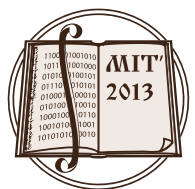


**MIT 2013**

Matematičke i informacijske tehnologije

**ZBORNİK RADOVA**  
**KONFERENCIJE MIT 2013**







**ZBORNIK RADOVA  
KONFERENCIJE MIT 2013**

## Zbornik radova konferencije MIT 2013

ISBN 978-86-80795-20-1 (PMF)

Urednik:

Dragan Aćimović

Radovi su prezentovani na konferenciji MIT 2013 u Vrnjačkoj Banji od 5. do 9. septembra i u Bečićima od 10. do 14. septembra 2013. godine.

Redakcija:

Jurij Ivanovič Šokin

Leonid Čubarov

Sofja Bejzelj

Hranislav Milošević

Dojčin Petković

Nataša Radenković

Aleksandar Valjarević

Dragan Aćimović

Grafička obrada:

Dragan Aćimović

Štampa:

Štamparija Ofsetpres, Kraljevo

Tiraž:

100 primeraka

Izdavači:



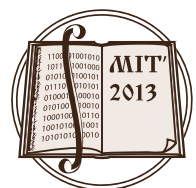
**Prirodno matematički fakultet**  
**Uiverziteta u Prištini**  
(Kosovska Mitrovica, Serbia)



**Institute of Computational Technologies,**  
**Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences**  
(Novosibirsk, Russia)

Predsednik Organizacionog odbora:  
prof. dr Hranislav Milošević

Beograd, 2014.



## **P R E D G O V O R**

### **ZBORNIKU RADOVA KONFERENCIJE MIT 2013**

Međunarodna konferencija MIT 2013 iz oblasti matematičkih, informacionih i telekomunikacionih nauka koja je održana u periodu od 5.09 - 14.09.2013. godine pokazala je da nauka i prava prijateljstva nemaju granice.

Po treći put u Srbiji je održana konferencija MIT, koja je istovremeno i 9 Konferencija za naše suorganizatore iz Rusije.

Kroz usmene, plenarne i sekcione prezentacije, te kroz poster prezentacije, pokazali smo da uspesno pratimo svetske naučne tokove iz matematičkih nauka, primenjene matematike i informatike.

Potvrdili su Srbi, Rusi i Kazahstanci, zajedno sa naucnicima iz 14 zemalja sveta da u nauci ne postoje granice i da je znanje osnov za sve dalje naučne saradnje i ostvarenja, koja imaju za cilj dobrobit čovečanstva.

Programski komitet MIT 2013  
Organizacioni komitet MIT 2013

Dr Hranislav Milošević

Beograd, april 2014. godine

## TABLE OF CONTENTS

- 15 *E. V. Amelina, S. K. Golushko*  
MODELING AND CALCULATION OF STRESS-STRAIN STATE OF CIRCULAR PLATES, CIRCULAR AND ECCENTRIC RINGS
- 23 *E. V. Amelina, K. S. Voronkova, S. K. Golushko, A. V. Yurchenko, S. V. Nikolaev*  
SIMULATION OF SHAPING OF THE EMBRYO PLANT CELLS AS ANISOTROPIC NONHOMOGENEOUS SHELL
- 28 *N. M. Andreeva*  
THE AUTOMATION OF THE ANALYSIS OF THE TEST RESULTS WITH THE HELP OF THE CALCULATED SCRIPT OF MS EXCEL
- 37 *V. I. Anikina, S. V. Kapustina, A. Sh. Lyubanova*  
ALGORITHMS OF RECOGNITION AND DETERMINATION OF PERCENTAGE PHASE CONSTITUTION IN ALLOYS
- 43 *K. K. Argunova, E. A. Bondarev, I. I. Rozhin*  
MATHEMATICAL MODELLING OF HYDRATE FORMATION DURING NATURAL GAS PRODUCTION
- 51 *M. Artonovic, D. Nedic*  
HOW TO LEARN A LINEAR FUNCTION USING GEOGEBRA MATHEMATICAL SOFTWARE
- 58 *E. A. Barakhtenko, D. V. Sokolov, V. A. Stennikov*  
NEW RESULTS IN DEVELOPING OF ALGORITHMS INTENDED FOR PARAMETERS OPTIMIZATION OF HEAT SUPPLY SYSTEMS
- 67 *E. A. Barakhtenko, D. V. Sokolov, V. A. Stennikov*  
AUTOMATING THE PROCESS OF SOFTWARE DEVELOPMENT FOR DESIGN AND RECONSTRUCTION OF HEAT SUPPLY SYSTEMS ON THE BASIS OF MODEL-DRIVEN DEVELOPMENT
- 75 *S. A. Beisel, H. Milosevic, A. D. Rychkov*  
NUMERICAL MODELING OF TSUNAMI RUNUP USING METHOD OF LARGE PARTICLES
- 82 *E. F. Belyaev, P. N. Tsylev, I. N. Shchapova*  
MATHEMATICAL MODELING FOR ELECTROMAGNETIC PROCESSES OF ELECTROMECHANICAL ENERGY CONVERTERS
- 89 *M. Bradic*  
CONSTRUCTION OF FINITE CYCLIC GROUPS WITH FUZZY EQUALITIES
- 95 *S. Brsakoska*  
ABOUT THE ACCORDANCE BETWEEN THE VEKUA DIFFERENTIAL EQUATION AND THE GENERALIZED LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION
- 99 *F. Carbone, D. Dutykh, M. J. Dudley, F. Dias*  
EXTREME WAVE RUN-UP ON A VERTICAL CLIFF
- 104 *A. A. Dekterev, A. V. Minakov, D. V. Platonov*  
NUMERICAL INVESTIGATION OF SPATIAL UNSTEADY FLOWS IN HYDRAULIC TURBINES OF HIGH-HEAD POWER DEVELOPMENT
- 111 *D. Dimovski*  
[ $n, \rho, m$ ]-METRIC SPACES



- 116 *T. Djekic, I. Filipovic*  
APPLICATION OF GEOGRAPHIC INFORMATION SYSTEM FOR CONTROLLING THE SOIL POLLUTION IN THE MUNICIPALITY VRBAS
- 123 *S. Djenic, A. Miletic, J. Mitic, V. Petkovic, V. Vasiljevic*  
USE OF BLOGS IN E-LEARNING COURSE
- 128 *D. Djosic, R. Krneta, H. Milosevic, N. Kontrec, V. Petrovic*  
THE RESULTS OF MOODLE PLATFORM APPLICATION IN REALIZATION OF TECHNICAL FUNDAMENTS OF INFORMATICS COURSE OF STUDY
- 134 *D. Djosic, C. Stefanovic, N. Kontrec, D. Stefanovic, S. Veljkovic, S. Maricic*  
PERFORMANCE ANALYSIS OF DUAL MRC DIVERSITY SYSTEM OVER  $\eta$ - $\mu$  MULTIPATH FADING CHANNEL
- 140 *N. N. Dobretsov, V. A. Kikhtenko, V. V. Smirnov, D. L. Chubarov, L. B. Chubarov, Y. I. Shokin*  
ON THE STATUS OF THE GROUND INFRASTRUCTURE FOR SATELLITE REMOTE SENSING FOR THE REGIONS OF SIBERIA AND THE FAR EAST OF RUSSIA
- 150 *B. Drljaca, S. Kuzmanovic, S. Savovic*  
EXPLICIT FINITE DIFFERENCE METHOD FOR SOLVING POWER FLOW EQUATION WITH APPLICATIONS IN FIBER OPTICS MODELING
- 156 *I. Dundjerski, D. Matijevic, V. Dundjerski, V. Matijevic, D. Vukic*  
COMPUTER OPTIMIZATION IN CHOOSING INTERNAL COMBUSTION ENGINE AND GEARBOX FOR GIVEN VEHICLE PERFORMANCE BY TRACTION DIAGRAM
- 164 *V. P. Fedotov*  
PHYSICAL MODELS AND THE MATHEMATICAL MODELING OF THE COUPLED PROCESSES IN ENGINEERING SYSTEMS
- 174 *O. A. Fedotova*  
REQUIREMENTS FOR AN INFORMATIONAL MODEL OF A SCIENTIFIC HERITAGE DIGITAL LIBRARY
- 183 *Z. I. Fedotova, G. S. Khakimzyanov*  
NONLINEAR DISPERSION MODELS OF WAVE HYDRODYNAMICS ON A SPHERE AND CONSERVATIVE LAWS
- 191 *J. Gavrilovic, A. Savic, S. Strbac-Savic, I. Kovacevic*  
TEACHING OF MATHEMATICS THROUGH DIFFERENT MEDIUMS CHANNELS OF KNOWLEDGE TRANSFER
- 195 *P. Gavrilovic, A. Miletic, V. Petkovic, V. Petrovic*  
POSSIBILITIES OF USE OF MOBILE COMPUTING IN DISTANCE LEARNING
- 201 *A.V. Gerasimov*  
NUMERICAL MODELING OF SOLIDS FRACTURE UNDER INTENSIVE DYNAMIC LOADING
- 208 *B. M. Glinskiy, D. A. Karavaev, I. M. Kulikov, N. V. Kuchin, N. V. Snytnikov*  
HIGH SCALABLE COMPUTING USING HYBRID ARCHITECTURE SUPERCOMPUTER
- 216 *E. N. Golubeva, E. G. Klimova, V. I. Kuzin, V. V. Malakhova, G. A. Platov, V. A. Shlychkov*  
INTEGRATED MODELING OF THE ARCTIC EAST-SIBERIAN SHELF HYDRODYNAMICS
- 227 *D. O. Glushkov, G. V. Kuznetsov, P. A. Strizhak*  
MATHEMATICAL MODELLING OF PROCESSES OF THE HEAT AND MASS TRANSFER IN THE CONDITIONS OF PHASE TRANSITIONS AND CHEMICAL REACTION AT IGNITION OF CONDENSED SUBSTANCES BY A LOCAL POWER SOURCES

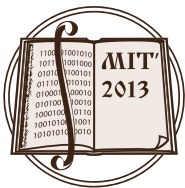
- 236 *S. K. Golushko, S. V. Idimeshev*  
APPLICATION OF COLLOCATIONS AND LEAST RESIDUALS METHOD TO PROBLEMS OF MECHANICS OF ISOTROPIC AND ANISOTROPIC PLATES
- 243 *S. K. Golushko, B. V. Semisalov*  
ON THE VARIOUS APPROACHES TO MODELING AND ANALYSIS OF DEFORMATION OF ANISOGRID STRUCTURES
- 251 *M. M. Gourary, S. G. Rusakov, A. L. Stempkovsky, S. L. Ulyanov, M. M. Zharov*  
THE ELIMINATION TECHNIQUES TO SOLVE COMPUTATIONAL PROBLEMS OF MODEL ORDER REDUCTION FOR LARGE MULTITERMINAL CIRCUITS
- 260 *M. M. Gourary, S. G. Rusakov, S. L. Ulyanov, M. M. Zharov*  
THE CONCEPT OF REDUNDANCY FOR TECHNIQUES OF MODEL ORDER REDUCTION IN CIRCUIT SIMULATION
- 267 *E. E. Gummel, H. Milosevic, V.V. Ragulin, Y.N. Zaharov, A.I. Zimin*  
MOTION OF VISCOUS INHOMOGENEOUS INCOMPRESSIBLE FLUID OF VARIABLE VISCOSITY
- 275 *O. I. Gusev, V. A. Kutergin, G. S. Khakimzyanov, N. Yu. Shokina*  
SIMULATION OF DISPERSIVE WAVES GENERATED BY UNDERWATER LANDSLIDE IN A LIMITED RESERVOIR
- 285 *A. Jainakov, Z.K. Imanaliev, B.Y. Ashirbaev*  
ON A DISCRETE OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH A SMALL STEP
- 290 *A. Jainakov, G. Kabaeva, N. Amankulova*  
THE MATHEMATICAL MODELING OF NEAR-SURFACE PROCESSES ON THE ANODE AT THE PLASMA CUTTING OF METALS
- 301 *A. Jainakov, J. O. Usenkanov*  
THE BALANCE TO THE POWER OF PLAZMATRONS OF DIRECT ACTION
- 305 *B. Jaksic, B. Gara, R. Ivkovic, M. Petrovic, M. Milosevic*  
ANALISYS OF BRIGHTNESS EFFECT ON THE QUALITY OF PICTURES AFTER COMPRESSION WITH JPEG AND SPIHT COMPRESSION METHOD
- 312 *V. N. Kasyanov*  
INFORMATION VISUALIZATION ON THE BASE OF GRAPH MODELS
- 322 *V. N. Kasyanov, S. N. Kasyanova*  
SUPPORT TOOLS FOR APPLICATION OF GRAPHS AND GRAPH ALGORITHMS
- 329 *E. A. Kisic, S. M. Draskovic, Z. M. Djurovic*  
APPLIED STATISTICS IN PROCESS CONTROL AND MONITORING
- 335 *N. Kontrec, H. Milosevic, D. Djosic*  
ANALYSIS AND IMPLEMENTATION OF TREE-TYPE STORAGE MODEL FOR AIRCRAFT INVENTORY CONTROL
- 343 *A. N. Kopaygorodsky*  
INFORMATION AND SOFTWARE TOOLS SUPPORT OF JOINT EXPERT ACTIVITY IN THE ENERGY SECTOR
- 348 *A. V. Koshkarev, I. N. Rotanova*  
PROJECTS ON IMPLEMENTATION OF SPATIAL DATA INFRASTRUCTURE IN THE RUSSIAN FEDERATION: A REVIEW BASED ON AVAILABLE SOURCES

- 359 *O. A. Kovyrkina, V. V. Ostapenko*  
ON MODELING OF WAVE FLOWS IN THE NON-PRISMATIC CHANNEL
- 366 *A. V. Laktyunkin, A. A. Potapov*  
FRACTAL MODELS IN THE MICROWAVES FREQUENCY DIFFRACTION THEORY
- 376 *Lj. Lazic, I. Djokic, S. Milinkovic*  
THE SOFTWARE DEFECTS FIXING PROBLEM OPTIMIZATION USING TAGUCHI METHOD
- 386 *V. A. Leontiev, I. S. Nudner, K. K. Semenov*  
MARINE WAVES INTERACTION WITH SHIP MOORED NEAR BERTH
- 397 *A. Sh. Lyubanova*  
ON INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR SYSTEMS OF PARABOLIC EQUATIONS
- 405 *A. Mandak*  
A CONSTRUCTION WEIGHTED PROJECTIVE PLANE OF ORDER 7 AND  $(2, 7 - 1)$ -QUASIGROUP
- 410 *S. N. Martyushov*  
NUMERICAL SIMULATION OF FLOWS IN ROTATION DETONATION ENGINE
- 418 *S. N. Martyushov*  
NUMERICAL SIMULATION OF VISCOUS DIFFRACTION ON FREE MOVING BODY
- 423 *L. V. Massel*  
DEVELOPMENT AND INTEGRATION OF INTELLIGENT, AGENT-BASED AND CLOUD COMPUTING IN SMART GRID
- 431 *M. M. Matijevic, M. D. Matijevic*  
ICT MARKET ANALYSIS DATA CONCERN INTEROPERABILITY WITH FOCUS ON CONCEPTUAL BARRIERS
- 438 *V. V. Maximov, I. S. Nudner, K. K. Semenov, N. D. Titova*  
RESTORATION OF THE WAVE EVALUATION THROUGH GIVEN PRESSURE INSIDE THE LIQUID IN FRAME OF THIRD-ORDER SURFACE WAVE THEORY
- 443 *Z. Mijajlovic, A. Valjarevic*  
MULTILAYER DIGITAL MAP OF TOPLICA REGION
- 450 *G. V. Milovanovic*  
INTEGRAL EQUATIONS OF LOVE'S TYPE AND APPLICATIONS
- 458 *S. G. Minic*  
THE PROGRAMMING LANGUAGE MATLAB AS A FUNCTION OF DIGITAL STEGANOGRAPHY TECHNOLOGY
- 464 *A. D. Mizhidon, S. G. Barguev*  
RESEARCH OF OWN VIBRATIONS FOR ONE HYBRID SYSTEM OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS
- 471 *V. V. Nicheporchuk, N. A. Chernyakova*  
USE GEOINFORMATION TECHNOLOGIES FOR EMERGENCY RISK ESTIMATION ON WATER OBJECTS OF SIBERIA
- 479 *E. A. Novikov*  
THE ADDITIVE SECOND ORDER METHOD FOR SOLVING STIFF PROBLEMS
- 488 *E. A. Novikov, A. E. Novikov*  
ALGORITHMS INTEGRATING STIFF PROBLEMS ON HETEROGENEOUS NUMERICAL SCHEMES

- 497 *S. Panic, P. Spalevic, A. Markovic, M. Stefanovic*  
PERFORMANCE ANALYSIS OF WIRELESS COMMUNICATION SYSTEM IN ALPHA-KAPPA-MU ENVIRONMENT SUBJECTED TO SHADOWING
- 502 *Lj. Paunovic*  
THEOREMS HARDY-ROGERS-TYPE IN K-METRIC SPACES
- 507 *G. Pavlovic, M. Gasic, M. Rajovic, M. Savkovic*  
OPTIMIZATION OF THE BOX SECTION OF THE MAIN GIRDERS OF THE BRIDGE CRANE BY USING THE METHOD OF LAGRANGE MULTIPLIERS
- 515 *Lj. Pecic*  
METHODOLOGY FOR EVALUATING CORPORATIVE WEB PRESENTATIONS PROPOSAL
- 520 *S. I. Peregudin, S. E. Kholodova*  
REDUCTION IN MODELING OF DYNAMICS OF A ROTATING LAYER OF AN IDEAL ELECTRICALLY CONDUCTING INCOMPRESSIBLE FLUID WITH ALLOWANCE EFFECTS OF DIFFUSIONS OF MAGNETIC FIELD
- 530 *A. A. Potapov*  
SCALING, INTEGRAL OPERATORS AND FRACTALS IN LOW-CONTRAST AND FUZZY IMAGES PROCESSING
- 539 *A. A. Potapov*  
THE GLOBAL FRACTAL METHOD, FRACTAL PARADIGM AND THE FRACTIONAL DERIVATIVES METHOD IN FUNDAMENTAL RADAR PROBLEMS AND DESIGNING OF REVOLUTIONARY RADIO SIGNALS DETECTORS
- 553 *A. A. Potapov, D. V. Slezkin*  
FRACTAL LABYRINTHS AS SMALL ANTENNAS DEVELOPMENT BASE
- 560 *A. Raicevic, G. Prica*  
TRANSFER FUNCTION OPTIMIZATION FOR PLL LOOP WITH REALISTIC OPERATIONAL AMPLIFIER
- 564 *A. A. Redyuk, A.S. Skidin, D. A. Tazba*  
MATHEMATICAL MODELLING OF ONE-PUMP FIBER OPTICAL PARAMETRIC AMPLIFIERS
- 573 *G. V. Romanenko, I. V. Frolenkov*  
ON EXISTENCE OF CAUCHY PROBLEMS SOLUTIONS FOR LOADED PARABOLIC EQUATIONS AND SYSTEMS OF SPECIAL FORM
- 580 *A. N. Ruchay*  
CENTRALIZED MANAGING PERMISSIONS SYSTEM BASED ON THE ELECTION MULTIBIOMETRIC AUTHENTICATION
- 586 *V. V. Shaidurov, G. I. Shchepanovskaya*  
THE PROBLEM OF NUMERICAL MODELING OF FLOW IN THE EXPANSIBLE CHANNEL
- 595 *V. A. Shchapov, A. G. Masich, G. F. Masich*  
EXPERIMENTAL EVALUATION QUEUE MODEL AND ALGORITHMS OF PARALLEL DATA TRANSMISSION PERFORMANCE IN DATA INTENSIVE TASKS IN DISTRIBUTED SYSTEMS
- 602 *N. Shekutkovski*  
TOPOLOGICAL STRUCTURE OF ATTRACTORS AND MORSE DECOMPOSITION
- 607 *Yu. I. Shokin, S. A. Beisel, A. D. Rychkov, G. S. Khakimzyanov, L. B. Chubarov*  
THE STUDY OF TSUNAMI RUNUP ON THE EAST COAST OF JAPAN BY NUMERICAL SIMULATION

- 618 *Yu. I. Shokin, A. E. Guskov, D. V. Kosyakov*  
ON INFORMATIZATION OF THE SIBERIAN BRANCH OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
- 629 *Yu. I. Shokin, A. Yu. Vesnin, A. A. Dobrynin, O. A. Klimenko, E. V. Konstantinova, E. V. Rychkova, M. Yu. Savin*  
STUDYING OF SCIENTIFIC WEB Space BY WEBOMETRICS AND GRAPH THEORY METHODS
- 640 *Yu. I. Shokin, A. Yu. Vesnin, A. A. Dobrynin, O. A. Klimenko, I. S. Petrov, E. V. Rychkova*  
INVESTIGATION OF THE ACADEMIC WEB SPACE OF THE REPUBLIC OF SERBIA
- 647 *N. Yu. Shokina*  
ON SOME PROBLEMS OF CONSTRUCTION OF DIFFERENCE SCHEMES ON MOVING GRIDS
- 656 *O. Y. Shvets*  
INFORMATION-MODEL REPRESENTATION OF ECOLOGICAL MONITORING CENTER  
FUNCTIONING FOR EMERGENCY SITUATIONS' PREVENTION
- 661 *E. G. Skripnyak, N. V. Skripnyak, V. A. Skripnyak, V. V. Skripnyak, I. K. Vaganova*  
MULTISCALE COMPUTATIONAL MODEL FOR SIMULATION OF MECHANICAL BEHAVIOUR  
OF HETEROGENEOUS BRITTLE CERAMICS UNDER DYNAMIC LOADING
- 671 *N. Stamenkovic, D. Zivaljevic, V. Stojanovic*  
DIMINISHED-ONE MODULO ( $2^n + 1$ ) MULTIPLIER DESIGN
- 677 *C. Stefanovic, D. Djosic, P. Spalevic, S. Maricic, A. Matovic, M. Matovic*  
LEVEL CROSSING RATE OF THE RATIO OF PRODUCT OF TWO  $\alpha$ - $\mu$  RANDOM VARIABLES AND  $\alpha$ - $\mu$   
RANDOM VARIABLE
- 683 *H. Stefanovic, A. Savic, S. Veljkovic, D. Milic*  
SOME SIMULATION METHODS FOR RECEIVE SATELLITE ANTENNA INSTALLING ANGLES  
EVALUATION
- 689 *S. Stevovic, G. Ivanovic, H. Milosevic*  
MATHEMATICAL MODEL FOR RELIABILITY CALCULATION ON MODEL EXAMPLE
- 698 *V. Stojanovic, M. Bozinovic, N. Petkovic*  
SOFTWARE IMPLEMENTATION OF THE MODEL OF GAME THEORY IN MARKETING DECISIONS
- 706 *I. L. Trofimov*  
USING METADATA TO QUERY THE DATABASE ON THERMAL ECONOMY OF RUSSIA  
THROUGH THE INTERNET
- 715 *I. Vojinovic, A. Vukmirovic, M. Despotovic-Zratic, M. Milutinovic, K. Simic*  
LEVERAGING INTERNET MARKETING CAMPAIGNS THROUGH SOCIAL NETWORK ANALYSIS
- 722 *J. Vujakovic, M. Rajovic*  
PERIODIC SOLUTION OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATION
- 727 *J. Vujakovic, P. Salimi*  
APPLICATION OF TRIPLE COINCIDENT POINT RESULTS IN G METRIC SPACES TO INTEGRAL  
EQUATIONS
- 734 *D. Vukic, I. Dundjerski, V. Matijevic*  
APPLICATION OF EXPERT SYSTEMS IN TECHNICAL DIAGNOSTICS OF MOTOR VEHICLES
- 739 *A. V. Vyatkin, V. V. Shaydurov*  
INTEGRAL SEMI-LAGRANGIAN APPROACH FOR TWO-DIMENSIONAL CONTINUITY EQUATION

- 746 *Z. Kh. Yuldashev, A. A. Ibragimov, P. J. Kalkhanov*  
PROBLEM OF CREATION OF THE SOFTWARE FOR REALIZATION OF INTERVAL ALGORITHMS
- 751 *Y. N. Zakharov, K. S. Ivanov*  
ON NUMERICAL SOLUTION OF NAVIER-STOCKS EQUATIONS WITH INFINITE BOUNDARY  
CONDITIONS



## MODELING AND CALCULATION OF STRESS-STRAIN STATE OF CIRCULAR PLATES, CIRCULAR AND ECCENTRIC RINGS

### МОДЕЛИРОВАНИЕ И РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН, КРУГОВЫХ И ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИХ КОЛЕЦ

---

*This article is dedicated to the problems of a choice and application of classical and a number of specified theories of composite plates in calculating the parameters of stress-strain state of multilayered round and eccentric rings. The influence of the mechanical characteristics of composite material and geometrical parameters of the rings on a choice of the theory for calculation is investigated. The significant dependence of the parameters of stress-strain state of multilayered plates and rings on reference surface is shown.*

---

#### ВВЕДЕНИЕ

Композиционные материалы (КМ) широко используются при изготовлении элементов конструкций ответственного назначения, в том числе, круглых пластин, круговых и эксцентрических колец. К настоящему времени вопрос об адекватном моделировании поведения подобных конструкций, а также о численном решении получаемых жестких систем дифференциальных уравнений не имеет законченного удовлетворительного решения.

Наиболее естественным, при моделировании поведения упругих тел, представляется подход, базирующийся на уравнениях трехмерной теории упругости. Однако в случае многослойных композитных конструкций, соответствующие системы дифференциальных уравнений трудно разрешимы, поэтому исследователи вынуждены рассматривать упрощенные двумерные постановки, используя важную особенность тонкостенных пластин и колец - их относительно малую толщину по сравнению с линейными размерами.

В настоящее время существуют различные методы получения двумерных уравнений теории пластин. В частности, это методы асимптотического интегрирования уравнений трехмерной теории упругости, методы представления характеристик НДС в виде рядов по некоторым системам функций поперечной координаты с последующим получением систем уравнений на коэффициенты разложений.

Более широкое распространение на практике получил метод гипотез, в котором используются два принципиально различных подхода. В первом из них, для каждого слоя в отдельности принимается система кинематических гипотез (например, гипотеза жесткой нормали, гипотеза прямой линии, гипотеза о линейном или нелинейном распределении компонент вектора перемещений по толщине слоя и др.). Порядок разрешающей системы дифференциальных уравнений при таком подходе зависит от числа слоев оболочки. Всякое изменение структуры пакета слоев требует изменения системы гипотез и модификации разрешающей системы дифференциальных уравнений и, следовательно, пересмотра процедуры ее численного интегрирования.

Другой подход связан с использованием кинематических и статических гипотез для пакета слоев в целом. В этом случае порядок разрешающей системы дифференциальных уравнений определяется принятыми гипотезами и от числа слоев не зависит.

---

1 Design Technological Institute of Digital Techniques, SB RAS, Novosibirsk, Russia

2 Institute of Computational Technologies, SB RAS, Novosibirsk, Russia



В настоящей работе используются уравнения классической теории Кирхгофа-Лява [1], теории типа Тимошенко [2], уточненной теории Андреева-Немировского [3], теории “ломаной линии” Григолюка-Чулкова [4], с целью проведения сравнительного анализа и определения границ их применимости при расчете многослойных круглых пластин, круговых и эксцентрических колец.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассматриваются многослойные композитные эксцентрические кольца (в частном случае, кольца с центральным отверстием), нагруженные равномерно распределенным внешним давлением постоянной интенсивности  $P$  и растягивающей нагрузкой по внешнему контуру интенсивности  $t_0$ . Внутренний контур кольца жестко зашпелен. Требуется определить НДС круговых и эксцентрических колец при использовании различных теорий пластин и выявить особенности их применения.

На рис. 1 приведен общий вид эксцентрического кольца в биполярной системе координат  $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ , а также система действующих на него нагрузок. Здесь  $R_0, R_1$  - внутренний и внешний радиусы кольца;  $d$  - эксцентриситет отверстия;  $H$  полная толщина кольца.

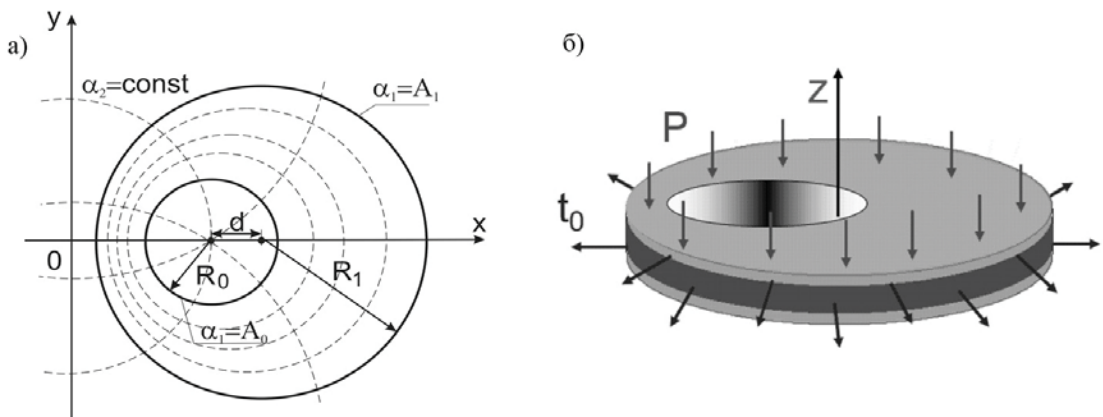


Рис. 1. а) - эксцентрическое кольцо в биполярной системе координат, б) - система действующих на него нагрузок

При расчете пластин с композитными слоями использована структурная модель армированного слоя Ю.В. Немировского [5], в рамках которой коэффициенты матрицы упругости являются функциями от параметров композиционного материала.

Разрешающие системы дифференциальных уравнений, описывающие НДС многослойных круглых пластин, круговых и эксцентрических колец приведены в [6]. Там же показаны предельные переходы к уравнениям ортотропных пластин, описаны переходы от теории Андреева-Немировского к классической теории пластин и от теории Григолюка-Чулкова к теории типа Тимошенко. Пренебрежение нелинейными слагаемыми позволяет получить уравнения линейной теории, пригодные для изучения НДС пластин при малых прогибах.

Полученные системы дифференциальных уравнений решались методом дискретной ортогонализации С.К. Годунова, реализованном в пакете прикладных программ GMDO [7].

Для сопоставления с решениями трехмерной теории упругости использовались решения, полученные численно с помощью пакета конечно-элементного анализа ANSYS™.

## ПРОБЛЕМА ВЫБОРА ТЕОРИИ ПЛАСТИН

Изучим влияние механических характеристик КМ и структуры армирования на проблему выбора теории пластин при расчете НДС круговых и эксцентрических колец.

Рассмотрим трехслойное круговое кольцо симметричного относительно срединной поверхности строения, средний слой которого армирован окружным, а нижний и верхний слой спиральными

семействами арматуры.

На рис. 2 приведены зависимости интенсивностей напряжений в матрице и арматуре от угла армирования внешних слоев  $\pm\psi$ , рассчитываемых по формулам  $Bs_c = M(\sigma_{ij}^c) / \sigma_c^*$ ,  $Bs_a = M(\sigma_{ij}^a) / \sigma_a^*$ , где  $M(\sigma_{ij}) = \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy} + \sigma_{yz} + \sigma_{xz})} / \sqrt{2}$ ,  $\sigma_c^*$ ,  $\sigma_a^*$  - пределы прочности матрицы и волокна. В случае, когда в рамках той или иной теории пластин, происходит пренебрежение какими-либо компонентами тензора напряжений, тогда в выражениях для  $M(\sigma_{ij})$  они полагаются равными нулю. На рис. 2 линиям 1 соответствуют результаты, полученные по классической теории [1], 2 - теории Тимошенко [2], 3 - теории Андреева-Немировского [3], 4 - теории "ломаной линии" Григолюка-Чулкова [4].

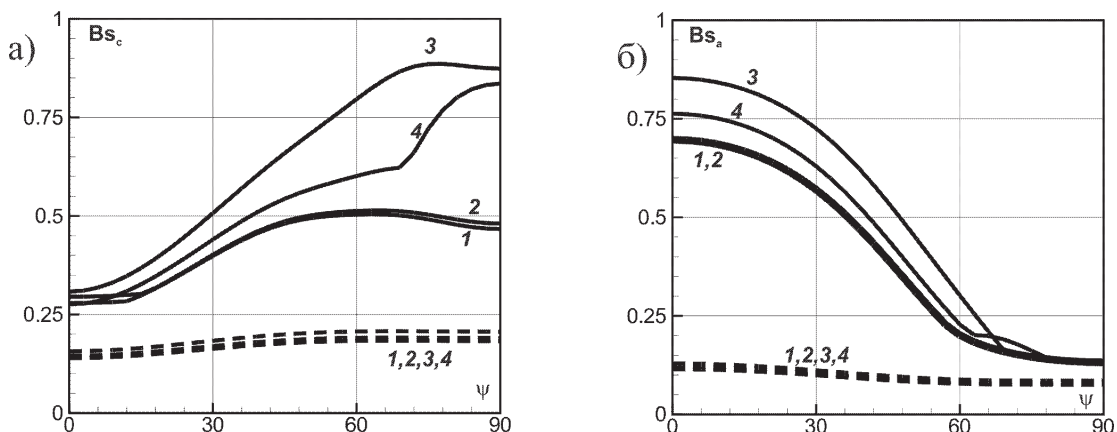


Рис. 2. Интенсивности напряжений в матрице (а) и арматуре (б) для углепластиковых (сплошные линии) и металлокомпозитных (пунктирные линии) трехслойных круговых колец, рассчитанные по классической и уточненным теориям пластин (пояснения в тексте)

На примере рассматриваемой трехслойной пластины хорошо видно влияние выбора теории на расчетные характеристики НДС. Теории [1], [2] дают очень близкие результаты как для углепластиковых, так и для металлокомпозитных колец. Одной из причин является то, что обе теории рассматривают многослойную пластину как однослойную с некоторыми интегральными характеристиками, не учитывая порядок и структуру расположения слоев. С точки зрения этих теорий многослойные пластины будут эквивалентны однослойным пластинам с аналогичными интегральными характеристиками. Однако в реальности поведение многослойной и однослойной пластины может оказаться существенно различным.

Использование теорий [3], [4], учитывающих различные свойства слоев показывает, что для материалов, с близкими характеристиками компонент (металлокомпозиты), расчетные характеристики НДС очень близки к соответствующим характеристикам, вычисленным по классической теории Кирхгофа-Лява и теории Тимошенко. Однако при расчете углепластиковых колец, отличие становится существенным - интенсивности напряжений в матрице и армирующих волокнах могут отличаться, например, от двух до четырех раз. Более того, использование упрощенных теорий не дает возможности выявить области со значительными краевыми эффектами, обусловленными наличием поперечных сдвигов, которые могут привести к разрушению конструкции.

Использование современных углепластиков с характеристиками волокон существенно превышающими характеристики полимерной матрицы, позволяет создавать при рациональных структурах армирования конструкции с прочностными свойствами на уровне металлокомпозитов. Однако если структура армирования не будет соответствовать приложенным к конструкции нагрузкам, то ее несущая способность может снизиться в несколько раз.

Таким образом, применение КМ с существенно различными характеристиками обуславливает

необходимость применения уточненных теорий расчета. Проведенные исследования показали, что использование теории [3] дает результаты сопоставимые с результатами теории [4], но при этом, порядок разрешающей системы дифференциальных уравнений не зависит от числа слоев.

На рис. 2 приведены результаты расчетов для колец с центральным отверстием при следующих параметрах:  $R_0 / R_1 = 1/10$ ,  $H / R_1 = 1/30$ ,  $h_0 / H = 1/5$  - отношение толщины внешнего слоя к полной толщине кольца, срединный слой армирован окружным семейством арматуры, объемная интенсивность армирования составляет 25%. Характеристики материалов: углепластик - модули Юнга арматуры и связующего  $E_a = 300$  МПа,  $E_c = 3$  МПа; коэффициенты Пуассона -  $\nu_a = 0.34$ ,  $\nu_c = 0.3$ ; пределы прочности  $\sigma_a^* = 3$  МПа,  $\sigma_c^* = 0.09$  МПа; металлокомпозит (никель-вольфрам) -  $E_a = 400$  МПа,  $E_c = 200$  МПа,  $\nu_a = 0.33$ ,  $\nu_c = 0.3$ ,  $\sigma_a^* = 3$  МПа,  $\sigma_c^* = 1.25$  МПа.

Изучим влияние геометрических параметров (в частности, эксцентриситета отверстия) на проблему выбора теории пластин при расчете НДС слоистых колец.

Рассмотрим задачу растяжения-изгиба трехслойного углепластикового кольца. На рис. 3 приведено влияние эксцентриситета отверстия на расчетные интенсивности напряжений в связующем материале, полученные при использовании классической теории [1] (пунктирные кривые) и уточненной [3] (сплошные). Цифрами на рис. 3 обозначено отношение эксцентриситета к радиусу внутреннего отверстия  $d / R_0$ .

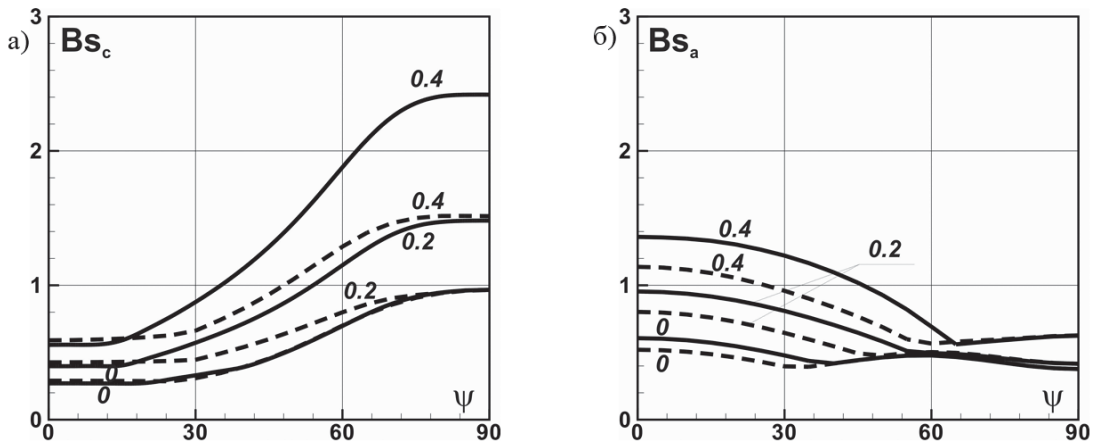


Рис. 3. Интенсивности напряжений в связующем материале а) и арматуре б) для различных теорий в зависимости от угла армирования и эксцентриситета отверстия

Увеличение эксцентриситета приводит к усилению краевых эффектов и относительной разности между решениями по теориям с учетом и без учета поперечных сдвигов. Однако при рациональных структурах армирования можно значительно снизить эти эффекты. Для приведенного примера использование, например, радиального армирования ( $\psi = 0^\circ$ ) позволяет существенно разгрузить полимерное связующее и перераспределить нагрузку на волокна, обладающие существенно более высокой прочностью.

Параметры, используемые при расчете:  $R_0 / R_1 = 1/5$ ,  $h_0 / H = 1/5$ ,  $H / R_1 = 1/25$ , срединный слой армирован окружным семейством арматуры, объемная интенсивность армирования составляет 25%.

Исследуем влияние выбора теории на вид НДС пластин в зависимости от ее относительной толщины, а также от структуры армирования.

Для однослойной углепластиковой пластины исследовано различие между результатами, полученными по уточненной теории [3] и классической теории [1] (отсчетная поверхность срединная), в зависимости от угла армирования  $\pm \psi$  и относительной толщины в задаче изгиба. На рис. 4

приведены полученные результаты для оценки уровня интенсивности напряжений в связующем материале и арматуре.

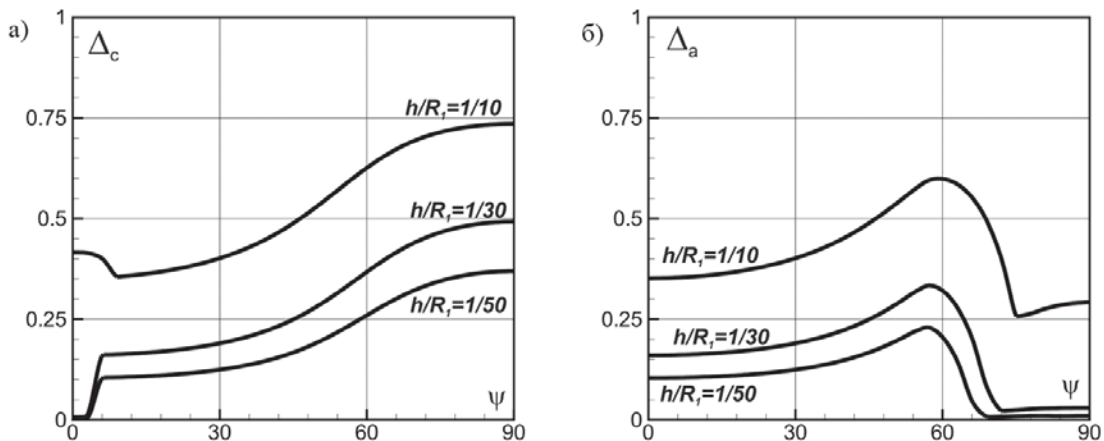


Рис. 4. Относительная разность для интенсивности напряжений в связующем материале а) и арматуре б) для различных теорий в зависимости от угла армирования и относительной толщины

С увеличением относительной толщины пластины растет разность между решениями:  $\Delta_c = |Bs_{c1} - Bs_{c3}| / Bs_{c3}$ ,  $\Delta_a = |Bs_{a1} - Bs_{a3}| / Bs_{a3}$  - относительная разность между решениями, полученными по теориям [1] и [3]. Для тонких пластин ( $h/R_1 < 1/30$ ) существует достаточно большой набор структурных параметров КМ, при которых отличие не будет превышать 20%. Проведенные расчеты показали, что минимальная разность (в зависимости от угла армирования) достигается там, где уровень напряжений минимальный. Это объясняется тем фактом, что в этих областях минимизируются поперечные компоненты тензора напряжений, которые не учитываются в классической теории, но вызывают значимые поперечные сдвиги.

А для пластин с относительными размерами ( $h/R_1 \approx 1/10$ ) вне зависимости от структуры армирования необходимо использовать для расчета уточненные теории, а в идеале и уравнения трехмерной теории упругости.

### ПРОБЛЕМА ВЫБОРА ОТСЧЕТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Исследуем влияние выбора отсчетной поверхности пластины и связанных с ней линий, на которых формулируются краевые условия, на результаты, получаемые при использовании различных теорий.

Рассмотрим изотропную кольцевую пластину, нагруженную по внешнему контуру постоянной растягивающей нагрузкой интенсивности  $t_0$ . В рамках теорий пластин ей соответствует растягивающее усилие, приложенное по линии  $r = R_1$ , величина которого определяется соотношением  $T_0 = t_0 h$ . Однако, в этом случае возникает неоднозначность: растягивающему усилию  $T_0$  будет соответствовать в пространственной постановке и нагрузка, приложенная по линии кольца, задаваемой соотношениями  $r = R_1, z = const$ , например, по нижней кромке кольца.

На рис. 5 показана зависимость максимальных по пластине удлинения  $u$  и интенсивности напряжений  $Bs$  от выбора отсчетной поверхности. По оси абсцисс отложено расположение отсчетной поверхности  $z_0$ , где  $z_0 = 0$  соответствует нижней поверхности пластины, выбранной в качестве отсчетной,  $z_0 = 1$  - верхней. Пунктирными линиями показаны результаты расчетов по теории пластин, где 1 соответствует классической теории [1], 2 - теории [2], 3 - теории [3]. Сплошная серая линия отражает уровень максимального удлинения и интенсивности напряжений трехмерной задачи теории упругости с распределенной по внешнему контуру растягивающей нагрузкой интенсивности  $t_0$ .

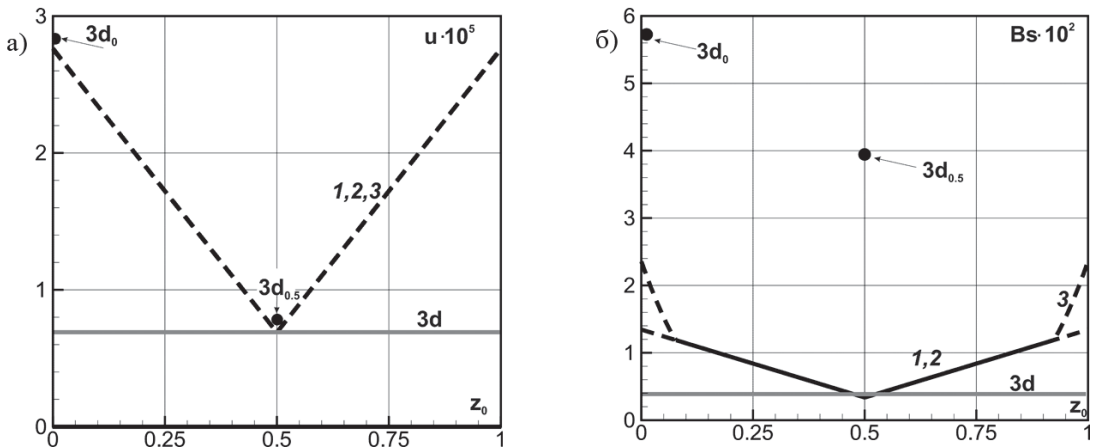


Рис. 5. Сравнение максимальных удлинений (а) и интегральных напряжений (б) для теорий пластин и трехмерной теории при различных отсчетных поверхностях (пояснения в тексте)

Как видно, распределенной по внешнему контуру растягивающей нагрузке соответствует решение задачи теории пластин со срединной отсчетной поверхностью  $z_0 = 0.5$ . Важным свойством отсчетной поверхности для данной задачи является то, что при выборе ее в пределах от  $0.1H$  до  $0.9H$ , результаты, полученные по разным теориям пластин, очень близки. Использование нижней или симметричной ей верхней отсчетной поверхности приводит к отличию результатов более чем в 3 раза для интенсивностей напряжений.

Дополнительно на графиках, точками обозначены уровни удлинения и интенсивности напряжений, полученные по трехмерной теории, для случая когда усилие  $T_0$ , приложено: вдоль нижней кромки - точка на графиках, обозначенная  $3d_0$ ; вдоль срединной линии -  $3d_{0.5}$ .

Решение задачи трехмерной теории упругости с нагрузкой, сосредоточенной по линии окружности существенно отличается от результатов, получаемых при использовании теорий пластин. В этом случае разность для интенсивности напряжений может достигать 10 раз.

Таким образом, показано, что выбор отсчетной поверхности значительно влияет на результаты, полученные при использовании теорий пластин. Более того, от выбора отсчетной поверхности зависит и разность между решениями, полученными при использовании различных теорий. Это связано с тем, что с помощью выбора отсчетной поверхности происходит моделирование приложенной растягивающей нагрузки.

