ОСТАПЕНКО В.В. Численное моделирование волновых течений, вызванных сходом берегового оползня // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 4. С. 109–117.
- [6] БОРИСОВА Н.М., ОСТАПЕНКО В.В. О численном моделировании процесса распространения прерывных волн по сухому руслу // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 5. С. 887–909.
- [7] АХМЕТОВ А.Д., НИКУЛИН В.В., ОСТАПЕНКО В. В. Кумуляция завихренности в прямоугольном бассейне с наклонным дном после резкого замедления его вращения // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 6. С. 94–105.