Распределенной по внешнему контуру нагрузке для изотропного кольца соответствует срединная отсчетная поверхность. Нагрузка, сосредоточенная по линии кольца, плохо описывается исследуемыми вариантами теорий, но, в рамках теории Андреева-Немировского качественно является эффект возрастания уровня напряжений, чего не происходит для классической теории и теории Тимошенко.

Результаты получены при следующих параметрах стальной пластины:  $H / R_1 = 1 / 50$ ,  $R_0 / R_1 = 1 / 10$ ,  $t_0 = 6.6 \text{ Н/м}^2$ .

Отдельно была рассмотрена задача изгиба изотропной пластины приложенным по верхней поверхности распределенным давлением интенсивности  $p$ . Расчеты показали, что численные характеристики НДС, полученные для различных теорий пластин, не зависят от выбора отсчетной поверхности. Это обусловлено, в частности тем, что способ моделирования краевого условия никак не зависит от выбора отсчетной поверхности.

Соответственно, для задачи растяжения-изгиба изотропной пластины, определения выбора отсчетной поверхности будет определяться свойствами задачи растяжения. Тогда для случая

растяжения распределенной по контуру нагрузкой с одновременным давлением наиболее корректным выбором будет срединная поверхность.

Исследуем влияния угла армирования  $\pm\psi$  однослойных композитных пластин на результаты расчета НДС при различных отсчетных поверхностях.

Рассматривалась задача растяжения углепластикового кольца. На рис. 6 для различных углов укладки арматуры  $\pm\psi = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  приведены зависимости интенсивности напряжений в связующем для теории [1] - рис. 6а), теории [3] - рис. 6б) и в арматуре для теории [3] - рис. 6в).

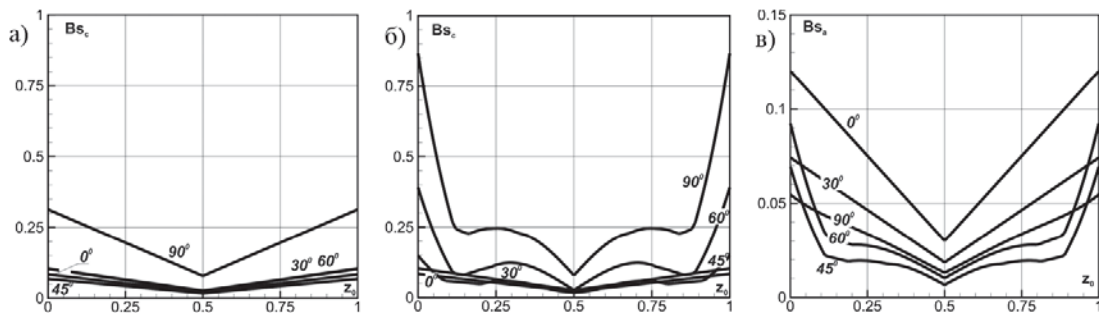


Рис. 6. Зависимости интенсивности напряжений в связующем для теории [1] а) и теории [3] б), интенсивности напряжений в арматуре для теории [3] в) от выбора отсчетной поверхности при различных углах армирования

Проведенные расчеты показали, что для всех характеристик, как статических, так и кинематических, минимальное влияние углов армирования на уровень характеристик НДС происходит при выборе срединной поверхности в качестве отсчетной.

На рис. 7 для нижней и срединной отсчетных поверхностей приведены зависимости интенсивностей напряжений в связующем материале и арматуре от угла ее укладки. Сплошным линиям соответствуют данные, полученные при расчете с использованием классической теории [1], пунктиром - уточненной теории [3].

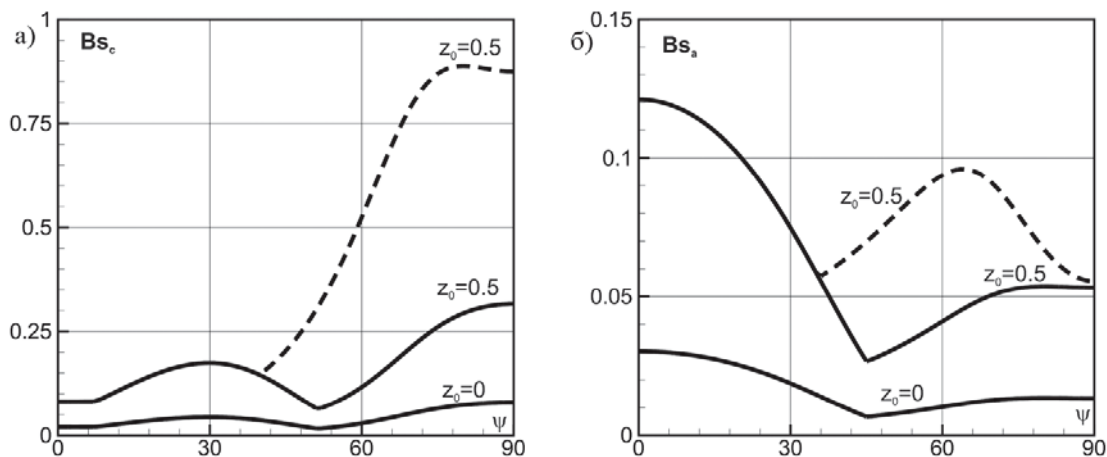


Рис. 7. Зависимость интенсивности напряжений в связующем материале а) и арматуре б) от угла перекрестного армирования при различных отсчетных поверхностях

Наибольшее отличие между результатами, полученным по различным теориям, наблюдается при выборе нижней поверхности в качестве отсчетной. Однако, даже в этом случае, существуют такие области армирования, когда результаты очень близки. Это те области, когда в пластине достигаются наименьшие значения напряжений (углы не превосходящие  $35^\circ$ ).

Приведенные на рис. 6, 7 результаты получены при следующих параметрах пластин:  $h / R_1 = 1 / 50$ ,  $R_0 / R_1 = 1 / 10$ , объемное содержание арматуры 60%.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В работе показано, что необходимость использования уточненных теорий обуславливается наличием в конструкции геометрических «особенностей» (в частности, смещения центра отверстия) и использованием композиционных материалов с существенно отличными механическими характеристиками компонент (в частности, композитов на полимерной основе).

Выбор отсчетной поверхности значительно влияет на результаты расчета НДС, получаемые при использовании теорий пластин (в некоторых случаях - почти на порядок). Одним из важных факторов, влияющих на выбор отсчетной поверхности, является моделирование прикладываемых нагрузок.

## **ЛИТЕРАТУРА**

- [1] Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз. 1951.
- [2] Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. М.: Наука. 1992.
- [3] Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания. Новосибирск: Наука. 2001.
- [4] Григолюк Э.И., Чулков П.П. К общей теории трехслойных оболочек большого прогиба. Доклады АН СССР. Т. 150. № 5. 1963. С. 1012-1014.
- [5] Немировский Ю.В. К теории термоупругого изгиба армированных оболочек и пластин. Механика полимеров. № 5. 1972. С. 861-873.
- [6] Голушко С.К., Немировский Ю.В. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения. М.: Физматлит. 2008.
- [7] Голушко С.К., Горшков В.В., Юрченко А.В. О двух численных методах решения многоточечных нелинейных краевых задач. Вычислительные технологии. Т. 7. № 2. 2002. С. 24-33.

## **SIMULATION OF SHAPING OF THE EMBRYO PLANT CELLS AS ANISOTROPIC NONHOMOGENEOUS SHELL**

### **МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФОРМООБРАЗОВАНИЯ КЛЕТОК ЗАРОДЫША РАСТЕНИЯ КАК АНИЗОТРОПНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ОБОЛОЧЕК**

---

*Growth and shape formation - morphodynamics, - are of the most intriguing biological phenomena. It is considered the plant cell morphodynamics is determined by mechanical parameters of the cell wall that can be modified by the cell to pursue a target cell shape. Osmotic pressure inside the cell is thought to be a second part of this shape forming mechanism. In this paper we adopted this simplified view on morphodynamics, and studied cell shape changing during just the beginning of plant embryo development. We found out the distribution of the cell wall stiffness that allow semielliptical embryo cell to obtain spherical shape without considerable increase it volume - that is observed in reality.*

---

#### **ВВЕДЕНИЕ**

Несмотря на сложное строение клетки и наличие механически разнородных структур на мезоскопических масштабах (масштабы субклеточных структур - органелл), механическое поведение клетки в первом приближении определяется клеточной стенкой. В таком приближении клетка представляет собой упругую оболочку, заполненную жидкостью. Считается, что оболочка обладает свойством избирательной проницаемости: одни вещества, в том числе вода, могут свободно проходить через эту оболочку, а для других оболочка является непроницаемой. Таким образом, клетка является осмотической ячейкой: в гипотонической среде она стремится разбухнуть, а в гипертонической среде - сжаться. В каждый момент времени тургорное давление уравновешивается силой упругого натяжения клеточной оболочки. Далее будем считать, что механические свойства оболочки определяются клеточной стенкой, и что в условиях равновесия сила натяжения везде одинакова. Если в клетку поступает вода (при отличной от нуля разности водных потенциалов), то увеличивается ее объем, площадь стенки и ее упругое натяжение.

#### **МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ СТЕНКИ РАСТИТЕЛЬНОЙ КЛЕТКИ**

Материал клеточной стенки, состоит, как минимум, из двух фаз, чем схож с конструкционными композитами. Одну из фаз - волокна целлюлозы, образующие «скелет» стенки, по аналогии с композиционными материалами будем называть волокнами или наполнителем. Другая фаза, представленная в клеточной стенке сильно гидратированной матрицей из молекул гемицеллюлозы и/или пектина, заполняет пространство между волокнами, и в терминологии композиционных материалов называется связующим материалом.

Целлюлозные волокна в стенке зрелых клеток формируют слои с различающейся от слоя к слою преимущественной ориентацией волокон - так называемая вторичная клеточная стенка. В то же время, в активно растущей ткани клетки разделены первичной клеточной стенкой и волокна в матрице такой стенки не образуют какой-либо строго упорядоченной структуры. Таким образом, материал клеточной стенки является неоднородным и анизотропным. Для описания механических свойств первичной клеточной стенки можно использовать осредненные механические характеристики целлюлозного скелета в матрице. Для прогнозирования осредненных механических

1 Design Technological Institute of Digital Techniques, SB RAS, Novosibirsk, Russia

2 Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russia

3 Institute Of Cytology And Genetics SB RAS, Novosibirsk, Russia



ческих характеристик и построения физических соотношений, связывающих напряжения и деформации, можно применять различные структурные модели композиционного материала. В монографии [1] представлен обзор структурных моделей композиционных материалов различного уровня, начиная от простейшей «нитяной» модели, до микромеханических моделей, учитывающих форму поперечных сечений армирующих волокон и геометрию их упаковки в слоях.

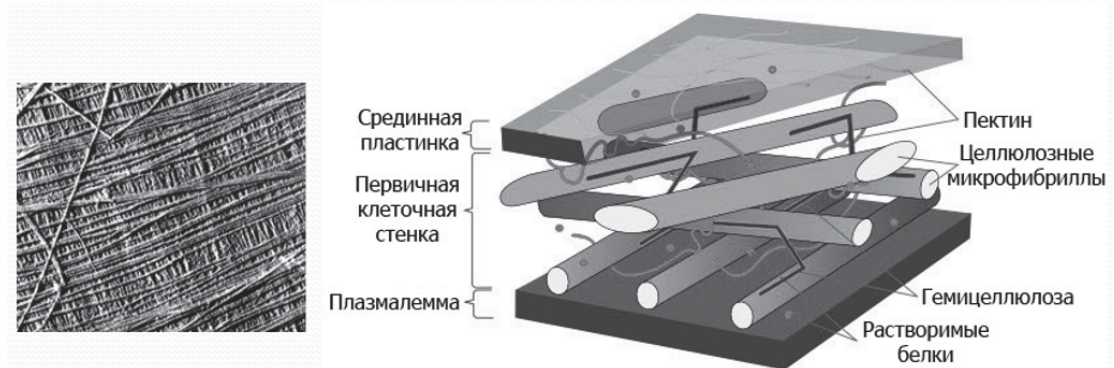


Рис. 1. Микрофотография и схема клеточной стенки (из открытых источников)

Предполагается, что в результате упругого деформирования под действием тургорного давления происходит увеличение размеров растительной клетки. Затем происходит релаксация механических напряжений клеточной стенки за счет разрыва части связей между молекулами-волокнами целлюлозы, что схоже с пластической деформацией при ослаблении материала. После этого материал клеточной стенки достраивается и упрочняется при дальнейшем увеличении объема клетки, что в целом схоже с поведением гиперупругих материалов. Возникающие циклы «упругое растяжение - релаксация» можно заменить непрерывным упругим деформированием при увеличивающейся нагрузке, что существенно упрощает математическую и численную модель процесса.

Даже при описанном упрощении модели аналитическое решение задачи об упругом деформировании клеток зародыша возможно только в случаях простой геометрии, т.е. на самых первых стадиях. Для более поздних стадий и, соответственно, сложных форм зародыша необходимо применять численные методы решения. Одним из универсальных методов дискретного представления геометрического объекта для последующего численного анализа является использование неструктурированных сеток, а наиболее развитым методом решения задач механики на неструктурированных сетках - метод конечных элементов.

## МЕХАНИКА МОРФОДИНАМИКИ ОДНОКЛЕТОЧНОГО ЗАРОДЫША АРАБИДОПСИСА

Изучение различных стадий развития зародыша позволяет получить представление об эволюции его формы и формы клеток, из которых он состоит, а также их характерных размеров. Из экспериментальных данных известно, что на двух-, четырех- и восьмиклеточной стадиях форма зародыша остается близкой к сферической. При этом форма одноклеточного зародыша сразу после деления зиготы близка к полуэллипсоидальной, практически совпадающей по радиусу с клеткой-суспензором. Предварительные модельные расчеты показали, что деформирование полуэллипсоидальной клетки в сферическую со стенками из однородного изотропного материала под действием избыточного давления может происходить только с существенным увеличением объема исходной клетки. В то же время наблюдения показывают, что округление одноклеточного зародыша может происходить даже при незначительном увеличении исходного объема (приблизительно на 1/3 от начального).

Как отмечалось выше, у клетки существуют возможности по упрочнению и ослаблению своих

стенок, в том числе локальному. Кроме того, клетка может строить целлюлозный скелет стенки с преобладанием волокон, ориентированных в одном из направлений, в результате чего возникает анизотропия механических свойств стенки на макроуровне, схожая с анизотропией волокнистых композиционных материалов. В предположении, что изменение механических свойств отдельных участков клеточной стенки зародыша обуславливает наблюдаемые особенности ростовой деформации клетки, была поставлена задача определения механических характеристик материала стенки, позволяющих обеспечить переход формы клетки от исходного к деформированному состоянию под действием тургорного давления. Подобная задача ставилась, например, авторами работы [2] при моделировании апикального роста пыльцевой трубки.

В итоге была сформулирована следующая обратная задача формообразования: при известных исходной форме клетки и виде нагружения найти такие законы распределения механических характеристик материала клетки, при которых будет получена наперед заданная форма.

На основании данных, полученных с помощью конфокального изображения (рис. 2, слева), были получены размеры конечного состояния клетки и из опубликованных данных оценены механические параметры ее стенок. На (рис. 2, справа) представлена геометрическая модель одноклеточного зародыша с исходной и конечной его формами. Модель построена в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ . Суспензор (ножка) смоделирован в виде цилиндрической оболочки высоты  $H$  и радиуса  $R_0$ :  $0 \leq z \leq H$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $r = R_0$ , мембрана (стенка между суспензором и зародышем) - в виде круга радиуса  $R_0$ :  $z = H$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $r \leq R_0$ . Начальная форма клетки зародыша - полуэллипсоид вращения:  $r^2/R_0^2 + (z-H)^2/z_0^2 = 1$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $H \leq z \leq H + z_0$ . Форма клетки зародыша после деформирования - часть сфероида:  $r^2 + (z-H-S)^2 = R_1^2$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $H \leq z \leq H + S + R_1$ .

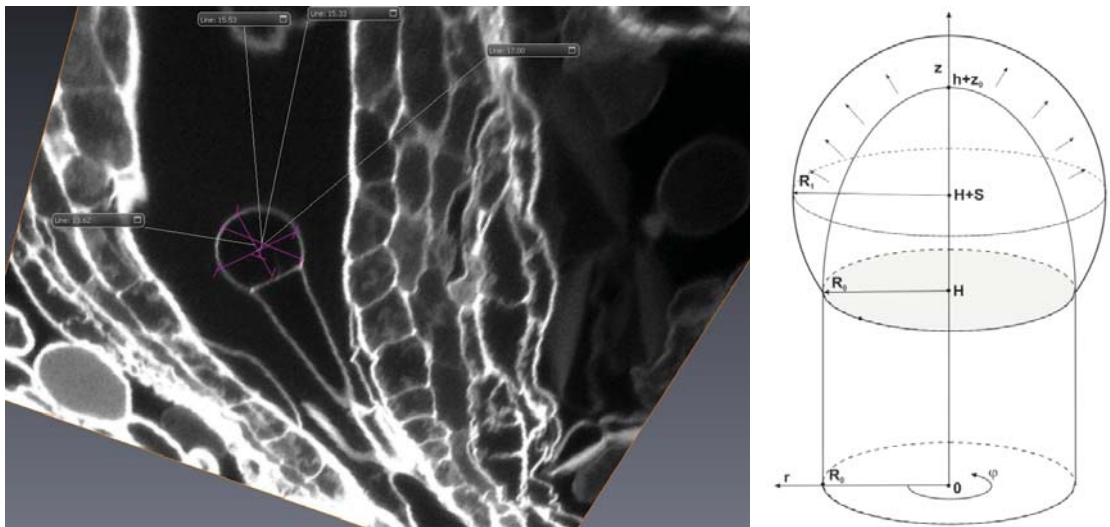


Рис. 2. Конфокальное изображение зародыша растения (слева) и его геометрическая модель (справа)

Предполагается, что толщина оболочки (стенки) до деформирования постоянна и равна 0.6 мкм. Оболочки нагружены равномерно распределенным внутренним давлением величины  $p$ . Расчеты проводились для следующих значений геометрических параметров:  $H = 10$  мкм,  $R_0 = 5.5$  мкм,  $z_0 = 13$  мкм.  $R_1 = 8.5$  мкм,  $S = 6.48$  мкм. Свойства материалов при моделировании рассматривались как изотропные, так и анизотропные.

Характеристики анизотропных (ортотропных) материалов рассчитывались с использованием структурной модели [3]. При этом предполагалось, что стенки клеток суспензора и зародыша мо-

гут упрочняться/ослабляться в окружном направлении, а разница свойств в меридиональном и нормальном к оболочке направлениям может компенсироваться за счет варьирования толщины оболочки. В таком случае выражения для эффективных характеристик материала имеют вид [3]:

$$E_r = E_z = \frac{E_a E_c}{\psi_a E_c + \psi_c E_a}, \quad E_\varphi = \psi_a E_a + \psi_c E_c, \quad \nu_{r\varphi} = \nu_{z\varphi} = \psi_a \nu_a + \psi_c \nu_c,$$

$$\nu_{rz} = \frac{\psi_c \nu_c E_a + \psi_a \nu_a E_c}{\psi_a E_c + \psi_c E_a}, \quad G = \frac{G_a G_c}{\psi_a E_c + \psi_c E_a}.$$

Здесь  $E_a, E_c$  - модули упругости (Юнга);  $\nu_a, \nu_c$  - коэффициенты Пуассона;  $\psi_a, \psi_c = 1 - \psi_a$  - удельное объемное содержание арматуры и связующего;  $\nu_{r\varphi}, \nu_{z\varphi}, \nu_{rz}$  - эффективные модули упругости;  $E_r, E_z, E_\varphi$  - эффективные сдвиговые коэффициенты;  $G$  - эффективный модуль сдвига. Далее в расчетах используются безразмерные приведенные модули Юнга, равные отношению модулей Юнга к внутреннему давлению. Задача линейного упругого деформирования решалась в среде ANSYS Mechanical™ с использованием трехмерных (объемных) конечных элементов.

Были рассмотрены три варианта обеспечения требуемой формы:

- оболочкой с изотропными слоями, управляемые параметры (параметры проектирования) - модули упругости материалов слоев  $E^{[k]}$ ;
- анизотропной оболочкой с различным уровнем упрочнения слоев в окружном направлении, параметры проектирования - интенсивности армирования  $\psi_a^{[k]}$  и модули упругости компонент-фаз материалов слоев;
- комбинированным вариантом оболочки, содержащей как упрочненные в окружном направлении, так и изотропные слои с различными механическими характеристиками.

В табл. приведены примеры законов распределений управляемых параметров и толщин слоев для перечисленных вариантов. В варианте (b) безразмерный модуль упругости матрицы  $E'_c = 6$ , волокон  $E'_a = 26.7$ . В варианте (c) в первом слое - композитный материал, аналогичный материалу оболочки (b), а слои 2-7 изотропные с различными механическими характеристиками.

**Таблица 1.** Результаты решения обратной задачи формообразования

Номер слоя k	Оболочка a)		Оболочка b)		Оболочка c)	
	Высота слоя по z, мкм	$E^{[k]}$	Высота слоя по z, мкм	$\psi_a^{[k]}$	Высота слоя по z, мкм	$E^{[k]}   \psi_a^{[k]}$
1	5	10	4	0.20	4	0.2 ( $\psi_a^{[k]}$ )
2	3	6.7	1	0.06	1	8.3
3	2	5.0	2	0.05	1	7.3
4	1	4.0	2	0.03	2	6.7
5	1	3.4	4	0.00	2	5.7
6	1	2.0	-	-	2	5.0
7	-	-	-	-	1	3.2

На рис. 3 представлены состояния оболочки до и после деформирования с обозначением расчетных слоев. Величины на графиках приведены в микрометрах.

Как следует из расчетов, требуемая конечная форма может быть достигнута в результате деформирования исходной оболочки с различными начальными свойствами материала стенок клетки зародыша. В общем случае решение поставленной обратной задачи не единственно. Для более точного определения механизмов формообразования необходимы дополнительные данные как о свойствах материала стенок клеток, так и о процессе изменения их формы. Тем не менее, во всех рассмотренных вариантах можно найти общие тенденции и закономерности. В частно-

сти, отметим, что характеристики жесткости материала по мере приближения к вершине зародыша уменьшаются. Это выражается как в уменьшении значений модулей упругости слоев для изотропного материала стенки клетки, так и в снижении содержания упрочняющих волокон в анизотропном случае.

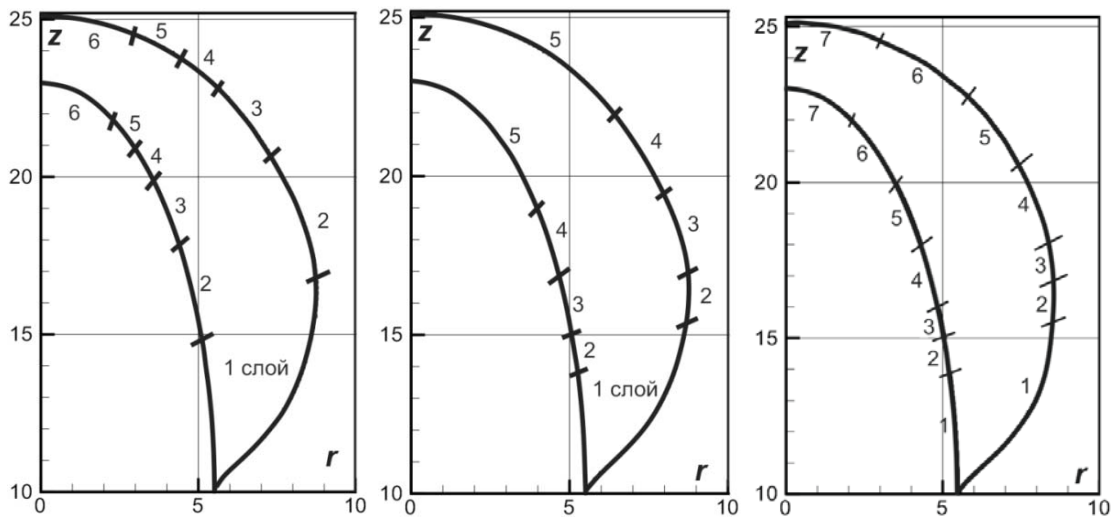


Рис. 3. Различные варианты перехода от начальной к требуемой форме оболочки

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

К настоящему времени накоплен значительный методический опыт в применении различных подходов к изучению живых объектов: от экспериментально-наблюдательных до автоматизированной обработки информации и математического моделирования.

В данной работе поставлена и решена обратная задача формообразования по определению механических характеристик материала клетки, позволяющих получить заранее известную геометрическую форму, полученную экспериментально с помощью метода конфокальной микроскопии. Решение задачи и его верификация выполнены с использованием метода конечных элементов, реализованного в пакетах ANSYS™ и COMSOL™. Показано, что требуемая конечная форма может быть достигнута в результате деформирования исходной оболочки с различными начальными свойствами материала стенок клетки зародыша. Таким образом, в общем случае решение поставленной обратной задачи не единственно. В рассмотренных вариантах достижения заданной формы найдены общие тенденции и закономерности, в частности, по распределению характеристик жесткости материала клетки от основания зародыша до его вершины.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в рамках проекта № 15.4 программ Президиума РАН, при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-12032-офи\_м)

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Голушко С.К., Немировский Ю.В. Прямые и обратные задачи механики композитных пластин и оболочек вращения. М.: Физматлит, 2008.
- [2] Fayant P., Girlanda O., Chebli Y. et. al. Finite element model of polar growth in pollen tubes // Plant Cell. 2010. V. 22. P. 2579-2593.
- [3] Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980.

## THE AUTOMATION OF THE ANALYSIS OF THE TEST RESULTS WITH THE HELP OF THE CALCULATED SCRIPT OF MS EXCEL

### АВТОМАТИЗАЦИЯ АНАЛИЗА РЕЗУЛЬТАТОВ ТЕСТИРОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ РАСЧЕТНОГО СЦЕНАРИЯ MS EXCEL

---

*This report presents the calculated script of MS Excel to evaluate the quality of the test and test items based on the tests results. The script identifies the test items that do not match to the level of preparedness of students, formulated unclear or have the incorrect distracters; determines the measure of the columns communication in the test results matrix, the uniformity of the distribution of the difficulty of the test items on the logits scale; the degree of the compliance of the level of preparedness of students and the level of difficulty of test items.*

---

#### ВВЕДЕНИЕ

Большой объем самостоятельной работы, предусмотренный ФГОС ВПО, предопределяет необходимость контроля своевременности выполнения заданий и уровня усвоения учебного материала. Тестирование обеспечивает широкий охват учебного материала, техничность проведения процедуры контроля, оперативность представления результатов испытаний. Совокупность заданий теста систематизирует дидактические единицы учебного материала дисциплины, отражает структуру учебной программы по дисциплине. Своевременный контроль учебного материала мотивирует студентов к систематической, планомерной работе по освоению дисциплины. Пробное тестирование и тестирование в режиме тренинга носит обучающий характер, адаптирует студента к этой форме контроля, служит «обратной связью» для анализа и улучшения качества теста.

Особенность педагогического теста как инструмента измерения состоит в том, что он «калибруется» в соответствии с группой испытуемых по выбранной модели измерения [1]. Результаты тестовых испытаний отражают одновременно степень подготовленности студента, уровень трудности заданий теста и недостатки в организации учебного процесса или процедуры тестирования. Анализ результатов тестирования выявляет тестовые задания, которые не соответствуют уровню подготовленности студентов, имеют невнятные формулировки или неработающие дистракторы, определяет степень соответствия уровня подготовленности студентов и уровня трудности тестовых заданий. Если качество теста не соответствует целям тестирования, то преподаватель корректирует тестовые задания, тесты, проводит консультации по неувоенным вопросам учебного материала. Затем тестирование, анализ результатов теста и редактирование повторяются заново. Экспериментальная база исследования - результаты самостоятельной работы студентов экономических специальностей Института экономики, управления и природопользования ФГАОУ ВПО СФУ в рамках интерактивного курса «Информатика». Учебный материал интерактивного курса систематизирован по модулям в соответствии со структурой теоретической части дисциплины «Информатика» [2]. Тестирование контролирует ритмичность работы студентов. Результаты тестирования используются преподавателем для оценки качества теста и учебного процесса, формирования накопительной оценки по дисциплине.

Цель данной работы - автоматизация анализа матрицы результатов тестирования для определения качественной оценки теста, которая выявляет слишком сложные или слишком простые тестовые задания, проверяет корректность набора дистракторов в заданиях теста, соответствие трудности тестовых заданий уровню подготовленности испытуемых. Актуальность данной рабо-

---

<sup>1</sup> Federal State Educational Institution of Higher Education "Siberian Federal University", Krasnoyarsk, Russia

ты определяется необходимостью оперативного получения оценки результатов тестирования. По результатам анализа преподаватель принимает решение о корректировке учебного процесса по дисциплине, редактировании тестовых заданий, повторении тестовых испытаний.

Для достижения поставленной цели необходимо, во-первых, с помощью тестовой оболочки системы «MOODLE» создать банк тестовых заданий, сформировать тесты и определить порядок их выполнения, во-вторых, разработать расчетный сценарий MS EXCEL для автоматизации анализа результатов тестирования для построения качественной оценки теста.

### **ИНТЕРАКТИВНЫЙ КУРС САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО «ИНФОРМАТИКЕ»**

Интерактивный курс «Информатика» разработан в системе управления обучением «MOODLE» (Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment) [3] для организации самостоятельной работы студентов по тематическим разделам дисциплины «Информатика». Он обеспечивает взаимосвязь студентов и преподавателей, включает банк тестовых заданий, сгруппированных по тематическим категориям, формирует тесты, организует электронное тестирование, формирует матрицу тестовых результатов, дает наглядное представление о результатах тестирования, сообщает студенту о результатах его обучения.

Каждый модуль интерактивного курса «Информатика» содержит основные сведения из теоретической части курса, методические указания к выполнению типовых заданий, демопримеры, задания для самостоятельной работы [4]. Модули используют управляющие элементы «MOODLE»: «ресурс», «задание» и «тест». В элементах типа «ресурс» размещаются сведения из теоретической части курса, методические указания к выполнению типовых заданий и демопримеры. Задания для самостоятельной работы размещаются в элементах типа «задание». Этот элемент организует взаимосвязь «студент-преподаватель». Выполнив задание, студент отправляет файл с решением на сайт, преподаватель размещает на сайте оценку выполненной работы и комментарии. Студент имеет возможность поправить указанные недостатки и загрузить на сайт исправленный вариант работы.

С помощью тестовой оболочки системы «MOODLE» сформирован банк тестовых заданий. Тестовые задания в нем группируются по тематическим группам - категориям. Используются тестовые задания следующих типов: «Множественный выбор», «Альтернативный вопрос», «Вопрос на соответствие» и «Короткий вопрос». К тестовому заданию типа «Множественный выбор» предлагается несколько вариантов ответов. При создании такого задания разработчик тестов определяет количество верных ответов (один или несколько), общую оценку за правильный ответ и оценки за неполные ответы, когда среди отмеченных ответов есть неверные или отмечены не все верные. Тестовое задание типа «Альтернативный вопрос» предполагает выбор из двух вариантов ответа, определяется оценка за правильный выбор. В случае ошибочного выбора баллы не начисляются. В тестовом задании типа «Вопрос на соответствие» указывается несколько вопросов и ответов к ним, оценка за этот вопрос определяется количеством правильно установленных соответствий. Ответом на тестовое задание типа «Короткий вопрос» является короткая фраза, которую студент набирает на клавиатуре.

После создания банка тестовых заданий с помощью тестовой оболочки системы «MOODLE» преподаватель формирует тесты и сохраняет их в элементах управления типа «Тест». Тесты тематического промежуточного контроля включаются в соответствующие модули интерактивного курса, тесты рубежного контроля выделены в отдельные модули. При составлении тематических тестов выбираются тестовые задания из соответствующих категорий, каждое задание включается в тест не более одного раза. Последовательность заданий в тесте случайная. Это обеспечивает более объективную оценку знаний, снижает вероятность списывания, уменьшает возможность подменить знания предмета заучиванием ответов.

При выполнении теста в обучающем режиме («Тренинг») каждое тестовое задание отображается на отдельной странице, представленное решение получает заранее назначенное число баллов.

Тест в режиме «Тренинга» можно выполнять многократно, за неверное решение насчитываются штрафные баллы. По окончании «Тренинга» студент имеет возможность просмотреть правильные ответы, вернуться к недостаточно хорошо усвоенным разделам курса и вновь пройти «Тренинг». Этот режим позволяет студенту самостоятельно оценить степень усвоения материала и время выполнения теста. Выполнение тестов в режиме пробного и контрольного тестирования предусматривает ограничение времени выполнения теста [5].

Матрица результатов тренинга и пробного тестирования передаётся в MS Excel. Она служит информационной базой для оценки теста как инструмента измерения уровня подготовленности студентов и уровня трудности тестовых заданий. Кроме того матрица результатов тестирования позволяет оценить корректность организации учебного процесса по дисциплине и процедуры тестирования.

### **КАЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА СВОЙСТВ ТЕСТА И ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ**

Традиционные формы контроля знаний (зачет, устный или письменный экзамен) обеспечивают фрагментарный контроль знаний. Устный экзамен не исключает влияния психологических аспектов взаимодействия студента и экзаменатора. Низкая технологичность устных и письменных контрольных работ не обеспечивает полноту охвата учебного материала, сопровождается большим объёмом физической и психологической нагрузки на преподавателя, не исключает случайных оценок. Одна и та же оценка может соответствовать различным уровням знаний, порой она зависит от уровня успеваемости группы. Высокий уровень технологичности компьютерного тестирования обеспечивает контроль большого объема учебного материала, многовариантность тестов, единовременный контроль испытуемых. Автоматизированная проверка результатов обеспечивает высокую скорость получения результатов тестирования, экономит трудозатраты преподавателя.

Тестовые задания отражают дидактическую структуру дисциплины - они включают вопросы по опорным элементам учебного материала, без которых знания теряют полноту и системность, становятся бессвязными. Тестовые задания требуют четких, заранее известных ответов.

Статистическая обработка матрицы тестовых результатов формирует качественную оценку теста для тестируемой группы - выявляет тестовые задания, которые сигнализируют о недостатках в организации учебного процесса (недостаточное число часов на тему, низкий уровень ее усвоения) или о нарушениях в процедуре тестирования (некорректные тестовые задания, несоответствие уровня подготовленности и уровня трудности задания) [1].

Алгоритмы обработки матрицы результатов тестирования включают: анализ профилей тестирования, расчет дисперсии результатов каждого тестового задания, соотношение «доля верных ответов - суммарный балл тестового задания», отражение уровня трудности тестовых заданий и степени подготовленности студентов на единой шкале логитов, проверка соответствия логитов трудности тестовых заданий логитам подготовленности студентов.

В случае обнаружения слабо усвоенных тем преподаватель принимает решение о дополнительных занятиях или консультациях. Если нарушена процедура тестирования, преподаватель редактирует или устраняет некорректные тестовые задания в соответствии с целевой направленностью теста.

Для оперативного получения качественной оценки свойств теста и тестовых заданий алгоритмы обработки матрицы результатов тестирования реализованы в среде электронных таблиц MS Excel.

### **АНАЛИЗ ПРОФИЛЕЙ ТЕСТИРОВАНИЯ**

Для анализа профилей тестирования расчётный сценарий MS Excel преобразует матрицу «сырых» тестовых баллов, сформированную системой «MOODLE» в дихотомическую таблицу. Чис-

ло столбцов таблицы -  $M$ ,  $j$ -тый столбец соответствует  $j$ -ому тестовому зданию  $j = (1, 2, \dots, M)$ . Число строк -  $N$ ,  $i$ -ая строка соответствует  $i$ -ому испытуемому ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Элемент таблицы  $a_{ij}$  соответствует ответу  $i$ -того студента на  $j$ -тое тестовое задание. Для верно или частично верно выполненных заданий  $a_{ij}$  полагается равным 1, для неправильных ответов - нулю. В случае пропущенного ответа  $a_{ij}$  содержат значение «нет информации».

Рассчитывается индивидуальный балл студента (количество верных ответов  $i$ -ого испытуемого):

$$X_i = \sum_{j=1}^M a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M$$

и балл тестового задания (количество верных ответов на  $j$ -тое задание):

$$R_j = \sum_{i=1}^N a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M.$$

Задания с отсутствующими ответами, а также задания, с которыми не справился ни один студент или все справились успешно, не имеют значения для ранжирования и дифференциации индивидуальных баллов. Поэтому столбцы, соответствующие таким заданиям, исключаются из матрицы результатов тестирования.

Строки редуцированной матрицы упорядочиваются по индивидуальному баллу студента по убыванию сверху вниз, столбцы - по убыванию балла тестового задания слева направо. Верхняя часть упорядоченной матрицы соответствует наиболее успешным студентам, имеющим высокий индивидуальный балл. Левая часть матрицы - более легким заданиям, имеющим большее число верных ответов, более высокие индивидуальные баллы.

The screenshot shows an Excel spreadsheet with a table of test results. The table has columns for student ID, test item IDs (#2 to #12), and individual student scores. Below the table, there is a summary of distorted profiles.

Студент	#2	#10	#8	#4	#5	#3	#6	#7	#9	#1	Индивидуальный балл студента
04b-01	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	9
04b-02	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	9
04b-03	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	8
04b-04	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	8
04b-11	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	6
04b-05	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	4
04b-06	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	4
04b-08	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	4
04b-09	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	4
04b-10	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2
04b-07	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
04b-12	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Балл тестового задания	11	11	9	7	6	4	4	4	3	1	

Удалены тестовые задания: нет  
 Искаженные профили студентов: 04b-04, 04b-11, 04b-05  
 Тестовые задания, вызвавшие искажение профиля: #10, #5, #3, #6, #7, #9, #1

Рис. 1. Сообщение о результатах поиска искаженных профилей тестирования в рабочем листе MS Excel

Строка матрицы соответствует профилю тестирования студента. В начале профиля располагается последовательность ответов студента на более простые задания, затем - на более сложные. Студент, успешно выполнивший сложные задания (имеет единицы в правой стороне строки профиля), должен дать верные ответы на более легкие задания (единицы в левой стороне строки профиля). В правильном профиле строка ответов заканчивается последовательностью нулей. В искаженном профиле нули и верные ответы следуют друг за другом, беспорядочно чередуясь,



при этом последовательность верных ответов прерывается нулями и наоборот. Наличие искаженного профиля сигнализирует о некорректных тестовых заданиях, о неправильной структуре знаний студентов, об ошибках в процедуре проведения тестирования. Для тестовых заданий, из-за которых появились искажения профиля тестирования, должна быть отредактирована формулировка или изменен набор дистракторов. Возможно, были нарушения учебного процесса или процедуры тестирования [1].

По окончании работы сценарий высвечивает сообщение, в котором указывает студентов, имеющих искаженные профили тестирования, и номера удаленных и проблемных тестовых заданий (рис. 1).

Экспертное решение относительно корректности матрицы тестовых результатов принимает преподаватель. Если необходимо, он проводит консультации по слабо усвоенным темам учебного материала и корректировку тестовых заданий с учетом целей тестирования. Затем вновь проводится пробное тестирование и поиск искаженных профилей.

### РАСЧЕТ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТРИЦЫ РЕЗУЛЬТАТОВ ТЕСТИРОВАНИЯ

Базой для расчета дисперсии результатов каждого тестового задания и соотношения «доля верных ответов - суммарный балл тестового задания по всем студентам» служит матрица тестовых испытаний с «сырыми» баллами, она отражается в таблицу MS Excel. Значение ячейки таблицы  $a_{ij}$  равно количеству баллов, начисленных за ответ  $i$ -того студента на  $j$ -тое тестовое задание ( $i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, M$ ). Для пропущенных заданий значение  $a_{ij}$  равно нулю. Рассчитываются статистические характеристики:

- индивидуальный балл студента - сумма всех баллов, полученных  $i$ -тым студентом за все задания:  $X_i = \sum_{j=1}^M a_{ij}, i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, M,$
- суммарный балл тестового задания - сумма всех баллов, полученных за  $j$ -тое задание всеми студентами:  $Y_j = \sum_{i=1}^N a_{ij}, i = 1, 2, \dots, N, j = 1, \dots, M,$
- общее число представленных ответов на каждое тестовое задание,
- общее число представленных ответов каждым студентом,
- количество верных и количество неверных ответов студента,
- доля верных и неверных ответов в общем количестве ответов на тестовое задание,
- дисперсия результатов тестовых испытаний по каждому тестовому заданию.

При расчете дисперсии тестовых баллов в качестве среднего значения балла тестового задания берется мода распределения или среднее значение по всем модам, если их несколько. Результаты расчетов сценарий отражает на рабочем листе (рис. 2) и на точечной диаграмме (рис. 3).

Величина дисперсии является индикатором дифференцирующей способности тестового задания. Малая (или нулевая) дисперсия сигнализирует о том, что тестовое задание не способно дифференцировать результаты тестирования. Большая дисперсия отражает неоднородность в результатах испытаний, указывает на возможные нарушения процедуры тестирования, некорректно понятые формулировки заданий. Для ранжирования наиболее оптимальна дисперсия нормального закона распределения [6]. Например, на схеме (рис. 2) наименьшее значение дисперсии имеют результаты тестовых заданий #2 (0,09) и #8 (0,10), возможно, потребуется редактирование текста или набора дистракторов этих заданий.

Результаты анализа соотношения «доля верных ответов - суммарный балл тестового задания по всем студентам» служат сигналом о неблагополучных тестовых заданиях. Например, тестовое

задание с номером #2 имеет большую долю верных ответов (0,9) и небольшой суммарный балл (181,60) (рис. 3).

	Номер вопроса	Доля верных ответов	Суммарный балл тестового задания	"Потерянные" баллы	Всего ответов - 165		Доля неверных ответов	Дисперсия тестовых баллов	
					Количество верных ответов	Количество неверных ответов			
366	#10	0,19	62,0	268	31	134	0,81	0,15	
367	#1	0,25	82,0	248	41	124	0,75	0,19	
368	#9	0,26	86,0	244	43	122	0,74	0,19	
369	#7	0,36	118,0	212	59	106	0,64	0,23	
370	#4	0,41	136,0	194	68	97	0,59	0,24	
371	#5	0,48	160,0	170	80	85	0,52	0,25	
372	#6	0,55	180,0	150	90	75	0,45	0,25	
373	#3	0,82	212,0	118	135	30	0,18	0,15	
374	#8	0,89	270,7	59,32	147	18	0,11	0,10	
375	#2	0,90	181,6	148,4	148	17	0,10	0,09	
378	Тестовые задания с наименьшими значениями дисперсий №№						#2, #8, #3, #10		
379	Наибольшая доля верных ответов:				0,9	у задания № #2			
380	суммарный балл задания:				181,6				
381	"потерянные" баллы:				148,4				

Рис. 2. Расчет статистических показателей результатов тестовых заданий в рабочем листе MS Excel

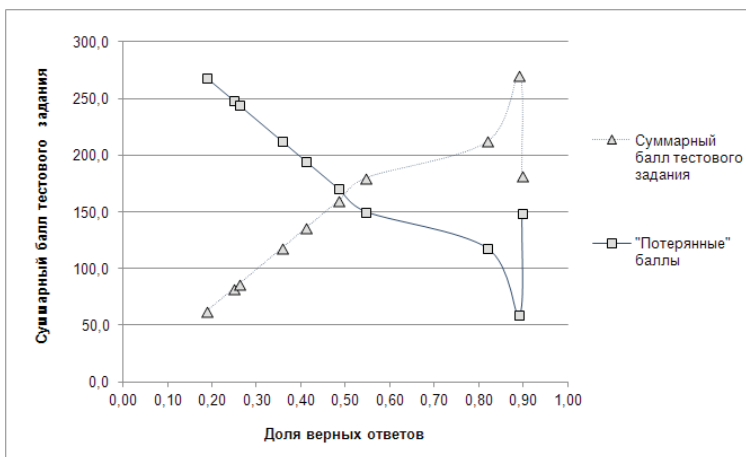


Рис. 3. Соотношение «доля верных ответов - суммарный балл тестового задания по всем студентам»

Возможно, в композиции этого тестового задания допущены ошибки: нечеткие формулировки задания или дистракторов, некорректная балансировка баллов за верный выбор дистракторов.

## СООТВЕТСТВИЕ УРОВНЯ ТРУДНОСТИ ТЕСТА И УРОВНЯ ПОДГОТОВЛЕННОСТИ СТУДЕНТОВ

Оценка соответствия уровня трудности тестовых заданий и уровня подготовленности студентов проводится по матрице результатов тестирования проектируемого теста. В «Теории измерения Г. Раша» Г. Раш вводит единую единицу измерения для уровня трудности и уровня подготовленности - логит.

В матрице результатов тестирования значение  $a_{ij}$  равно количеству баллов, начисленных за ответ  $i$ -го студента на  $j$ -тое тестовое задание ( $i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, M$ ). Для пропущенных заданий  $a_{ij}$  равно нулю. Рассчитываются:

$p_i, i = 1, 2, \dots, N$  - доля правильных ответов испытуемого  $i$ , по всем заданиям теста,

$q_i, i = 1, 2, \dots, N$  - доля неправильных ответов того же испытуемого  $i$ , по всем заданиям теста,

$g_i = \ln \frac{p_i}{q_i}, i = 1, 2, \dots, N$  - уровень подготовленности (логит подготовленности)  $i$ -го студента,

$p_j, j = 1, 2, \dots, M$  - доля правильных ответов на  $j$ -тое тестовое задание по всем испытуемым,

$q_j, j = 1, 2, \dots, M$  - доля неправильных ответов на  $j$ -тое тестовое задание по всем испытуемым,

$\beta_j = \ln \frac{q_j}{p_j}, j = 1, 2, \dots, M$  - уровень трудности (логит трудности)  $j$ -того тестового задания по всем испытуемым.

Шкала логитов выявляет несоответствие между уровнем подготовки студентов и степенью трудности тестовых заданий. В идеальном случае уровень трудности тестового задания на шкале логитов должен быть равномерно распределен на всем диапазоне значений степени подготовленности студента [6]. Если в тест включено тестовое задание повышенной трудности, не соответствующей уровню подготовленности студентов тестируемой группы, никто из студентов его не выполняет, для такого задания все элементы столбца будут равны нулю. Если задание простое, все студенты его выполняют успешно, все элементы столбца матрицы результатов для этого задания равны единице. И в том, и в другом случае тест не соответствует испытуемой группе, не дифференцирует и не упорядочивает результаты.

Представленный сценарий MS Excel проводит расчет уровня подготовленности студентов и уровня трудности тестовых заданий по матрице тестовых результатов, результаты расчетов отображает в таблице и на совмещенной диаграмме. По горизонтальной оси - логиты, основание столбика гистограммы - интервал значений логитов. В верхней части диаграммы - гистограмма частотного распределения уровня подготовленности студентов, высота верхнего столбика диаграммы - частота уровня подготовленности студентов. В нижней части - гистограмма частотного распределения уровня трудности тестовых заданий, высота нижнего столбика диаграммы - частота уровня трудности тестовых заданий.

Например, на схеме (рис. 4) отражены частоты результатов испытаний и частоты трудностей тестовых заданий, гистограммы их частотных распределений. В испытаниях принимали участие 165 студентов.

Большее количество студентов продемонстрировали средний уровень подготовленности - в интервале от -1,5 до 0,5 логитов, на этом же интервале группируются уровни трудности тестовых заданий. Если цель тестирования состоит в выявлении таких студентов, то полученная оценка подтверждает корректность проведенного отбора.

Тест не способен дифференцировать и ранжировать результаты студентов со слабыми (от -3 до -2 логитов) и высокими (выше 1 логита) уровнями подготовки. Для дифференцирования результатов слабого и сильного уровней подготовки необходима корректировка теста, учебного процесса или тестирования.

На схеме (рис. 5) приведена диаграмма качественной оценки отредактированного теста по ре-

зультатам испытаний на той же группе студентов.

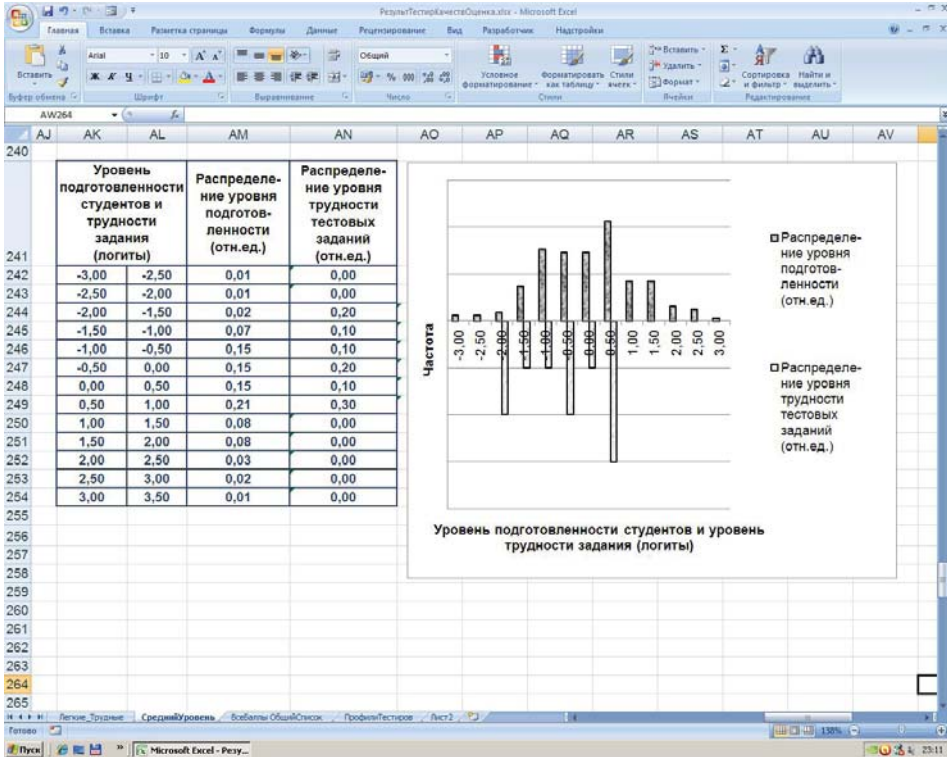


Рис. 4. Демонстрация отсутствия в тесте высокого уровня трудности и простых заданий

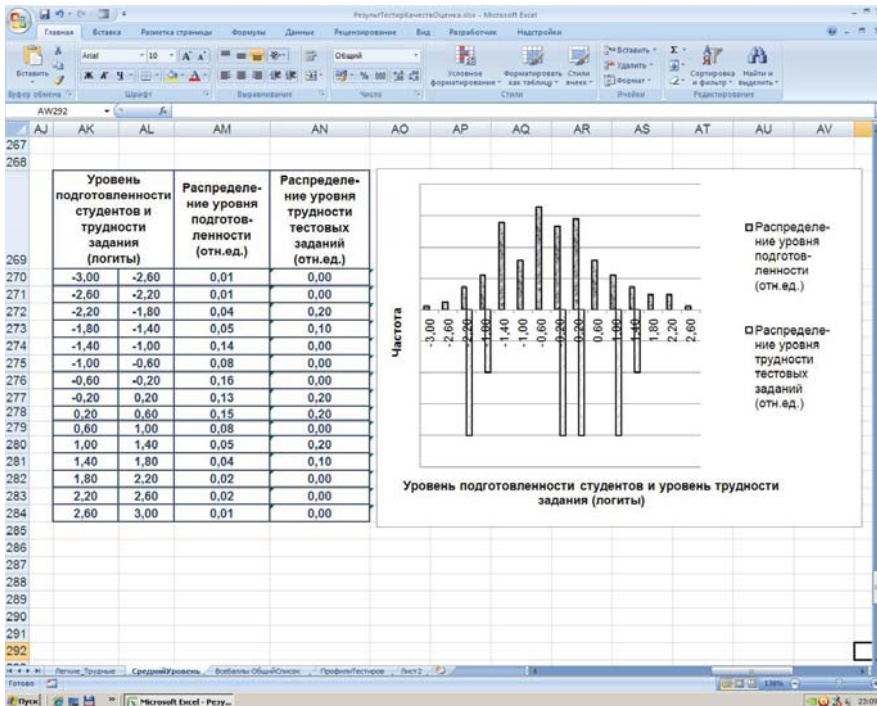


Рис. 5. Демонстрация отсутствия в тесте заданий среднего уровня трудности

Диаграмма демонстрирует некорректность композиции теста. Тест диагностирует наличие студентов, уровень подготовленности которых находится в интервале от -1,4 до 0,2 логита, но не выявляет заданий с таким уровнем трудности.

Для проведения корректных измерений уровень трудности тестовых заданий должен соответствовать уровню подготовленности студентов и установленным целям тестирования. С учетом целевой направленности теста преподаватель принимает экспертное решение относительно редактирования теста, тестовых заданий или учебного процесса.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В данной работе представлены алгоритмы анализа матрицы результатов тестирования с целью построения оценки качества теста: анализ профилей тестирования, расчет дисперсии результатов тестового задания, соотношение «доля верных ответов - суммарный балл тестового задания», проверка соответствия логитов трудности тестовых заданий логитам подготовленности студентов. Алгоритмы реализованы с помощью расчетного сценария электронных таблиц MS Excel. Результаты работы сценария - диагностические сообщения, таблицы и диаграммы формируют качественную оценку соответствия теста установленным целям тестирования.

Процесс самостоятельной работы по «Информатике» студентов-экономистов организован в системе управления обучением «MOODLE». Для повышения эффективности самостоятельной работы проводятся контрольные мероприятия - тематическое, рубежное и итоговое тестирование. Тестовая система, встроенная в «MOODLE», организует процесс тестирования и формирует матрицу результатов тестирования, которую передает ее в электронные таблицы MS Excel для оперативной оценки качества теста. По результатам работы сценария преподаватель принимает решение об устранении обнаруженных нарушений - о необходимой корректировке тестовых заданий, теста, учебного процесса.

Для определения доверительного интервала истинного балла студента требуется дальнейшая статистическая обработка матрицы результатов тестирования.

## **АПРОБАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ**

Созданный сценарий качественной оценки матрицы результатов тестирования студентов экономических специальностей по «Информатике» был апробирован в 2012-2013 учебном году в Институте экономики, управления и природопользования ФГАОУ ВПО СФУ.

## **ЛИТЕРАТУРА**

- [1] Аванесов В.С. Основы педагогической теории измерений. // Педагогические измерения. №1. 2004. URL: <http://testolog.narod.ru/>
- [2] Пак Н.И. Информатика. Красноярск: Краснояр. гос. ун-т. 2006.
- [3] Анисимов А.М. Работа в системе дистанционного обучения Moodle. Харьков: ХНАГХ. 2009.
- [4] Андреева Н.М. Организация практической работы студентов по дисциплине «Информатика» в системе управления обучением «MOODLE». // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения-2012. Материалы научной конференции. 16-21 апреля 2012 г. СПб: БАН, 2012. 264 с. С. 213-215.
- [5] Толстобров, А.П., Коржик И.А. Возможности анализа и повышения качества тестовых заданий при использовании сетевой системы управления обучением Moodle. // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Системный анализ и информационные технологии. М.: Воронеж. 2008. № 2. С. 100-106.
- [6] Ким В.С. Тестирование учебных достижений. Уссурийск: Издательство УГПИ. 2007.

## ALGORITHMS OF RECOGNITION AND DETERMINATION OF PERCENTAGE PHASE CONSTITUTION IN ALLOYS

### АЛГОРИТМЫ РАСПОЗНАВАНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЦЕНТНОГО СООТНОШЕНИЯ ФАЗ В СПЛАВАХ

---

*New algorithm of the phase recognition of alloys is devised. The algorithm is based on the main principles of metallography, the methods of fuzzy mathematics and the statistic methods of the pattern recognition. The algorithm enables one to construct the mathematical model of every phase as a fuzzy set with the use of the check points in the picture. An information system was developed on the base of this algorithm. The system is capable of handling the black-and-white and color microphotography of the multiphase alloys involving within ten phases. It makes possible recognition of the alloy phases and calculation of the percentage phase composition of alloys.*

---

#### ВВЕДЕНИЕ

Методы количественной оценки микростроения металлов и сплавов имеют значительное распространение в металлографической практике. Количественное соотношение микрочастиц и определение фазового состава позволяет определить марку сплава, его химический состав и механические свойства (твердость, прочность), что объясняет актуальность создания информационных систем для решения задач металлографии.

Объектом анализа является растровое изображение микроструктуры сплава. Исходный материал для обработки на компьютере может быть получен разными путями: сканирование иллюстрации, загрузкой готового изображения или трансляцией изображения от цифровой фото- или видеокамеры. Растровое изображение может состоять из нескольких областей, соприкасающихся только границами. Каждая такая область является графическим объектом.

Любой металл или сплав с точки зрения его пространственного строения представляет собой конгломерат, состоящий из множества микроскопических тел, называемых микрочастицами, которые заполняют исследуемый участок пространства и прочно связаны между собою по контактными поверхностями (рис. 1).

Всякую микроскопическую частицу следует рассматривать как геометрическое тело микроскопических масштабов. Как и всякое геометрическое тело, микрочастица обладает вполне определенной формой и геометрическими параметрами - линейными размерами, величиной поверхности, объемом и так далее. Вполне естественно воспользоваться именно этими геометрическими величинами для количественной оценки микроскопических частиц и структуры в целом как их совокупности. Однако в объеме исследуемого металла едва ли найдутся хотя бы две микрочастицы, полностью тождественные по форме и размерам, поэтому можно говорить только об использовании статистически средних величин геометрических параметров. Следует отметить, что микроскопическая структура, представляющая практически бесконечное множество однотипных микрочастиц и их структурных элементов, - чрезвычайно благоприятный объект для применения к нему статистических методов исследования и анализа.

Все вышесказанное в полной мере относится к графическому (растровому) изображению сплава, являющемуся отражением плоскостного строения сечений микрочастиц и их взаимного расположения на шлифе. Растровое изображение может состоять из нескольких областей, соприкасающихся только по их границам. Каждая такая область является графическим объектом.

<sup>1</sup> Siberian federal University, Krasnoyarsk, Russia

Исходный материал для обработки на компьютере может быть получен разными путями и с разным разрешением: сканирование иллюстрации, загрузкой готового изображения или трансляцией изображения от цифровой фото- или видеокамеры. Кроме того, различные дефекты обработки поверхности шлифа, цветовая неоднородность, а также потеря четкости растрового изображения при масштабировании могут приводить к искажению или размытости границ графического объекта.

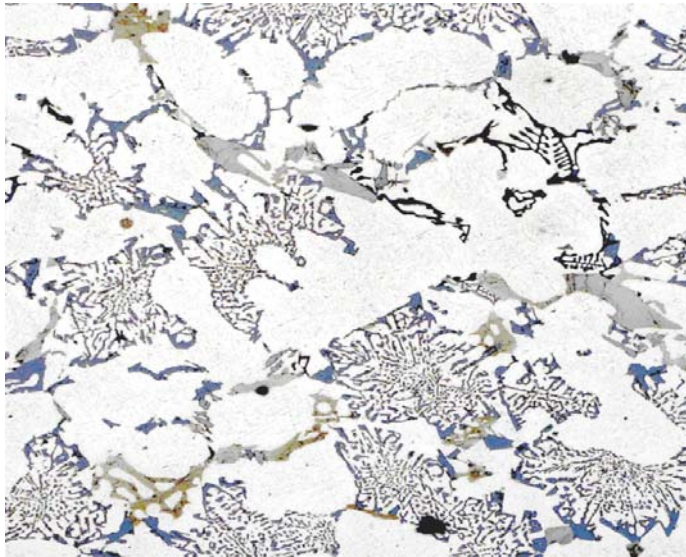


Рис. 1. Микроструктура сплава

Перечисленные соображения указывают на то, что в данном случае наиболее подходящими для моделирования графического объекта и решения задач микроструктурного анализа являются методы математической статистики и нечеткой математики.

В настоящей работе представлен алгоритм распознавания многосвязных графических объектов, который моделирует графический объект в виде нечеткого множества и использует байесовский линейный классификатор [1]. Под многосвязным графическим объектом мы будем понимать изображение геометрической структуры, состоящее из нескольких областей, изолированных друг от друга. На основе этого алгоритма создана информационная система [2], способная обрабатывать изображения в оттенках серого и цветные изображения многофазных сплавов, включающих до 10 фаз и решать задачи металлографии, в частности определять структурный объемный состав сплава.

### АЛГОРИТМ РАСПОЗНАВАНИЯ ФАЗ

Каждый из графических объектов на цветном растровом изображении микроструктуры сплава будем называть фазой. Количество фаз обозначим через  $N$ .

Растр или растровый массив представляет собой совокупность битов, расположенных на сетчатом поле - канве. Основным элементом растрового изображения является пиксель. Как известно, цвет каждого пикселя состоит из трех основных цветов и может быть представлен точки с тремя координатами. Кроме информации о цвете каждого пикселя в растровом файле хранятся размеры изображения в пикселях по горизонтали и по вертикали и координаты каждого пикселя.

Пусть  $D$  - вся цветовая шкала. Цветовую шкалу  $D$  представим как множество точек с координатами  $r, g, b$ , где  $r, g$  и  $b$ , - это значение цветовых каналов красного, зеленого и синего. Тогда каждой фазе можно представить в соответствие некоторое подмножество  $D_i$  множества  $D, i=1,2,\dots,N$ . Причем

$$\bigcup_{i=1}^N D_i = D$$

и при любых  $i$  и  $j$ ,  $i \neq j$ , выполняется  $D_i \cap D_j = \emptyset$ .

Введем для каждой точки изображения дополнительный параметр  $\alpha$ , значение которого равно номеру фазы, к которой относится точка,  $\alpha=1,2,\dots,N$ . Если принадлежность точки какой-либо фазе еще не определена, то принимаем  $\alpha=0$ . Математическая модель каждой фазы строится в виде нечеткого множества. Алгоритм построения математической модели множества  $D_i$  начинается со статистической экспертизы, состоящей из следующих этапов.

Этап 1. Пусть известно множество  $z_i$  контрольных точек для  $i$ -й фазы,  $i=1,2,\dots,N$ . Число элементов во всех  $z_i$  предполагается одинаковым и равно  $n$ . Кроме того, считаем, что если точка  $M$  из  $z_i$  принадлежит  $i$ -й фазе, то этой фазе принадлежит и некоторая окрестность  $U_M$ , т. е. квадрат с центром в точке  $M$  (в частности, восемь соседних точек). Такой подход соответствует основной идее алгоритма построения бесконечного исходного множества альтернатив в задачах принятия решений [3]. Таким образом, мы получаем множество  $\bigcup_{i=1}^n U_{M_i} = Z_i$ , состоящее из  $m$  элементов, отнесенных к  $i$ -й фазе.

Этап 2. Для изображений в оттенках серого, цветовой спектр которых состоит из 256 оттенков, строится статистическое распределение оттенков для каждой из фаз. Тем самым определяются статистические вероятности  $p'_{ki}$ , наличия  $k$ -го оттенка в  $i$ -й фазе,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Обозначим статистические вероятности наличия оттенка точки  $M$  изображения через  $p'_i(M)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Значения функции принадлежности  $i$ -й фазы для каждой точки  $M$  (вероятности отнесения точки  $M$  к  $i$ -й фазе) находятся по формуле

$$\mu_i(M) = p'_i(M) \left[ \sum_{j=1}^N p'_j(M) \right]^{-1}.$$

В цветных изображениях цвет каждой точки задается тремя координатами  $r, g, b$ , поэтому он описывается трехмерной случайной величиной  $(R, G, B)$ . Множество  $Z_i$  в этом случае представляет собой статистическую выборку  $(R^i, G^i, B^i)$  из генеральной совокупности значений данной трехмерной случайной величины.

По полученной выборке  $Z_i$  находим центр рассеивания, координатами которого являются несмещенные оценки математических ожиданий (выборочное среднее)  $\bar{r}_e^i, \bar{g}_e^i, \bar{b}_e^i$ . Затем определяем исправленные средние квадратические отклонения по формулам

$$\bar{\sigma}_r^i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (r_k^i - \bar{r}_e^i)^2},$$

$$\bar{\sigma}_g^i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (g_k^i - \bar{g}_e^i)^2},$$

$$\bar{\sigma}_b^i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (b_k^i - \bar{b}_e^i)^2}$$

и вычисляем границы доверительных интервалов для каждого из математических ожиданий  $(m_r^i, m_g^i, m_b^i)$  случайных величин  $R^i, G^i$  и  $B^i$  соответственно, предполагая, что эти величины подчиняются нормальному закону. Доверительные интервалы при заданной доверительной вероятности  $\gamma$  имеют вид



$$\begin{aligned}
(\bar{r}_e^i - t_\gamma \bar{\sigma}_r^i / \sqrt{n} < R^i < \bar{r}_e^i + t_\gamma \bar{\sigma}_r^i / \sqrt{n}), \\
(\bar{g}_e^i - t_\gamma \bar{\sigma}_g^i / \sqrt{n} < G^i < \bar{g}_e^i + t_\gamma \bar{\sigma}_g^i / \sqrt{n}), \\
(\bar{b}_e^i - t_\gamma \bar{\sigma}_b^i / \sqrt{n} < B^i < \bar{b}_e^i + t_\gamma \bar{\sigma}_b^i / \sqrt{n}),
\end{aligned}$$

где  $t_\gamma$  - это квантиль распределения Стьюдента при заданных  $\gamma$  и  $n$ .

Строим шар  $\mathbb{W}_i$  с центром в точке  $(\bar{r}_e^i, \bar{g}_e^i, \bar{b}_e^i)$  радиуса

$$\rho_i = \sqrt{(\delta_r^i)^2 + (\delta_g^i)^2 + (\delta_b^i)^2},$$

где  $\delta_r^i = t_\gamma \frac{\bar{\sigma}_r^i}{\sqrt{n}}$ ,  $\delta_g^i = t_\gamma \frac{\bar{\sigma}_g^i}{\sqrt{n}}$ ,  $\delta_b^i = t_\gamma \frac{\bar{\sigma}_b^i}{\sqrt{n}}$ .

Этап 3. Каждый пиксель изображения проверяется на принадлежность к одной из фаз  $i$ -й или  $j$ -й с помощью байесовского решающего правила [1].

Для изображений в оттенках серого используем построенные функции принадлежности и следующее решающее правило: если

$$\max_{i=1, \dots, N} \mu_i(M) = \mu_{i^*}(M),$$

то точка  $M$  относится к фазе с номером  $i^*$ .

Для цветных изображений все точки, попадающие в шар  $\mathbb{W}_i$ , будем относить к  $i$ -й фазе. Во всех остальных случаях (в том числе и в случае, когда точка попадает более чем в один шар) применяется следующий алгоритм.

Точка проверяется на принадлежность к одной из двух фаз  $i$ -й или  $j$ -й с помощью байесовского решающего правила для нормально распределенных случайных величин [4], которое в данном случае принимает вид:

$$\begin{aligned}
h(X) = \frac{1}{2D_{\text{общ}}^i} ((R - \bar{r}_e^i)^2 + (G - \bar{g}_e^i)^2 + (B - \bar{b}_e^i)^2) - \\
- \frac{1}{2D_{\text{общ}}^j} ((R - \bar{r}_e^j)^2 + (G - \bar{g}_e^j)^2 + (B - \bar{b}_e^j)^2) + \frac{3}{2} \ln \left( \frac{D_{\text{общ}}^i}{D_{\text{общ}}^j} \right) \leq 0 \rightarrow X \in \left\{ \omega_j, \right. \\
\left. \omega_i \right\}, \quad (1)
\end{aligned}$$

где  $D_{\text{общ}}^i = \sqrt[3]{D_R^i \cdot D_G^i \cdot D_B^i}$  - общая дисперсия  $i$ -й фазы,  $D_R^i = (\bar{\sigma}_r^i)^2$ ,  $D_G^i = (\bar{\sigma}_g^i)^2$ ,  $D_B^i = (\bar{\sigma}_b^i)^2$  - дисперсии основных цветов. Далее, по этому же правилу точка проверяется на принадлежность к выбранной фазе и следующей из еще не проверенных фаз. Таким образом, после проверки всех фаз определяется конечная принадлежность точки к одной из них.

Результаты работы алгоритма (Рис. 2) показывают, что он обеспечивает достаточно высокую точность распознавания объектов. Причем качество распознавания фаз улучшается с повышением однородности структуры сплавов.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТРУКТУРНОГО ОБЪЕМНОГО СОСТАВА СПЛАВА

Методы определения структурного объемного состава сплава основываются на так называемом принципе Кавальери [4].

Применительно к количественному микроскопическому анализу принцип Кавальери состоит в следующем: если несколько групп контуров на плоскости, расположенных между параллельными прямыми, имеют пересечения (отрезки), длины которых находятся в постоянном отношении на любой линии, параллельной двум данным, то площади этих групп контуров

находятся в том же отношении (Рис. 3).

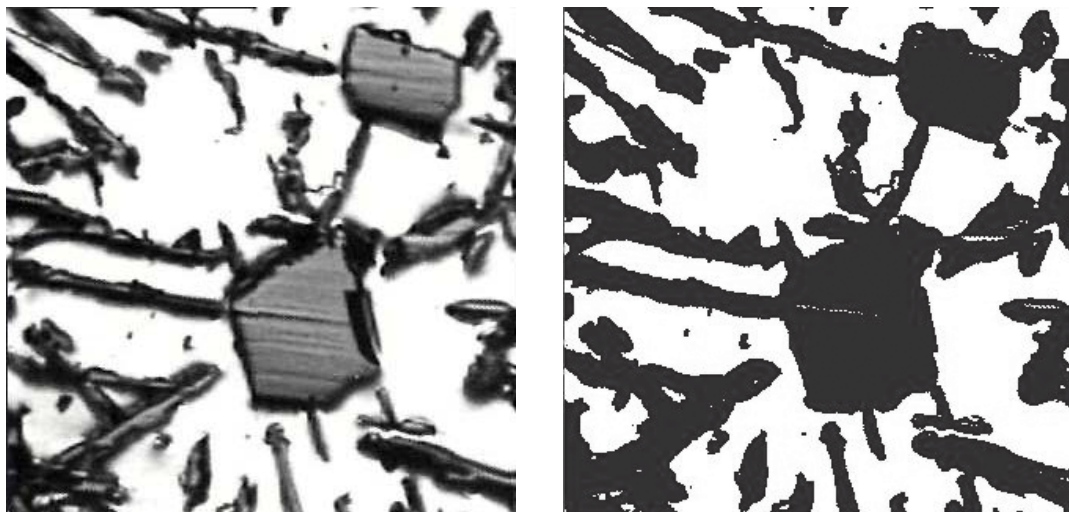


Рис. 2. Результаты распознавания фаз (справа) двухфазного сплава алюминия с кремнием (слева) с помощью программы «Analyzer v2.4».

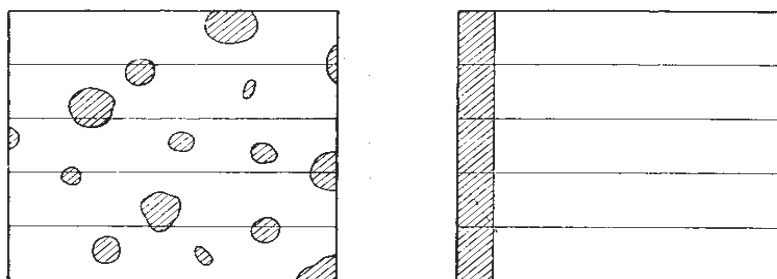


Рис. 3. Схема структурного двухфазного сплава с равномерным распределением второй фазы в матрице (на плоскости сечения)

Используя принцип Кавальери, можно заменить измерение площадей двух сравниваемых фигур измерением отрезков прямых линий, а измерение объемов двух сравниваемых тел - измерением площадей. Иначе говоря, принцип Кавальери дает возможность понизить на одну степень размерность измеряемых элементов по сравнению с размерностью самих сравниваемых объектов. Таким образом, долю объема сплава, занятую некоторой фазой, можно определить с помощью измерения суммарной площади сечений микрочастиц этой фазы на площади шлифа.

Алгоритм определения структурного объемного состава сплава включает следующие этапы:

- а) построение модели каждой фазы по алгоритму распознавания фаз, описанному выше;
- б) перебор всех точек изображения и классификация цвета по решающему правилу.

$$S_k = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^L h_k(C(i, j)), \quad k = 1, \dots, n,$$

где  $K \times L$  - размеры изображения в пикселях,  $C(i, j)$  - значение цвета пикселя  $(i, j)$ ;  $S_k$  - количество точек, отнесенных к  $k$ -й фазе, функция  $h_k(C(i, j))$  принимает значение 1, если пиксель  $(i, j)$  отнесен к  $k$ -й фазе, и 0 в противном случае;

- в) вычисление процентного соотношения площадей фаз:

$$\frac{S_k}{K \cdot L} \cdot 100\%.$$

На основе этого алгоритма было создано программное приложение «Analizer v2.4» [2], которое распознает графические объекты на цветных изображениях (рис. 4) и производит количественный анализ фазового состава сплавов. При этом подразумевается, что пользователь знает химический состав сплава. Программное приложение имеет простой, «интуитивный» интерфейс, обеспечивающий комфортную работу человеку знакомому с компьютером на уровне простого пользователя; автоматически компоновать изображения в архивы; сохраняет как сам архив, так и информацию, полученную в процессе работы, для последующего уточнения. Программа обеспечивает возможность продолжения работы и пополнения архива в дальнейшем; создает отчеты в собственных формах без участия программ-посредников (MS Word, MS Excel и подобных). База статистических данных хранится независимо от сторонних приложений.

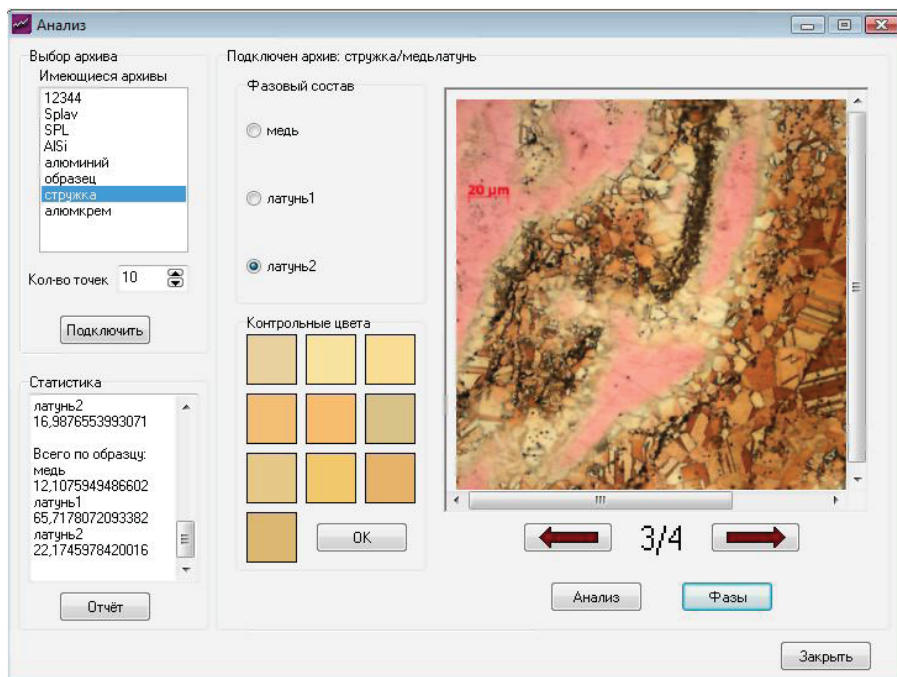


Рис. 4. Окно распознавания и расчета процентного соотношения фаз программы «Analizer v2.4».

В программе предоставлена возможность задавать количество фаз в текущем сплаве и количество контрольных точек для каждой фазы (не более 10). Приложение может обрабатывать любое число полей. Причем обучившись на контрольных точках одного поля, оно обчисляет все остальные поля автоматически. Время работы программы с одним образцом составляет не больше 10 минут. Численные эксперименты, проведенные на различных сплавах алюминия и меди, показали, что статистическая погрешность определения процентного соотношения фаз составляет в среднем 2-3%.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов. М.: Наука, 1979.
- [2] Любанова А.Ш., Аникина В.И. Программа для ЭВМ «Analizer v2.4». Роспатент. Регистрационное свидетельство № 2010616883 от 14.10.2010.
- [3] Теория выбора и принятия решений / И.М. Макаров, Т.М. Виноградская, А.А. Рубчинский, В.Б. Соколов. М.: Наука, 1982.
- [4] Салтыков С.А. Стереометрическая металлография. М.: Металлургия, 1970.

## MATHEMATICAL MODELLING OF HYDRATE FORMATION DURING NATURAL GAS PRODUCTION

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ ГИДРАТОВ ПРИ ДОБЫЧЕ ПРИРОДНОГО ГАЗА

---

*The problem of heat exchange between real gas in a producing well and environment (rocks) is considered. It is reduced to the solution of the differential equations describing non-isothermal gas flow in tube and the equation of propagation of heat in rocks with corresponding conditions of conjugation. The quasi-stationary mathematical model of formation (dissociation) of hydrates in gas well takes into account the dependence of coefficient of heat transfer between gas and hydrate layer on changing with time free cross section of a tube. It has been shown that the conjugated model predicts that the time of formation of hydrate plugs essentially increases in comparison with the model where the temperature of rocks is considered a given function of depth.*

---

#### ВВЕДЕНИЕ

Технологические режимы добычи газа в северных регионах в значительной степени определяются такими природными факторами как низкие климатические температуры и наличие мощной толщи многолетней мерзлоты. Следствием этих факторов являются осложнения, обусловленные возможностью образования гидратов как в призабойной зоне, так и в стволе скважин. Первое приводит к снижению продуктивности скважин, второе - к полному прекращению подачи газа. Такие аварийные ситуации могут иметь самые тяжелые последствия. В настоящее время единственное средство борьбы с этим нежелательным явлением - закачка в скважины метанола или других ингибиторов гидратообразования, что малоэффективно, так как метанол выносится из скважин вместе с добываемым газом, и существенно повышается себестоимость добычи и транспорта газа. Следовательно, актуальной является задача выбора таких режимов отбора газа, при которых эти аварийные ситуации можно исключить, или снизить их влияние на надежность газоснабжения.

Из-за теплового взаимодействия с горными породами, дросселирования и адиабатического расширения (сжатия) происходит изменение температуры добываемого газа, соответственно изменяется температура пород. Эти процессы взаимосвязаны, и поэтому данная задача может быть решена только в сопряженной постановке, то есть при одновременном определении изменения температуры газа в скважине и температурного поля окружающих горных пород. Таким образом, математическая модель исследуемого процесса должна включать в себя: уравнение теплопроводности, описывающее распространение тепла в горных породах с учетом их возможного протаивания-промерзания, уравнения неизоэнтальпического течения газа в скважине, и необходимые граничные и начальные условия, определяемые характером сопряжения тепловых потоков на стенке скважины.

При построении вычислительного алгоритма учитывается существенное различие временных масштабов для процессов, происходящих в скважине и в горных породах: переходные процессы в скважине заканчиваются за достаточно короткое время и поэтому изменение температуры газа как бы отслеживает медленное изменение температуры горных пород. При этом в квазистационарной математической модели образования (диссоциации) гидратов в газовых скважинах учитывается зависимость коэффициента теплопередачи от газа к внутренней стенке трубы от изменяющейся со временем площади проходного сечения. На конкретных примерах показано,

1 Institute of Oil and Gas Problems SB RAS, Yakutsk, Russia

что при сопряженной постановке время образования гидратных пробок существенно возрастает в отличие от случая, когда температура окружающих горных пород считается неизменной.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для описания образования и отложения гидратов в скважинах используется квазистационарная математическая модель [1], в которой движение несовершенного газа в трубах описывается в рамках трубной гидравлики, а динамика образования гидрата - в рамках обобщенной задачи Стефана, в которой температура фазового перехода «газ - гидрат» существенно зависит от давления в потоке газа. В этой модели, основанной на законах сохранения массы и энергии для потока газа, уравнения неразрывности, движения и энергии газа сведены к виду:

$$\frac{dp}{dx} = -\rho g \sin \varphi - \frac{\sqrt{\pi} \psi M^2}{4 \rho S^{2.5} S_0^{2.5}}, \quad (1)$$

$$\frac{dT}{dx} - \varepsilon \frac{dp}{dx} = \frac{\pi D \alpha}{c_p M} (T_e - T) - \frac{g}{c_p} \sin \varphi, \quad (2)$$

где  $\rho$  - плотность газа,  $g$  - гравитационное ускорение,  $c_p$  - удельная теплоемкость газа;  $S$ ,  $D$  - поперечное сечение и диаметр трубы;  $x$  - координата вдоль оси трубы,  $p$  - давление;  $\varphi$  - угол наклона трубы, отсчитываемый от фиксированной горизонтальной плоскости;  $\psi$  - коэффициент гидравлического сопротивления,  $T_e$  - температура окружающей среды (горных пород),  $T$  - температура газа,  $\alpha$  - суммарный коэффициент теплопередачи;  $M = \rho v S$  - массовый расход газа, являющийся константой;  $v$  - скорость течения газа; нулевой индекс обозначает начальное состояние.

Плотность газа связана с давлением и температурой уравнением состояния

$$\rho = \frac{p}{zRT}, \quad z = z(p, T), \quad \varepsilon = \frac{RT^2}{c_p p} \left( \frac{\partial z}{\partial T} \right)_p, \quad (3)$$

где  $R = 8.314/\mu$  - газовая постоянная,  $\mu = \sum_{i=1}^n y_i \mu_i$  - молярная масса газовой смеси;  $y_i$ ,  $\mu_i$  - объемная доля и молекулярный вес  $i$ -го компонента природного газа;  $z$  - коэффициент несовершенства газа,  $\varepsilon$  - коэффициент дросселирования.

В работе [2] было показано, что при высоких давлениях и температурах достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными уравнение Латонова-Гуревича [3]

$$z = \left( 0.17376 \ln \frac{T}{T_c} + 0.73 \right)^{\frac{p}{p_c}} + 0.1 \frac{p}{p_c}.$$

Критические параметры газовой смеси определяются по правилу Кау W.B. [4]:

$$p_c = \sum_{i=1}^n y_i p_{ci}, \quad T_c = \sum_{i=1}^n y_i T_{ci},$$

где  $p_{ci}$ ,  $T_{ci}$  - критические давление и температура  $i$ -го компонента природного газа.

Уравнение, описывающее изменение площади проходного сечения скважины  $S$  с течением времени, записывается в безразмерном виде:

$$\frac{dS}{d\tau} = b_2 \frac{T_e - T_h(p)}{1 - b_2 \ln S} - b_1 \sqrt{S} (T_h(p) - T), \quad (4)$$

где  $b_1 = \frac{\alpha_1 D_0}{4\lambda_h}$ ,  $b_2 = \frac{\alpha_2 D_0}{4\lambda_h}$ ,  $\alpha_1$  - коэффициент теплообмена между газом и слоем гидрата;  $\alpha_2$  -

коэффициент теплообмена между слоем гидрата и горной породой,  $D_0$  - диаметр трубы до образования гидрата,  $\lambda_h$  - теплопроводность гидрата,  $\tau = \frac{\lambda_h T_c}{\rho_h l_h D_0^2} t$  - безразмерное время,  $\rho_h$  - плотность гидрата,  $l_h$  - удельная теплота образования гидрата,  $t$  - время,  $T_h(p) = a \ln p + b$  - равновесная температура образования гидрата. Эмпирические коэффициенты  $a$  и  $b$  находятся путем аппроксимации кривой термодинамического равновесия гидратообразования, определяемой по методике Sloan E.D. [5] по известному составу газа.

Начальные условия для уравнений (1), (2) и (4) сформулируем в виде:

$$p(0) = p_0, \quad T(0) = T_0, \quad S(0) = S_0. \quad (5)$$

Уравнение (4) модифицируется на случай зависимости коэффициента  $\alpha_1$  от изменяющейся во времени площади проходного сечения трубы  $S$ . Для вывода соответствующей зависимости используется известная полуэмпирическая формула для коэффициента теплопередачи при турбулентном течении газа в трубах [6]:

$$\text{Nu} = 0.023 \text{Pr}^{0.43} \text{Re}^{0.8}, \quad (6)$$

где  $\text{Nu} = \frac{\alpha_1 D}{\lambda_g}$ ,  $\text{Pr} = \frac{\nu D \rho}{\mu}$  - параметры Нуссельта, Прандтля и Рейнольдса, соответственно;

$\mu$ ,  $\lambda_g$  - динамическая вязкость и теплопроводность газа.

Используя выражение для массового расхода газа и формулы (6) получим:

$$\frac{\alpha_1 D_0}{\lambda_g} = 0.023 \text{Pr}^{0.43} \left( \frac{M_0}{D_0 \mu} \right)^{0.8} \left( \frac{\pi}{4} \right)^{0.1} \frac{M^{0.8}}{S^{0.9}}. \quad (7)$$

В тех сечениях скважины, где образуется гидратный слой, то есть, где безразмерная величина проходного сечения  $S$  меньше 1, коэффициент теплообмена в уравнении (2) вычисляется по формуле (7), и при этом значение температуры горных пород  $T_e$  заменяется на температуру фазового перехода «газ - гидрат»  $T_h$ .

Уравнения (2) и (4), содержат температуру горных пород  $T_e$ , которая определяется из решения уравнения теплопроводности

$$\tilde{C}(T_e) \frac{\partial T_e}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda(T_e) \frac{\partial T_e}{\partial r} \right), \quad r_1 < r < r_2, \quad t > 0, \quad (8)$$

где  $\lambda(T_e)$  - коэффициент теплопроводности,  $\tilde{C}(T_e)$  - объемная теплоемкость горных пород, являющиеся кусочно-постоянными функциями от температуры;  $r$  - радиальная координата,  $r_1$  - наружный радиус скважины;  $r_2$  - радиус теплового влияния.

При записи уравнения (8) было сделано предположение, что тепловой поток в каждом сечении скважины распространяется строго радиально. Связь для перехода от одного сечения к другому осуществляется через решения уравнения (2) и граничное условие на наружной стенке скважины

$$\lambda(T_e) \frac{\partial T_e}{\partial r} = \alpha(T_e - T), \quad r = r_1. \quad (9)$$

В области горных пород от забоя скважины до подошвы многолетней мерзлоты коэффициенты в уравнении (8) являются постоянными, и его решение может быть выполнено стандартными методами. В области многолетней мерзлоты эта задача осложняется, так как здесь необходимо учитывать фазовый переход лед-вода. Для численного решения задачи типа Стефана используются методы, основанные на подходе, изложенном в монографии [7]. Для этого метода авторы работ [8, 9] разработали экономичную разностную схему сквозного счета со сглаживанием разрывных коэффициентов в уравнении теплопроводности по температуре в окрестности фазового перехода. Эта схема характеризуется тем, что граница раздела фаз явно не выделяется, что

позволяет использовать однородные разностные схемы. При этом скрытая теплота фазового перехода  $W = l_{ph} \rho_r w_r$  вводится как сосредоточенная теплоемкость в коэффициент  $\tilde{C}(T_e)$ . Здесь  $l_{ph}$  - удельная теплота фазового перехода «лед-вода» с температурой  $T_{ph}$ ,  $\rho_r$  - плотность,  $w_r$  - весовая влажность горных пород.

На условном радиусе теплового влияния принимаем условие тепловой изоляции:

$$\frac{\partial T_e}{\partial r} = 0, \quad r = r_2. \quad (10)$$

Начальное распределение температуры горных пород в момент пуска скважины после длительного простоя задается в виде:

$$T_e = \begin{cases} T_{e0} - \Gamma x, & 0 < x < L - H \\ T_{cr}, & L - H < x < L \end{cases}, \quad (11)$$

где  $T_{e0}$  - температура на забое скважины,  $\Gamma$  - геотермический градиент,  $T_{cr}$  - температура мерзлых горных пород,  $L$  - глубина скважины,  $H$  - мощность многолетней мерзлоты.

Следовательно, для определения изменения температуры газа и площади проходного сечения скважины при её тепловом взаимодействии с горными породами необходимо совместно решить уравнения (1) - (11).

Алгоритм численного решения сопряженной задачи теплообмена скважины с горными породами описывается следующим образом:

- I Задаются геометрические и физические параметры, а также начальные условия (5) и (11).
- II При фиксированной площади сечения по уравнениям (1) - (3) методом Рунге-Кутты 4-го порядка вычисляются давление  $p(x)$  и температура  $T(x)$  газа в скважине.
- III Из уравнений (4) и (7), делая шаг по времени, находится новое значение площади проходного сечения. При этом координата  $x$  входит в уравнение (4) как параметр.
- IV Определяется температурное распределение в массиве горных пород, то есть решается задача (8) - (11). Так как сглаженные коэффициенты в уравнении (8) зависят от температуры, получающаяся разностная задача будет нелинейной и ее решение находится методом простой итерации с использованием прогоночных алгоритмов.

На каждом временном шаге пункты II - IV повторяются.

## РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Расчеты выполнялись при следующих значениях параметров, соответствующих двум месторождениям Республики Саха (Якутия):

- 1) Средне-Вилуйскому  $\alpha=5.82$  Вт/(м<sup>2</sup>·К),  $D=0.1$  м,  $\varphi=90^\circ$ ,  $\psi=0.02$ ,  $\rho_h=920$  кг/м<sup>3</sup>,  $l_h=510000$  Дж/кг,  $\lambda_h=1.8$  Вт/(м·К),  $\lambda_g=0.0307$  Вт/(м·К),  $c_p=2300$  Дж/(кг·К),  $Pr=0.886$ ,  $\mu=1.3 \cdot 10^{-5}$  Па·с,  $R=449.4$  Дж/(кг·К),  $p_0=240 \cdot 10^5$  Па,  $T_0=323$  К,  $p_c=46.573 \cdot 10^5$  Па,  $T_c=205.239$  К,  $a=7.009$ ,  $b=178.28$ ,  $L=2550$  м,  $H=500$  м,  $T_{e0}=328$  К,  $\Gamma=0.0277$  К/м,  $T_{cr}=271.15$  К,  $T_{ph}=273.15$  К;  $l_{ph}=334400$  Дж/кг; состав газа (объемные доли, %):  $CH_4-90.34$ ,  $C_2H_6-4.98$ ,  $C_3H_8-1.74$ ,  $iC_4H_{10}-0.22$ ,  $nC_4H_{10}-0.41$ ,  $C_3H_{12+}-1.55$ ,  $CO_2-0.28$ ,  $N_2-0.48$ ;
- 2) Отраднинскому  $R=438.3$  Дж/(кг·К),  $D=0.146$  м,  $p_0=188.35 \cdot 10^5$  Па,  $T_0=286.35$  К,  $p_c=44.71 \cdot 10^5$  Па,  $T_c=195.376$  К,  $a=6.635$ ,  $b=182.951$ ,  $L=2480$  м,  $H=680$  м,  $T_{e0}=286.48$  К,  $\Gamma=0.0085$  К/м; состав газа (об. %):  $CH_4-83.15$ ,  $C_2H_6-4.16$ ,  $C_3H_8-1.48$ ,  $iC_4H_{10}-0.17$ ,  $nC_4H_{10}-0.50$ ,  $iC_5H_{12}-0.12$ ,  $nC_3H_{12}-0.17$ ,  $C_6H_{14}-0.17$ ,  $C_7H_{16+}-0.28$ ,  $CO_2-0.07$ ,  $N_2-9.50$ ,  $H_2-0.02$ ,  $He-0.21$ ; остальные параметры имеют те же значения, что и в первом варианте.

Видно, что эти месторождения имеют существенно различные составы природного газа, пласто-

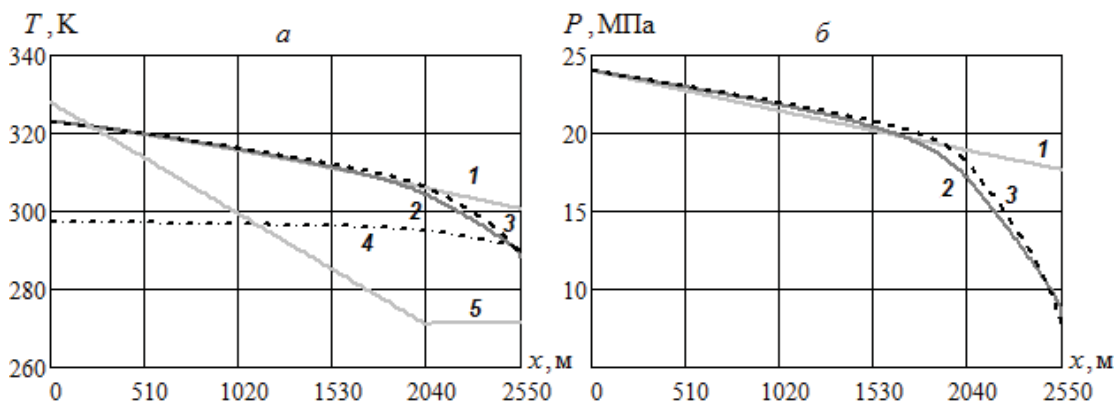
вые и геотермические условия при примерно равной глубине продуктивного горизонта. Характеристики горных пород приняты одинаковыми (табл. 1, где нижние индексы означают: *th* - талый, *f* - мерзлый).

На начальном этапе вычислялся оптимальный массовый расход газа, соответствующий минимуму тепловых потерь в отсутствие гидратного слоя. Для Средне-Вилуйского месторождения он оказался равным 9 кг/с, а для Отраднинского такой расход примерно соответствует предельно свободному дебиту скважины, и поэтому расчеты проводились при массовом расходе 2.86 кг/с, что соответствует рабочему дебиту скважины 187000 м<sup>3</sup>/сут. В последующем вычислительном эксперименте варьировались начальные значения свободного сечения скважины и массовый расход.

**Таблица 1.** Физические характеристики горных пород

Интервал глубин, м	$\rho_r$ , кг/м <sup>3</sup>	$w_r$ , %	$\lambda_{th}$ , Вт/(м×К)	$\lambda_f$ , Вт/(м×К)	$C_{th}$ , кДж/(м <sup>3</sup> ×К)	$C_f$ , кДж/(м <sup>3</sup> ×К)
0 - 86	2000	12.0	1.69	1.93	2570	2310
86 - <i>H</i>	2000	12.0	1.62	1.86	2680	2420
<i>H</i> - 980	2300	6.0	2.00	-	2440	-
980 - 1831	2350	5.5	2.27	-	2420	-
1831 - 2561	2380	5.3	2.38	-	2420	-
2561 - <i>L</i>	2330	5.7	2.10	-	2440	-

Наиболее интересные результаты получены для Средне-Вилуйского месторождения. Они представлены на рис. 1 - 5. Прежде всего отметим, что при оптимальном расходе гидратная пробка образуется вблизи устья скважины, а ее нижняя граница находится много выше подошвы многолетней мерзлоты, что хорошо видно на рис. 1 *а*, где точка пересечения температуры газа (кривые 2 и 3) и равновесной температуры гидратообразования (кривая 4) соответствует глубине 2550-2504=46 м, то есть в этом интервале температура газа становится ниже температуры гидратообразования. Уменьшение проходного сечения сопровождается резким падением давления вблизи устья скважины (рис. 1 *б*). При сопряженной постановке задачи значения температуры и давления газа в верхней части ствола скважины оказываются немного выше, а интервал образования гидратной пробки немного меньше (34 м), чем при постоянной во времени температуре горных пород (кривые 3 на рис. 1 *а* и 1 *б*),



**Рис. 1.** Изменение температуры (*а*) и давления (*б*) газа с глубиной для скважины Средне-Вилуйского месторождения при  $M=9$  кг/с: 1 -  $t = 0.34$  часа, 2 -  $t = 251.6$  часа, 3 -  $t = 423.6$  часа (при сопряженной постановке), 4 - равновесная температура гидратообразования, 5 - начальная температура горных пород

Рис. 2 иллюстрирует изменения площади проходного сечения скважины для двух значений массового расхода, когда в начальный момент скважина свободна от гидратов, то есть  $S(0)=1$ .



Видно, что при сопряженной постановке время образования гидратных пробок существенно возрастает в отличие от случая (см. поверхности 2), когда температура окружающих горных пород считается неизменной (см. поверхности 1). С увеличением массового расхода возрастает длительность процесса полной закупорки скважины гидратами: для оптимального расхода она составляет примерно 424 часа при сопряженной и 252 часа при несопряженной постановке, а для меньшего расхода - 17 часов и 10 часов, соответственно. При этом наиболее интенсивное протаивание происходит вблизи подошвы мерзлоты, что объясняется сравнительно высокой температурой газа, а радиус протаивания примерно пропорционален массовому расходу (сравни рис. 3 а и рис. 3 б).

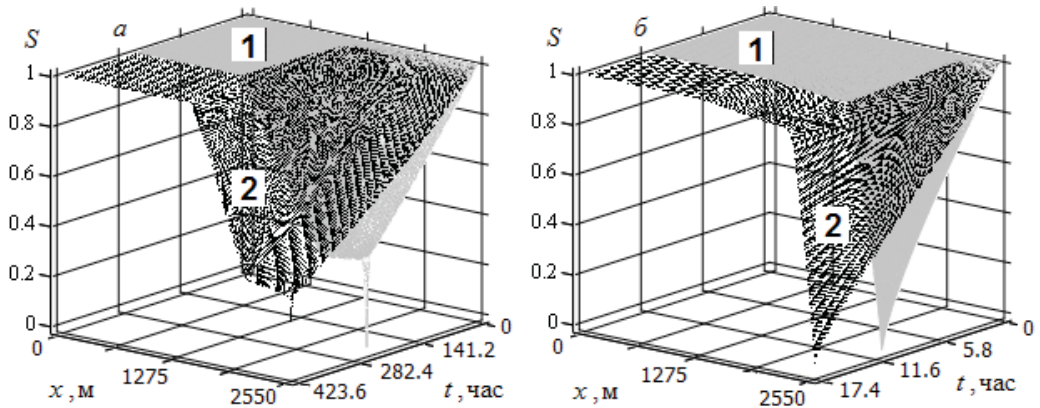


Рис. 2. Изменение площади проходного сечения скважины Средне-Вилюйского месторождения по глубине и во времени при  $S(0) = 1$ : а)  $M = 9$  кг/с; б)  $M = 2$  кг/с; 1 - несопряженная постановка, 2 - сопряженная постановка

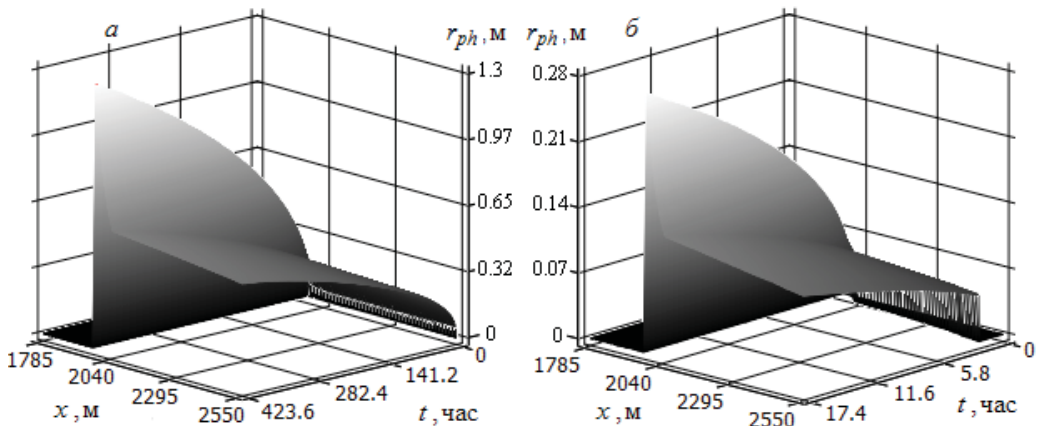


Рис. 3. Динамика изменения радиуса протаивания вокруг скважины Средне-Вилюйского месторождения по глубине и во времени при  $S(0) = 1$ : а)  $M = 9$  кг/с; б)  $M = 2$  кг/с

Ситуация становится менее предсказуемой, если в начальный момент скважина только наполовину свободна от гидратов, то есть  $S(0) = 0.5$  (рис. 4, рис. 5). В этом случае оптимальный расход газа составляет 4.8 кг/с. При таком расходе гидратная пробка вблизи устья скважины образуется через 173 часа (рис. 4 а, поверхность 2) для сопряженной задачи и через 90 часов (рис. 4 а, поверхность 1) для несопряженной задачи. Нижняя граница пробки находится на глубине 105 м. При меньшем расходе - в нижней части скважины от забоя до глубины примерно 1300 м площадь проходного сечения со временем возрастает, и эта часть скважины полностью очищается от гидрата. Выше этой отметки толщина гидратного слоя со временем растёт, образуя гидратную

пробку вблизи устья через 213 часов для сопряженной задачи и через 11 часов для несопряженной задачи (рис. 4 б). Отметим, что эта отметка превышает глубину, на которой температура газа становится равной равновесной температуре гидратообразования. Глубина протаивания горных пород в этом случае меньше, чем для скважины со свободным от гидратов в начальный момент сечением, и для этих двух расходов не превышает 1 м (рис. 5 а и рис. 5 б).

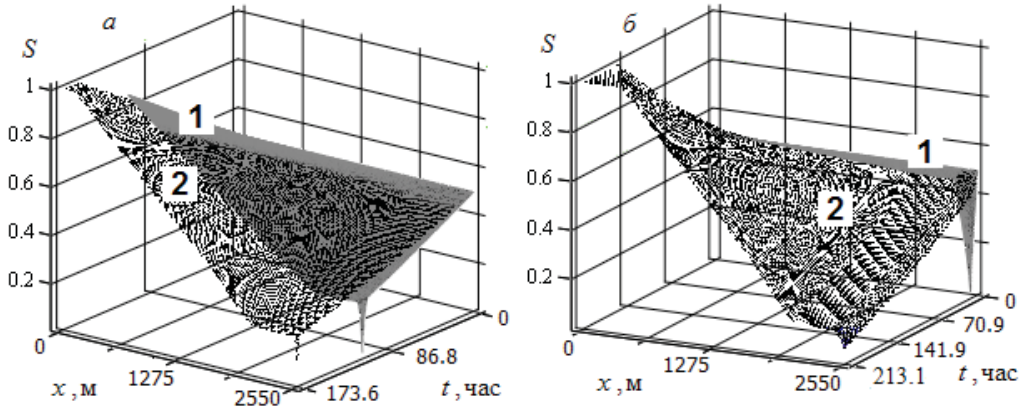


Рис. 4. Изменение площади проходного сечения скважины Средне-Вилуйского месторождения по глубине и во времени при  $S(0) = 0,5$ : а)  $M = 4,8$  кг/с; б)  $M = 2$  кг/с; 1 - несопряженная постановка, 2 - сопряженная постановка

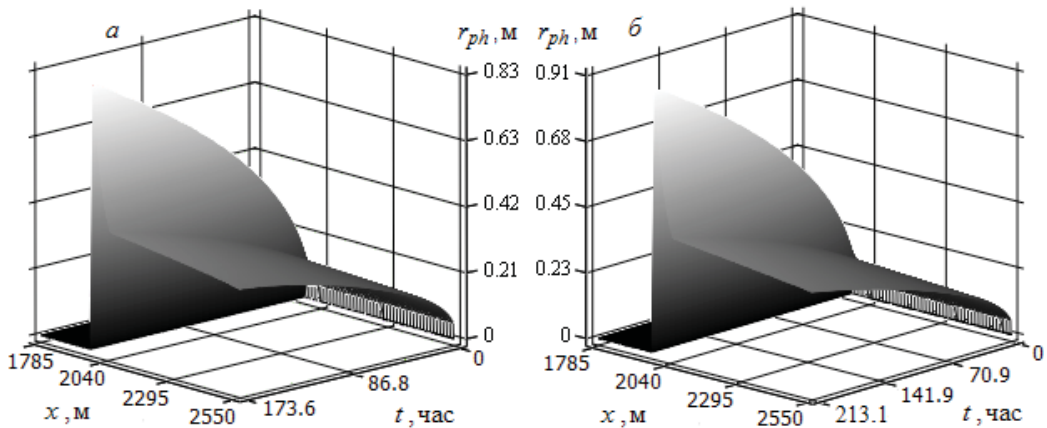


Рис. 5. Динамика изменения радиуса протаивания вокруг скважины Средне-Вилуйского месторождения по глубине и во времени при  $S(0) = 0,5$ : а)  $M = 4,8$  кг/с; б)  $M = 2$  кг/с

Теперь рассмотрим соответствующие процессы для Отраднинского месторождения. Это месторождение отличается от Средне-Вилуйского низкой пластовой температурой, которая близка к равновесной температуре гидратообразования. Из динамики изменения площади проходного сечения скважины (рис. 6 а) следует, что если вначале проходное сечение скважины было свободно, то при расходе 2.86 кг/с полная закупорка гидратами происходит за 4.5 часа, при этом радиус протаивания горных пород составляет примерно 0.15 м (рис. 6 б). Поверхности 1 и 2 здесь практически сливаются, и поэтому эти обозначения не нанесены.

Представленные результаты позволяют сделать следующие практически важные выводы. Во-первых, задачи теплового взаимодействия потока газа в скважинах с окружающими горными породами в общем случае являются сопряженными. Упрощенная математическая модель, в которой температура горных пород считается неменяющейся во времени, приводит к существенному занижению времени таких внутренних процессов в скважинах, как образование гидратной пробки.

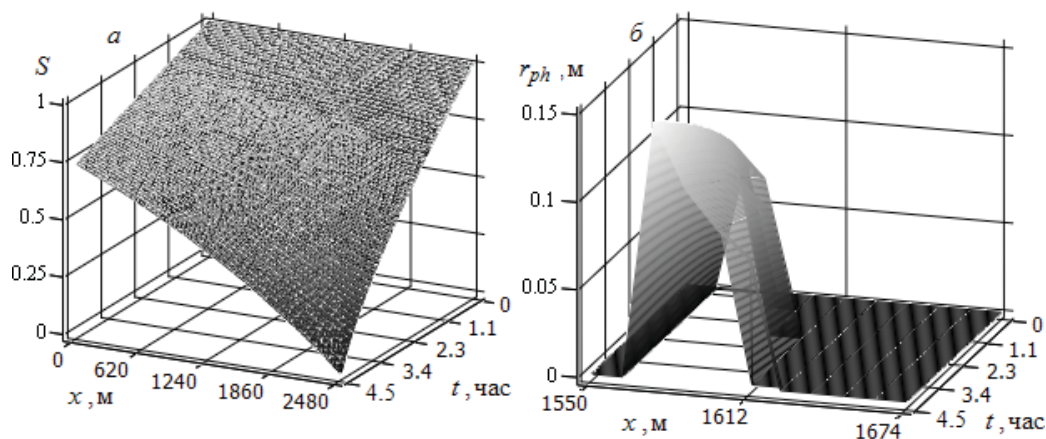


Рис. 6. Изменение площади проходного сечения (а) и радиуса протаивания (б) скважины Отраднинского месторождения по глубине и во времени при  $S(0) = 1$  и  $M = 2,86$  кг/с

Показано, что для глубоких скважин с пластовой температурой существенно превышающей равновесную температуру образования гидратов это занижение может быть кратным. Во-вторых, размер зоны протаивания горных пород косвенно зависит от расхода газа, ибо он определяет время теплового воздействия газа на окружающую среду. В частности, за 18 суток максимальный радиус протаивания составил 1.3 м на подошве многолетней мерзлоты. В-третьих, для глубоких скважин с пластовой температурой примерно равной температуре образования гидратов гидратная пробка может образоваться за 4 - 5 часов, то есть время теплового воздействия на горные породы не велико, и в этом случае необходимые технологические параметры добычи газа можно определять в несопряженной постановке.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Термогидродинамика систем добычи и транспорта газа / Э.А. Бондарев, В.И. Васильев, А.Ф. Воеводин, Н.Н. Павлов, А.П. Шадрин. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.
- [2] Аргунова К.К., Бондарев Э.А., Рожин И.И. Возможности аналитического представления уравнения состояния природных газов // XIII Росс. конф. по теплофизическим свойствам веществ. Новосибирск: Изд-во Инст-та теплофизики СО РАН, 2011. С. 11-12.
- [3] Латонов В.В., Гуревич Г.Р. Расчет коэффициента сжимаемости природных газов // Газовая промышленность. 1969. №2. С. 7-9.
- [4] Kay W.B. Density of hydrocarbon gases and vapors at high temperature and pressures // Industrial & Engineering Chemistry Research. 1936. Vol. 28. P. 1014-1019.
- [5] Sloan E.D. Clathrate hydrates of natural gases. NY.: Marcel Dekker, 1998.
- [6] Теория теплообмена / С.И. Исаев, И.А. Кожанов, В.И. Кофанов и др. / Под ред. А.И. Леонтьева. М.: Высшая школа, 1979.
- [7] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
- [8] Самарский А.А., Моисеенко Б.Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерных задач Стефана // Журнал вычисл. матем. и мат. физики. 1965. Т. 5, №5. С. 816-827.
- [9] Будаков Б.М., Соловьева Е.Н., Успенский А.Б. Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задачи Стефана // Журнал вычисл. матем. и мат. физики. 1965. Т. 5, №5. С. 828-840.

# HOW TO LEARN A LINEAR FUNCTION USING GEOGEBRA MATHEMATICAL SOFTWARE

---

*Teaching mathematics is increasingly relying on the use of computers and educational software.*

*The subject of this work is learning linear functions using GeoGebra software. This work is to show that students can learn basic properties of linear functions through interesting animation. The aim of this approach is to improve mathematics teaching by using computer software, thus activating students' interest and motivation for studying mathematics.*

*Key words: linear function, zero of a function, straight line direction coefficient, animation, GeoGebra*

---

## INTRODUCTION

Modern science and technology, like all other fields of activities, are nowadays constantly changing. These changes should be accompanied by changes in teaching. Finding a better and more innovative solution in education should be seen as a necessary social activity. Education, and especially teaching, must overcome the lag and search for new, better and more modern solutions.

Nowadays we frequently face numerous challenges, as a consequence of rapid progress in technology and technique. Modern mathematics teaching is more and more relying on the use of educational software. The result is a different approach to teaching mathematics.

Modernization requires teachers to teach the students how to apply mathematical problems to everyday life situations.

The improvement of teaching and learning process can be achieved by introducing new organisational forms of teaching, a wide use of teaching aids as well as introducing new methods of teaching. The purpose of the new forms of organising educational process is to overcome the limits of a traditional way of teaching, to introduce the innovations in education more boldly, to adapt the curriculum to previously acquired knowledge, interests and abilities of students involved in teaching process. The efficient use of new teaching technologies can be very useful for the progress in learning. Considering the increasing presence of computers in teaching process, there are many

ways to visualise mathematical content. More and more attention is paid to processing educational content using various software packages.

Information is memorised much better if accompanied by a visual content. Thus it is necessary to use visual presentation whenever it is possible. [2], [3]. It is important to connect pictures with certain conditions in order to improve knowledge of students [1]. Visual presentations can help in developing a more advanced mathematical thinking.

## ABOUT LINEAR FUNCTION THE USE OF GEOGEBRA SOFTWARE FOR ITS PROCESSING

GeoGebra is a software package with following properties: DGS - Dynamic Geometry System and CAS - Computer Algebra System which connects geometry, algebra and analysis. GeoGebra is free and widely spread software which can be downloaded from internet.

In order to switch from mechanical to creative thinking, students can use GeoGebra package as a teaching tool for mastering a new unit. It is particularly suitable for processing functions.

Functions are very important in mathematics. Many natural as well as everyday life phenomena have been explained using mathematical functions.

The first function that students learn is linear function. It is taught first in elementary school and later in the first year of high school. Linear function is applied in many school subjects as well as in everyday life.

---

1 High school of Natural Sciences and Social Sciences in Kosovska Mitrovica, Serbia

2 Faculty of Traffic Engineering, Doboj, University of Istočno Sarajevo; Bosnia and Herzegovina

Aims of teaching linear function are:

- development of student's ability to recognise and draw a linear function graph; using the graph to examine changes of the function and notice its basic properties;
- application of acquired knowledge in profes-

sion and everyday life.

- encouraging self confidence, logical reasoning and proper judgement;
- development of attitude and skills using modern technology, developing a culture of dialogue, written and oral communication.

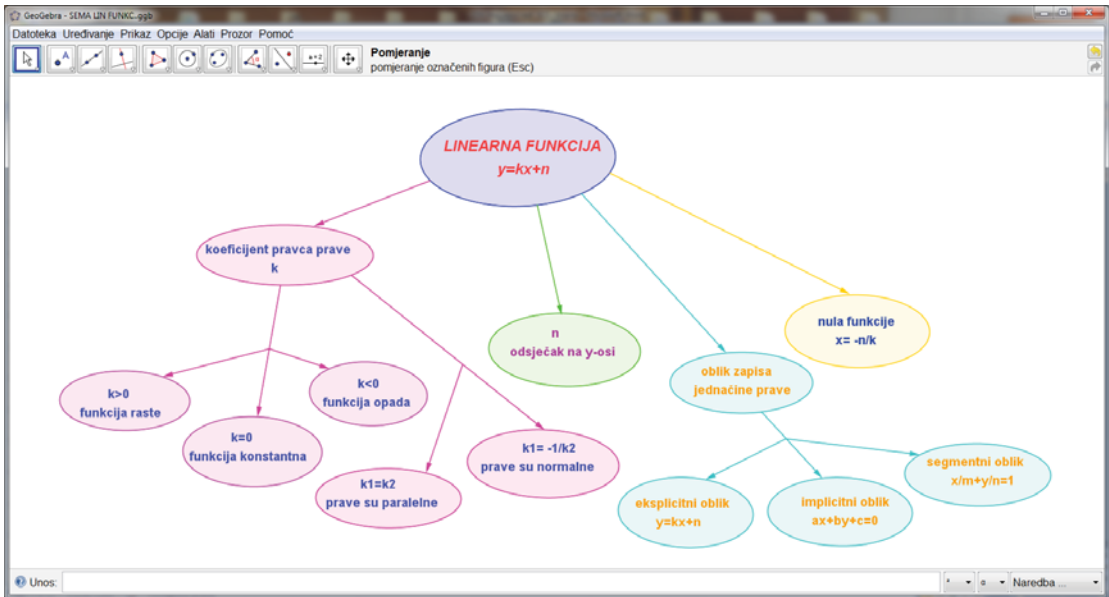


Fig. 1. Properties of linear function-schematic presentation

What does it mean to analyse a function? For a student, analysing a function means application of previously acquired knowledge. A student needs to know to mark a point in the coordinate system, to solve a linear equation or linear inequality.

Linear function can be learned through interactive unit presentation, using a computer as a teaching tool for showing pictures, graphs and interactive illustrations. When testing a function, besides theory students need to see slide pictures where they would be able to notice the relationship between the coordinates and the point of a graph, a relationship between variables, and to examine the sign and flow of function. This approach to teaching a new unit enables students to examine a function in a way that is close to them - through interesting animations and with the help of theory.

Examples of animations in GeoGebra:

It is often necessary to present a dynamic process to help students master a teaching content. In this case students are shown animations in GeoGebra which help them understand basic properties of function.

a) Zero of a function is a point where the graph intersects axis-x, which is obtained by solving the equation  $f(x) = 0$ . It is one of the most important values of linear function.

By moving sliders  $k$  and  $n$  function is changed. Consequently, its zero is changed. It is a very simple way for students to come to a conclusion what zero of a function really is.

It is therefore easy to find  $(0, n)$  the point where function intersects the y-axis.

Line is determined with two points. The graph is shown using two characteristic points of the zero function and intersection with y-axis. (Fig. 2.)

The sign of linear function Problem of solving linear inequality is connected with the problem of determining the sign of linear function. In order to determine for which values  $x \in \mathbb{R}$  a function has negative or positive values, it is necessary to solve inequalities  $kx + n < 0$ , or  $kx + n > 0$ . To solve the problem it is essential whether we have  $k > 0$  or  $k < 0$ .

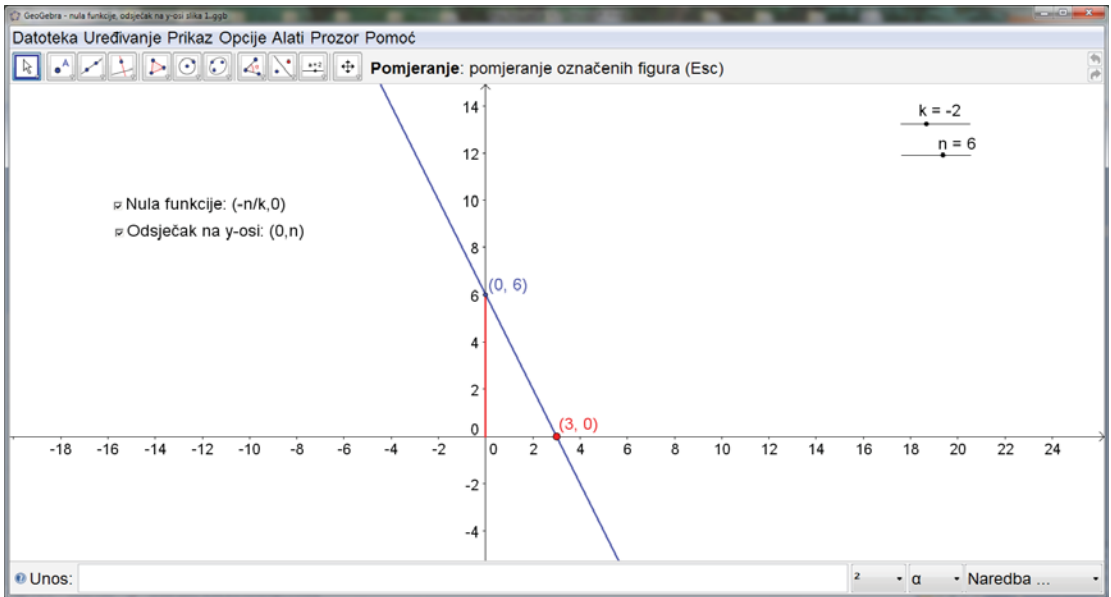


Fig. 2. Zero of a linear function, intersection on y-axis

b) In case  $k > 0$  for  $x < -\frac{n}{k}$ , the value of the function is negative, and if  $x > -\frac{n}{k}$  the value of the function is positive (Fig. 3.). If  $k < 0$  for  $x < -\frac{n}{k}$  the value of the function is positive, but if  $x > -\frac{n}{k}$  the value of the function is negative.

An interesting animation which particularly highlights a visualisation in GeoGebra software, where an ambulance, moving along the x-axis, examines the sign of the function.

c) Monotony of a function:

A linear function  $y=kx+n$  is increasing if it is  $k>0$ , or decreasing if  $k<0$  (Fig. 4).

If  $k=0$ , the function is constant.

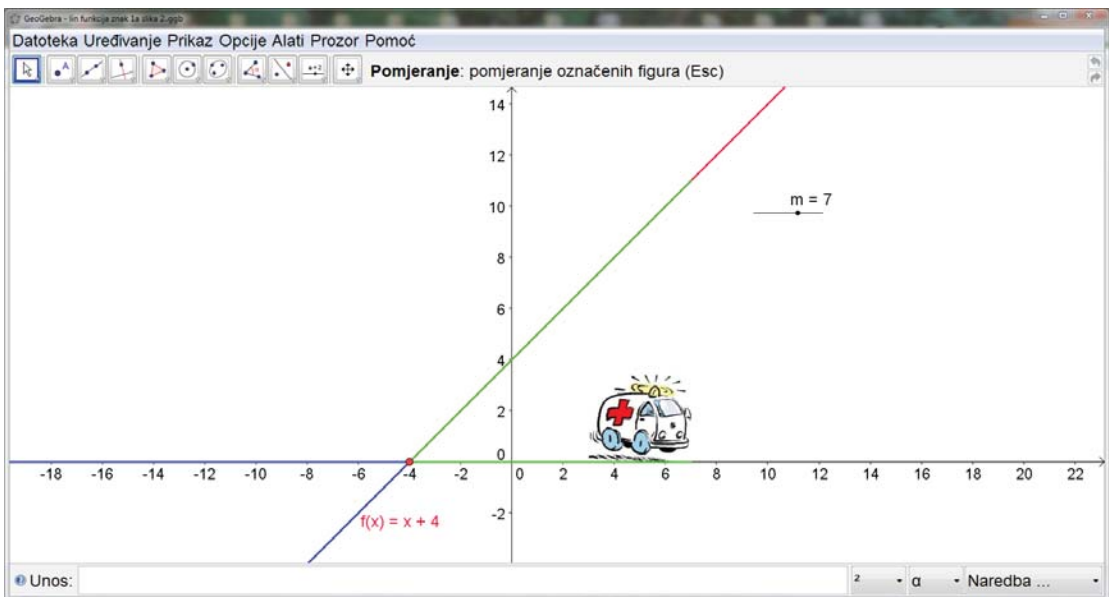


Fig. 3. An ambulance showing the sign of the function

In the following picture is a nice animation with a visualisation, in which a boy, riding a scooter, examines the monotony of a function.

d) The condition of parallelism and normality. Functions  $y = k_1x + n_1$  and  $y = k_2x + n_2$  are parallel if  $k_1 = k_2$ , and they are normal if  $k_1k_2 = -1$ . (Fig. 5)

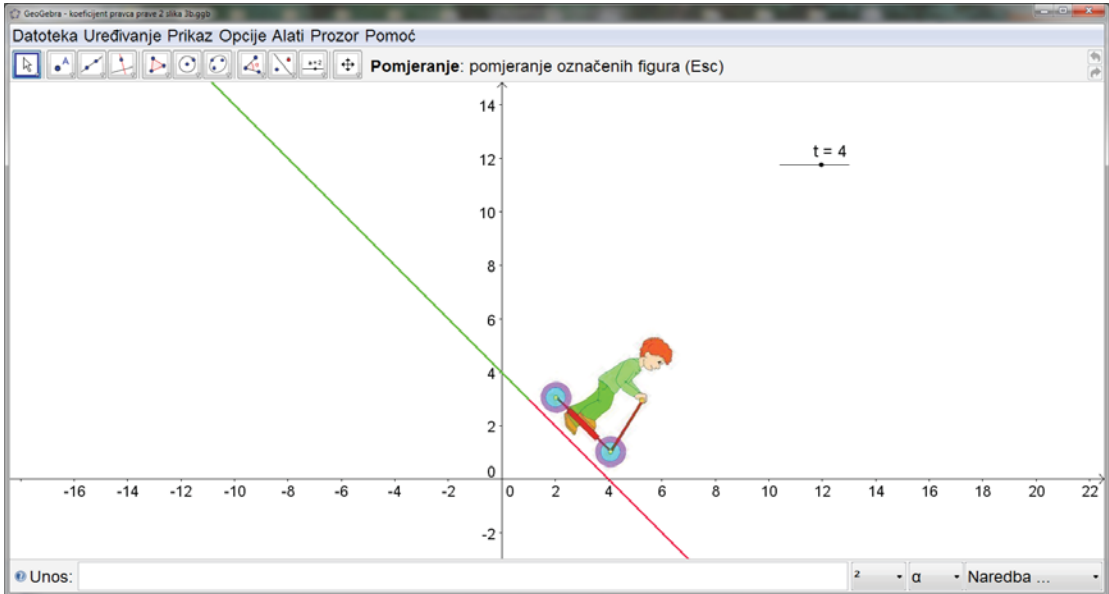


Fig. 4. Monotony of a function; Coefficient of the direction of the line  $k < 0$

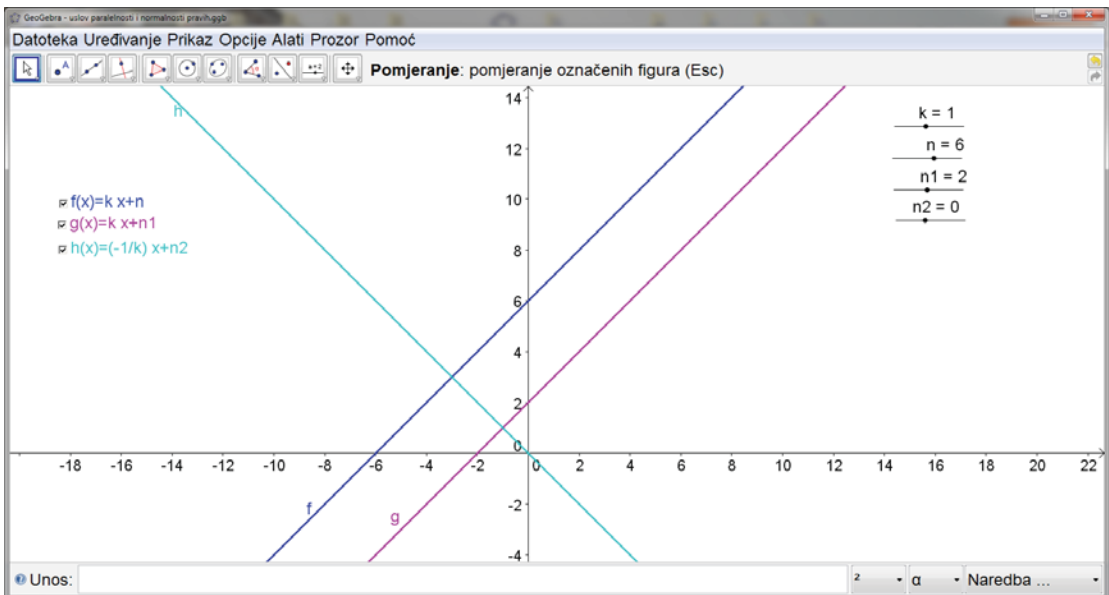


Fig. 5. The condition of parallelism and normality of lines

e) Examples of the application of linear function in everyday life

One of the aims of teaching the unit is to find its application in everyday life, to apply the knowledge and to develop the ability of observing and assessment.

In general, examples from everyday life attract the attention of students, enable them to apply the acquired knowledge and motivate them to work.

*Example 1.* (taken from a Nursing care teacher) Students of nursing school are faced with therapeutic-temperature-dietary list. The data from Ta-

ble 1 are shown graphically (Fig. 6.).

Table 1.

PHYSIOLOGICAL RELATION OF VITAL SIGNS								
Temperature	$T = 37,5^{\circ}$	$T = 39^{\circ}$	$T = 37,8^{\circ}$	$T = 38,3^{\circ}$	$T = 40,7^{\circ}$	$T = 38^{\circ}$	$T = 36,5^{\circ}$	$T = 39,5^{\circ}$
Puls	$P = 85$	$P = 100$	$P = 88$	$P = 93$	$P = 117$	$P = 90$	$P = 75$	$P = 105$
Respiration	$R = 20$	$R = 26$	$R = 21$	$R = 23$	$R = 33$	$R = 22$	$R = 16$	$R = 28$

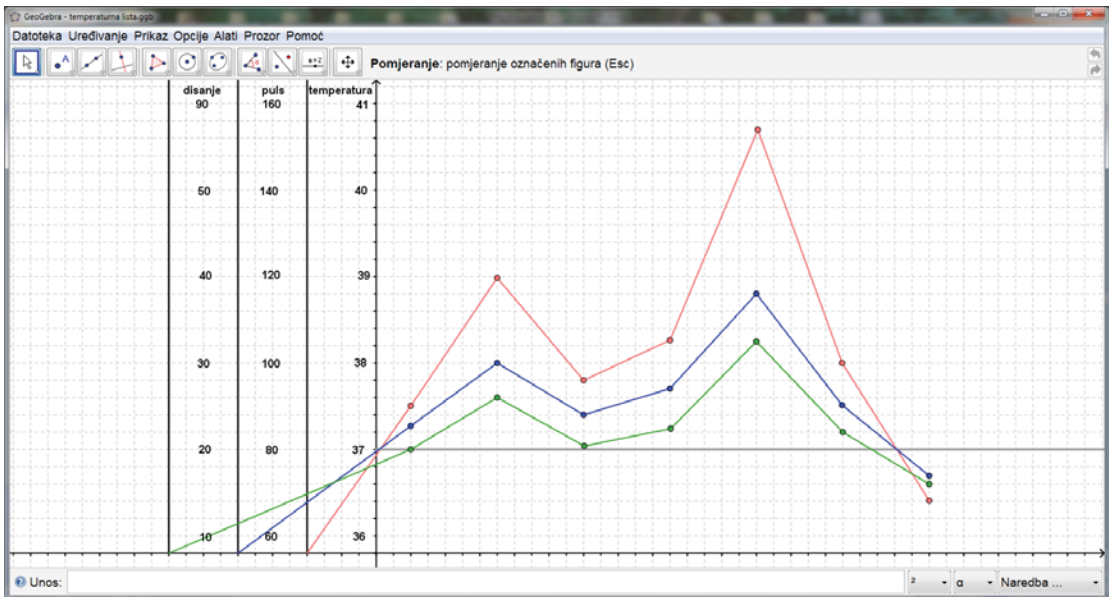


Fig. 6. If temperature rises by 1°, and the limit is 37°, then heart rate increases by 10, and the limit is 80 beats, respiration increases by 4 breaths and the start is 18

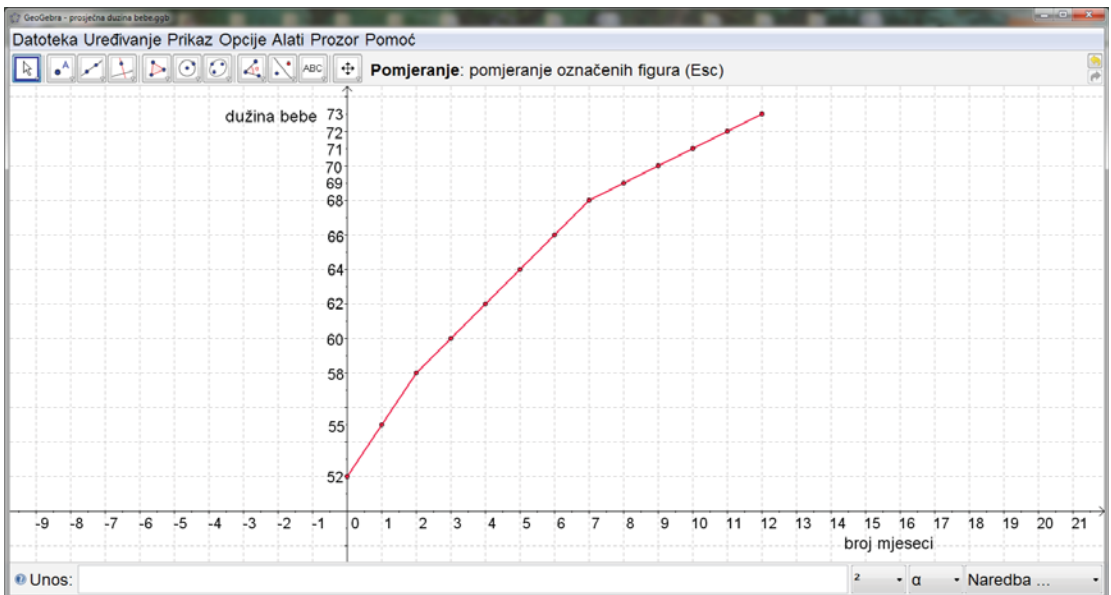


Fig. 7.



*Example 2.* (Data taken from the textbook Nursing Care)

The average length of a newborn is 52 centimeters. In the first two months it usually increases by three centimeters per month, from 2 to 8 months babies usually grow two centimeters a month, and from 8 to 12 months they grow one centimeter a month. Make a graph. (Fig. 8.)

## RESEARCH AND RESULTS

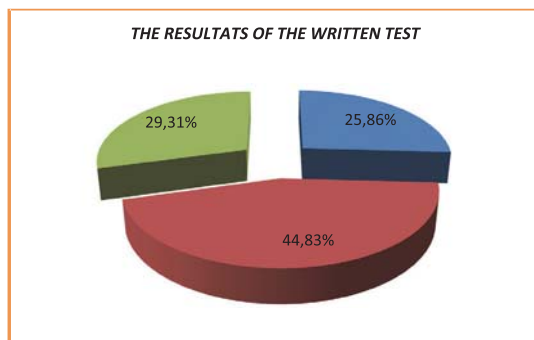
It is generally known that the students of the nursing school “don’t like mathematics”. By using GeoGebra package to teach linear function I tried to change their attitude and make them more interested in the subject.

The aim of the research conducted in two classes of the nursing school in the school year 2011/2012 was to help students learn the lesson, to further motivate them to study, and to awaken their interest in the subject.

While teaching the unit linear function the students were maximally active, there was a good student-student, student-teacher and student-group communication, positive energy was felt, they were focused on the problem and on the work.

A written test done by 58 students after learning the unit gave an insight into the following:

15 (25,86%) students drew a graph of a function and examined its changes, 26 (44,83%) students only drew a graph of a function, 17 (29,31%) students didn’t know how to draw a graph of a function.

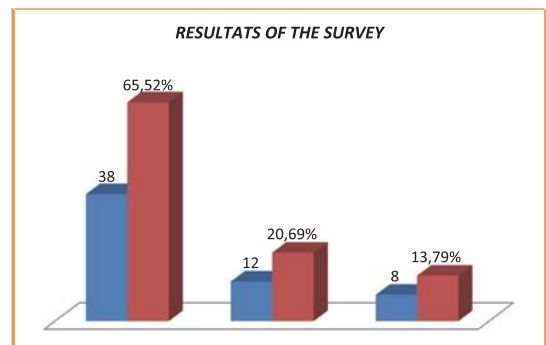


Graph 1.

The application of the acquired knowledge is a way to indicate how much the students have mastered the program.

The students were also engaged doing homework although it wasn’t required. Their task was to find examples from everyday life with emphasis on the profession. They mainly worked in groups which is a good method resulting in mutual cooperation.

The aim of the survey that the students did after learning was to test the students’ interest in this way of teaching. The results of the survey in which 58 students participated were as follows: 38 (65.52%) students stated they liked this method, 12 (20.69%) students think they do not care which method is used, and 8 (13.79%) students said that they didn’t like this method.



Graph 2.

Here are some comments of students: “I usually don’t like mathematics but I liked this.”, “I love the new, colorful way of learning, and, which is more important, I can understand this.”, “An interesting way of learning. It’s easy to understand and it’s challenging.”, “A very interesting lesson”

Students think that this way of studying is interesting, easy to learn and it represents an amusing way to study.

## CONCLUSION

Mathematical software GeoGebra enables a more creative approach to teaching mathematics as well as better visualization of the concepts introduced. Mathematical software enables students to adapt to new circumstances, in which they not only adopt mathematical terms and rules with the help of the teacher, but they also discover some properties independently. This work is more interesting to students and gives them a chance to experiment. Students can repeat steps of construction at their own pace to notice the required properties. The application of computers in teach-

ing mathematics requires a creative, interesting and meaningful approach of the teacher. Its main goal is to encourage students to be responsible for their results and progress they make in mathematics.

## REFERENCES

- [1] D. Tall, A graphical to integration and fundamental theorem, *Math. Teach.* 113 (1986), pp. 48-51.
- [2] D. Tall, Recent Developments in the Use of Computer to Visualize and Symbolize Calculus Concepts. *The Laboratory Approach to Teaching Calculus, M.A.A. Notes, Vol. 20* (1991), 15-25
- [3] Đ. Takači, D. Pešić, J. Tatar, An introduction to the continuity of functions using Scientific Workplace, *The Teaching of Mathematics, Belgrade, Vol. 6, 2* (2003), 105-112.
- [4] M. Hohenwarter, J. Hohenwarter, „GeoGebra помоћ-званично упуство 3.2“, Prevod na srpski jezik Herceg D., Herceg Đ., [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org).
- [5] O. Nikolić S. Đorđević, R. Žarković, M. Filipović, R. Stanojević, V. Stojanović, J. Barčot, M. Žižović, M. Marić, T. Malinović, B. Radivojević, M. Popović, D. Pavlović, M. Vrzić, Lj. Andrić, *Matematika za više tehničke škole, Savremena administracija, Beograd, 2000.*
- [6] P. Miličić, V. Stojanović, Z. Kadelburg, B. Boričić, *Matematika za I razred srednje škole, Naučna knjiga Beograd, Zavod za izdavanje udžbenika Novi Sad, 1992.*
- [7] R. Despotović, R. Tošić, B. Šešelja, *Matematika za I razred srednje škole, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd 1997.*
- [8] V. Erceg, E-learning projekt Linearna funkcija, Pogled kroz prozor, Digitalni časopis: [pogledkrozprozor.wordpress.com](http://pogledkrozprozor.wordpress.com)

## NEW RESULTS IN DEVELOPING OF ALGORITHMS INTENDED FOR PARAMETERS OPTIMIZATION OF HEAT SUPPLY SYSTEMS

### НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В РАЗВИТИИ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ТЕПЛОСНАБЖАЮЩИХ СИСТЕМ

---

*The authors describe the new generation of methods, algorithms and software intended for the parametric optimization of multi-circuit heat supply systems that make it possible to perform calculations of such systems having an intrinsic structure with any set of nodes, sections, and circuits. New methods and algorithms are based on multi-level decomposition of model of heat supply system and using of concurrent computing. Received results were used in the software system SOSNA-M allowing to use a flexible adaptive model of the computational process.*

---

#### ВВЕДЕНИЕ

Теплоснабжающие системы (ТСС) в условиях сурового российского климата имеют высокую социальную и экономическую значимость. В настоящее время они превратились в сложные пространственно распределенные трубопроводные системы (ТПС) централизованного снабжения потребителей тепловой энергией. Сложность ТСС связана с их замкнутыми двухлинейными схемами, многокольцевой структурой, наличием множества теплоисточников и управляющих элементов (насосных и дроссельных станций, регуляторов, тепловых пунктов).

Важное значение для обеспечения работоспособности ТСС имеет задача определения ее оптимальных параметров, которая может иметь как самостоятельное значение, так и рассматриваться в качестве подзадачи общего процесса решения задач оптимального развития и реконструкции ТСС. Возрастающие требования к эффективности ТСС вызывают необходимость решения перечисленных задач для сетей реальных размеров, что невозможно выполнить без декомпозиции расчетных схем ТСС. Существующие методы и алгоритмы зачастую не позволяют проводить расчеты с учетом декомпозиции расчетной схемы. Для преодоления этих проблем необходима разработка новой методики решения задачи оптимизации параметров многоконтурных ТСС, которая позволит решать задачи реальной размерности за счет многоуровневой декомпозиции расчетной схемы ТСС и обеспечит получение работоспособного решения в двухлинейных тепловых сетях.

В рамках основанной в ИСЭМ СО РАН (СЭИ) теории гидравлических цепей (ТГЦ) разработаны эффективные методы оптимизации параметров ТПС [1,2]. Для разветвленных сетей А.П. Меренковым разработан метод пошаговой оптимизации на базе динамического программирования (ДП) [1]. Для многоконтурных сетей С. В. Сумароковым разработан метод многоконтурной оптимизации (МКО), основанный на последовательном улучшении решений [1]. Важная особенность перечисленных методов состоит в том, что они позволяют полностью учесть особенности используемого дискретного набора оборудования и сложность математических моделей.

В настоящей статье представлены новые наиболее важные результаты в развитии методического и программного обеспечения для оптимизации параметров сложных ТСС [3,4]:

- 1) новая методика решения задачи, основанная на многоуровневой декомпозиции модели тепловой сети, которая позволяет от исходной задачи перейти к подзадачам меньшей размерности и сложности;

---

<sup>1</sup> Melentiev Energy Systems Institute of SB RAS (ESI SB RAS), Irkutsk, Russia

- 2) новые алгоритмы численного решения задач оптимизации параметров разветвленных и многоконтурных ТСС на базе методов ТГЦ, позволяющие решать задачи с применением многоуровневой декомпозиции модели тепловой сети и параллельных вычислений;
- 3) программный комплекс «СОСНА-М», предназначенный для оптимизации параметров сложных теплоснабжающих систем.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Постановка задачи оптимизации параметров разветвленных и многоконтурных ТСС представляется в следующем виде. Заданными являются: 1) схема тепловой сети из  $m$  узлов и  $n$  участков, представляемая в виде ориентированного графа  $G_{TC} = (J, I)$ , где  $J$  - множество вершин (узлов),  $I$  - множество дуг (участков);  $J = J_1 \cup J_2 \cup J_3 = J^{\Pi} \cup J^O$ , где  $J_1, J_2$  и  $J_3$  - множества соответственно потребителей, источников и точек разветвления на схеме,  $J^{\Pi}$  и  $J^O$  - множества узлов соответственно подающей и обратной магистралей;  $I = I^{\Pi} \cup I^{\Pi\Pi} \cup I^{\Pi\Pi\Pi}$ , где  $I = I^{\Pi} \cup I^O = I_1 \cup I_2$  - множество участков линейной части сети, состоящее соответственно из участков подающей  $I^{\Pi}$  и обратной магистралей  $I^O$ ,  $I_1$  и  $I_2$  - множества соответственно существующих и новых участков;  $I^{\Pi\Pi\Pi}$  и  $I^{\Pi}$  - множества участков-потребителей и участков-источников;  $I_3 \subset I^{\Pi}$  - участки, на которых установлены или разрешаются насосные станции; 2) длины участков  $\mathbf{L} = \{L_1, \dots, L_n\}$ ; 3) набор стандартных диаметров трубопроводов  $D = \{d_1^C, \dots, d_k^C\}$ ; 4) ограничения на способы реконструкции существующих участков  $U_i, i \in I_1$ ; 5) ограничения на давления в узлах и скорости на участках; 6) табличные коэффициенты и технико-экономические показатели, необходимые для решения задачи; 7) нагрузки потребителей и производительности источников; 8) типоразмеры стандартных насосных станций  $T = \{T_1^C, \dots, T_r^C\}$ .

В результате решения задачи необходимо определить оптимальные параметры ТСС: 1) «узкие места» в системе - участки с недостаточной пропускной способностью; 2) расходы на участках  $\mathbf{x}$ ; 3) давления в узлах  $\bar{\mathbf{P}}$ ; 4) диаметры новых участков  $d_i, i \in I_2$ ; 5) участки, для которых необходима реконструкция, диаметры  $d_i, i \in I_1$  и способы их реконструкции  $u_i \in U_i, i \in I$ ; 6) напоры  $H_i$  и места установки насосных и дроссельных станций для участков  $i \in I_3$ ; 7) располагаемые напоры у потребителей  $\Delta H_i, i \in I^{\Pi\Pi\Pi}$ .

Требуется минимизировать функцию приведенных дисконтированных по времени затрат в ТСС, имеющую следующий вид:

$$Z(\mathbf{d}, \mathbf{H}, \bar{\mathbf{P}}, \mathbf{x}, \mathbf{h}) = \sum_{i \in I^{\Pi\Pi\Pi}} Z_i^C(d_i) + \sum_{i \in I_3} Z_i^H(H_i, x_i) + \sum_{i \in I^{\Pi\Pi}} Z_i^{\ominus}(x_i, h_i) + \sum_{i \in I^{\Pi}} Z_i^T(d_i) + \sum_{i \in I_1} Z_i^{\Pi\Pi}(P_j) \rightarrow \min, \quad (1)$$

$Z_i^C$  - затраты на сооружение и эксплуатацию линейной части сети;  $Z_i^H$  - затраты на сооружение и эксплуатацию насосных станций;  $Z_i^{\ominus}$  - стоимость электроэнергии, расходуемой на перекачку теплоносителя;  $Z_i^T$  - стоимость тепловых потерь;  $Z_i^{\Pi\Pi}$  - затраты на электроэнергию, расходуемую на подачу теплоносителя потребителю  $j$ ;  $\mathbf{d} = \{d_1, \dots, d_n\}^T$ ,  $\mathbf{H} = \{H_1, \dots, H_n\}^T$ ,  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}^T$  и  $\mathbf{h} = \{h_1, \dots, h_n\}^T$  - соответственно векторы диаметров, напоров, расходов и потерь напора на участках;  $\bar{\mathbf{P}} = \{P_1, \dots, P_m\}^T$  - вектор давлений в узлах.

Потери напора  $h_i$  определяются в соответствии с выражением

$$h_i = s_i x_i^2, i \in I^{\Pi}, \quad (2)$$

где  $s_i$  - гидравлическое сопротивление участка, определяемое в свою очередь по следующей формуле

$$s_i = \varphi_i \frac{(1 + \alpha_i)L_i}{d_i^{5,25}} x_i^2, i \in I^N, \quad (3)$$

где  $\varphi_i$  - коэффициент, зависящий от эквивалентной шероховатости трубопровода,  $\alpha_i$  - коэффициент местных потерь на участке.

Потокораспределение в ТСС задается узловой моделью, имеющей следующий вид:

$$\mathbf{Ax} - \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \quad (4)$$

$$\mathbf{y} - \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{P}} = \mathbf{0}, \quad (5)$$

$$\mathbf{y} + \mathbf{H} - \mathbf{S}\mathbf{X}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (6)$$

где  $\bar{\mathbf{A}}, \mathbf{A}$  - соответственно полная  $m \times n$ -матрица инцидентности и  $(m-1) \times n$ -матрица линейно-независимых узлов и участков расчетной схемы;  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$  - вектор перепадов давлений на участках;  $\mathbf{S} = \text{diag}(s_1, \dots, s_n)$  и  $\mathbf{X} = \text{diag}(|x_1|, \dots, |x_n|)$  - диагональные матрицы соответственно сопротивлений и расходов;  $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_{m-1})^T$  - вектор узловых притоков или отборов.

Система условий и ограничений включает:

- ограничения на давление в узлах  $P_j$

$$P_j^H \leq P_j \leq P_j^B, j \in J, \quad (7)$$

где  $P_j^H$  и  $P_j^B$  - соответственно нижнее и верхнее ограничения;

- ограничения на скорость течения теплоносителя по участкам  $v_i$

$$v_i^H \leq v_i \leq v_i^B, i \in I^N, \quad (8)$$

где  $v_i^H$  и  $v_i^B$  - соответственно нижнее и верхнее ограничения;

- ограничения на располагаемый напор у потребителей  $\Delta H_i$

$$\Delta H_i = P_{j_{II}} - P_{j_O} \geq \Delta H_i^H, i \in I^{III}, j_{II} \in J^{II}, j_O \in J^O, \quad (9)$$

где  $j_{II}$  и  $j_O$  - номера узлов-потребителей соответственно подающего и обратного трубопроводов,  $\Delta H_i^H$  - минимальный располагаемый напор;

- ограничения на располагаемый напор у потребителей  $\Delta H_i$

$$d_i \in D_i \in D_i, i \in I^N, \quad (10)$$

$$u_i \in U_i \in U_i, i \in I^N, \quad (11)$$

$$H_i \in T_i \in T_i, i \in I_3, \quad (12)$$

где  $D_i$  и  $T_i$  - соответственно допустимые к установке на участке  $i$  диаметры стандартных трубопроводов и насосные станции.

В результате решения задачи минимизации функции (1) при условиях (2)-(12) необходимо определить оптимальные параметры ТСС.

## НОВАЯ МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Разработанная новая методика оптимизации параметров ТСС позволяет за счет многоуровневой декомпозиции модели тепловой сети перейти от исходной сложной задачи к иерархически связанному множеству подзадач, каждая из которых обладает меньшей размерностью и сложностью в сравнении с исходной задачей [3]. Методика включает: 1) принципы многоуровневой декомпозиции модели тепловой сети; 2) принципы «увязки» решений между иерархическими уровнями модели тепловой сети в процессе оптимизации параметров ТСС; 3) алгоритм динамической декомпозиции модели сети на кольцевую часть и тупиковые ответвления; 4) алгоритм

верхнего уровня для оптимизации параметров ТСС с учетом располагаемых напоров у потребителей; 5) алгоритмы методов МКО и ДП, ориентированные на решение задачи с учетом многоуровневой декомпозиции модели тепловой сети.

В рамках разработанной методики предлагается выделение следующих уровней иерархической модели тепловой сети (рис. 1): 1) тепловая сеть в целом; 2) подающая и обратная магистрали; 3) кольцевая и древовидные части (тупиковые ответвления) подающей и обратной магистралей; 4) отдельные элементы тепловой сети (участки, насосные станции и т.д.).

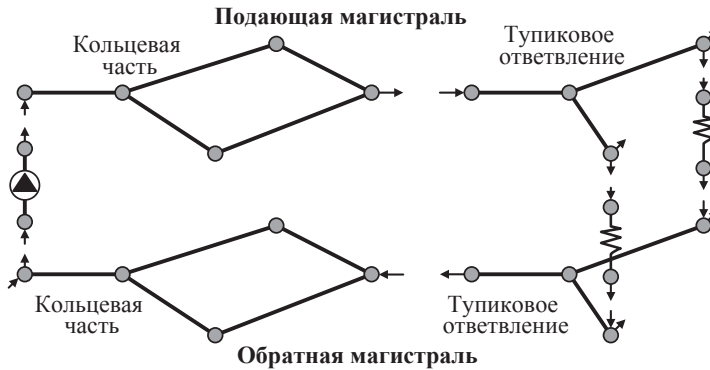


Рис. 1. Уровни иерархической модели тепловой сети

Предлагаемая методика предполагает выполнение следующих этапов при решении задачи расчета оптимальных параметров ТСС.

1. Расчет узловых расходов в соответствии с заданными нагрузками, режимами и температурным графиком.
2. Многоуровневая декомпозиция модели тепловой сети.
3. Расчет оптимальных параметров обратной магистрали методом МКО.
4. Корректировка ограничений на давления у потребителей в узлах подающей магистрали с учетом полученных давлений в узлах обратной магистрали для обеспечения необходимых располагаемых напоров у потребителей.
5. Расчет оптимальных параметров подающей магистрали методом МКО.
6. Определение суммарных затрат и капиталовложений в ТСС в соответствии с параметрами, полученными при оптимизации.
7. Проверка полученного по системе решения на способность обеспечивать различные режимы функционирования ТСС.
8. Если режимы не обеспечиваются, то осуществляется корректировка исходных данных и выполняется переход к шагу 1.

## ПРИМЕНЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Аддитивный целевой функционал (1) позволяет применять метод ДП для решения задачи. Идея этого метода состоит в многошаговом процессе определения параметров элементов сети (участков и узлов) путем их последовательного подбора в направлении от потребителей к источнику [1,2]. Область поиска решения (рис. 2), образуемая между верхними ( $P_j^B, j \in J$ ) и нижними ( $P_j^H, j \in J$ ) ограничениями на давления, делится на  $n$  интервалов (по количеству участков), которые разбиваются на  $\mu$  ячеек (определяющих точность решения). Задача решается в три этапа: 1) прямой ход, в процессе которого последовательно заполняются все ячейки и формируется

множество условно-оптимальных вариантов; 2) выбор варианта для всей сети с наименьшей стоимостью; 3) обратный ход, в процессе которого восстанавливаются параметры и составляющие затрат, соответствующие выбранному варианту.

Математически процесс определения условно-оптимального варианта в ячейке  $z$  на шаге  $i$  описывается рекуррентным уравнением:

$$Z_i^*(\tilde{P}_{jz}) = \min_{\substack{d_i^u \in D_i \\ k=1, \dots, \mu}} \left[ Z_i^{TP}(d_i^u) + Z_i^{HC}(\tilde{P}_{jk} - \tilde{P}_{jz}) + Z_{i-1}^*(P_{j+1,k}) \right], z = 1, \dots, \mu, \quad (13)$$

где  $Z_i^{TP}$  - затраты на трубопровод диаметра  $d_i^u$ , включающие стоимость строительства, эксплуатации, расходуемой электроэнергии и теплопотерь;  $\tilde{P}_{jz}$  и  $\tilde{P}_{jk}$  - давления перед насосной станцией и после нее в ячейках  $z$  и  $k$  соответственно;  $Z_i^{HC}$  - затраты на насосную станцию с напором  $\tilde{P}_{jk} - \tilde{P}_{jz} = H_{iz}$ ;  $Z_{i-1}^*(P_{j+1,k})$  - сумма затрат на шаге  $i-1$  в ячейке  $k$ ;  $Z_i^*$  - сумма затрат на выбранный условно-оптимальный вариант.

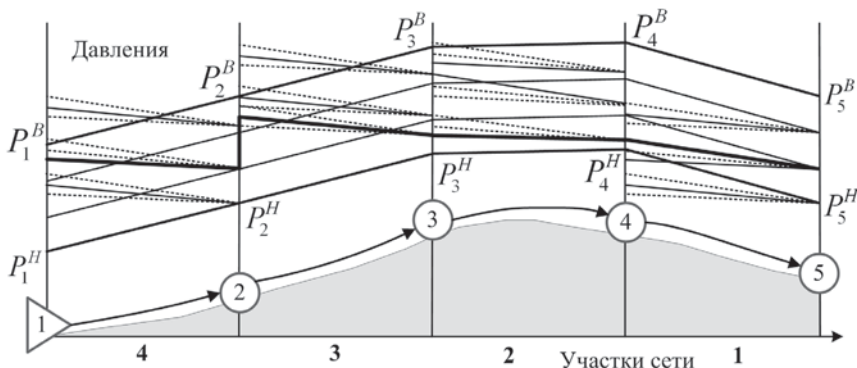


Рис. 2. Иллюстрация процесса решения задачи методом динамического программирования

## МЕТОД МКО

Выбор оптимальных параметров многоконтурных ТСС осуществляется с помощью метода МКО, в основе которого лежит методический принцип последовательного улучшения решений, в ходе которого попеременно решаются следующие подзадачи [1,2]:

1. расчет потокораспределения в сети (расходов  $x$  и давлений  $\bar{P}$ ) при фиксированных диаметрах  $d$  и напорах  $H$ ;
2. оптимизация параметров (диаметров  $d$ , напоров  $H$  и давлений  $\bar{P}$ ) методом ДП для фиксированных расходов  $x$ .

Критерием остановки вычислительного процесса является прекращение уменьшения целевой функции или совпадение диаметров трубопроводов на соседних итерациях. Последовательное решение перечисленных подзадач приводит к получению решения, которое не может быть улучшено при помощи метода и является решением задачи.

## НОВЫЙ АЛГОРИТМ МКО

При решении задачи оптимизации параметров подающей и обратной магистралей используется следующий разработанный алгоритм метода МКО, ориентированный на многоуровневую декомпозицию модели тепловой сети.

1. Декомпозиция модели рассчитываемой магистрали сети на кольцевую часть и тупиковые ответвления.

2. Формирование множества  $J_S$  узлов на схеме, в которых есть инцидентные участки, принадлежащие как кольцевой части сети, так и тупиковым ответвлениям.
3. Расчет начального потокораспределения в кольцевой части сети и в тупиковых ответвлениях.
4. Вызов «прямого хода» метода ДП для определения условно-оптимальных вариантов параметров всех тупиковых ответвлений.
5. Перенос давлений и стоимостей условно-оптимальных вариантов, полученных на уровне тупиковых ответвлений, на уровень кольцевых сетей для всех узлов  $j \in J_S$ .
6. Вызов «прямого хода» метода ДП для определения условно-оптимальных вариантов параметров кольцевой части ТСС, при этом в узлах  $j \in J_S$  «увязываются» давления и затраты кольцевой части и тупиковых ответвлений.
7. Выбор в главном источнике варианта, соответствующего решению с наименьшей стоимостью затрат на тепловую сеть.
8. Вызов «обратного хода» метода ДП для восстановления параметров и составляющих затрат кольцевой и тупиковых частей сети.
9. Расчет потокораспределения в кольцевой части сети и в тупиковых ответвлениях.
10. Если критерии остановки вычислительного процесса не достигнуты, то выполняется переход к шагу 5.

Условно-оптимальные решения, полученные в узлах присоединения тупиковых ответвлений к кольцевой части сети, «стыкуются» с результатами кольцевой части во время вычислительного процесса МКО. При этом используется следующий принцип. Если узел  $j$  является начальным как для участков кольцевой части, так и для участков тупиковых ответвлений, то в ячейках этого узла происходит «увязка» давлений и суммирование затрат. Обозначим  $J_i^j$  множество узлов, давления в которых необходимо «увязать» в узле  $j$  на шаге  $i$  вычислительного процесса. «Увязка» давлений осуществляется в соответствии с выражением

$$P_{jz} = \max_{k \in J_i^j} \tilde{P}_{kz}, z = 1, \dots, \mu. \quad (14)$$

Обозначим  $I_j^i$  множество всех исходящих из узла  $j$  участков, затраты по которым необходимо учесть на шаге  $i$  вычислительного процесса. Суммирование затрат происходит в соответствии с выражением

$$Z_z^* = \sum_{r \in I_j^i} Z_r^*, z = 1, \dots, \mu. \quad (15)$$

На рис. 3 представлен фрагмент декомпозированной модели тепловой сети. После расчета участка 5 необходимо определить параметры участка 6. Перед его расчетом происходит «увязка» давлений и затрат между частями декомпозированной модели тепловой сети.

Основная особенность предложенного алгоритма состоит в том, что во время решения задачи тупиковые ответвления методом ДП рассчитываются только один раз, а во время итерационного процесса МКО рассчитываются параметры только кольцевой части сети. При этом решения кольцевой части и тупиковых ответвлений «увязываются» в соответствии с указанными ранее принципами. Практическая значимость этого алгоритма состоит в уменьшении размерности исходной задачи за счет получения подзадач меньшего размера и сокращении общего времени решения исходной задачи.

## ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Разработанный авторами параллельный алгоритм на базе метода ДП позволяет решать задачи оптимизации параметров как разветвленных, так и многоконтурных ТСС. При этом используется многоуровневая декомпозиция модели тепловой сети. Для оптимизации многоконтурных сетей



предполагается применение разработанного алгоритма в рамках итерационного процесса МКО. Алгоритм предоставляет возможность рассчитывать часть расчетной схемы, что хорошо сочетается с предлагаемой методикой. Для представления структуры сети при работе алгоритма использованы технологии разреженных матриц, что обеспечило высокую скорость его работы.

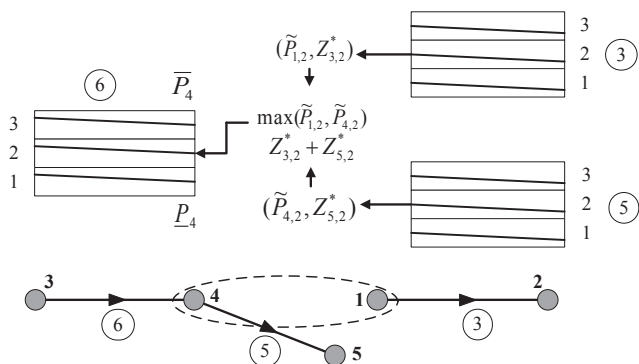


Рис. 3. Пример «увязки» результатов между иерархическими уровнями

Основная идея нового алгоритма состоит в организации многопоточного вычислительного процесса, в ходе которого параметры некоторых элементов сети определяются одновременно во время наиболее сложной в вычислительном плане подзадачи - «прямого хода» метода ДП (рис. 4). Во время многошагового вычислительного процесса параметры элементов сети последовательно определяются в направлении от потребителей к теплоисточнику. Расчет начинается со следующих элементов: 1) участков, оканчивающихся конечными потребителями; 2) участков, дополняющих выбранное дерево до полной схемы (что позволяет решать задачу, не «разрезая» расчетную схему сети в дерево); 3) участков, «разрывающих» контуры замкнутой циркуляции (что позволяет рассчитывать сети, содержащие такие контуры). Номера участков, для которых можно проводить оптимизацию их параметров, записываются в очередь. Вычислительные потоки, каждый из которых может одновременно решать задачу оптимизации одного участка, извлекают номера участков из очереди и рассчитывают их параметры. После расчета участка алгоритм проверяет, рассчитаны ли другие участки, исходящие из общего с уже рассчитанным участком узла. Если все исходящие из общего узла участки рассчитаны, то в очередь ставятся участки, оканчивающиеся этим узлом. Вычислительный процесс завершается, когда рассчитаны все исходящие из теплоисточников участки сети.

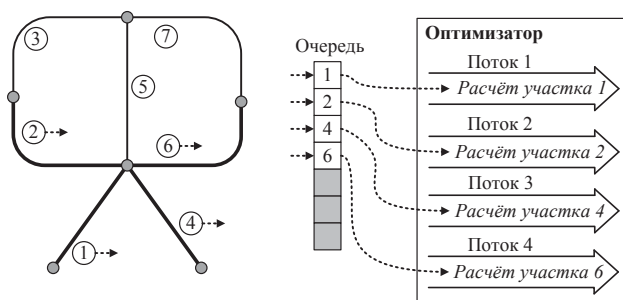


Рис. 4. Иллюстрация работы параллельного алгоритма

## ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС «СОСНА-М»

Разработанный методический подход был успешно применен при реализации программного комплекса (ПК) нового поколения «СОСНА-М» (Синтез Оптимальных Систем с учетом Надежности) для решения задач оптимизации параметров ТСС [3]. В результате применения разрабо-

танного методического подхода при реализации ПК «СОСНА-М» удалось создать открытую для развития программную систему. Реализованный ПК состоит из 62 программных компонентов. Объем написанного программного кода более 4000 строк. ПК «СОСНА-М» реализован на базе предложенного авторами методического подхода к реализации ПО для решения задач оптимального развития и реконструкции ТСС, который основан на применении концепции модельно-управляемой архитектуры, метапрограммирования и формализованных знаний о предметной области в виде онтологий [3,4].

## РЕЗУЛЬТАТЫ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ

Предлагаемые методика и алгоритмы, реализованные в ПК «СОСНА-М», применялись для решения задач оптимальной реконструкции ТСС Центрального и Адмиралтейского районов Санкт-Петербурга, города Братска и пос. Магистральный. При помощи разработанного ПВК были определены: 1) «узкие места» в системе - участки с недостаточной пропускной способностью; 2) зоны действия теплоисточников; 3) способы реконструкции существующих участков сети и оптимальные для них диаметры; 4) параметры насосных подкачивающих станций; 5) напоры на источниках; 6) располагаемые напоры у потребителей; 7) давления в узлах сети и расходы на ее участках.

Двухлинейная модель тепловой сети ТСС Центрального и Адмиралтейского районов Санкт-Петербурга содержит 3238 участков и 3186 узлов подающей и обратной магистралей. В результате многоуровневой декомпозиции этой модели исходная задача сведена к иерархически связанному набору подзадач оптимизации параметров многоконтурных и разветвленных сетей меньшей размерности и сложности. Кольцевые части подающей и обратной магистралей, полученные при декомпозиции модели сети, содержат по 537 участков. Оптимизация параметров каждой из этих кольцевых частей представляет собой подзадачу, которая в 6 раз меньше исходной задачи.

Реализованные в ПК «СОСНА-М» алгоритмы, учитывающие многоуровневую декомпозицию модели тепловой сети, обеспечили получение решения задачи за 4 с. Применение параллельных вычислений в сочетании с многоуровневой декомпозицией модели сети позволило найти решение за 1,5 с. ПК «СОСНА», применявшийся ранее в ИСЭМ СО РАН для решения задач оптимизации параметров ТСС, нашел решение задачи за 166 с.

Проведенные вычислительные эксперименты показали, что разработанный параллельный алгоритм позволяет получать ускорение вычислительного процесса практически пропорциональное количеству вычислительных ядер процессора и выполняемых потоков (рис. 5). Представленные результаты получены на процессоре Intel i7-2600 с четырьмя вычислительными ядрами.

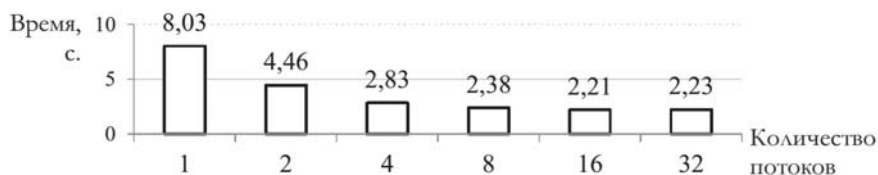


Рис. 5. Зависимость времени счета от количества потоков

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанные методика и алгоритмы позволяют решать практические задачи оптимизации параметров ТСС большой (реальной) размерности и применяются для оптимизации параметров многоконтурных сетей при решении практических задач оптимального развития и реконструкции ТСС. Разработанные быстродействующие алгоритмы используются при организации сложных итерационных расчетов. Предложенный параллельный алгоритм позволяет использовать возможности современной многопроцессорной (многоядерной) вычислительной техники, что приводит к значительному сокращению времени решения прикладных задач. На базе пред-

ложенных подходов разработан ПК «СОСНА-М» для решения задач оптимизации параметров ТСС, который может применяться в научно-исследовательских, проектных и эксплуатационных организациях, занимающихся вопросами теплоснабжения. Применение разработанного методического и программного обеспечения позволяет получать рекомендации по преобразованию сложных ТСС, повышающие эффективность их работы и качество снабжения потребителей тепловой энергией.

## **БЛАГОДАРНОСТИ**

Исследования выполняются при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №13-07-00297) и программы Президиума РАН №15 (грант №230).

## **ЛИТЕРАТУРА**

- [1] Меренков А.П., Хасилев В.Я. Теория гидравлических цепей. М.: Наука, 1985. 280 с.
- [2] Математическое моделирование и оптимизация систем тепло-, водо-, нефте- и газоснабжения / А.П. Меренков, Е.В. Сеннова, С.В. Сумароков, В.Г. Сидлер, Н.Н. Новицкий, В.А. Стенников, В.Р. Чупин. Новосибирск: ВО Наука, Сибирская издательская фирма, 1992. 407 с.
- [3] Соколов Д.В., Стенников В.А., Ощепкова Т.Б., Барахтенко Е.А. Программный комплекс нового поколения для схемно-параметрической оптимизации многоконтурных теплоснабжающих систем // Теплоэнергетика. М.: МАИК «Наука/Интерпериодика», 2012. №4. С. 72-77.
- [4] Стенников В.А., Барахтенко Е.А., Соколов Д.В. Методы комплексного развития и реконструкции теплоснабжающих систем с применением современных информационных технологий // Промышленная энергетика. Москва: НТФ «Энергопрогресс», 2012. №4. С. 17-22.

# AUTOMATING THE PROCESS OF SOFTWARE DEVELOPMENT FOR DESIGN AND RECONSTRUCTION OF HEAT SUPPLY SYSTEMS ON THE BASIS OF MODEL-DRIVEN DEVELOPMENT

## АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА РАЗРАБОТКИ СЛОЖНЫХ ПРОГРАММНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАЗВИТИЯ И РЕКОНСТРУКЦИИ ТЕПЛОСНАБЖАЮЩИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ КОНЦЕПЦИИ МОДЕЛЬНО-УПРАВЛЯЕМОЙ РАЗРАБОТКИ

---

*The authors suggest a methodological approach to automate create of the software for the solving of optimal design and reconstruction problems of heat supply systems. The approach is based on application of model-driven development where the ontological system is used for model formalization. The developed approach has been used for implementation of the SOSNA-M software for the solution of optimal parameter defining problems of heat supply systems.*

---

### ВВЕДЕНИЕ

Теплоснабжающие системы (ТСС) являются сложными техническими системами, обеспечивающими социальные нужды населения. Увеличение объема ежегодно присоединяемой нагрузки, связанного с вводом объектов жилищного и социального строительства и инфраструктурных объектов, появление нового энергоэффективного оборудования, повышение требований к качеству и надежности теплоснабжения потребителей приводят к необходимости постоянного решения проблемы развития и реконструкции теплоснабжающих систем. В Институте систем энергетики имени Л.А. Мелентьева (ИСЭМ СО РАН) в рамках теории гидравлических цепей [1] разработана комплексная методика решения задачи развития и реконструкции ТСС [2]. Эта методика основана на применении метода декомпозиции общей задачи на ряд подзадач ее составляющих. Основными из них являются: оптимизация структуры системы, выбор оптимальных параметров системы, расчёт показателей надежности, расчёт нормальных и аварийных режимов, расчёт параметров источников тепла и определение их влияния на окружающую среду, расчёт показателей экономической эффективности полученного решения по системе.

Решение задач развития и реконструкции ТСС представляет собой сложный итерационный вычислительный процесс, в ходе которого происходит решение перечисленных выше задач в различной последовательности и увязывание получаемых на каждом его этапе решений. Сложность получения решения заключается в необходимости формирования индивидуального алгоритма под конкретную задачу с учетом особенностей рассматриваемой ТСС. В рамках итерационного вычислительного процесса одна задача может многократно решаться. Традиционные подходы с использованием программных комплексов, решающих определенную задачу, не позволяют выполнить организацию единого итерационного вычислительного процесса, индивидуального для каждой из рассматриваемых ТСС с учетом особенностей используемого методического обеспечения.

Работа посвящена проблеме разработки методического подхода автоматизированного построения специализированного программного обеспечения, предназначенного для решения задач развития и реконструкции теплоснабжающих систем.

---

<sup>1</sup> Melentiev Energy Systems Institute of SB RAS (ESI SB RAS), Irkutsk, Russia

## НЕОБХОДИМОСТЬ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЦЕССА РАЗРАБОТКИ СЛОЖНЫХ ПРОГРАММНЫХ СИСТЕМ

В ИСЭМ СО РАН разработаны и развиваются эффективные методы решения задач развития и реконструкции ТСС, которые являются обобщением и реализацией накопленного практического опыта, полученного при развитии и реконструкции ТСС городов России и зарубежья. Разработанное методическое обеспечение реализовано в виде программных комплексов (СОСНА, НАДЕЖНОСТЬ, СТРУКТУРА, АСИГР и др.).

Комплексная методика для решения задач развития и реконструкции предполагает формирование алгоритма с учетом особенностей моделируемой ТСС и необходимости принятия решения по дальнейшему ходу вычислительного процесса при расчете ТСС реального масштаба. Трудность заключается в том, что полученное решение одним из программных комплексов (ПК), ориентированного на решение определенной задачи, необходимо проанализировать, переработать и передать в нужном формате в качестве исходных данных другому ПК, который решает следующую в соответствии с алгоритмом задачу. Для преодоления этой трудности необходим переход к новому уровню создания программного обеспечения (ПО) и необходимости разработки методического подхода к автоматизации построения сложных программных систем для решения задач оптимального развития и реконструкции ТСС с применением современных информационных и интеллектуальных технологий [3].

При этом необходимо решить ряд ключевых задач.

- Создать средства автоматического формирования вычислительного процесса решения задачи оптимального развития и реконструкции ТСС.
- Обеспечить возможность накопления и повторного использования опыта инженера-энергетика, полученного при решении задач с практическим использованием ПО.
- Предоставить инженеру-энергетику возможность разрабатывать алгоритм решения задачи оптимального развития и реконструкции ТСС, организуя и изменяя единый итерационный вычислительный процесс.
- Разработать для исследователя средства создания моделей элементов и интеграции их в ПО при проведении научных или инженерных расчетов без участия программиста.

Переход к современным информационным и интеллектуальным технологиям предоставит следующие возможности:

- выполнять интеллектуальную поддержку процесса формирования схемы решения задачи инженером-энергетиком;
- автоматически организовывать вычислительный процесс на основе схемы, составленной инженером-энергетиком при помощи специализированного графического интерфейса, и координировать его дальнейший ход;
- автоматизировать процесс получения эффективных алгоритмов решения поставленных задач на основе накопленного опыта их решения;
- формализовать инженерные знания, которые можно многократно использовать при решении различных задач;
- использовать интеллектуальную поддержку принятия решения в ходе вычислительного процесса;
- объяснять полученные результаты решения и действия при принятии решения в ходе вычислительного процесса (механизм объяснений).

## МЕТОДИЧЕСКИЙ ПОДХОД К АВТОМАТИЗАЦИИ РАЗРАБОТКИ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Разработанный авторами методический подход к автоматизации разработки программного обеспечения базируется на идеях MDD (model-driven development). Суть этого подхода заключается в том, что программная система автоматически генерируется на основе формализованного описания в виде моделей. Такой подход позволяет автоматизировать процесс получения программной системы для решения конкретной задачи развития и реконструкции ТСС. Схема формирования вычислительного процесса на основе моделей приведена на Рис. 1.

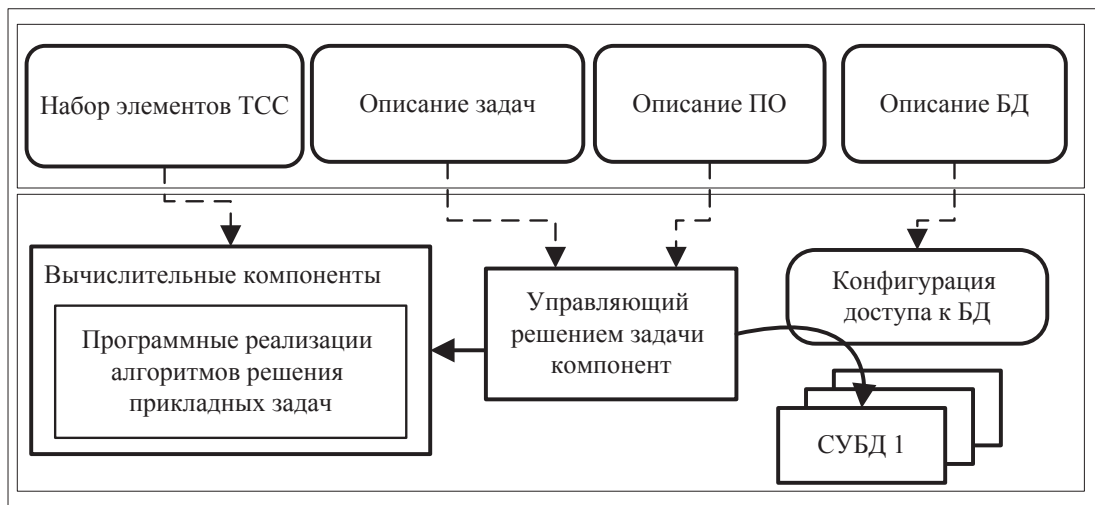


Рис. 1. Схема формирования вычислительного процесса на основе моделей

Разработанный методический подход включает:

- методы разработки и применения программных компонентов;
- базовую архитектуру ПО для решения задач оптимального развития и реконструкции ТСС;
- технологию автоматической организации вычислительного процесса;
- технологию автоматической настройки ПО на расчёт различных ТСС, с разным составом оборудования.

Авторами при разработке методического подхода использован компонентный подход, который позволяет выполнить иерархическую декомпозицию программной системы на части и представить ее логическую архитектуру в виде взаимодействующих друг с другом компонентов. Особенность этого подхода состоит в том, что однажды реализованный компонент (например, решатель системы уравнений, алгоритм построения дерева и т.д.) может быть многократно использован при решении различных задач. Данное свойство компонентов позволяет реализовать методику решения задач оптимального развития и реконструкции систем теплоснабжения, основанную на последовательном, поэтапном их решении и взаимоувязке получаемых на каждом этапе результатов. Появляется возможность использовать готовые компоненты и наращивать функциональность программного обеспечения без переработки исходного программного кода.

Компоненты, в зависимости от выполняемых функций, были разделены на группы. Для каждой группы компонентов разработаны интерфейсы взаимодействия между компонентами, включая правила их вызова, передачи параметров и результатов расчётов. Выделены следующие группы компонентов:

- вычислительные компоненты, содержащие программные реализации алгоритмов для мате-

математического моделирования и оптимизации ТСС;

- системные компоненты, которые обеспечивают подготовку и экспертизу данных;
- управляющие компоненты, предназначенные для организации последовательности вызовов вычислительных и системных компонентов.

Проведенные авторами исследования позволили разработать архитектуру ПО, которая учитывает особенности комплексной методики решения задачи развития и реконструкции ТСС [3-5]. В разработанной архитектуре выделены четыре логических уровня, представленных на рис. 2.

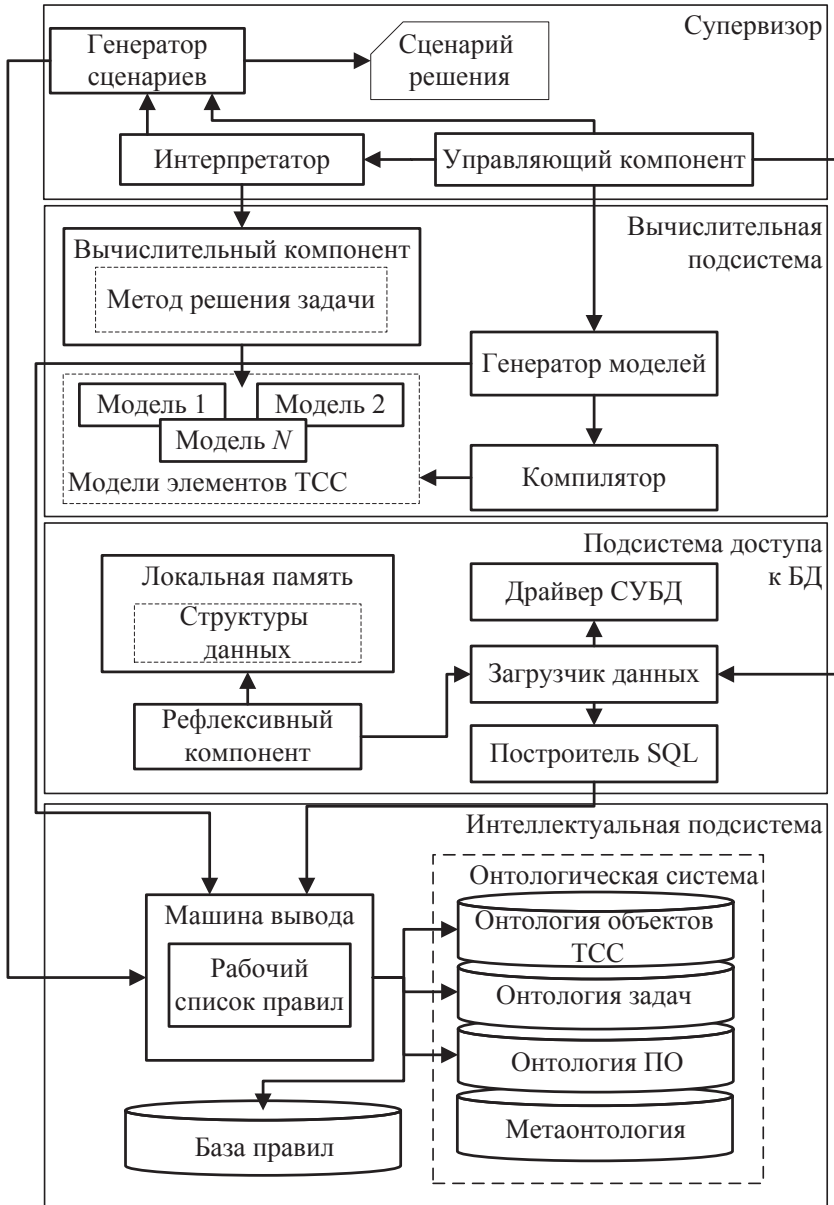


Рис. 2. Архитектура программного обеспечения

Супервизор организует процесс решения задачи оптимального развития и реконструкции ТСС, который состоит из следующих шагов:

1. Планирование вычислительного процесса. Строится граф, узлы которого соответствуют шагам решения задачи, дуги соответствуют связям между шагами.
2. Формирование алгоритма решения задачи на основе построенного графа. Алгоритм формализовано представляется в виде сценария, который является набором операторов языка программирования, причем, эти операторы интерпретируются без проведения компиляции программного кода. В качестве языков сценариев используются JavaScript и Python.
3. Выполнение подготовленного сценария решения задачи осуществляется в ходе вычислительного процесса путем последовательного вызова вычислительных программных компонентов. Для интерпретации полученного сценария используется технология Java Scripting [6], которая предназначена для взаимодействия программ, написанных на языке Java, с программами, реализованными с использованием языков сценариев.

Динамическое подключение вычислительных компонентов к работающей программе позволяет собирать программную систему во время ее работы из готовых компонентов под конкретную задачу. Для этого используется подход, основанный на применении механизмов рефлексии языка программирования Java. Средства рефлексии языка Java обеспечивают получение информации о компонентах, загрузку их в память и манипуляцию ими во время работы программы.

*Вычислительная подсистема.* Генерация компонентов-моделей позволяет отделить реализацию вычислительных алгоритмов от программных реализаций математических моделей элементов ТСС [5]. Язык программирования Java обладает набором необходимых средств для генерации исходного Java-кода как результата работы самой программы, его компиляции в программные компоненты и подключения их к программной системе во время ее работы.

*Подсистема доступа к базам данных (БД).* С целью организации гибкого доступа к БД различных разработчиков, реализованных под разными СУБД, происходит автоматическая генерация SQL-кода. В данной подсистеме применяется механизм рефлексии, содержащийся в разработанном рефлексивном компоненте, для динамического заполнения структур данных, используемых вычислительными компонентами. В результате применения данных технологий компоненты доступа к БД приобретают важные свойства, такие как гибкость и универсальность использования.

*Интеллектуальная подсистема.* Позволяет решать задачи управления и проектные задачи по их постановкам (описаниям) и исходным данным вне зависимости от сложности математических моделей этих задач. В общем случае, по описанию проблемы на языке предметной области выполняется автоматическое построение математических моделей и автоматический синтез программного обеспечения при формулировке задач оптимального развития и реконструкции ТСС.

Особенность предложенного методического подхода состоит в том, что он позволяет:

- осуществить разделение моделей элементов ТСС и методов, применяемых для решения задач;
- динамически формировать ПО при решении конкретной задачи, в том числе создавать часть программных компонентов по моделям;
- автоматически организовывать вычислительный процесс на основе схемы, составленной инженером-энергетиком в терминах его предметной области.

## **ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ ПОДДЕРЖКИ АВТОМАТИЗАЦИИ РАЗРАБОТКИ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ**

Развитие рынка оборудования с одной стороны приводит к повышению эффективности ТСС, с другой стороны, при решении задачи оптимального развития и реконструкции ТСС требуется учитывать широкий спектр существующего оборудования с различными параметрами. ПО должно предоставлять инженеру возможность работы со всем множеством оборудования при решении



задач оптимальной реконструкции и развития ТСС. В свою очередь для автоматизации вычислительного процесса, во-первых, необходимо иметь формализованное описание решаемых задач и, во-вторых, требуется осуществить формализованное представление связей между решаемыми задачами. Для этих целей должно быть выполнено унифицированное описание множества объектов ТСС и решаемых задач таким образом, чтобы объекты предметной области и отношения между ними были представлены в виде формализованных знаний, которые могли бы быть использованы программными системами во время их работы. Решить данную задачу позволяют *онтологии* - базы знаний специального вида, формализующие знания предметных областей. В инженерии знаний под онтологией понимается описание некоторой предметной области, которое используется для формального и декларативного определения ее концептуализации [7-9].

В рамках разработанного методического подхода предложена методика построения онтологической системы, которая состоит из следующих компонентов: метаонтологии, онтологии объектов ТСС, онтологии задач, онтологии ПО (см. рис. 2). Онтологическая система применяется для формализованного представления моделей объектов предметной области при реализации концепции MDD.

Рассмотрим каждый из компонентов онтологической системы.

Метаонтология - это онтология, которая специфицирует множество онтологий. Она содержит базовые понятия предметной области и устанавливает отношения между ними, которые используются для построения онтологии объектов ТСС, онтологии задач и онтологии ПО.

Онтология объектов ТСС содержит описание свойств подсистем ТСС, типы и параметры оборудования, иерархию структуры элементов сети, их свойства, связи между элементами, их математическое описание (например, формулы расчета гидравлических сопротивлений, падений давлений и др.). Данная онтология предназначена для формирования моделей элементов, которые в процессе осуществления вычислений интегрируются с вычислительными алгоритмами, содержащимися в программных компонентах. Применение полученных моделей позволяет настраивать ПО на особенности оборудования, рассматриваемого при исследовании конкретной ТСС.

Онтология задач содержит формализованное описание задач, решаемых при исследовании ТСС, входящих в них подзадач и последовательность решения последних, параметров, являющихся исходными данными, и параметров, получаемых в результате решения задачи. Она ориентирована на организацию пошагового решения поставленных задач (вызов программных модулей и подпрограмм).

Онтология ПО содержит описание программных компонентов и их свойств, входных и выходных параметров, форматов данных, технологий и интерфейсов доступа к компонентам системы, структуры используемых баз данных (таблицы и связи между ними, представления, хранимые процедуры и т.д.). Данная онтология используется для организации доступа к программным компонентам и организации взаимодействия ПО с различными БД при автоматической генерации конфигурации доступа к СУБД.

Одно из важнейших преимуществ, получаемых за счет применения онтологий, является формализация знаний предметных областей, которые можно многократно использовать при решении различных задач. Такие знания формализуются при участии инженеров-энергетиков, являющихся специалистами в предметной области.

В качестве средства формализации онтологической системы в рамках разрабатываемых информационных и интеллектуальных технологий предлагается использовать предметно-ориентированный язык на базе XML (англ. eXtensible Markup Language - расширяемый язык разметки). Причиной разработки этого языка служит то, что в данном случае онтология имеет прикладной характер и предназначена для использования в конкретном ПО. Целесообразно использовать предметно-ориентированный язык для описания объектов ТСС близкий к языку инженеров-энергетиков, позволяющий выполнять эти описания в терминах предметной области. Для фор-

мализованного представления графических моделей объектов ТСС используется язык SVG (англ. Scalable Vector Graphics - масштабируемая векторная графика), математических выражений - MathML (англ. Mathematical Markup Language - язык математической разметки).

Онтологии содержат декларативные знания, которые дают формализованное описание структуры объектов. Выполнение автоматического выстраивания вычислительного процесса решения задачи развития и реконструкции ТСС и управление им требует также наличия знаний, способных анализировать сложившуюся ситуацию и формировать алгоритм дальнейших действий в соответствии с ней, а также определять средства и пути получения новых знаний и их проверку. Такими знаниями являются продукционные правила [10]. Предлагается использовать комбинацию этих форм знаний в виде онтологий и продукционных правил. В таких моделях декларативные знания (утверждения об объектах предметной области, их свойствах и отношениях между ними) описываются в онтологиях, а правила преобразования объектов предметной области, алгоритмы, методики, инструкции, стратегии принятия решений - в виде продукционных правил.

Машина логического вывода - это программа, моделирующая механизм рассуждений и оперирующая знаниями и данными с целью получения новых данных из знаний и других данных, имеющихся в рабочей памяти [9]. Обычно машина логического вывода использует программно реализованный механизм дедуктивного логического вывода или механизм поиска решения в сети фреймов или семантической сети. Так в онтологии задач формализовано хранятся знания о задачах и о составе входящих в нее подзадач. Машина вывода на основе формализованных знаний и правил строит общее решение для конкретной ТСС.

## **ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ**

Разработанный методический подход использован при разработке ПК СОСНА-М, который позволяет находить оптимальные параметры системы как для разветвленных так и кольцевых схем ТСС с множеством источников, сложным рельефом местности, произвольным числом узлов, участков и контуров [4]. С его помощью в проектной практике подготавливаются рекомендации по реконструкции и развитию реальных ТСС, включающие предложения по: диаметрам новых и реконструируемых участков тепловой сети, видам реконструкции существующих участков, местам установки насосных станций, располагаемым напорам теплоносителя на насосных станциях и источниках. Кроме того, ПК осуществляет проверку работоспособности системы и рассчитывает финансово-экономические показатели предлагаемого решения.

Основной частью данного ПК является оптимизатор, в котором реализован метод многоконтурной оптимизации. ПК предоставляет пользователю возможность задать конфигурацию процесса оптимизации, т.е. сформировать желаемый набор используемого оборудования, список используемого оборудования, параметры прокладки, ограничения по давлениям теплоносителя у потребителей и т.д. На основе заданной пользователем конфигурации автоматически формируется набор моделей для используемого в исследуемой ТСС оборудования, которые извлекаются из онтологической системы. Основным преимуществом предложенной технологии организации вычислительного процесса является возможность осуществления оптимизации параметров ТСС с дифференциацией допустимого набора трубопроводов, оборудования и видов реконструкции элементов конкретной ТСС с учетом ее особенностей и условий развития.

## **ВЫВОДЫ**

Предложен методический подход к автоматизированному созданию сложных программных систем на основе концепции модельно-управляемой разработки, на основе которого реализована разработанная в ИСЭМ СО РАН комплексная методика решения задачи оптимального развития и реконструкции ТСС. Этот подход позволяет автоматически организовывать вычислительный процесс на основе схемы, составленной инженером-энергетиком, и координировать его дальнейший

ход. В качестве моделей использованы онтологии, которые формализуют знания предметных областей, многократно используемые при решении различных задач. Такие знания формализуются при участии инженеров-энергетиков, являющихся специалистами в предметной области. Применение онтологий позволило: гибко формировать схему вычислительного процесса, отделить реализации алгоритмов от моделей элементов ТСС и автоматически настраивать программное обеспечение для решения задач оптимального развития и реконструкции ТСС. Предложено использовать комбинацию форм знаний в виде онтологий и продукционных правил для решения задач развития и реконструкции ТСС. Онтологии описывают декларативные знания (утверждения об объектах предметной области, их свойствах и отношениях между ними), а продукционные правила - правила преобразования объектов предметной области, алгоритмы, методики, инструкции, стратегии принятия решений.

Разработанный методический подход использован при построении ПК СОСНА-М, который подготавливает рекомендации по проектированию реальных ТСС с определением: диаметров новых участков тепловой сети, видов реконструкции существующих участков, мест установки насосных станций, располагаемых напоров теплоносителя на насосных станциях и источниках, осуществлять проверку работоспособности системы и получать экономическую оценку предлагаемого решения.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Представленные в статье результаты получены при частичной финансовой поддержке по программе Президиума РАН №15 в рамках научного проекта №230 и Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта №13-07-00297.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Математическое моделирование и оптимизация систем тепло-, водо-, нефте- и газоснабжения / А.П. Меренков, Е.В. Сеннова, С.В. Сумароков, В.Г. Сидлер, Н.Н. Новицкий, В.А. Стенников, В.Р. Чупин. Новосибирск: ВО «Наука», Сибирская издательская фирма, 1992. 407 с.
- [2] Стенников В.А., Сеннова Е.В., Ощепкова Т.Б. Методы комплексной оптимизации развития теплоснабжающих систем // Энергетика. М.: Изв. РАН, 2006. №3. С. 44-54.
- [3] Стенников В.А., Барахтенко Е.А., Соколов Д.В. Методы комплексного развития и реконструкции теплоснабжающих систем с применением современных информационных технологий // Промышленная энергетика. М.: НТФ «Энерго-прогресс», 2012. №4. С. 17-22.
- [4] Стенников В.А., Барахтенко Е.А., Соколов Д.В. Применение метапрограммирования в программном комплексе для решения задач схемно-параметрической оптимизации теплоснабжающих систем // Программная инженерия. М.: Новые технологии, 2011. №6. С. 31-35.
- [5] Соколов Д.В., Стенников В.А., Ощепкова Т.Б., Барахтенко Е.А. Программный комплекс нового поколения для схемно-параметрической оптимизации многоконтурных теплоснабжающих систем // Теплоэнергетика. М.: МАИК «Наука / Интерпериодика», 2012. № 4. С. 1-6.
- [6] Монахов В.В. Язык программирования Java и среда NetBeans. 3-е изд. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 704 с.
- [7] Gruber T. R. 1993. A translation approach to portable ontologies. Knowledge Acquisition, 5(2):199-220, 1993.
- [8] Oberle D., Guarino N., & Staab S. (2009) What is an ontology? In: «Handbook on Ontologies». Springer, 2nd edition, 2009.
- [9] Гаврилова Т.А., Хорошевский В.Ф. Базы знаний интеллектуальных систем. СПб: Питер, 2000. 384 с.
- [10] Питер Джексон. Введение в экспертные системы. 3-е изд. М.: Вильямс, 2001. 624 с.

# NUMERICAL MODELING OF TSUNAMI RUNUP USING METHOD OF LARGE PARTICLES

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАКАТА ВОЛН ЦУНАМИ МЕТОДОМ КРУПНЫХ ЧАСТИЦ

---

*The paper presents an approach to 2-D modeling of tsunami waves runup on the coast based on the use of large-particle method for calculating zones of the waves runup on the shore. Computational algorithm is based on the classical equations of shallow water theory. The results of the verification of the numerical algorithm and validation of the mathematical model on one- and two-dimensional problems are presented. The opportunities of the methodology are demonstrated by the calculation of the wave runup on the coast of some regions of Japan during the 2011 Tohoku tsunami.*

---

### ВВЕДЕНИЕ

Японский термин цунами означает набегавшую на побережье большую волну в бухте, вызванную землетрясением, извержением вулкана или оползнем. Это опасное по своим последствиям природное явление часто приводит к катастрофическим по своим масштабам разрушениям и гибели большого числа людей. При разработке средств прогнозирования возможности возникновения такого явления и смягчения его последствий ключевую роль играет численное моделирование процессов возникновения и распространения волн цунами, а также и их наката на побережье. В настоящей работе задача о накате волны цунами рассматривается в рамках модели мелкой воды и основной целью ее решения является определение зон затопления и максимальных высот заплеска на суше.

Для численного моделирования явлений обсуждаемого класса разработано много численных методов. Одним из популярных в последние годы стал бессеточный метод SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) [1], являющийся дальнейшим развитием метода частиц в ячейках (PIC). В отличие от PIC, в SPH отсутствует эйлеров этап. Это позволило, с одной стороны, сделать метод более робастным, применимым для расчета течений в сложных областях, но, с другой стороны, потребовало разработать ряд сложных процедур сглаживания для описания взаимодействия между частицами, что не обеспечивает полную консервативность метода.

В методе крупных частиц также, как и в методе SPH, используются частицы в виде «элементарного столбика воды», называемые в дальнейшем «крупными частицами». Моделирование их движения происходит в два этапа - лагранжевого и эйлерова. Это позволяет существенно упростить процедуру учета взаимодействия между частицами, обеспечивая в то же время достаточно точное воспроизведение наката воды на сухой берег и строгое выполнение законов сохранения.

Заметим, что число частиц, необходимых для решения двумерных задач в методе SPH с необходимой точностью, составляет примерно 100 000 [2]. Это число сравнимо с числом узлов разностной сетки в методе крупных частиц, однако программная реализация последнего метода существенно проще, а число операций, затрачиваемое на расчет движения одной крупной частицы, примерно на два порядка меньше, чем в SPH.

### ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

В рамках модели мелкой воды рассматривается задача о накате поверхностных волн на берег со

---

1 Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russia

2 University of Pristina, Kosovska Mitrovica, Serbia

сложным рельефом береговой кромки. С учетом силы трения, осредненной по глубине, система уравнений, описывающая движение такой волны в декартовой системе координат, координатная плоскость которой  $z = 0$  совпадает с поверхностью «спокойной» воды, записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Hu}{\partial x} + \frac{\partial Hv}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial Hu}{\partial t} + \frac{\partial Hu^2}{\partial x} + \frac{\partial Huv}{\partial y} + \frac{g}{2} \frac{\partial H^2}{\partial x} &= gH \frac{\partial h}{\partial x} - uHC_R, \\ \frac{\partial Hv}{\partial t} + \frac{\partial Huv}{\partial x} + \frac{\partial Hv^2}{\partial y} + \frac{g}{2} \frac{\partial H^2}{\partial y} &= gH \frac{\partial h}{\partial y} - vHC_R, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $H(x, y, t)$ ,  $h(x, y)$  - глубина воды и профиль дна соответственно, отсчитываемые от поверхности воды,  $u(x, y, t)$ ,  $v(x, y, t)$  - декартовы координаты вектора скорости  $\vec{u}(x, y, t)$ ,  $C_R$  - коэффициент трения,  $g$  - ускорение силы тяжести. Для определения коэффициента  $C_R$  использовалась известная формула:  $C_R = \frac{\rho g n^2}{H^{4/3}} |\vec{u}|$ , где  $n$  - эмпирический коэффициент (коэффициент Шези).

Для численного решения системы (1) применялся метод крупных частиц [3]. Использование «классического» метода частиц в ячейках оказалось невозможным в силу статистического характера получаемого с его помощью решения. Такое решение не удовлетворяет условию гидростатического равновесия жидкости в покоящейся воде, и значительно искажает процесс распространения волны. Метод крупных частиц лишен этого недостатка и позволяет получить сбалансированную разностную схему. При его реализации использовалась равномерная прямоугольная разностная сетка, что обусловлено следующими причинами:

- профиль побережья является достаточно сильно изрезанным и поэтому весьма проблематично построить криволинейную разностную сетку, пригодную для решения системы (1);
- в процессе наката волны происходит затекание воды во впадины, наличие которых обусловлено рельефом суши (устье рек, каньоны и т.п.), а также обтекание различного рода возвышенностей, поэтому использовать адаптивную сетку, «привязанную» к линии уреза, не представляется возможным;
- по этой же причине возникают проблемы со сгущением прямоугольной сетки, поскольку заранее неясно, в каких местах области решения ее следует сгущать.

По-видимому, наиболее целесообразным для решения рассматриваемого класса задач является использование прямоугольных составных сеток, границы которых можно перестраивать по мере продвижения воды по суше.

Реализация метода крупных частиц проводится в два этапа. На первом (эйлеровом) этапе в системе (1) отбрасываются все конвективные члены и система записывается в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial (H - h)}{\partial x} &= -uC_R, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial (H - h)}{\partial y} &= -vC_R. \end{aligned} \quad (2)$$

На втором (лагранжевом) этапе решаются уравнения переноса

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Hu}{\partial x} + \frac{\partial Hv}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial Hu}{\partial t} + \frac{\partial Hu^2}{\partial x} + \frac{\partial Huv}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial Hv}{\partial t} + \frac{\partial Huv}{\partial x} + \frac{\partial Hv^2}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Для решения систем уравнений (2) - (3) строится явная разностная схема первого порядка точности. Заметим, что в силу обычной изрезанности берегового рельефа суши для получения численного решения с детальным разрешением картины натекания, как уже отмечалось выше, необходимо использовать достаточно мелкую разностную сетку. Поэтому применение схем первого порядка точности, обладающих к тому же монотонными свойствами, вполне оправдано. При построении такой схемы использовалась разностная сетка с разнесенными узлами, структура которой приведена на рис. 1. В узлах сетки (в кружочках) определяются сеточные функции  $H_{i,j}$  и  $h_{i,j}$ , расположение компонент скорости  $u_{i+1/2,j}$  и  $v_{i,j+1/2}$  обозначено квадратиками и треугольниками соответственно.

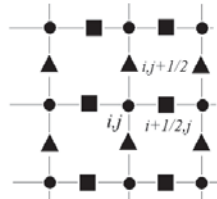


Рис. 1. Структура разностной сетки.

Разностная схема первого этапа записывается в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{i,j} &= H_{i,j}^n, \\ \tilde{u}_{i+1/2,j} &= (u_{i+1/2,j}^n - \Delta t ((H-h)_{i+1,j}^n - (H-h)_{i,j}^n) / \Delta x) / (1 + \Delta t C_R), \\ \tilde{v}_{i,j+1/2} &= (v_{i,j+1/2}^n - \Delta t ((H-h)_{i,j+1}^n - (H-h)_{i,j}^n) / \Delta y) / (1 + \Delta t C_R). \end{aligned} \quad (4)$$

На втором этапе для уравнений переноса (3) используется противопотоковая разностная схема:

$$\begin{aligned} H_{i,j}^{n+1} &= \tilde{H}_{i,j} - \Delta t ((\tilde{q}_{i+1/2,j} - \tilde{q}_{i-1/2,j}) / \Delta x + (\tilde{q}_{i,j+1/2} - \tilde{q}_{i,j-1/2}) / \Delta y), \\ \tilde{q}_{i+1/2,j} &= \begin{cases} \tilde{H}_{i,j} \tilde{u}_{i+1/2,j}, & \text{если } \tilde{u}_{i+1/2,j} > 0, \\ \tilde{H}_{i+1,j} \tilde{u}_{i+1/2,j}, & \text{если } \tilde{u}_{i+1/2,j} < 0 \end{cases}, \quad \tilde{q}_{i,j+1/2} = \begin{cases} \tilde{H}_{i,j} \tilde{v}_{i,j+1/2}, & \text{если } \tilde{v}_{i,j+1/2} > 0, \\ \tilde{H}_{i,j+1} \tilde{v}_{i,j+1/2}, & \text{если } \tilde{v}_{i,j+1/2} < 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (5)$$

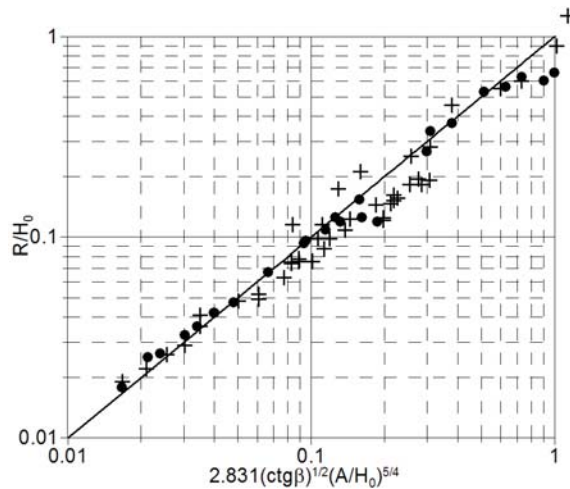
Аналогичным образом записываются выражения для вычисления значений  $(Hu)_{i+1/2,j}^{n+1}$  и  $(Hv)_{i,j+1/2}^{n+1}$ . Условием устойчивости разностной схемы является выполнение неравенства

$$\Delta t \leq \alpha \cdot \min \left\{ \frac{\Delta x}{|u| + \sqrt{gH}}, \frac{\Delta y}{|v| + \sqrt{gH}} \right\} \text{ во всех узлах разностной сетки, где } 0 < \alpha < 1 \text{ - эмпирический коэффициент запаса устойчивости.}$$

## НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

С целью верификации предложенной методики был выполнен набор общепринятых тестов. Первый из них проводился в одномерной постановке и состоял в решении задачи о накате уединенной волны на плоский откос, сопрягающийся с участком ровного дна. В работе [4] для такой задачи было получено аналитическое решение заплеска волны на берег  $R$  в зависимости от угла наклона склона  $\beta$ , глубины ровного участка дна  $H_0$  и амплитуды начальной волны  $A$ . Ниже на

рис. 2 приведено сравнение с этим аналитическим решением результатов, полученных в расчетах с помощью построенного численного алгоритма, и экспериментальных данных [4, 5].



**Рис. 2.** Задача наката уединенной волны на плоский откос. Значения максимальных заплесков, полученные по аналитической формуле (сплошная линия), в лабораторных экспериментах (крестики) и с помощью численного метода крупных частиц (кружочки).

Стандартный двумерный тест численных алгоритмов для расчета наката - задача об обтекании уединенной волной цилиндрического острова (Benchmark Problem 2) [6]. Эта задача решалась в акватории постоянной глубины 0.32 м, шириной 30 м и длиной 25 м, примерно в центре которой помещен усеченный конус с диаметром 7.2 м у основания и 2.2 м у вершины. Высота конуса - 0.625 м. В бассейне с таким рельефом были проведены лабораторные эксперименты, в ходе которых были определены максимальные величины вертикального наката уединенных волн разноразной начальной амплитуды.

На рис. 3 приведена картина обтекания острова в момент прохождения через него одной из таких волн, полученная в численном эксперименте. На рис. 3в виден характерный заплеск на тыльной (теневой) стороне острова, высота которого и размер зоны затопления вполне удовлетворительно совпадают с экспериментом.

Анализ результатов расчетов также показал наличие нелинейности изучаемого процесса. Это проявляется в том, что если при малой амплитуде падающей волны удастся подобрать параметр трения (коэффициент Шези), при котором результаты численного моделирования вплотную приближаются к экспериментальным данным вдоль всего периметра конического острова ( $\eta = 0.005$ ), то при увеличении амплитуды падающей волны такого единого параметра подобрать не удастся. В этом случае экспериментальные данные о заплеске в тыльной (теневой) зоне острова хорошо воспроизводятся при нулевом значении коэффициента Шези, а в остальных частях - при его значении, равном 0.004.

Третий, последний, двумерный тест подразумевает численное моделирование наката волны цунами в долине Монаи (остров Окушири, Япония) вследствие землетрясения около этого острова в 1993 г. В Центральном научно-исследовательском институте электроэнергетики г. Абики (Япония) после этого события был сооружен лоток, повторяющий прибрежную батиметрию и топографию. Через одну из границ вводилось возмущение, соответствующее записи мареографа при реальном цунами, и получающаяся в результате волновая картина внутри области измерялась в нескольких датчиках вблизи побережья (Benchmark Problem 4) [6]. Ниже на рис. 4 приведено сравнение лабораторных данных и численных результатов, которое показывает достаточно хорошее соответствие между кривыми графиков.

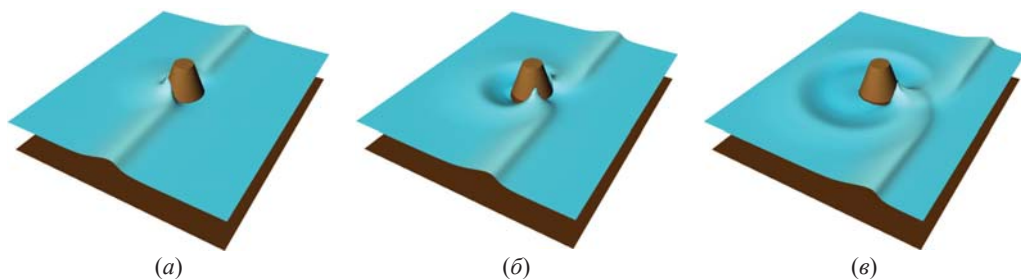


Рис. 3. Структура волны при обтекании острова в последовательные моменты времени, полученная в ходе вычислительных экспериментов.

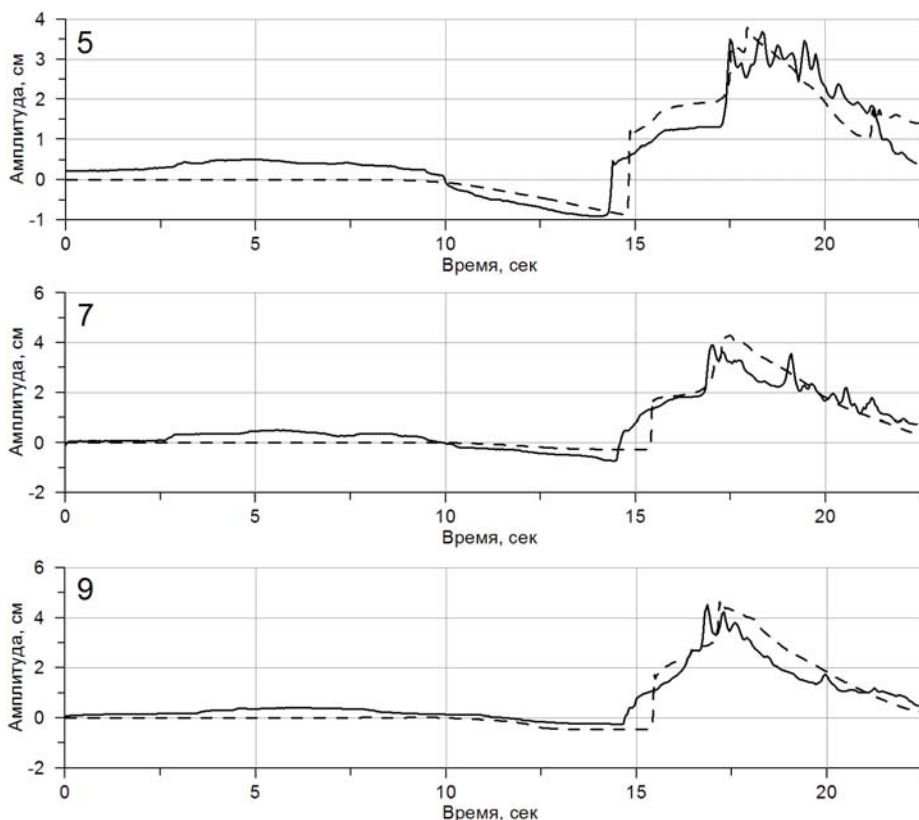


Рис. 4. Задача о цунами в заливе Монаи. Сравнение лабораторных данных (сплошные линии) и результатов, полученных в ходе численных расчетов (пунктирные линии). В верхнем левом поле каждого графика указан номер соответствующего датчика из лабораторного эксперимента.

С помощью изложенного метода были выполнены расчеты зон затопления на отдельных участках побережья Японии под воздействием волн цунами от пяти исторических землетрясений (Ansei-Tokai, 1854; Kanto, 1923; Tonankai, 1944; Nankai, 1946; Tohoku, 2011). Для последнего из перечисленных случаев на рис. 5 представлены результаты расчетов зон затопления, полученные по изложенной выше двумерной методике для метода крупных частиц (голубая заливка), которые сравнивались с результатами расчетов по конечно-разностному методу для одномерной модели с использованием технологии, описанной в [7] (темно-синяя заливка, на заднем фоне). Белой линией нарисована изобата 100 м. Сплошные прямые черные линии представляют собой сечения, вдоль которых проводилось 1D моделирование наката волн цунами. Видно, что результаты двумерных и одномерных расчетов практически совпадают. Это возможно в случаях, когда



фронт волны является достаточно плоским и движется к побережью в направлении, не сильно отличающимся от нормального.

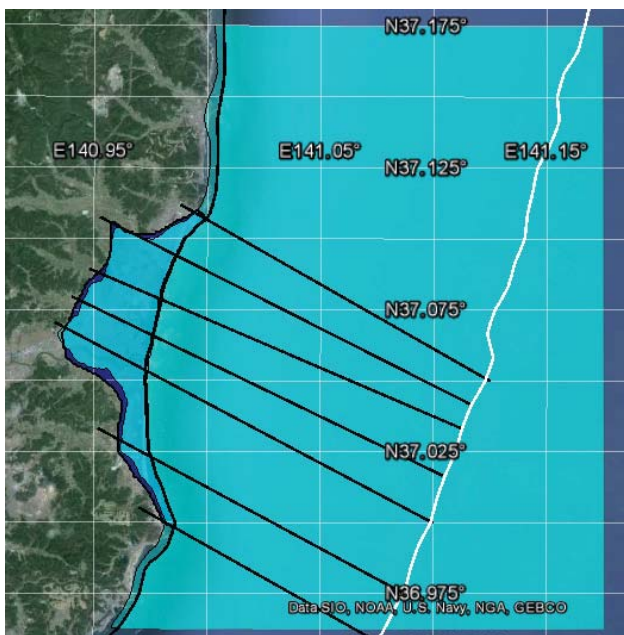


Рис. 5. Зоны затопления волной цунами (Tohoku, 2011 г.) побережья Японии в районе г. Иваки, рассчитанные в двумерном случае по методу крупных частиц (голубая заливка) и вдоль одномерных сечений по конечно-разностному методу [6] (темно-синяя заливка), наложенные на изображение Google Earth.

На рис. 6, 7 приведены результаты расчетов зон затопления в результате землетрясения 2011 г. для двух участков побережья Японии со сложным рельефом прибрежной области и изрезанной береговой линией, где одномерная методика расчета уже неприменима. Рис. 6 относится к побережью бухты Коборинаи, рис. 7 - к бухте Мияко.

Таким образом, приведенные в работе результаты численного моделирования свидетельствуют о достаточной точности предложенной модификации метода крупных частиц для расчета наката волн цунами на побережье с сильно изрезанной конфигурацией береговой линии.



Рис. 6. Область затопления волной цунами (Tohoku, 2011 г.) побережья бухты Коборинаи (голубая заливка), полученная в результате расчетов и наложенная на изображение Google Earth.

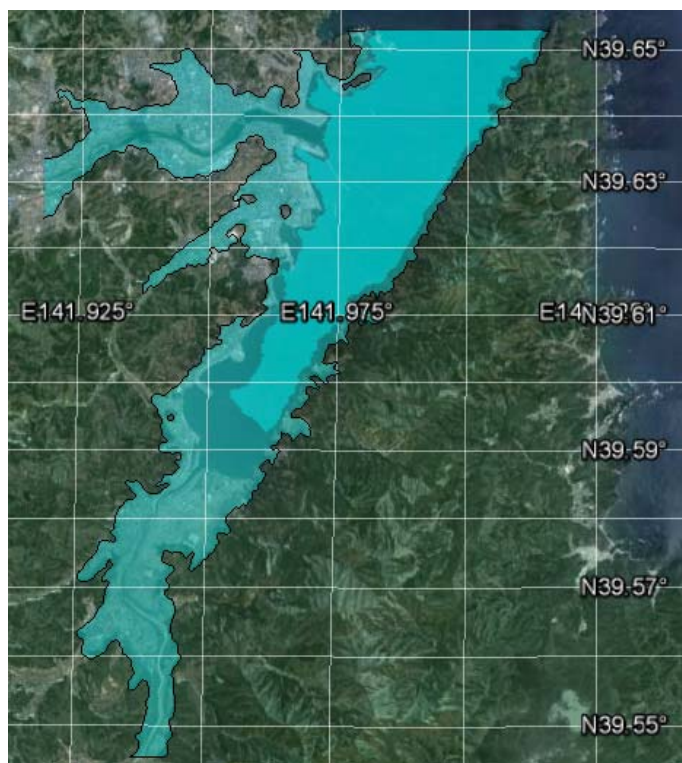


Рис. 7. Область затопления волной цунами (Tohoku, 2011 г.) побережья бухты Мияко (голубая заливка), полученная в результате расчетов и наложенная на изображение Google Earth.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Oger G., Doring M., Alessandrini B., Ferrant P. Two-dimensional SPH simulations of wedge water entries. *J. Comput. Phys.* Vol.213. 2006. P.803-822.
- [2] De Leffe M., Le Touze D., Alessandrini B. SPH modeling of shallow-water coastal flows. *Journal of Hydraulic Research.* Vol.48, Extra Issue. 2010. P.118-125.
- [3] Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука. 1982. 392 с.
- [4] Synolakis C.E. The runup of solitary waves. *Journal of Fluid Mechanics.* Vol.185. 1987. P.523-545.
- [5] Synolakis C.E. Tsunami Runup on Steep Slopes: How Good Linear Theory Really Is. *Natural Hazards.* Vol.4. 1991. P.221-234.
- [6] Liu, P.L.-F., Yeh H., Synolakis C. Advanced Numerical Models for Simulating Tsunami Waves and Runup. *Advances in Coastal and Ocean Engineering.* Vol.10. 2008. 250 pp.
- [7] Бейзель С.А., Шокина Н.Ю., Хакимзянов Г.С., Чубаров Л.Б., Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О некоторых численных алгоритмах расчета наката волн цунами в рамках модели мелкой воды. I. *Вычислительные технологии.* Т.19, №1. 2014. С. 40-62.

## MATHEMATICAL MODELING FOR ELECTROMAGNETIC PROCESSES OF ELECTROMECHANICAL ENERGY CONVERTERS

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ЭНЕРГИИ

---

*Mathematical modeling methods for electromagnetic processes of electromechanical energy converters are considered. The developed methods are based on the Maxwell equations' system and the equations of material media for materials that are used in electromechanical transducers constructions. The research results of stationary and non-stationary regimes of electromechanical energy converters are presented.*

---

Среди большой группы преобразователей энергии особое место принадлежит электромагнитным преобразователям. Эти устройства просты по конструкции, надёжны в работе и имеют очень высокий КПД, величина которого достигает 99%.

К группе электромагнитных преобразователей энергии относятся источники электрической энергии - генераторы, преобразователи электрической энергии в механическую - электрические двигатели и преобразователи параметров электрической энергии - трансформаторы. В ближайшие годы к этой группе добавятся электромагнитные преобразователи химической энергии в механическую энергию и наоборот.

Разработка и создание новых типов электромагнитных преобразователей энергии и совершенствование существующих типов преобразователей не представляется возможным без исследования протекающих в них электромагнитных процессов. Использование для этой цели опытных образцов новых электромагнитных преобразователей энергии требует больших материальных и временных затрат. Поэтому, усилия ученых в предшествующий период были сосредоточены на разработке методов исследования параметров, характеристик и процессов электромагнитных преобразователей энергии. Развитию теории электромагнитных преобразователей энергии значительное внимание уделяется и в настоящее время.

Основным, широко используемым на практике, методом исследования электромагнитных преобразователей энергии является метод математического моделирования, разработанный в 30 - 40 годы прошлого столетия. В этот период была создана универсальная система уравнений, описывающая электромагнитные процессы преобразователей энергии различных конструкций, и разработан метод решения. Метод базируется на представлении электромагнитных преобразователей энергии совокупностью эквивалентных электрических цепей - схем замещения. Имея схему замещения преобразователя, удаётся осуществить математическое описание протекающих в нём электромагнитных процессов. Решение системы дифференциальных и алгебраических уравнений преобразователя позволяет получить аналитическое описание процессов, а также дает возможность расчёта его рабочих характеристик.

Метод исследования с использованием схем замещения широко используется до настоящего времени, хотя и обладает рядом существенных недостатков. К ним необходимо отнести следующее.

Реализация метода предполагает знание численных значений параметров схем замещения. Для их нахождения могут быть использованы полученные ранее математические выражения. Точ-

---

<sup>1</sup> Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

ность результатов при этом, однако, становится неопределённой, так как расчётные формулы дают приближённые значения. Параметры схем замещения могут быть получены в результате экспериментальных испытаний образцов электромагнитных преобразователей энергии. В этом случае необходимо изготовление опытных образцов, что связано с материальными затратами. Наконец, для определения параметров схем замещения можно использовать опытные данные, полученные при предшествующих испытаниях подобных образцов электромагнитных преобразователей энергии. Этот приём часто используется на практике, однако становится совершенно непригодным при моделировании новых конструкций электромагнитных преобразователей энергии.

К недостаткам использования схем замещения следует отнести также интегральность получаемых параметров. Так, например, плотность тока в проводниках ротора электромагнитных преобразователей энергии распределена неравномерно. При сильном проявлении поверхностного эффекта ток протекает в основном по верхней части проводников, плотность тока нижней части проводников близка к нулю. В этом случае верхняя часть проводников будет перегреваться, хотя интегральное значение тока в проводниках не будет превышать номинальное значение. Сильный нагрев проводников ротора может привести к их оплавлению и выходу преобразователя из строя.

Более совершенным является метод математического моделирования, основанный на решении системы уравнений Максвелла. При таком подходе электромагнитный преобразователь энергии представляется в виде сплошной среды, обладающей заданной геометрией и определёнными магнитными и электрическими свойствами. Математическое моделирование сводится к решению системы уравнений, описывающих электромагнитное поле преобразователя энергии, и последующее использование полученного решения для расчёта рабочих характеристик преобразователя. Важным достоинством этого метода является возможность получения дифференциальных значений исследуемых величин, т.е. их значений в каждой точке исследуемой области.

В Пермском национальном исследовательском политехническом университете методами математического моделирования начали заниматься в 1973 году при разработке конструкций и исследовании электромагнитных процессов специальных асинхронных электромагнитных преобразователей энергии [1-4]. В результате проведённых исследований был разработан дискретно-полевой метод [5], позволяющий моделировать стационарные и переходные процессы асинхронных электромагнитных преобразователей энергии. В дальнейшем этот метод был распространён и на другие типы и разновидности электромагнитных преобразователей энергии и в настоящее время успешно используется для их исследования.

В основу дискретно-полевого метода положена совокупность решения уравнений электромагнитного поля, записанных, в общем случае, в виде уравнений Максвелла, и решения уравнений Кирхгофа, описывающих электромагнитные процессы обмоток электромагнитных преобразователей энергии.

Система уравнений Максвелла, с учётом общепринятых допущений, преобразуется к уравнению в частных производных параболического типа. В частности, для асинхронных электромагнитных преобразователей энергии с короткозамкнутой обмоткой на роторе данное уравнение записывается в виде:

$$\frac{1}{R_0^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} - \mu_0 \gamma_{\Sigma} \omega \frac{\partial A}{\partial \varphi} - \mu_0 \gamma_{\Sigma} \frac{\partial A}{\partial t} - q_M A = -\mu_0 J_{CT} \quad (1)$$

В этом выражении:  $A(\varphi)$  - векторный магнитный потенциал исследуемой области;  $R_0$  - средний радиус воздушного зазора;  $\mu_0$  - магнитная постоянная;  $\gamma_{\Sigma}$  - эквивалентная электропроводность материала ротора;  $\omega$  - круговая частота вращения ротора;  $q_M$  - коэффициент, учитывающий магнитные сопротивления элементов магнитной цепи двигателя;  $J_{CT}$  - плотность тока обмотки статора, размещённой в воздушном зазоре преобразователя. Правая часть уравнения определяется

мгновенными значениями токов фаз обмотки статора и, при известной её схеме, может быть рассчитана с использованием выражения

$$J_{CT}(\varphi_0) = \frac{\sum i(\varphi_0)}{\delta'} \delta(\varphi - \varphi_0), \quad (2)$$

где  $i(\varphi_0)$  - мгновенное значение тока в точке  $\varphi_0$  разбиения пространственной координаты,  $\delta'$  - величина приведённого воздушного зазора преобразователя;  $\delta(\varphi)$  - дельта - функция Дирака.

Для решения краевой задачи должны быть заданы условия: граничные, периодического типа, и начальные, определяющие значения векторного потенциала в момент коммутации.

Мгновенные значения токов фаз определяются при решении системы уравнений Кирхгофа, которые для нестационарного режима записываются в виде:

$$u_A = \frac{d\Psi_A}{dt} + L_A \frac{di_A}{dt} + i_A R_A, \quad (3)$$

$$u_B = \frac{d\Psi_B}{dt} + L_B \frac{di_B}{dt} + i_B R_B, \quad (4)$$

$$u_C = \frac{d\Psi_C}{dt} + L_C \frac{di_C}{dt} + i_C R_C. \quad (5)$$

В этих выражениях:  $\Psi_A, \Psi_B, \Psi_C$  - мгновенные значения потокоцеплений фаз,  $L_A, L_B, L_C$  - индуктивности рассеяния,  $R_A, R_B, R_C$  - активные сопротивления обмоток фаз статора электрохимического преобразователя. Потокоцепления фаз в (3-5) выражаются через значения векторного потенциала:

$$\Psi_\Phi = l_\delta \sum_1^p \sum_1^q W_K (A_H - A_K), \quad (6)$$

где  $l_\delta$  - активная длина витка обмотки,  $p$  - число полюсов,  $q$  - число пазов на полюс и фазу,  $W_K$  - число витков в катушке обмотки;  $A_H, A_K$  - значения векторного потенциала в точках, соответствующих координатам сторон витка.

При исследовании стационарных режимов, когда исследуемые величины являются гармоническими функциями времени, уравнения (1, 3-5) записываются в комплексном виде:

$$\frac{1}{R_0^2} \frac{\partial^2 \dot{A}}{\partial \varphi^2} - \mu_0 \gamma_\Omega \omega \frac{\partial \dot{A}}{\partial \varphi} - (j \omega_0 \mu_0 \gamma_\Omega + q_M) \dot{A} = -\mu_0 J_{CT}, \quad (7)$$

$$\dot{U}_A = j \omega_0 \dot{\Psi}_A + \dot{I}_A (R_A + j X_A), \quad (8)$$

$$\dot{U}_B = j \omega_0 \dot{\Psi}_B + \dot{I}_B (R_B + j X_B), \quad (9)$$

$$\dot{U}_C = j \omega_0 \dot{\Psi}_C + \dot{I}_C (R_C + j X_C), \quad (10)$$

где  $j = \sqrt{-1}$ ,  $\omega_0$  - круговая частота сети.

Остальные выражения сохраняют прежний вид при записи величин в комплексной форме.

Краевая задача с периодическими граничными условиями решается конечно-разностным методом. Для этого область решения (окружность) разбивается на конечное число интервалов, а производная аппроксимируется конечно-разностным выражением. В результате дифференциальное уравнение совместно с граничными условиями сводится к системе алгебраических уравнений, которые решаются экономичным методом циклической прогонки. Токовая нагрузка статора в правой части уравнения (7) на каждом интервале разбиения пространственной координаты усредняется и записывается в виде:

$$J_{CT.v} = \frac{\dot{I}_v \cdot W_v}{\delta' \Delta \varphi R_0}, \quad (11)$$

где  $\dot{I}_v$  - комплекс тока статора, принадлежащего  $v$  - интервалу;  $W_v$  - число проводников этого интервала;  $\Delta \varphi$  - величина интервала разбиения.

При решении системы уравнений, описывающих стационарный режим работы электромеханических преобразователей энергии, магнитная цепь считается не насыщенной и при этом условии оказывается справедливым принцип суперпозиции. Потокосцепления фаз в уравнениях Кирхгофа представляются в виде суммы трёх потокосцеплений, определяемых током каждой фазы в отдельности:

$$\dot{\Psi}_A = L_{11}\dot{I}_A + L_{12}\dot{I}_B + L_{13}\dot{I}_C, \quad (12)$$

$$\dot{\Psi}_B = L_{21}\dot{I}_A + L_{22}\dot{I}_B + L_{23}\dot{I}_C, \quad (13)$$

$$\dot{\Psi}_C = L_{31}\dot{I}_A + L_{32}\dot{I}_B + L_{33}\dot{I}_C. \quad (14)$$

После подстановки выражений (12–14) в уравнения (8–10) получается система трёх уравнений с тремя неизвестными, решение которой позволяет определить токи фаз преобразователя при заданной системе напряжений.

Коэффициенты индуктивностей  $L_{11} \div L_{33}$  в (12–14) рассчитываются следующим образом. Задаётся комбинация фазных токов  $\dot{I}_A = 1A$ ,  $\dot{I}_B = 0$ ,  $\dot{I}_C = 0$ , решается уравнение электромагнитного поля (7), находятся значения потокосцеплений фаз  $\dot{\Psi}_A, \dot{\Psi}_B, \dot{\Psi}_C$ , определяются значения коэффициентов индуктивностей:

$$L_{11} = \frac{\dot{\Psi}_A}{\dot{I}_A}; \quad L_{21} = \frac{\dot{\Psi}_B}{\dot{I}_A}; \quad L_{31} = \frac{\dot{\Psi}_C}{\dot{I}_A}. \quad (15)$$

Используя комбинации токов  $\dot{I}_A = 0$ ,  $\dot{I}_B = 1A$ ,  $\dot{I}_C = 0$  и  $\dot{I}_A = 0$ ,  $\dot{I}_B = 0$ ,  $\dot{I}_C = 1A$  в той же последовательности рассчитываются остальные коэффициенты индуктивностей.

После определения токов фаз преобразователя решается уравнение (7) и рассчитываются значения векторного магнитного потенциала в исследуемой области. Магнитная индукция в зазоре преобразователя и элементах магнитопровода, плотность тока в проводниках обмотки ротора, удельное электромагнитное усилие и другие параметры рассчитываются с использованием известных выражений.

На Рис. 1 показаны зависимости электромагнитного момента от скольжения, полученные в результате математического моделирования. Кривая 1 относится к асинхронному электромеханическому преобразователю с однослойной обмоткой. Провал момента в зоне скольжений 0,8 – 0,9 обусловлен высшими пространственными гармониками магнитного поля. Укорочение шага обмотки статора преобразователя приводит к ослаблению влияния высших гармоник магнитного поля и устранению провала момента (кривая 2). Кривая 3 получена в результате аналитического расчёта с использованием выражения электромагнитного момента.

Исследование нестационарных режимов электромеханических преобразователей энергии осуществляется посредством совместного решения уравнений (1,3,4,5,6). Уравнение электромагнитного поля параболического типа для каждого временного интервала аппроксимируется системой алгебраических уравнений, которая при заданных мгновенных значениях фазных токов решается методом циклической прогонки.

При известных начальных значениях фазных токов и векторного потенциала из уравнений Кирхгофа рассчитываются приращения фазных токов, их величины, значения векторного магнитного потенциала, потокосцеплений фаз на каждом временном интервале. В дальнейшем вычислительный процесс повторяется до тех пор, пока не будет достигнута конечная величина временного интервала. На каждом временном интервале рассчитываются мгновенные значения магнитной индукции, плотности тока обмотки ротора, удельного электромагнитного усилия, момента

преобразователя и других величин. В результате вычислительного процесса появляется возможность построения временных зависимостей интересных величин.

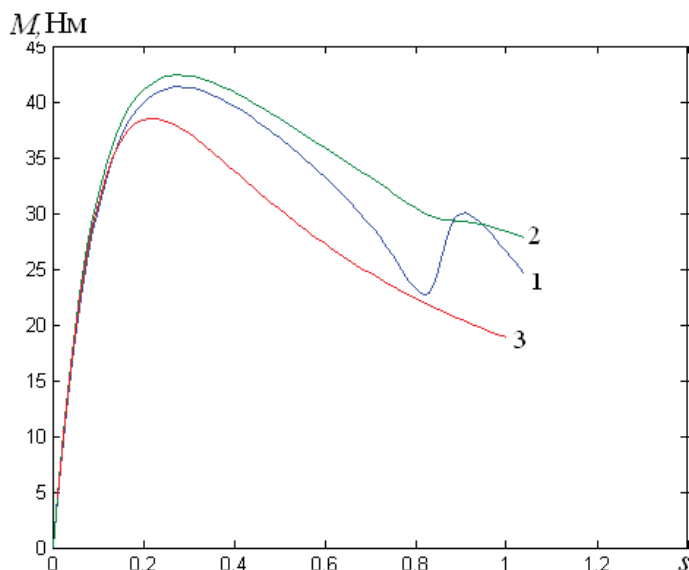


Рис. 1. Зависимости электромагнитного момента асинхронного преобразователя энергии от скольжения

На Рис. 2 представлены результаты моделирования переходных процессов при пуске асинхронного электромеханического преобразователя энергии. На начальном временном интервале переходного процесса в обмотках преобразователя протекают апериодические составляющие тока. В результате взаимодействия этих составляющих тока с периодическими составляющими магнитного поля возникают составляющие электромагнитного момента, изменяющиеся во времени с частотой сети.

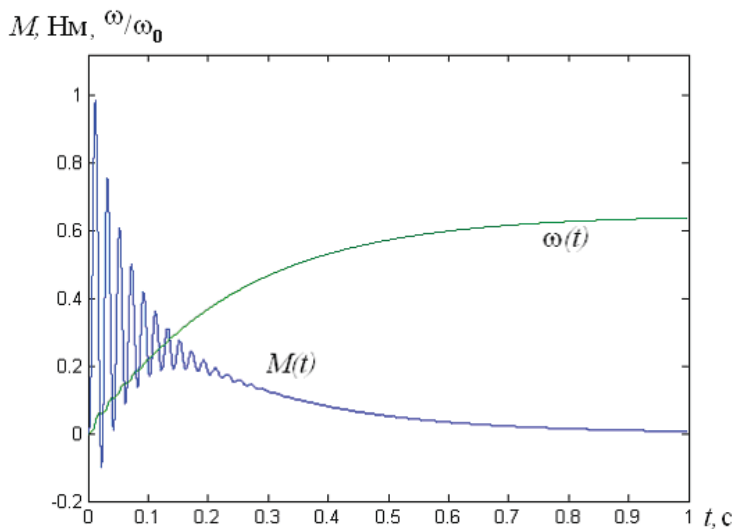


Рис. 2. Зависимости электромагнитного момента и частоты вращения от времени при пуске асинхронного преобразователя энергии

Разработанный метод математического моделирования применим не только для асинхронных преобразователей энергии, но и для широкого класса электромеханических преобразователей

энергии различных конструктивных исполнений.

На рис. 3 представлено распределение магнитного поля вдоль расточки якоря электромеханического преобразователя энергии постоянного тока, полученное при решении уравнения электромагнитного поля (1) в режиме холостого хода (кривая 1) и при нагрузке (кривая 2). Как и следовало ожидать, распределение магнитной индукции в зазоре при холостом ходе имеет трапецеидальный характер. Незначительное уменьшение индукции под полюсами объясняется влиянием магнитных сопротивлений ярма индуктора и якоря. Реакция якоря, обусловленная протеканием тока по его обмотке, вызывает искажение магнитного поля: магнитная индукция возрастает под одним краем полюса и ослабевает под другим. На рисунке хорошо видно, что при нагрузке геометрическая нейтраль электромеханического преобразователя смещается и занимает положение физической нейтрали.

На рис. 4 представлены внешние характеристики синхронного неявнополюсного преобразователя энергии, полученные при его моделировании с нагрузкой различного характера. Вид этих характеристик соответствует реальным электромагнитным процессам, протекающим при работе синхронных преобразователей.

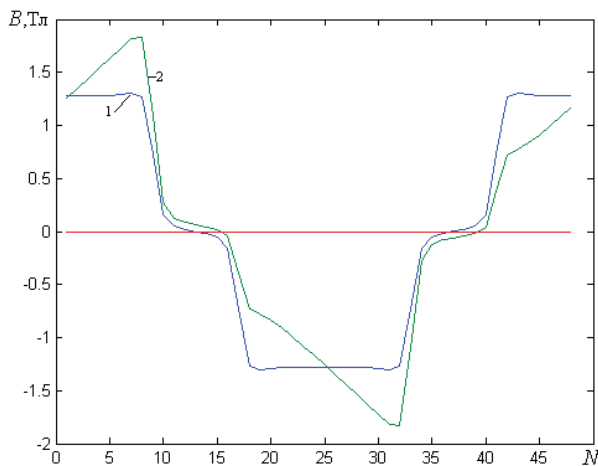


Рис. 3. Распределение магнитного поля электромеханического преобразователя постоянного тока

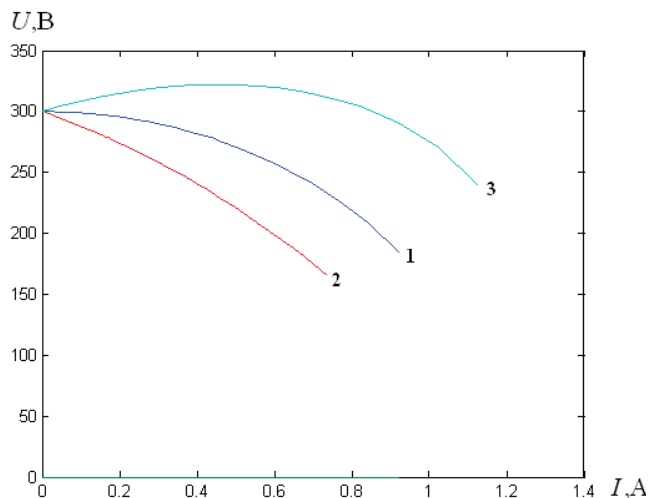


Рис. 4. Внешние характеристики синхронного генератора (1 – активная нагрузка; 2 – активно-индуктивная нагрузка; 3 – активно-ёмкостная нагрузка)



Методы математического моделирования позволяют исследовать магнитные поля и рабочие характеристики всех выпускаемых в настоящее время электромагнитных преобразователей энергии. Эти методы являются мощным инструментом при проектировании, разработке и изготовлении новых типов электромагнитных преобразователей энергии.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Беляев Е.Ф., Копылов И.П. Математическое моделирование линейных асинхронных двигателей // Известия вузов. Электромеханика. - 1977. - № 1. - С. 11-20.
- [2] Беляев Е.Ф. Копылов И.П. Математическая модель переходных процессов в линейных асинхронных двигателях // Электротехника. - 1977. - № 7. - С. 24-26.
- [3] Беляев Е.Ф., Цылев П.Н. Исследование линейных асинхронных двигателей в режиме ползучей скорости // Электротехника. - 1981. - № 5. - С. 33-35.
- [4] Беляев Е.Ф., Цылев П.Н. Исследование переходных процессов линейных электродвигателей методом математического моделирования // Электрические машины и машинно-вентильные системы: Межвуз. сб. научн. тр. Свердловск. - 1989. - С. 17-26.
- [5] Беляев Е.Ф. Дискретно-полевые модели электрических машин: учеб. пособие. Ч. I,II /Е.Ф. Беляев, Н.В. Шулаков. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2009. – 457 с.

## CONSTRUCTION OF FINITE CYCLIC GROUPS WITH FUZZY EQUALITIES

---

*In this paper a characterization of finite cyclic  $L$ -groups is given, where  $L$  is a standard residuated lattice. That characterization is useful to find a procedure for constructing all finite cyclic  $L$ -groups with a given skeleton. As an example, for a given cyclic group  $\underline{G}$  of order 8 [resp. 9] an algorithm for generating all  $L$ -groups with skeleton  $\underline{G}$  will be described.*

---

### INTRODUCTION

Fuzzy approaches to various universal concept started with Rosenfeld's paper [1]. *Algebra with fuzzy equality* (or  $L$ -algebra, where  $L$  is a residuated lattice) has two parts: ordinary algebra and "relational part".  $L$ -algebras are structures for the equational fragment of fuzzy logic. A more general structure can be found in [2]. When  $L$  is the two-element Boolean algebra, then ordinary algebras can be interpreted as  $L$ -algebras, so this approach generalizes various results of universal algebras (for example, see [3], [4], [5]). The theory of algebras with fuzzy equalities deals with compatible fuzzy equalities. Some questions concerning fuzzy operations compatible with a fuzzy equivalence relation on groups in a different framework can be found in [6] and [7]. A general panorama of fuzzy equalities is presented in [8]. Our subject of study in this paper is *finite cyclic groups with fuzzy equalities* (or finite cyclic  $L$ -groups), and the main problem we are interested in is how to construct finite cyclic  $L$ -groups with a given ordinary part.

### PRELIMINARIES

In this paper, residuated lattices will be used, as structures of truth values. A *residuated lattice* is an algebra  $L = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1 \rangle$  such that  $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$  is a lattice with the least element 0 and the greatest element 1,  $\langle L, \otimes, 1 \rangle$  is a commutative monoid and  $\rightarrow$  is a binary operation, where  $\otimes$  and  $\rightarrow$  satisfy the *adjointness property*, i.e. for all  $x, y, z \in L$ ,  $x \leq y \rightarrow z$  if and only if  $x \otimes y \leq z$ . If  $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$  is a complete lattice then  $L$  is said to be *complete*. The operation  $\rightarrow$  is called *residuum*, and the operation  $\leftrightarrow$  in  $L$  defined by  $(x \leftrightarrow y) = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$  is called *biresiduum*. It can be shown that  $\otimes$  is isotonic in both arguments and that  $\rightarrow$  is antitonic in the first and isotonic in the second argument (with respect to  $\leq$ ). It is easy to see that each residuated lattice  $L$  satisfies the following conditions:  $x \leq y$  if and only if  $x \rightarrow y = 1$ ;  $x \leftrightarrow y = 1$  if and only if  $x = y$ ;  $x \otimes y \leq x$ ;  $x \otimes y = 1$  if and only if  $x = y = 1$ . Also,  $L$  satisfies the following conditions:

$$x \leq (y \leftrightarrow z) \text{ if and only if } x \otimes y \leq z \text{ and } x \otimes z \leq y; \quad (1)$$

$$x \otimes y \leq x \leftrightarrow y. \quad (2)$$

Each of the following three pairs of adjoint operations makes a complete residuated lattice  $\langle [0,1], \min, \max, \otimes, \rightarrow, 0, 1 \rangle$  ( $[0,1]$  is the real unit interval):

$a \otimes b = \max(a + b - 1, 0)$ ,  $a \rightarrow b = \min(1 - a + b, 1)$  (*standard Lukasiewicz structure*);

$a \otimes b = a \cdot b$ ,  $a \rightarrow b = 1$  if  $a \leq b$ ,  $a \rightarrow b = \frac{b}{a}$  otherwise (*standard product structure*);

$a \otimes b = \min(a, b)$ ,  $a \rightarrow b = 1$  if  $a \leq b$ ,  $a \rightarrow b = b$  otherwise (*standard Gödel structure*).

A *binary fuzzy relation* (or,  $L$ -relation) on the set  $X$  is any mapping  $R: X^2 \rightarrow L$  and a operation

---

<sup>1</sup> Faculty of Science, Novi Sad, Serbia

$f : X^n \rightarrow X$  is compatible with  $R$  if for any  $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in X$  it holds:

$R(u_1, v_1) \otimes \dots \otimes R(u_n, v_n) \leq R(f(u_1, \dots, u_n), f(v_1, \dots, v_n))$ . A binary  $L$ -relation  $E$  on  $X$  is a  $L$ -equivalence if  $E$  is reflexive:  $E(x, x) = 1$ , for all  $x \in X$ , symmetric:  $E(x, y) = E(y, x)$ , for all  $x, y \in X$ , and transitive:  $E(x, y) \otimes E(y, z) \leq E(x, z)$ , for all  $x, y, z \in X$ . An  $L$ -equivalence is an  $L$ -equality if  $E(x, y) = 1$  implies  $x = y$ , for all  $x, y \in X$ .

An algebra with  $L$ -equality (shortly,  $L$ -algebra) of type  $F$  is a triplet  $\overline{M} = \langle M, \approx^M, F^M \rangle$ , where  $\underline{M} = \langle M, F^M \rangle$  is an ordinary algebra of type  $F$  and  $\approx^M$  is an  $L$ -equality on  $M$  such that each fundamental operation of  $\underline{M}$  is compatible with  $\approx^M$ . The ordinary part  $\underline{M}$  is called skeleton of  $\overline{M}$ . An  $L$ -algebra is said to be  $L$ -group (or, a group with fuzzy equality) if its skeleton is an ordinary group.

### FINITE CYCLIC $L$ -GROUPS

Let  $L = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1 \rangle$  be an arbitrary complete residuated lattice. An  $L$ -group  $\langle G, \approx^G, \cdot, ^{-1}, e \rangle$  is said to be a finite cyclic  $L$ -group if its skeleton is a finite cyclic group.

Lemma 1. Let  $\underline{G} = \langle G, \cdot, ^{-1}, e \rangle$  be a finite cyclic group generated by  $a$ , and let  $\theta$  be a binary  $L$ -relation on  $G$ . Then, the structure  $\overline{G} = \langle G, \theta, \cdot, ^{-1}, e \rangle$  is a cyclic  $L$ -group if and only if  $\theta$  satisfies the following three conditions, for all  $i, j \in \mathbb{Z}$ :

- (i)  $(e\theta a^i) = 1$  if and only if  $a^i = e$ ;
- (ii)  $(a^i\theta a^j) = (e\theta a^{i-j})$ ;
- (iii)  $(e\theta a^i) \otimes (e\theta a^j) \leq (e\theta a^{i+j})$ .

The lemma above gives a characterization of all finite cyclic  $L$ -groups. Note that it is only a direct consequence of a general result concerning arbitrary finite  $L$ -groups, which was established in [9], where also the notion of finite cyclic  $L$ -spectrum was introduced:

Definition 2. Let  $0 \neq n \in \mathbb{N}$  and  $m = [n/2]$  (the integer part of  $n/2$ ). A sequence  $\langle s_0, s_1, \dots, s_m \rangle$  of elements from  $L$  is said to be a cyclic  $L$ -spectrum of order  $n$  if  $s_0 = 1$ ,  $s_i \neq 1$ , for all  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , and the following inequalities hold, for all  $i, j$ ,  $0 \leq i, j \leq m$ :  $s_i \otimes s_j \leq \begin{cases} s_{i+j}, & \text{if } i+j \leq m \\ s_{n-(i+j)}, & \text{if } i+j > m \end{cases}$ ;  $s_i \otimes s_j \leq \begin{cases} s_{i-j}, & \text{if } i \geq j \\ s_{j-i}, & \text{if } i < j \end{cases}$ .

Theorem 3. Let  $\underline{G} = \langle G, \cdot, ^{-1}, e \rangle$  be a cyclic group of order  $n$  generated by  $a$ ,  $m = [n/2]$ , and let  $\sigma = \langle s_0, s_1, \dots, s_m \rangle$  be a cyclic  $L$ -spectrum of order  $n$ . Let  $\approx_\sigma$  be  $L$ -relation on  $G$  defined by  $(e \approx_\sigma a^i) = s_i$ , for all  $i$ ,  $0 \leq i \leq m$ , and  $(a^i \approx_\sigma a^j) = (e \approx_\sigma a^{i-j})$  in all the remaining cases. Then, the structure  $\overline{G}_\sigma = \langle G, \approx_\sigma, \cdot, ^{-1}, e \rangle$  is an  $L$ -group.

Furthermore, there is an one-to-one correspondence between the set of all  $L$ -groups with skeleton  $\underline{G}$  and the set of all  $L$ -spectra of order  $n$ .

The theorem above was previously established in [9]. A consequence of that theorem is that a characterization of the set of all finite cyclic  $L$ -spectra of order  $n$  implies a characterization of all  $L$ -groups with skeleton  $\underline{G}$ , where  $\underline{G}$  is a cyclic group of order  $n$ .

### A CHARACTERIZATION OF ALL FINITE CYCLIC $L$ -SPECTRA

From now,  $L$  is assumed to be a standard residuated lattice. Therefore, in  $L$  for each positive  $a$  there is a

unique  $b$  such that  $b^{\otimes 2} = a$  (we write  $x^{\otimes 2}$  instead of  $x \otimes x$ ), and now for each standard structure we will define an unary operation in the following way:

Definition 4. For all  $a \in [0,1]$ , we let the following:

- (i)  $\sqrt[\otimes]{a} := \frac{a+1}{2}$ , if  $L$  is the standard Lukasiewicz structure;
- (ii)  $\sqrt[\otimes]{a} := \sqrt{a}$ , if  $L$  is the standard product structure;
- (iii)  $\sqrt[\otimes]{a} := a$ , if  $L$  is the standard Gödel structure.

It can easily be shown that  $L$  satisfies the following conditions:

$$x^{\otimes 2} \leq y \text{ if and only if } x \leq \sqrt[\otimes]{y}; \quad (3)$$

$$x \otimes y \leq x \leq \sqrt[\otimes]{x}. \quad (4)$$

Definition 5. Let  $4 \leq n \in \mathbb{N}$  and  $m = \lfloor n/2 \rfloor$ . Let  $\langle s_0, s_1, \dots, s_m \rangle$  be a sequence of elements from  $[0,1]$ . For each  $2 \leq k \leq m$ , we set:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \bigvee \{ s_i \otimes s_j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m, i+j=k, i \leq j \}, \\ \bar{\alpha}_k &= \bigvee \{ s_i \otimes s_{n-(i+k)} \mid 1 \leq i < k, 1 \leq n-(i+k) < k \}, \\ \beta_k &= \bigwedge \{ s_i \leftrightarrow s_j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m, i+j=k, i \leq j \}, \\ \bar{\beta}_k &= \bigwedge \{ s_i \otimes s_{n-(i+k)} \mid 1 \leq i < k, 1 \leq n-(i+k) < k \}. \end{aligned}$$

The main result in this paper is the following proposition.

Proposition 6. Let  $4 \leq n \in \mathbb{N}$  and  $m = \lfloor n/2 \rfloor$ . Let  $\langle s_0, s_1, \dots, s_m \rangle$  be a sequence of elements from  $[0,1]$

Then,  $\langle s_0, s_1, \dots, s_m \rangle$  is a cyclic  $L$ -spectrum of order  $n$  if and only if the following conditions hold:

- (i)  $s_0 = 1$ , and  $s_i \neq 1$ , for all  $i, 1 \leq i \leq m$ ;
- (ii)  $\alpha_k \vee \bar{\alpha}_k \leq s_k \leq \beta_k \wedge \bar{\beta}_k$ , for all  $k, 2 \leq k \leq \frac{n}{3}$ ;
- (iii)  $\alpha_k \vee \bar{\alpha}_k \leq s_k \leq \beta_k \wedge \bar{\beta}_k \wedge \sqrt[\otimes]{s_{n-2k}}$ , for all  $k, \frac{n}{3} < k \leq m$ .

*Proof.* Since  $s_0 = 1$  and  $\otimes$  is commutative, it is easy to verify that  $\langle s_0, s_1, \dots, s_m \rangle$  is a cyclic  $L$ -spectrum of order  $n$  if and only if the following conditions hold:

- (a)  $s_0 = 1$ , and  $s_i \neq 1$ , for all  $i, 1 \leq i \leq m$ ;
- (b)  $s_i \otimes s_j \leq s_{i+j}$ , for all  $i, j, 1 \leq i, j \leq m$  such that  $i+j \leq m$  and  $i \leq j$ ;
- (c)  $s_i \otimes s_j \leq s_{n-(i+j)}$ , for all  $i, j, 1 \leq i, j \leq m$  such that  $m < i+j \leq n$  and  $i \leq j$ ;
- (d)  $s_i \otimes s_j \leq s_{i-j}$ , for all  $i, j, 1 \leq i, j \leq m$  such that  $j < i$ .

Now, suppose that  $\langle s_0, s_1, \dots, s_m \rangle$  satisfies the conditions (a)-(d). We will prove that under this assumption the conditions (i)-(iii) hold. (i) is trivially true. Take any  $k$ , where  $2 \leq k \leq m$ . Note that hence  $m \leq n-k$ . Suppose that  $k = i+j$ . Then, by (1) and (d) we obtain  $s_{i+j} \leq s_i \leftrightarrow s_j$ , and if  $i \leq j$ , then  $s_i \otimes s_j \leq s_{i+j}$ , by (b). Thus, we can obtain  $\alpha_k \leq s_k \leq \beta_k$ . Now, suppose that there is  $i$

such that  $1 \leq i, n - (i + k) < k$ . Hence,  $m < n - i$  and  $m < i + k \neq n$ , so  $s_k \otimes s_{n-(i+k)} \leq s_{n-(n-i)} = s_i$  and  $s_k \otimes s_i \leq s_{n-(i+k)}$ , by (c). These inequalities by (1) imply  $s_k \leq (s_i \leftrightarrow s_{n-(i+k)})$ . So, we can get  $s_k \leq \bar{\beta}_k$ . Further, since  $m \leq n - k$ , if  $m < n - k$  then  $s_i \otimes s_{n-(i+k)} \leq s_{n-(n-k)} = s_k$ , by (c), and if  $m = n - k$  then  $n = 2m$  and  $k = m$ , so  $s_i \otimes s_{n-(i+k)} \leq s_k$  means  $s_i \otimes s_{m-i} \leq s_m$ , which is true by (b). Thus, we can get  $\bar{\alpha}_k \leq s_k$ . Finally, suppose that  $k > n/3$ . Then  $m < 2k$ , so by (c) we have  $s_k^{\otimes 2} \leq s_{n-2k}$ , hence by (3) we obtain  $s_k \leq \sqrt[n]{s_{n-2k}}$ , as desired.

Conversely, suppose that  $\langle s_0, s_1, \dots, s_m \rangle$  satisfies the conditions (i)-(iii). We need to prove that under this assumption the conditions (a)-(b) hold. Let  $1 \leq i, j \leq m$ . Trivially, (a) holds. To prove (b) we suppose that  $i + j \leq m$  and  $i \leq j$ . Now,  $\alpha_{i+j} \leq s_{i+j}$  implies (b). To prove (d) we suppose that  $j < i$ . Then, using  $s_i \leq \beta_i$  we obtain  $s_i \leq s_j \rightarrow s_{i-j}$ , hence  $s_i \otimes s_j \leq s_{i-j}$ . Thus, (d) holds. To prove (c) we suppose  $m < i + j \neq n$ . We want to prove  $s_i \otimes s_j \leq s_{n-(i+j)}$ . If  $i > j, n - (i + j)$ , then  $s_i \leq \bar{\beta}_i$  implies  $s_i \leq (s_j \rightarrow s_{n-(i+j)})$ , hence the desired result follows by adjointness property. The case  $j > i, n - (i + j)$  is analogous to the previous one. If  $n - (i + j) > i, j$ , then we put  $p = n - (i + j)$ , hence  $p \geq 2$  and  $n - (i + p) = j$ , and now from  $\bar{\alpha}_p \leq s_p$  we obtain  $s_i \otimes s_{n-(i+p)} \leq s_p$ , i.e.  $s_i \otimes s_j \leq s_{n-(i+j)}$ . The cases  $n - (i + j) = i$  and  $n - (i + j) = j$  are trivial. Further, it remains the case  $i = j > n - (i + j)$ , where we need to prove  $s_i^{\otimes 2} \leq s_{n-2i}$ . So, let  $i > n - 2i$ . Since  $i > n/3$ , we have  $s_i \leq \sqrt[n]{s_{n-2i}}$ , from (iii). By (3), it means  $s_i^{\otimes 2} \leq s_{n-2i}$ , as desired. Thus, (c) holds, which finishes the proof of the proposition.

Thus, the set of all cyclic  $L$ -spectra of order  $n$  can be characterized by a set of all solutions of a system of inequalities:  $x_0 = 1, x_1^{\otimes 2} \leq x_2 < 1, \gamma_3 \leq x_3 \leq \delta_3 < 1, \dots, \gamma_m \leq x_m \leq \delta_m < 1$ , where  $m = \lfloor n/2 \rfloor$ , and such that for all  $i, k, 3 \leq k \leq m, k \leq i \leq m$ , no  $x_i$  occurs in formulas  $\gamma_k$  and  $\delta_k$ . This result can be useful to find a procedure for constructing all finite cyclic  $L$ -groups with a given skeleton, as will be seen.

**Corollary 7.** *For a given cyclic group  $\underline{G}$  of order 8 there is an algorithm for obtaining all  $L$ -groups with skeleton  $\underline{G}$ .*

*Proof.* By Proposition 6, a sequence  $\langle s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 \rangle$  is a cyclic  $L$ -spectrum of order 8 if and only if it is a solution in  $L$  of the following system of inequalities:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, x_1 \neq 1, \\ x_1^{\otimes 2} &\leq x_2 < 1, \\ x_1 \otimes x_2 &\leq x_3 \leq (x_1 \leftrightarrow x_2) \wedge \sqrt[n]{x_2}, \\ x_4 &\neq 1, (x_1 \otimes x_3) \vee x_2^{\otimes 2} \leq x_4 \leq x_1 \leftrightarrow x_3. \end{aligned}$$

Using (2), (4) and the fact that in  $L, x_1 \otimes x_2 \leq x_3 \leq x_1 \leftrightarrow x_2$  implies  $x_2^{\otimes 2} \leq x_1 \leftrightarrow x_3$ , it is easy to see that this system is "solved" (if we have  $x_1 \otimes x_2 \leq x_3 \leq x_1 \leftrightarrow x_2$ , then by (1) we have  $x_2 \otimes x_3 \leq x_1$ , and now using the isotonicity of  $\otimes$  we can get  $x_2^{\otimes 2} \otimes x_3 \leq x_1$  and  $x_2^{\otimes 2} \otimes x_1 \leq x_3$ , so  $x_2^{\otimes 2} \leq x_1 \leftrightarrow x_3$ , by (1)). Thus, we can describe an algorithm for obtaining all cyclic  $L$ -spectra of order 8. Then, by Theorem 3, it is obvious that there is an algorithm for constructing all  $L$ -groups with skeleton  $\underline{G}$ , where  $\underline{G}$  is a given cyclic group of order 8. The proof is finished.

Corollary 8. For a given cyclic group  $\underline{G}$  of order 9 there is an algorithm for obtaining all  $L$ -groups with skeleton  $\underline{G}$ .

*Proof.* Also, by Proposition 6, a sequence  $\langle s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 \rangle$  is a cyclic  $L$ -spectrum of order 9 if and only if it is a solution in  $L$  of the following system of inequalities:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, x_1 \neq 1, \\ x_1^{\otimes 2} &\leq x_2 < 1, \\ x_3 \neq 1, x_1 \otimes x_2 &\leq x_3 \leq x_1 \leftrightarrow x_2, \\ (x_1 \otimes x_3) \vee x_2^{\otimes 2} &\leq x_4 \leq (x_1 \leftrightarrow x_3) \wedge \sqrt[9]{x_1}. \end{aligned}$$

This system implies  $x_2^{\otimes 2} \leq \sqrt[9]{x_1}$ , which is by (3) equivalent to  $x_2 \leq \sqrt[9]{\sqrt[9]{x_1}}$ . It is easy to see that this system is equivalent to the following one:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, x_1 \neq 1, \\ x_2 \neq 1, x_1^{\otimes 2} &\leq x_2 \leq \sqrt[9]{\sqrt[9]{x_1}}, \\ x_3 \neq 1, x_1 \otimes x_2 &\leq x_3 \leq x_1 \leftrightarrow x_2, \\ (x_1 \otimes x_3) \vee x_2^{\otimes 2} &\leq x_4 \leq (x_1 \leftrightarrow x_3) \wedge \sqrt[9]{x_1}. \end{aligned}$$

In a similar way as in the proof of Corollary 7, we can show that the system above is "solved". So, a procedure for computing all  $L$ -spectra of order 9 can be described, and applying Theorem 3 we can describe an effective method of constructing all  $L$ -groups with skeleton  $\underline{G}$ , where  $\underline{G}$  is a given cyclic group of order 9. The proof is finished.

*Example 1.* Let  $L$  be the standard product structure and let  $\underline{G} = \langle G, \cdot, ^{-1}, e \rangle$  be a cyclic group of order 8 generated by  $a$ . By Corollary 7 we can obtain that  $\langle 1, 0.6, 0.5, 0.7, 0.8 \rangle$  is an  $L$ -spectrum of order 8 and that the structure  $\langle G, \approx^G, \cdot, ^{-1}, e \rangle$  is an  $L$ -group, where  $\approx^G$  is defined in the Figure 1:

$\approx^G$	$e$	$a$	$a^2$	$a^3$	$a^4$	$a^5$	$a^6$	$a^7$
$e$	1	0.6	0.5	0.7	0.8	0.7	0.5	0.6
$a$	0.6	1	0.6	0.5	0.7	0.8	0.7	0.5
$a^2$	0.5	0.6	1	0.6	0.5	0.7	0.8	0.7
$a^3$	0.7	0.5	0.6	1	0.6	0.5	0.7	0.8
$a^4$	0.8	0.7	0.5	0.6	1	0.6	0.5	0.7
$a^5$	0.7	0.8	0.7	0.5	0.6	1	0.6	0.5
$a^6$	0.5	0.7	0.8	0.7	0.5	0.6	1	0.6
$a^7$	0.6	0.5	0.7	0.8	0.7	0.5	0.6	1

Fig. 1. Compatible  $L$ -equality on  $\underline{G}$

*Example 2.* Let  $L$  be the standard Lukasiewicz structure, and let  $\underline{G} = \langle G, \cdot, ^{-1}, e \rangle$  be a cyclic group of order 9 generated by  $a$ . By Corollary 8, the following algorithm produces all  $L$ -groups  $\bar{G} = \langle G, \approx^G, \cdot, ^{-1}, e \rangle$ , where  $\approx^G$  is defined as a matrix  $[c_{ij}]_{9 \times 9}$  such that  $(a^i \approx^G a^j) = c_{ij}$ , for all  $0 \leq i, j \leq 8$ .

*Algorithm. 1.* *Inputs:* definitions of  $\otimes$  and  $\leftrightarrow$  in  $L$ , the Cayley table of the group  $\underline{G}$ ;

1. Let  $s_0 := 1$ ; choose  $s_1 \in [0, 1)$ ; choose  $s_2$  such that  $s_1^{\otimes 2} \leq s_2 \leq \frac{s_1 + 3}{4}$ ;

2. Choose  $s_3 \in [0,1)$  such that  $s_1 \otimes s_2 \leq s_3 \leq s_1 \leftrightarrow s_2$ ;
3. Choose  $s_4 \in [0,1)$  such that  $\max(s_1 \otimes s_3, s_2^{\otimes 2}) \leq s_4 \leq \min(s_1 \leftrightarrow s_3, \frac{s_1 + 1}{2})$ ;
4. Let  $c_{0i} := s_i$ , for all  $i$ ,  $0 \leq i \leq 4$ ; put  $c_{0i} := c_{0,9-i}$ , for all  $i$ ,  $5 \leq i \leq 8$ ; for all  $i, j$ ,  $1 \leq i \leq 8$ ,  $0 \leq j \leq 8$ , if  $i \geq j$  put  $c_{ij} := c_{0,i-j}$ , else put  $c_{ij} := c_{0,j-i}$ ;
5. *Outputs*: the cyclic  $L$ -spectrum  $\langle s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 \rangle$  of order 9, the matrix  $[c_{ij}]_{9 \times 9}$  and the  $L$ -group  $\langle G, \approx^G, \cdot, ^{-1}, e \rangle$ , where  $(a^i \approx^G a^j) = c_{ij}$ , for all  $i, j$ ,  $0 \leq i, j \leq 8$ .

## REFERENCES

- [1] A. Rosenfeld, Fuzzy groups, J. Math. Anal. Appl. 35 (1971) 512-517.
- [2] R. Bělohlávek, Fuzzy Relational Systems, Foundations and Principles, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2002.
- [3] R. Bělohlávek, Birkhoff variety theorem and fuzzy logic, Arch. Math, Logic 42 (2003) 781-790.
- [4] R. Bělohlávek, V. Vychodil, Algebras with fuzzy equalities, Fuzzy sets and systems 157 (2006) 161 - 201.
- [5] V. Vychodil, Direct limits and reduced products of algebras with fuzzy equalities, J. Mult.-Valued Logic Soft Comput. 13 (2007), no 1-2, 1-27.
- [6] M. Demirci, J. Recasens, Fuzzy groups, fuzzy functions and fuzzy equivalence relations, Fuzzy sets and systems 144 (2004) 441-458
- [7] M. Demirci, Fundamentals of M-vague algebra and M-vague arithmetic operations, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge Based Systems 10 (2002) 25-75.
- [8] J. Recasens, Indistinguishability Operators, Modeling Fuzzy Equalities and Fuzzy Equivalence Relations, Series: Studies in Fuzziness and Soft Computing, Vol. 260, Springer Verlag, 2011.
- [9] M. Bradic, R. Madarász, Construction of finite L-groups, Fuzzy sets and systems 2013, <http://dx.doi.org/10.1016/j.fss.2013.10.002>

# ABOUT THE ACCORDANCE BETWEEN THE VEKUA DIFFERENTIAL EQUATION AND THE GENERALIZED LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION

*In the paper two equations, the Vekua differential equation and the generalized linear differential equation, are considered. The main result is the theorem with the condition which gives the accordance between this two equations. Also the form of the solution is given for some equations.*

*I dedicate this work to prof. Dragan Dimitrovski.*

## INTRODUCTION

The equation

$$\frac{\hat{d}W}{d\bar{z}} = AW + B\bar{W} + F \quad (1)$$

where  $A = A(z)$ ,  $B = B(z)$  and  $F = F(z)$  are given complex functions from a complex variable  $z \in D \subseteq \mathbb{C}$  is the well known Vekua equation [1] according to the unknown function  $W = W(z) = u + iv$ . The derivative on the left side of this equation has been introduced by G. V. Kolosov in 1909 [2]. During his work on a problem from the theory of elasticity, he introduced the expressions

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = \frac{\hat{d}W}{dz} \quad (2)$$

and

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = \frac{\hat{d}W}{d\bar{z}} \quad (3)$$

known as operator derivatives of a complex function  $W = W(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  from a complex variable  $z = x + iy$  and  $\bar{z} = x - iy$  corresponding. The operating rules for this derivatives are completely given in the monograph of Г. Н. Положий [3] (page 18-31). In the mentioned monograph are defined so called operator integrals  $\hat{\int} f(z) dz$  и  $\hat{\int} f(z) d\bar{z}$  from  $z = x + iy$  and  $\bar{z} = x - iy$  corresponding (page 32-41). As for the complex integration in the same monograph is emphasized that it is assumed that all operator integrals can be solved in the area D.

In the Vekua equation (1) the unknown function  $W = W(z)$  is under the sign of a complex conjugation which is equivalent to the fact that  $B = B(z)$  is not identically equaled to zero in D. That is why for (1) the quadratures that we have for the equations where the unknown function  $W = W(z)$  is not under the sign of a complex conjugation, stop existing.

This equation is important not only for the fact that it came from a practical problem, but also because depending on the coefficients A, B and F the equation (1) defines different classes of generalized analytic functions. For example, for  $F = F(z) \equiv 0$  in D the equation (1) i.e.  $\frac{\hat{d}W}{d\bar{z}} = AW + B\bar{W}$  defines so called generalized analytic functions from fourth class; and for  $A \equiv 0$  and  $F \equiv 0$  in D, the equation

<sup>1</sup> Faculty for natural sciences and mathematics, Skopje, Republic of Macedonia



(1) i.e. the equation  $\frac{\hat{d}W}{d\bar{z}} = B\bar{W}$  defines so called generalized analytic functions from third class or the (r+is)-analytic functions [3], [4].

Those are the cases when  $B \neq 0$ . But if we put  $B \equiv 0$ , we get the following special cases. In the case  $A \equiv 0$ ,  $B \equiv 0$  and  $F \equiv 0$  in the working area  $D \subseteq \mathbb{C}$  the equation (1) takes the following expression

$\frac{\hat{d}W}{d\bar{z}} = 0$  and this equation, in the class of the functions  $W = u(x, y) + iv(x, y)$  whose real and imaginary parts have unbroken partial derivatives  $u'_x, u'_y, v'_x$  and  $v'_y$  in  $D$ , is a complex writing of the Cauchy - Riemann conditions. In other words it defines the analytic functions in the sense of the classic theory of the analytic functions. In the case  $B \equiv 0$  in  $D$  i.e.  $\frac{\hat{d}W}{d\bar{z}} = AW + F$  is the so called areolar linear differential equation [3] (page 39-40) and it can be solved with quadratures by the formula:

$$W = e^{\int \hat{A}(z)d\bar{z}} \left[ \Phi(z) + \int F(z) e^{-\int \hat{A}(z)d\bar{z}} d\bar{z} \right]. \quad (4)$$

Here  $\Phi = \Phi(z)$  is an arbitrary analytic function in the role of an integral constant.

## MAIN RESULTS

In the paper [5], the following lemma is proved.

*Lemma:* The equations

$$\frac{\hat{d}W}{dz} = f(z, W) \quad (5)$$

and

$$\frac{\hat{d}W}{d\bar{z}} = g(z, W) \quad (6)$$

where  $\frac{\hat{d}f}{dW} = 0$ , have common solutions if and only if

$$\frac{\hat{d}f}{d\bar{z}} + \frac{\hat{d}f}{dW} g = \frac{\hat{d}g}{dz} + \frac{\hat{d}g}{dW} f + \frac{\hat{d}g}{dW} \bar{g}. \quad (7)$$

It is assumed that the operator derivatives in (7) exist and that they are continuous functions in the working area  $D$  from the complex plane.

In this paper we are examining the accordance between the Vekua equation (1), on one side and the generalized linear differential equation

$$\frac{\hat{d}W}{dz} = \varphi W + \psi \quad (8)$$

on the other, where  $\varphi = \varphi(z)$  and  $\psi = \psi(z)$  are given complex functions from a complex variable  $z \in D \subseteq \mathbb{C}$ . The Vekua equation (1) is an equation of type (6) where

$$g(z, W) = AW + B\bar{W} + F \quad (9)$$

and the generalized linear differential equation (8) is an equation of type (5), where

$$f(z, W) = \varphi W + \psi. \quad (10)$$

Here, the function  $f$  is an analytic function according to  $W$ , which means that  $\frac{\hat{d}f}{dW} = 0$ . That is the only condition to be accomplished, so we can use the mentioned lemma.

If we calculate all the derivatives in (7), we get that

$$\begin{aligned} \frac{\hat{d}f}{d\bar{z}} &= \frac{\hat{d}\varphi}{d\bar{z}}W + \frac{\hat{d}\psi}{d\bar{z}}, & \frac{\hat{d}f}{dW} &= \varphi, \\ \frac{\hat{d}g}{dz} &= \frac{\hat{d}A}{dz}W + \frac{\hat{d}B}{dz}\bar{W} + \frac{\hat{d}F}{dz}, & \frac{\hat{d}g}{dW} &= A, & \frac{\hat{d}g}{d\bar{W}} &= B. \end{aligned}$$

And if we put them in (7) we get that

$$\frac{\hat{d}\varphi}{d\bar{z}}W + \frac{\hat{d}\psi}{d\bar{z}} + \varphi(AW + B\bar{W} + F) = \frac{\hat{d}A}{dz}W + \frac{\hat{d}B}{dz}\bar{W} + \frac{\hat{d}F}{dz} + A(\varphi W + \psi) + B(\overline{AW + B\bar{W} + F}).$$

Now we write the last equation in the following form

$$W\left(\frac{\hat{d}\varphi}{d\bar{z}} - \frac{\hat{d}A}{dz} - B\bar{B}\right) + \bar{W}\left(\varphi B - \frac{\hat{d}B}{dz} - B\bar{A}\right) + \frac{\hat{d}\psi}{d\bar{z}} + \varphi F - \frac{\hat{d}F}{dz} - A\psi - B\bar{F} = 0.$$

This linear combination is true only if the following system of equation is satisfied

$$\begin{cases} \frac{\hat{d}\varphi}{d\bar{z}} - \frac{\hat{d}A}{dz} - B\bar{B} = 0 \\ \varphi B - \frac{\hat{d}B}{dz} - B\bar{A} = 0 \\ \frac{\hat{d}\psi}{d\bar{z}} + \varphi F - \frac{\hat{d}F}{dz} - A\psi - B\bar{F} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

The second and the third equation of the system (11) gives us the relation between the functions  $\varphi$  and  $\psi$  of the equation (8) on one side and the functions  $A$ ,  $B$  and  $F$  from the equation (1) on the other side. From the second equation we get

$$\varphi = \frac{1}{B} \frac{\hat{d}B}{dz} + \bar{A}. \quad (12)$$

The third equation is an areolar linear equation by  $\psi$  and it can be solved with quadratures by the formula (4), i.e.

$$\psi = e^{\int A d\bar{z}} \left[ \Phi(z) + \int \left( \frac{F}{B} \frac{\hat{d}B}{dz} - F\bar{A} - B\bar{F} - \frac{\hat{d}F}{dz} \right) e^{-\int A d\bar{z}} d\bar{z} \right]. \quad (13)$$

Here  $\Phi = \Phi(z)$  is an arbitrary analytic function in the role of an integral constant.

Now if we find the areolar derivative of the function  $\varphi$  given with (12), we get

$$\frac{\hat{d}\varphi}{d\bar{z}} = \frac{1}{B^2} \left[ \frac{\hat{d}^2 B}{d\bar{z} dz} B - \frac{\hat{d}B}{dz} \frac{\hat{d}B}{d\bar{z}} \right] + \frac{\hat{d}\bar{A}}{d\bar{z}}.$$

This derivative has the same left side as the left side of the first equation of the system (11) and if we equal the right sides we get the following expression

$$\left( \frac{\hat{d}\bar{A}}{d\bar{z}} \right) - \frac{\hat{d}A}{dz} = B\bar{B} - \frac{1}{B^2} \left[ \frac{\hat{d}^2 B}{d\bar{z} dz} B - \frac{\hat{d}B}{dz} \frac{\hat{d}B}{d\bar{z}} \right] \quad (14)$$

which is the condition between the coefficients in the Vekua equation (1) in order to has common solutions with the equation (8).

So, we have proved the following

*Theorem 1:*

The Vekua equation (1) and the generalized linear equation (8) have common solutions if and only if the condition (14) is fulfilled and the relation between the coefficients of the two equations are given with (12) and (13).

It is usual that instead of the Vekua equation (1), the homogeneous Vekua equation

$$\frac{\hat{d}W}{d\bar{z}} = AW + B\bar{W} \quad (15)$$

to be taken into consideration. Here,  $F = 0$ . It is interesting that the relation (12) and the condition (14) are the same, but the relation (13) is much more concise and easier to calculate, i.e.

$$\psi = \Phi(z) e^{\int A d\bar{z}} \quad (16)$$

where  $\Phi = \Phi(z)$  is an arbitrary analytic function in the role of an integral constant.

So we can state the theorem 2 as a special case to the theorem 1.

*Theorem 2:*

The homogeneous Vekua equation (15) and the generalized linear equation (8) have common solutions if and only if the condition (14) is fulfilled and the relation between the coefficients of the two equations are given with (12) and (16).

*Note:* The generalized linear equation (8) is an equation which can be solved and its solution is given with the formula

$$W = e^{\int \varphi(z) dz} \left[ \Phi(\bar{z}) + \int \psi(z) e^{-\int \varphi(z) dz} dz \right] \quad (17)$$

so if we put the expressions (12) and (13) we get the general solution of the Vekua equation (1) which fulfils the condition (14) and if we put the expressions (12) and (16) we get the general solution of the homogeneous Vekua equation (15) which fulfils the condition (14).

## REFERENCES

- [1] Векуа Н. И., Обобщение аналитические функции. Москва.1988.
- [2] Колосов Г. В., Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости. Юрьев. 1909.
- [3] Положий Г. Н., Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного р-аналитические и (р, q)-аналитические функций и некоторые их применения. Киев. 1965.
- [4] Brsakoska S., Operator differential equations from the aspect of the generalized analytic functions. MSc thesis. Skopje. 2006.
- [5] Ilievski B., Brsakoska S., Za soglasnost na homogena ravenka Vekua i obopštена diferencijalna ravenka od prv red. (About an accordance of a homogenous Vekua equation and generalized differential equation of first order). III Congress of Mathematicians of Macedonia. Struga. 2005

## EXTREME WAVE RUN-UP ON A VERTICAL CLIFF

---

*Wave impact and run-up onto vertical obstacles constitutes one of the main phenomena which have to be taken into account in the design of coastal structures. From the linear wave theory we know that the wave height on a vertical wall is twice the incident wave amplitude. Weakly nonlinear theories bring some small corrections to this result. However, in the present study we show that certain simple wave groups may produce much higher run-ups ever predicted by previous theoretical investigations. Consequently, the results presented in this study can be considered as a note of caution for practitioners, on one side, and as a challenging novel material for theoreticians who work in the field of the wave/structure interaction.*

---

### INTRODUCTION

The notion of *design wave* is usually used by engineers to dimension various coastal structures [7], even if there is a difficulty in determining the wave height to be used in semi-empirical formulas for the pressure field. In general, by considering an idealized simple monochromatic wave component with amplitude  $a_0$ , its wave height can be trivially computed to be  $H_0 \sim 2a_0$ , and consequently the design wave. Here we show that even a simple monochromatic sea state, subject to nonlinear dynamics on the flat bottom, can produce much higher amplitudes on a vertical wall. This suggests that the concept of design wave has to be revisited. Moreover, recalling that 89% of reported past freak wave events happened in shallow waters or coastal areas [9], our work can shed some light onto the extreme wave events in the shallow water regime.

One of the most important questions in water wave theory is the understanding of wave interaction and reflection. We describe the wave propagation of the free surface of an incompressible homogeneous inviscid fluid, through the fully nonlinear Serre-Green-Naghdi (SGN) equations [8],[12]. We consider a two-dimensional wave tank with a flat impermeable bottom of uniform depth  $d = \text{const}$ , which is filled with an incompressible, inviscid fluid. The Cartesian coordinate system  $Oxy$  is chosen such that the axis  $Oy$  points vertically upwards and the horizontal axis  $Ox$  coincides with the undisturbed water level  $y = 0$ .

The system reads [4, 2]:

$$h_t + (hu)_x = 0, \quad (1)$$

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2 + gh\right)_x = \frac{1}{3}h^{-1} \left[ h^3 (u_{xt} + uu_{xx} - u_x^2) \right]_x, \quad (2)$$

where  $h(x,t) := d + \eta(x,t)$  is the total water depth ( $\eta(x,t)$  being the free surface elevation with respect to the water level), while  $u(x,t)$  is the depth-averaged horizontal velocity,  $g$  is the gravity acceleration. The model has been previously validated by extensive comparisons with experimental data for wave propagation and run-up [5].

In our numerical experiments we consider a flat channel of length  $\ell$ , bounded on the right by a rigid vertical wall and by a wavemaker on the left. Hereinbelow we will use the dimensionless variables in which all the lengths are normalized with  $d$ , speeds with  $\sqrt{gd}$  and time with  $\sqrt{g/d}$ . This scaling is equivalent to setting  $g = 1 \text{ m/s}^2$ ,  $d = 1 \text{ m}$  in the governing equations (1),(2).

---

1 University College Dublin, School of Mathematical Sciences, Belfield, Ireland

2 Universite de Savoie, Cedex, France

3 Institut FEMTO-ST, UMR 6174 CNRS-Universite de Franche-Comte, Besançon, France

4 CMLA, ENS Cachan, CNRS, Cachan, France

In order to solve numerically the SGN equations we use a high-order finite-volume scheme [5], while for time integration we use the fourth-order Runge-Kutta scheme. The computational domain is divided into equal intervals (i.e. control volumes) such that we have  $N = 1000$  control volumes per wavelength. The initial conditions are the state of rest  $\eta(x, t = 0) \equiv 0$ ,  $u(x, t = 0) \equiv 0$ . On the wavemaker we generate a monochromatic incident wave  $\eta(x = 0, t) = \eta_0(t) = a_0 \sin(\omega t) \mathcal{H}(T - t)$ , where  $T$  represent the final generation time and the amplitude is fixed to the value  $a_0 = 0.05$ ,  $\omega \in [0.01, 0.25]$ , and  $\mathcal{H}(t)$  is the Heaviside function. We generate only a finite number  $N_w$  of waves with period  $T_0 = 2\pi/\omega$ , say  $T := N_w T_0$ . The length  $\ell$  of the computational domain and the final simulation time  $T_f$  are chosen adaptively in order to allow all important interactions and to prevent any kind of reflections with the left generating boundary:

$$\ell = \left(N_w + \frac{1}{2}\right)\lambda_0, \quad T_f = \frac{\ell}{\sqrt{g(d + a_0)}} + T, \quad (3)$$

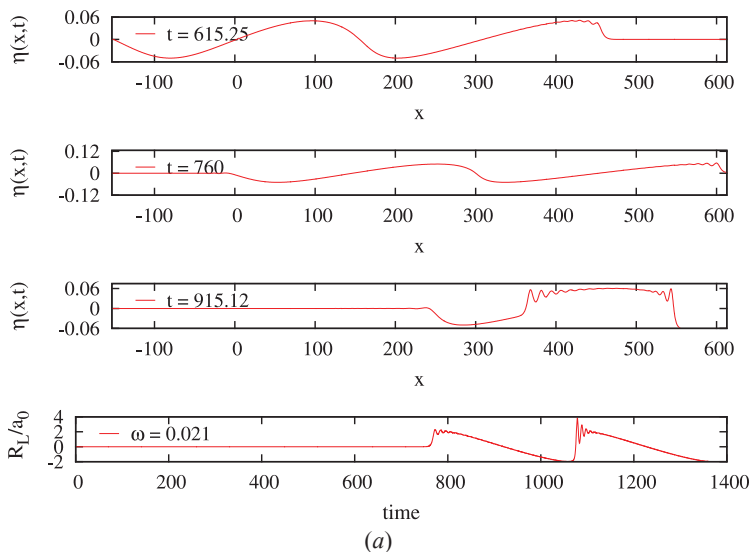
$\lambda_0$  being the wavelength corresponding to the frequency  $\omega$ .

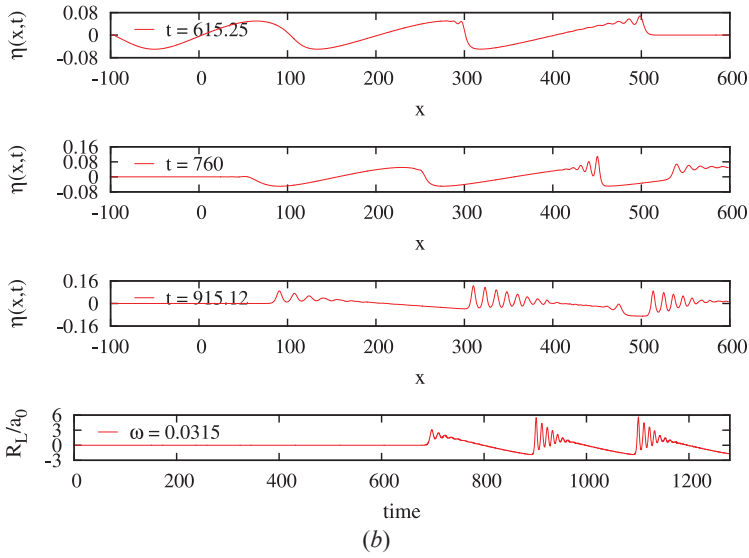
## NUMERICAL RESULTS

We begin our experiments by considering a single sinusoidal wave interacting with the solid wall. The maximal wave elevation  $\mathcal{R}_{\max} \simeq 0.10245$  on the wall reaches roughly twice the incident wave amplitude  $a_0 = 0.05$  (at  $t \simeq 70$ ). This result is in a good agreement with previous numerical studies on solitary waves interactions [3],[10],[1] even if the incident shape is not exactly the same. The maximal relative run-up  $\mathcal{R}_{\max}/a_0 \simeq 2.34$  is achieved for  $\omega_{\max} = 0.145$ . The value of  $\mathcal{R}_{\max}$  is slowly decreasing for  $\omega > \omega_{\max}$ .

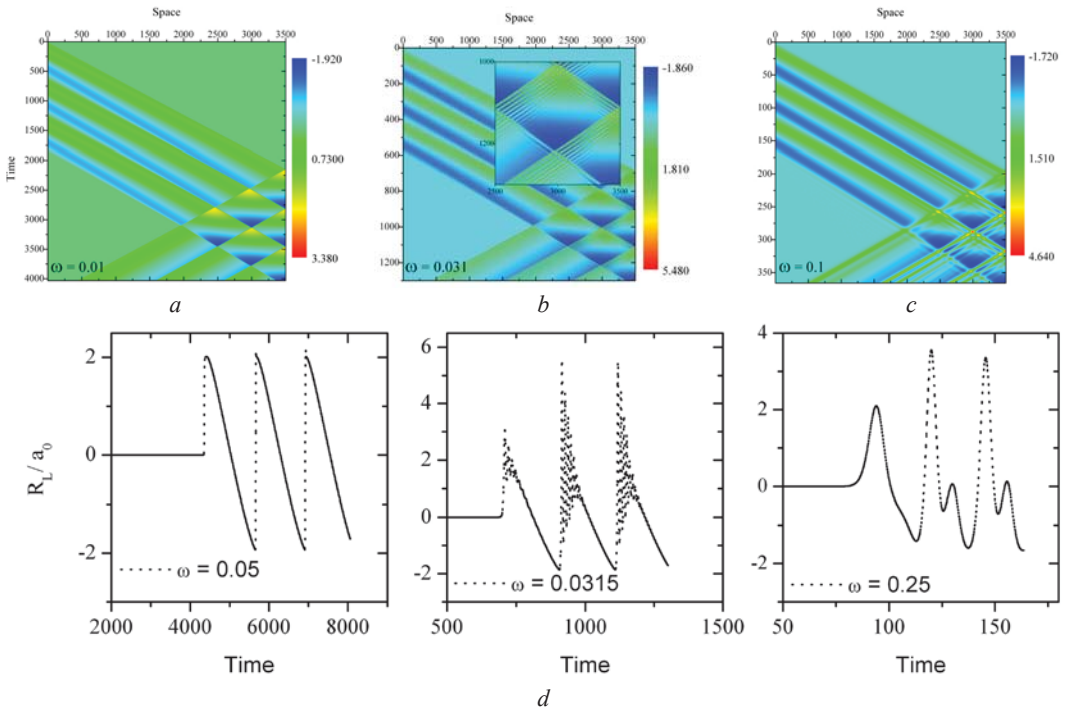
The dynamics of two waves injected into the domain is similar to the single wave case, but the nonlinear effects become even more apparent (see Figure 1). In a certain range of wave periods ( $\omega \in (0.01, 0.05)$ ), when the second wave impinges on the first reflected wave, a so called dispersive shock wave forms and propagates towards the wall [11],[6]. The maximal amplification is achieved when the second wave hits the wall (cfr. last panel of Figure 1), an effect due to nonlinear interactions between two counter-propagating waves:

$$\mathcal{R}_{\max}/a_0 \simeq 3.8, \text{ for } \omega = 0.021 \quad (4)$$





**Fig. 1.** Time evolution of the free surface elevation as a function of space, at three different times, left column two-wave case, right column three-wave case. The lower panel reports the maximal elevation at the wall  $\mathcal{R}_L/a_0$  as a function of time.

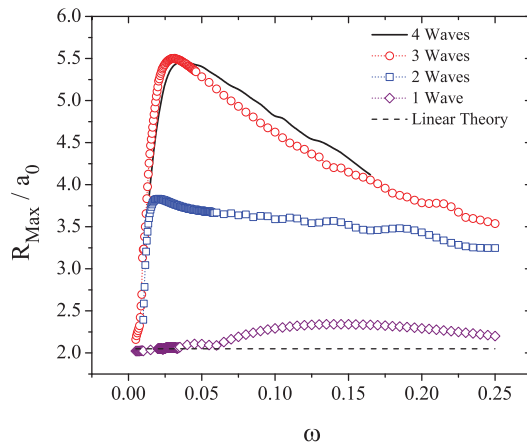


**Fig. 2.** Upper row space-time evolution plots for three incident waves case shown for three particular values of the wave frequency  $\omega$ , lower row Time evolution of the wave run-up on the vertical wall for the three incident waves case recorded for several values of the incoming frequency  $\omega$ . The maximum run-up is achieved for  $\omega_{\max} \approx 0.0315$ .

High run-up values are possible due to the energy transfer between the first reflected wave and the second incoming wave.

The three regimes (hyperbolic, equilibrium and dispersive) are described on Figure 2, where we show the space-time dynamics of the three-wave system. The left panel shows the hyperbolic regime, on

the central panel strong dispersive shocks can be observed, while on the right panel the dynamics is smooth due the dispersion. In the last case the amplification is mainly produced by the linear superposition of the incident and reflected waves. The reflection and interaction are clearly observed by smooth secondary peaks in the space time plots (see Figure 2).



**Fig. 3.** Maximum wave run-up  $\mathcal{R}_{\max}/a_0$  on the right vertical wall as a function of incoming wave frequency for different numbers of incident pulses: 1 (squares), 2 (circles), 3 (triangles) and 4 (solid line). The dashed line represents the linear limit where  $\mathcal{R}_{\max}/a_0 \equiv 2$ .

Wave interactions described above depend strongly on the frequency  $\omega$  of the impinging waves. The dependence of the maximal run-up  $\mathcal{R}_{\max}$  on the incident wave frequency  $\omega$  and the number  $N_w$  of incident waves is shown on Figure 3, the optimal energy transfer due to dispersive shocks happens for three incident waves. In this case the maximal run-up is observed around  $\omega_{\max} = 0.035$  and the amplification is equal to  $\mathcal{R}_{\max}/a_0 = 5.43$ . However, the energy transfer process is saturated for three waves. As the wave frequency increases, the wavelength shortens and the dispersive effects become gradually more important. Around  $\omega_{\max}$  the dispersive effects are balanced with nonlinearities to produce the most pronounced dispersive shock waves. Starting from  $\omega \approx 0.11$  waves become smooth due to dispersive regularization.

More general wave groups have to be studied in future investigations to unveil their potential for focusing on the walls. In addition, we are going to investigate the effect of the forces exerted by incident waves on vertical obstacles, which can be different from the purely kinematic amplitude focussing presented in this study. In other words, it is not clear whether the highest wave will produce the highest dynamic pressure spike on the wall. The effect of the wave amplitude is to be investigated as well since all the processes under consideration are highly nonlinear. Some theoretical explanation of these phenomena is also desirable. However, the difficulty is rather high because of important nonlinearities mentioned hereinabove. We claim that no linear theory is sufficient to provide a satisfactory explanation of the reported phenomenon.

## REFERENCES

- [1] J. Chambarel, C. Kharif, and J. Touboul. Head-on collision of two solitary waves and residual falling jet formation. *Nonlin. Processes Geophys.*, 16:111–122, 2009.
- [2] D. Clamond and D. Dutykh. Practical use of variational principles for modeling water waves. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 241(1):25–36, 2012.
- [3] M. J. Cooker, P. D. Weidman, and D. S. Bale. Reflection of a high-amplitude solitary wave at a vertical wall. *J. Fluid Mech.*, 342:141–158, 1997.

- [4] F. Dias and P. Milewski. On the fully-nonlinear shallow-water generalized Serre equations. *Physics Letters A*, 374(8):1049–1053, 2010.
- [5] D. Dutykh, D. Clamond, P. Milewski, and D. Mitsotakis. Finite volume and pseudo-spectral schemes for the fully nonlinear Serre equations. Submitted, 2013.
- [6] G. A. El, R. H. J. Grimshaw, and N. F. Smyth. Unsteady undular bores in fully nonlinear shallow-water theory. *Phys. Fluids*, 18:27104, 2006.
- [7] Y. Goda. New wave pressure formulae for composite breakers. In *Proc. 14th Int. Conf. Coastal Eng.*, pages 1702–1720, 1974.
- [8] A. E. Green and P. M. Naghdi. A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth. *J. Fluid Mech.*, 78:237–246, 1976.
- [9] I. Nikolkina and I. Didenkulova. Rogue waves in 2006 - 2010. *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.*, 11:2913–2924, 2011.
- [10] E. N. Pelinovsky, E. Troshina, V. Golinko, N. Osipenko, and N. Petrukhin. Runup of tsunami waves on a vertical wall in a basin of complex topography. *Phys. Chem. Earth. (B)*, 24(5):431-436, 1999.
- [11] G. Wei, J. T. Kirby, S. T. Grilli, and R. Subramanya. A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 1. Highly nonlinear unsteady waves. *J. Fluid Mech.*, 294:71–92, 1995.
- [12] M. I. Zheleznyak and E. N. Pelinovsky. Physical and mathematical models of the tsunami climbing a beach. In E. N. Pelinovsky, editor, *Tsunami Climbing a Beach*, pages 8–34. Applied Physics Institute Press, Gorky, 1985.



# NUMERICAL INVESTIGATION OF SPATIAL UNSTEADY FLOWS IN HYDRAULIC TURBINES OF HIGH-HEAD POWER DEVELOPMENT

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОТОКОВ В ГИДРОТУРБИНАХ ВЫСОКОНАПОРНЫХ ГЭС

---

*The precession of the vortex bundle offered a serious danger for hydro turbine facility in connection with the powerful flow pulsations that lead to heavy vibrations of turbine construction and can lead to facility destruction in the case of resonance. This paper presents a numerical algorithm that describes such kind of flow. Modeling of currents in the flow path of the Bureyskaya and Sayano-Shushenskaya HPP turbines was carried out. Comparison of the calculated data with the experimental data (field tests) was performed.*

---

### ВВЕДЕНИЕ

Повышение устойчивости работы, увеличение КПД гидромашин невозможно без изучения физических механизмов гидродинамических процессов, существенную роль среди которых играют нестационарные явления, связанные с образованием крупномасштабных вихревых структур. Одним из механизмов генерации пульсаций потока является прецессия вихревого жгута, образующегося за рабочим колесом гидротурбины в режимах недогрузки или перегрузки работы гидротурбины, когда поток после прохождения через гидротурбину имеет достаточно большую остаточную закрутку.

Прецессия вихревого жгута представляет серьезную опасность для гидротурбинного оборудования в связи с мощными пульсациями потока, которые приводят к сильным вибрациям конструкции гидротурбины и в случае резонанса могут привести к разрушению оборудования. Пульсации давления, генерируемые, прецессирующим вихревым жгутом, могут также воздействовать на процессы кавитации, усиливая кавитационную эрозию. Для прогнозирования резонансных явлений и поиска методов подавления неустойчивости необходима детальная информация о характеристиках пульсационных режимов и структуре потока. Необходимо отметить, что разрабатываемые подходы должны отвечать требованиям минимизации потерь энергии (увеличения КПД гидротурбины), что также может быть реализовано только на основе углубленного понимания гидродинамических процессов, имеющих место в проточных частях гидротурбины.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Согласно современным представлениям трехмерные нестационарные течения вязкой жидкости описываются системой уравнений Навье-Стокса, состоящей из уравнения сохранения массы или уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

и уравнений движения или закона сохранения импульса:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + F,$$

---

1 Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia

2 Institute of Thermophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia

3 Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

где  $\mathbf{v}$  - вектор скорости жидкости,  $\tau$  - тензор вязких напряжений,  $F$  - вектор объемных сил,  $p$  - статическое давление,  $\rho$  - плотность.

Составляющие тензора вязких напряжений  $\tau_{ij}$  определяются как:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right),$$

где  $\mu$  - динамическая (молекулярная) вязкость,  $u_i$  - компоненты вектора скорости,  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера.

Считается, что при помощи уравнений Навье-Стокса можно описать как ламинарное, так и турбулентное течение, однако на сегодняшний день возможности существующей вычислительной техники таковы, что практически все реальные достижения в расчетах турбулентных течений связаны с использованием полуэмпирических моделей турбулентности, использующих подход Рейнольдса. Суть этого подхода заключается в решении осредненных уравнений Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\tau - \overline{\rho \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'}) + F,$$

где  $\mathbf{v}$  - усредненное по времени поле скорости,  $-\overline{\rho \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'}$  - тензор рейнольдсовых напряжений.

При построении двухпараметрических моделей турбулентности для определения компонент тензора рейнольдсовых напряжений используют гипотезу Буссинеска об изотропной турбулентной вязкости:

$$-\overline{\rho \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'} = \mu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left( \rho k + \mu_t \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \delta_{ij},$$

где  $\mu_t$  - турбулентная вязкость,  $k$  - кинетическая энергия турбулентных пульсаций.

Использование концепции Буссинеска позволяет построить целый ряд двухпараметрических полуэмпирических моделей. В данной работе для замыкания системы RANS уравнений использовались двухзонная двухпараметрическая модель Ментера SST.

## ЧИСЛЕННАЯ МЕТОДИКА

При моделировании течения в гидротурбинах использовалась следующая численная методика. Для моделирования нестационарного турбулентного течения использовался метод DES, основанный на  $k$ - $\omega$  SST модели Ментера и ограничении турбулентной вязкости. Проведенные ранее тестовые расчеты показали, что данная методика за приемлемые времена расчета позволяет достоверно рассмотреть крупномасштабные турбулентные пульсации во всем проточном тракте гидротурбины и оценить их амплитудно-частотные характеристики. Моделирование вращения рабочего колеса проводилось в постановке "замороженного колеса". Проведенные многочисленные тестовые расчеты, показали корректность такого подхода, как в описании интегральных характеристик течения, так и пульсационных. Дискретизация уравнений переноса осуществлялась по методу контрольного объема на неструктурированной сетке. Связь полей скорости и давления для несжимаемой жидкости реализовывалась с помощью процедуры SIMPLEC. Для аппроксимации конвективных членов уравнения на компоненты импульса использовалась схема Quick (схема Леонардо). Для аппроксимации конвективных членов уравнения на турбулентные характеристики использовалась схема первого порядка. Нестационарные слагаемые аппроксимировались по неявной схеме 2-го порядка точности. Диффузионные члены аппроксимировались по схеме 2-го порядка.

В качестве граничных условий на входе в спиральную камеру гидроагрегата задавался фиксированный напор жидкости. Интенсивность турбулентных пульсаций на входе в трубу задавалась

равной 0,5%. Характерный размер вихрей на входе в трубу задавался как 7% от гидравлического диаметра водовода. В качестве граничных условий на выходе из отсасывающей трубы задавалось условие фиксированного давления. В качестве начальных условий для нестационарных расчетов задавалось решение соответствующих стационарных задач.

Проведенная [1,2,3] ранее работа по тестированию и адаптации данной математической модели и численной методики показала, что выбранный подход позволяет с точностью порядка процента описывать поведение интегральных характеристик течения (расход, момент на рабочем колесе, КПД) гидротурбин в широком диапазоне режимов ее работы, качественно верно описывать тенденцию поведения пульсационных характеристик течения в гидротурбины при изменении режимов ее работы, и с точностью порядка 10% воспроизводить частоты колебаний потока и интенсивность пульсаций давления в проточном тракте турбин, связанные прецессией вихревого жгута за рабочим колесом.

### ТУРБУЛЕНТНОЕ ЗАКРУЧЕННОЕ ТЕЧЕНИЕ В ДИФFUЗОРЕ

В экспериментальной работе [4] рассмотрено вихревое течение в круглом прямом диффузоре. Данная задача представляет интерес в связи с моделированием течения в отсасывающей трубе гидротурбины и часто использовалась для тестирования расчетных алгоритмов и моделей турбулентности. Экспериментальные данные доступны в базе ERCOFTAC.

Диффузор расположен на 100 мм вниз по потоку от вихревого генератора диаметром 260 мм. Сам диффузор длиной 510 мм и углом расширения  $20^\circ$  заканчивается выходом в атмосферу (рис. 1).

Закрученное течение создавалось вращающимся цилиндром с ячейками. Полученное таким образом вращение потока было близко к твердотельному. Закрутка потока составляла  $S_w \approx 0,3$ . При данных параметрах закрутки и угла расширения поток не отрывается от стенок диффузора, и, в то же время, не образуется зона рециркуляции на оси течения. Число Рейнольдса, определяемое по средней скорости, составляло 202000.

Результаты измерений представляют собой профили компонент скорости и напряжений Рейнольдса вдоль линий, перпендикулярных стенке диффузора. Линии начинаются на стенке и заканчиваются на оси диффузора. Их расположение отмечено расстоянием вдоль стенки от начала диффузора до начала линии (т.е. вдоль координаты  $x$ ). Координата  $x$  направлена вдоль стенки вниз по потоку, ноль - начало диффузора. Первый профиль скорости измерен на расстоянии 25 мм от начала диффузора вверх по потоку был взят в качестве граничного условия на входе расчетной области.

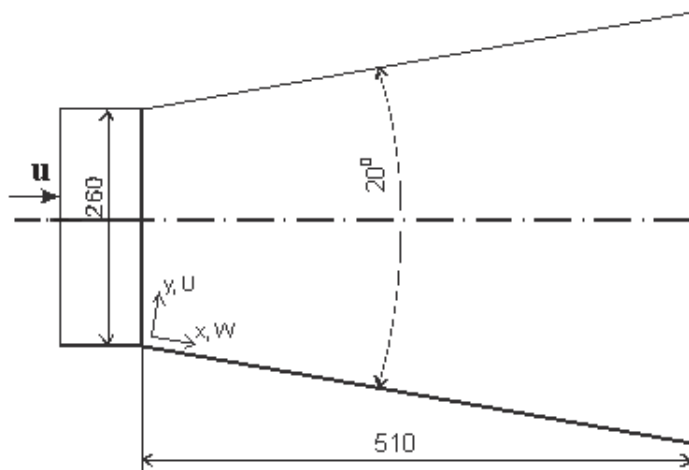


Рис. 1. Схема диффузора

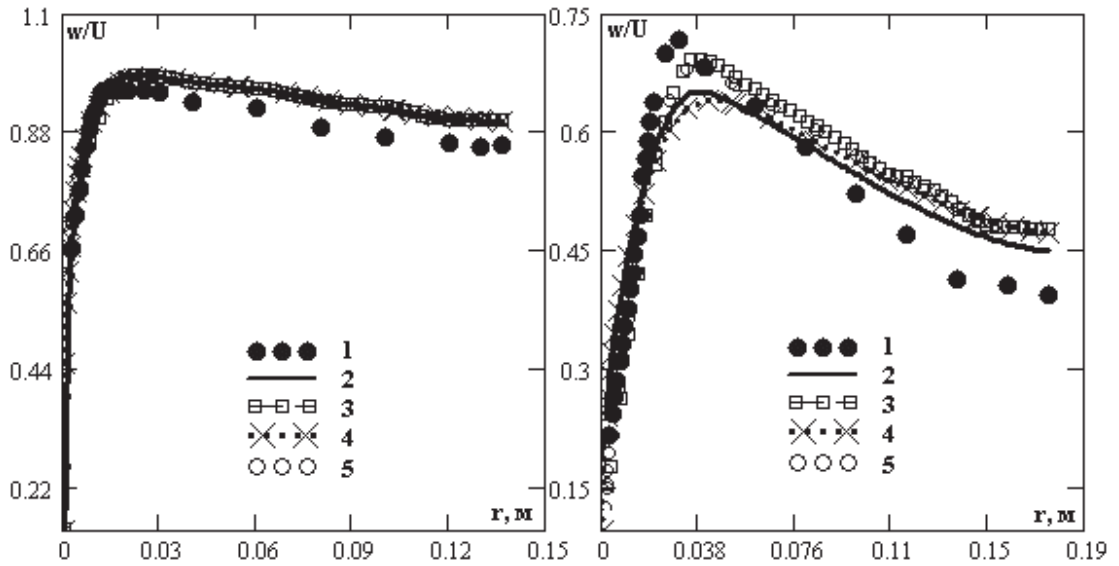


Рис. 2. Осевая компонента скорости в поперечном сечении диффузора:  
1 - эксперимент, 2 - SigmaFlow RANS, 3 - SigmaFlow DES, 4 - Fluent RANS, 5 - Fluent DES, (25 мм)

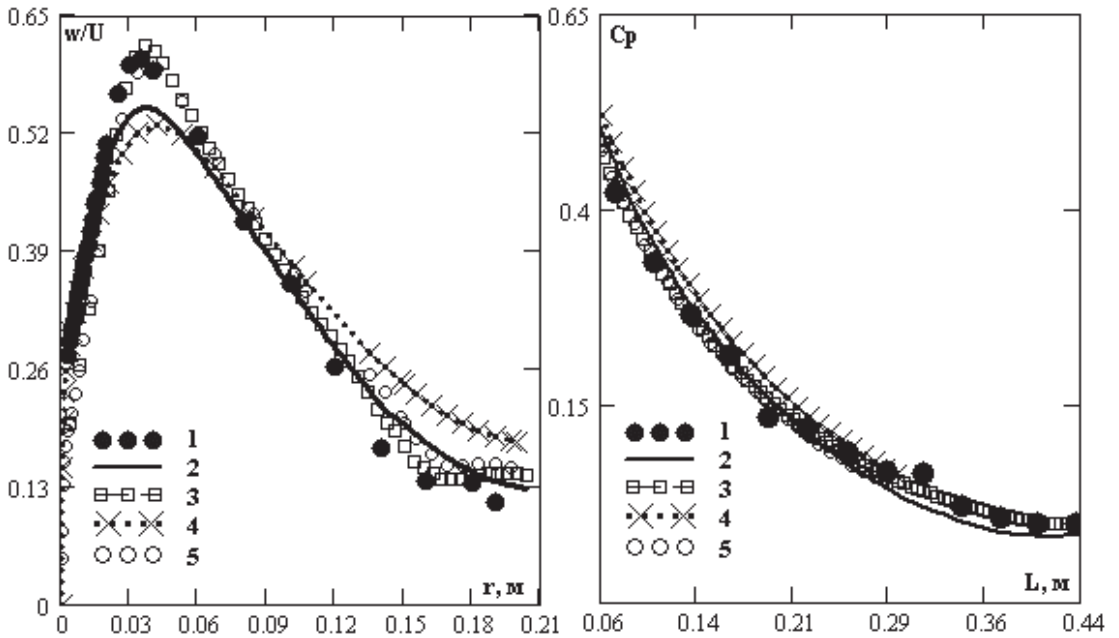


Рис. 3. Осевая компонента скорости в поперечном сечении (405мм) и коэффициент давление вдоль образующей диффузора: 1 - эксперимент, 2 - SigmaFlow RANS, 3 - SigmaFlow DES, 4 - Fluent RANS, 5 - Fluent DES

Анализируя результаты моделирования закрученного турбулентного течения в диффузоре можно сказать что, в сечении близком к входу ( $x = 25$  мм вниз от начала диффузора) результаты расчетов практически не отличаются друг от друга. Расчетные профили компонент скорости лежат близко к экспериментальным данным. По мере удаления от входа усиливаются различия между результатами моделирования, полученными RANS подходом, и экспериментальными данными. Повысить точность расчетов позволяет применение гибридного DES - подхода, сочетающего в себе подходы RANS и LES. Данная методика позволяет существенно улучшить результаты и полу-

чить практически полное согласие расчётных и экспериментальных данных.

## РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

В статье приведены данные численного эксперимента просчитанные для режимов работы электростанций в широком диапазоне открытия направляющего аппарата. На рисунках 4-5 представлены результаты моделирования течения в Саяно-Шушенской ГЭС. На рисунке 4 показаны изолинии давления в центральном сечении и вихревые структуры, образующиеся за рабочим колесом. Из данных рисунков следует, что для открытия  $A_0=14\text{мм}$  в диффузоре отсасывающей трубы формируются несколько вихрей, из-за чего спектр пульсаций получается довольно размытым с максимумом в районе  $f/f_n \approx 1$  (рис. 5). Интенсивность пульсаций давления составляет порядка 11%.

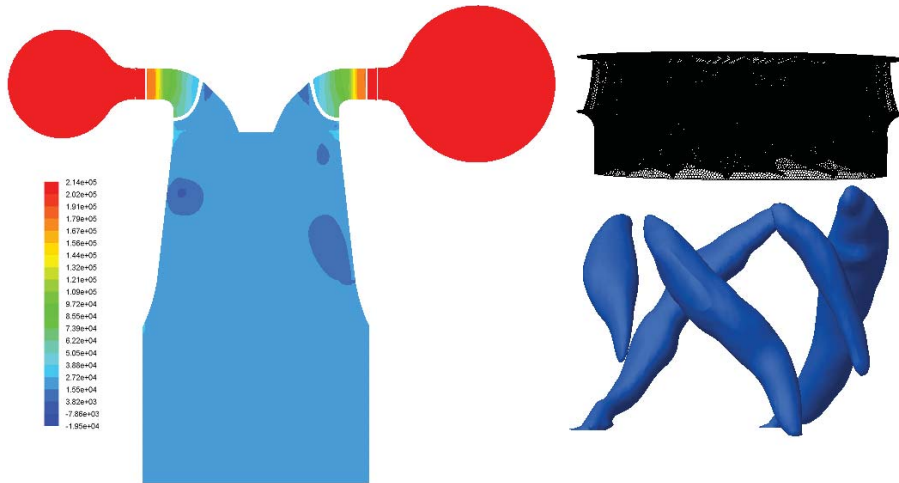


Рис. 4. Изолинии давления в центральном вертикальном сечении турбины и Вихревая структура течения в диффузоре отсасывающей трубы, вихри показаны при помощи изоповерхности давления ( $A_0=14\text{мм}$ )

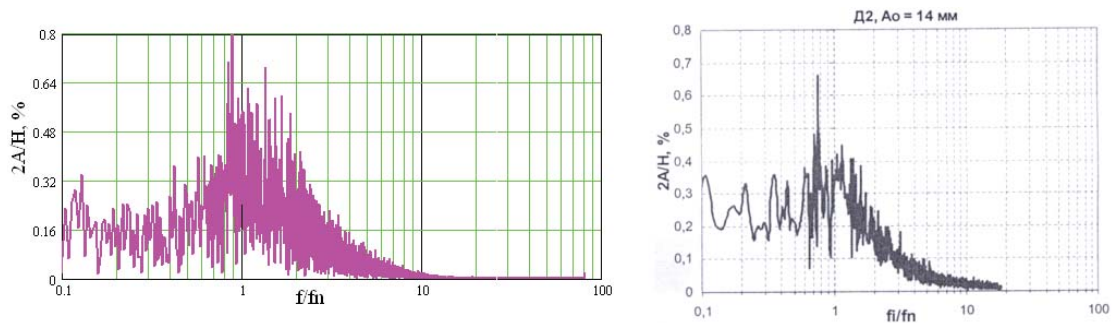


Рис. 5. Спектр пульсаций давления в диффузоре отсасывающей трубы Саяно-Шушенской ГЭС (слева - расчёт, справа - эксперимент)

На Рис. 6 показана структура течения в рабочем колесе и диффузоре для значения мощности  $P=180\text{МВт}$  (аналог величины открытия направляющего аппарата), Бурейской ГЭС. На картинке видно, что в межлопаточном пространстве рабочего колеса формируются прецессирующие вихри. Кроме того за рабочим колесом сформировался концентрированный вихревой жгут. Из-за чего в спектре пульсаций давления (Рис. 7) можно найти жгутовую частоту 0,4Гц. Такой же пик наблюдается и в экспериментальном спектре пульсаций давления (Рис. 8). Кроме того в расчетном спектре можно видеть повышение пульсаций в районе частот 0,8-1 Гц. Такие же частоты присутствуют в спектрах радиальных вибраций лопаток направляющего аппарата и горизонтальных вибраций турбинного подшипника при проведении натурного эксперимента.



Рис. 6. Вихревая структура течения в турбине

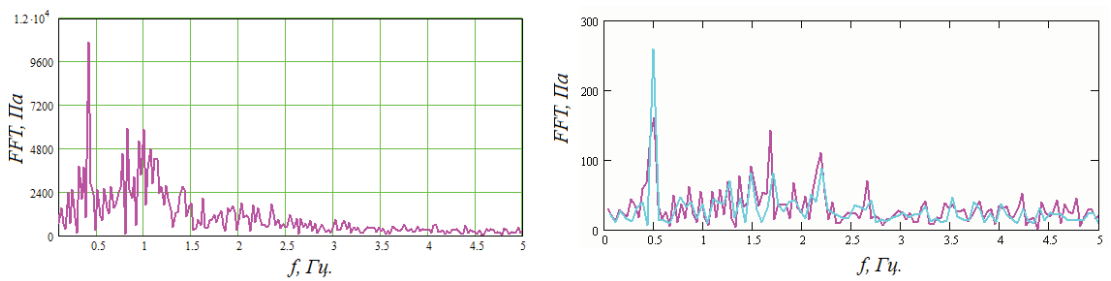


Рис. 7. Спектр пульсаций давления в диффузоре отсасывающей трубы Бурейской ГЭС (слева - расчёт, справа - эксперимент)

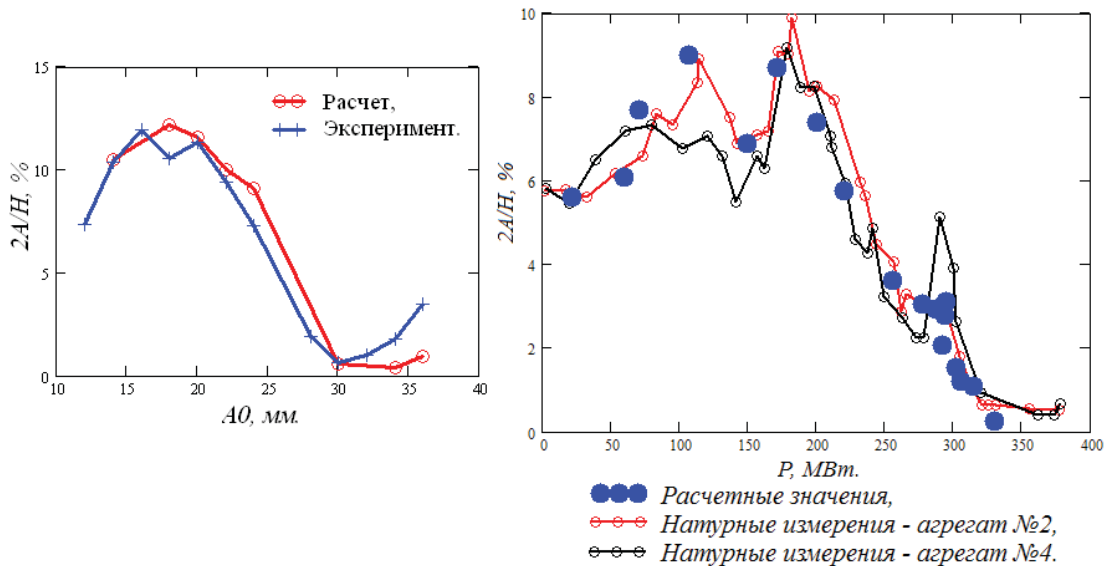


Рис. 8. Сравнение расчётных пульсационных характеристик с экспериментом (натурными испытаниями); слева - Саяно-Шушенская ГЭС, справа - Бурейская ГЭС

На рисунке 8 представлено сравнение расчётных пульсационных характеристик с экспериментом и натурными испытаниями. Несложно увидеть, что характеры кривых довольно похожи между собой. Постепенно с открытием направляющего аппарата и как следствие увеличение закрутки потока пульсации постепенно нарастают. Затем при приближении к оптимальным нагрузкам (около 100% мощности гидроагрегата) они спадают и достигают своего минимума. В дальнейшем при увеличении мощности более 100% (форсированная нагрузка) пульсации опять незначительно подрастают.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В заключении хотелось бы отметить следующее:

1. В работе построена и реализована численная методика по расчёту турбулентных нестационарных течений в гидроагрегатах;
2. Проведено тестирование данной методики на тестовой задаче, показано хорошее согласование результатов с экспериментом
3. Выполнено численное моделирование течения в гидроагрегатах высоконапорных ГЭС на примере двух станций Саяно-Шушенской и Бурейской ГЭС.
4. По итогам моделирования можно говорить, что данная численная методика расчета нестационарных течений в проточном тракте гидротурбины позволяют с точностью до нескольких процентов описывать поведение интегральных характеристик течения в гидротурбинах в широком диапазоне режимов их работы, качественно верно описывать тенденцию поведения пульсационных характеристик течения при изменении режимов ее работы, а также с приемлемой точностью воспроизводить основные частоты колебаний потока и интенсивность пульсаций давления в проточном тракте.

## **БЛАГОДАРНОСТИ**

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ №14-08-31586 и № 13-08-98115, гранта Правительства России № 11.G34.31.0046 для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских ВУЗах (ведущий ученый - К. Ханъялич, НГУ)

## **ЛИТЕРАТУРА**

- [1] Платонов Д.В., Минаков А.В., Дектерев А.А., Харламов Е.Б., Сравнительный анализ CFD-пакетов SIGMAFLOW и ANSYS FLUENT на примере решения ламинарных тестовых задач // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 1 (21). С. 84-94.
- [2] Kuznetsov I., Zakharov A., Orekhov G., Minakov A., Dekterev A., Platonov D INVESTIGATION OF FREE DISCHARGE THROUGH THE HYDRO UNITS OF HIGH HEAD FRANCIS TURBINE // IOP Conference Series: Earth and Environmental ScienceCep. "26th IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems - Session 3: Hydraulic Systems" 2012. P. 052002.
- [3] Gavrilo A., Dekterev A., Sentyabov A., Minakov A., Platonov D. APPLICATION OF HYBRID METHODS TO CALCULATIONS OF VORTEX PRECESSION IN SWIRLING FLOWS // Notes on Numerical Fluid Mechanics. 2012. T. 117. P. 449-459.
- [4] Clausen P.D., Koh S.G., Wood D.H. Measurements of a swirling turbulent boundary layer developing in a conical diffuser // Experimental Thermal and Fluid Science. -1993 - Vol. 6. - pp. 39-48.

## [n,ρ,m]-METRIC SPACES

We introduce the notion of a generalized metric spaces, called [n,ρ,m]-metric spaces with the idea to use them for text mining and image classification. The class of [n,ρ,m]-metric spaces is a subclass of the class of (n,m,ρ)-metric spaces introduced in [D1]. We investigate some of their properties and the connections with other generalized metric spaces.

Mathematics Subject Classification: 54E25, 54E35, 54E99

### INTRODUCTION

The geometric properties, their axiomatic classification and the generalization of metric spaces have been considered in a lot of papers. Some of them are: K. Menger ([Me1], [Me2]), V. Nemytzki, P.S. Aleksandrov ([Ne1], [Ne2], [AN]), L. M. Blumenthal ([B]), Z. Mamuzić ([Ma1], [Ma2]), S. Gähler ([G1], [G2], [G3]), A.V. Arhangelskii, M. Choban, S. Nedev ([A1], [A2], [C], [N1], [N2], [NC]), R. Kopperman ([Ko]), J. Usan ([U]), B.C. Dhage, ([Dh1], [Dh2], [Dh3]), Z. Mustafa, B. Sims ([MS1], [MS2]). In [DM] we introduced the notion of t-metric function on incidence structures. This, together with the notions of generalized equivalence relations and partitions ([H], [P], [US]) led me to the introduction of the notions of (n,m)-equivalence relations and (n,m,ρ)-metrics in [D1]. Discussing questions from text mining and image classification with computer scientists, possibilities of applying (n,m,ρ)-metrics and [n,ρ,m]-metrics introduced in this paper, arose.

In this paper we introduce the notion of [n,ρ,m]-metric spaces, investigate some of their properties and state same connections with other generalized metric spaces.

### (n,m,ρ) AND [n,ρ,m]-METRICS

Let M be a nonempty set. For a positive integer  $t \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$  we denote the elements of the t-th Cartesian power  $M^t$  by  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_t)$ . The symmetric t-th Cartesian power  $M^{(t)}$  is the factor set  $M^t / \sim$ , where  $\sim$  is the equivalence relation on  $M^t$  defined by:

$(x_1, x_2, \dots, x_t) \sim (y_1, y_2, \dots, y_t)$  if  $(y_1, y_2, \dots, y_t)$  is a permutation of  $(x_1, x_2, \dots, x_t)$ .

For  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_t) \in M_t$ , we denote the equivalence class  $\underline{x} \sim$  by  $[\underline{x}]$ .

For  $t, s \in \mathbb{N}$ ,  $\underline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_t) \in M^t$  and  $\underline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_s) \in M^s$ , we use the notation  $\underline{uv}$  for the element  $(u_1, u_2, \dots, u_t, v_1, v_2, \dots, v_s) \in M^{t+s}$ . Similarly, we use the notation  $[\underline{u}][\underline{v}]$  for  $[\underline{uv}]$ .

**Definition 1.** For  $t, s \in \mathbb{N}$ ,  $t < s$ , we say that  $(x_{i(1)}, x_{i(2)}, \dots, x_{i(t)})$ , where  $1 \leq i(1) < i(2) < \dots < i(t) \leq n$ , is a **t-part** of an element  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_s) \in M^s$ .

If we consider the element  $\underline{x}$  as a sequence, then a t-part of  $\underline{x}$  is the same as a subsequence of  $\underline{x}$  of length t. It is obvious that the number of t-parts of an  $\underline{x} \in M^s$  is the binomial coefficient  $\binom{s}{t}$ . More-

over, it is possible for an element  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_s) \in M^s$  to have two different t-parts  $(x_{i(1)}, x_{i(2)}, \dots, x_{i(t)})$  and  $(x_{j(1)}, x_{j(2)}, \dots, x_{j(t)})$  such that as elements of  $M^t$  they are equal. For example, if  $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , with  $x_1 = x_2 = x_3$ , then  $(x_1, x_3)$  and  $(x_2, x_3)$  are different 2-parts of  $\underline{x}$ , but as elements of  $M^2$  they are the same, and are equal to  $(x, x_3)$ .

**Definition 2.** We say that  $\underline{z} \in M^t$  is a **symmetric t-part** of an element  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_s) \in M^s$ , if there is a t-part  $(x_{i(1)}, x_{i(2)}, \dots, x_{i(t)})$  of  $\underline{x}$  such that  $\underline{z} = (x_{i(1)}, x_{i(2)}, \dots, x_{i(t)})$ .



It is obvious that the number of symmetric t-parts of an element  $\underline{x} \in M^t$  is less than or equal to the number of t-parts of  $\underline{x}$ . Moreover, an element  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_s)$  has  $\binom{s}{t}$  symmetric t-parts if and only if the

elements  $x_j \in M$  are pair wise distinct.

For  $t \in \mathbb{N}$ , let  $\Delta_t(M) = \{(x, x, \dots, x) \mid x \in M\} \subseteq M^t$  be the thin diagonal of  $M^t$ , and let  $\nabla_t(M) \subseteq M^t$  be the thick diagonal of  $M^t$ ,  $\nabla_t = \{\underline{x} \mid \underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_t) \in M^t, \text{ there are } 1 \leq i < j \leq t \text{ such that } x_i = x_j\}$ .

For the rest of the paper, let  $n, m, k \in \mathbb{N}$ ,  $n = m + k$  be fixed.

For a map  $d: M^n \rightarrow \mathbb{R}$  we state the following conditions:

(M0)  $d(\underline{x}) \geq 0$  for any  $\underline{x} \in M^n$  ;

(M1)  $d(\underline{x}) = 0$  for any  $\underline{x} \in \Delta_n(M)$ ;

(M2)  $d(\underline{x}) = d(\underline{y})$ , for any  $\underline{x} \in M^n$  and any  $\underline{y} \in [\underline{x}]$ ; and

(M3) For any  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in M^n$  and any  $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in M^m$ ,

$$d(\underline{x}) \leq \sum d(x_{i(1)}, x_{i(2)}, \dots, x_{i(k)}, a_1, a_2, \dots, a_m)$$

where the sum is over all the k-parts  $(x_{i(1)}, x_{i(2)}, \dots, x_{i(k)})$  of  $\underline{x}$ .

**Proposition 1.** Let  $d: M^n \rightarrow \mathbb{R}$  satisfies the conditions (M0), (M1), (M2) and (M3). Then the subset  $\rho \subseteq M^n$  defined by  $\rho = \{\underline{x} \mid \underline{x} \in M^n, d(\underline{x}) = 0\}$  is an  $(n, m)$ -equivalence on  $M^n$  (as defined in [D1]), i.e. satisfies the following conditions:

(E1)  $\Delta_n(M) \subseteq \rho$  ;

(E2) If  $\underline{x} \in \rho$ , then  $[\underline{x}] \subseteq \rho$ ; and

(E3) If for some  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m) \in M^m$ ,  $(x_{i(1)}, \dots, x_{i(k)}, a_1, \dots, a_m) \in \rho$  for every k-part  $(x_{i(1)}, \dots, x_{i(k)})$  of  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , then  $\underline{x} \in \rho$ .

**Proof.** (Ej) follows from (Mj),  $j=1,2$ , and (E3) follows from (M3) and (M0).  $\square$

**Remark 1.** The condition (E3) can be replaced by the condition:

(E3a) If for some  $\underline{a} \in M^m$ ,  $(\underline{u}, \underline{a}) \in \rho$  for every symmetric k-part  $\underline{u}$  of  $\underline{x}$ , then  $\underline{x} \in \rho$ .

Thus, a subset  $\rho \subseteq M^n$  is an  $(n, m)$ -equivalence if (E1), (E2) and (E3a) are satisfied.

**Remark 2.** For an  $(n, m)$ -equivalence  $\rho$  on  $M$ , the condition (E2) allows us to consider  $\rho$  as a subset of the symmetric  $n$ -th power  $M^{(n)}$  of  $M$ .

**Remark 3.** For  $n=2, m=1$ , the notion of a  $(2, 1)$ -equivalence on a set  $M$  is the same as the notion of an equivalence on  $M$ , and  $\Delta_2(M) = \nabla_2(M)$ .

In [D1], a map  $d: M^n \rightarrow \mathbb{R}$  is said to be an  $(n, m, \rho)$ -metric on  $M$  if  $d$  satisfies the conditions (M0), (M1), (M2) and (M3), and  $\rho$  is the  $(n, m)$ -equivalence on  $M$  defined by  $d$  as in Proposition 1. By replacing the condition (M1) by the condition:

(M1a)  $d(\underline{x}) = 0$  if and only if  $\underline{x} \in \rho$ ,

we can say that  $d$  is an  $(n, m, \rho)$ -metric on  $M$  if  $d$  satisfies (M0), (M1a), (M2) and M(3).

**Definition 3.** Let  $\rho \subseteq M^n$  be an  $(n, m)$ -equivalence on  $M$ . A map  $d: M^n \rightarrow \mathbb{R}$  is said to be an  $[n, \rho, m]$ -metric on  $M$  if  $d$  satisfies (M0), (M1a), (M2) and:

(M3a) For any  $\underline{x} \in M^n$  and  $\underline{a} \in M^m$ ,  $d(\underline{x}) \leq \sum d(\underline{u}, \underline{a})$ , where the sum is over all the symmetric k-parts  $\underline{u}$  of  $\underline{x}$ .

**Remark 4.** For an  $\underline{x} \in M^n \setminus \nabla_n(M)$  and any  $\underline{a} \in M^m$ , the sum in (M3) is the same as the sum in (M3a), and so, the distinction between an  $[n, \rho, m]$ -metric and an  $(n, m, \rho)$ -metric is only in the inequalities in (M3) and (M3a) for the elements  $\underline{x} \in \nabla_n(M)$ . For example:

(a) For  $n=3, m=1, \underline{x} = (x, x, y) \in M^3$  and  $\underline{a} = a \in M = M^1$ , the inequalities are:

(M3)  $d(x, x, y) \leq d(x, x, z) + d(x, y, z) + d(x, y, z)$ , i.e.  $d(x, x, y) \leq d(x, x, z) + 2d(x, y, z)$ ; and

(M3a)  $d(x, x, y) \leq d(x, x, z) + d(x, y, z)$ .

(b) For  $n=3, m=2, \underline{x} = (x,x,y) \in M^3$  and  $\underline{a} = (a,b) \in M^2$ , the inequalities are:  
(M3)  $d(x,x,y) \leq d(x,a,b)+d(x,a,b)+d(y,a,b)$ , i.e.  $d(x,x,y) \leq 2d(x,a,b)+d(y,a,b)$ ; and  
(M3a)  $d(x,x,y) \leq d(x,x,z)+d(x,y,z)$ .

(c) For  $n=4, m=2, \underline{x} = (x,x,y,y) \in M^4$  and  $\underline{a} = (a,b) \in M^2$ , the inequalities are:

(M3)  $d(x,x,y,y) \leq d(x,x,a,b)+4d(x,y,a,b)+d(y,y,a,b)$ ; and

(M3a)  $d(x,x,y,y) \leq d(x,x,a,b)+d(x,y,a,b)+d(y,y,a,b)$ .

(d) For  $n=4, m=3, \underline{x} = (x,x,x,y) \in M^4$  and  $\underline{a} = (a,b,c) \in M^3$ , the inequalities are:

(M3)  $d(x,x,x,y) \leq 3d(x,a,b,c)+d(y,a,b,c)$ ; and (M3a)  $d(x,x,y,y) \leq d(x,a,b,c)+d(y,a,b,c)$ .

The following proposition shows that the notion of an  $[n,\rho,m]$ -metric is a special case of the notion of an  $(n,m,\rho)$ -metric, i.e. that the class of  $[n,\rho,m]$ -metric spaces is a subclass of the class of  $(n,m,\rho)$ -metric spaces.

**Proposition 2.** If  $d: M^n \rightarrow \mathbb{R}$  is an  $[n,\rho,m]$ -metric, then  $d$  is also an  $(n,m,\rho)$ -metric on  $M$ .

**Proof.** For any symmetric  $k$ -part  $\underline{u}$  of  $\underline{x}$ , there is at least one  $k$ -part  $(x_{i(1)}, x_{i(2)}, \dots, x_{i(k)})$  of  $\underline{x}$  such that  $\underline{u} = (x_{i(1)}, x_{i(2)}, \dots, x_{i(k)})$ . This together with (M3a) implies that (M3) is satisfied by  $d$ . Since  $\Delta_n(M) \subseteq \rho$ , (M1a) implies that (M1) is satisfied by  $d$ .  $\square$

**Remark 5.** The notion of an  $(n,m,\rho)$ -metric, for the case  $n=2$  allows only the possibility  $m=1$ . A  $(2,1,\rho)$ -metric  $d$  on  $M$ , for an equivalence  $\rho$  on  $M$ , is the well known notion of a pseudometric on  $M$  i.e. a map  $d: M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , such that for any  $x,y,z \in M$ : (M0)  $d(x,y) \geq 0$ ; (M1a)  $d(x,y)=0$  if and only if  $(x,y) \in \rho$ ; (M2)  $d(x,y)=d(y,x)$ ; and (M3)  $d(x,y) \leq d(x,z)+d(y,z)$ .

If  $\rho$  is the diagonal  $\Delta_2(M) = \{(x,x) \mid x \in M\}$ , then the notion of  $(2,1,\Delta_2(M))$ -metric on  $M$  is the usual notion of a metric on  $M$ .

Moreover, since  $0 = d(x,x) \leq d(x,y)$  for any  $x,y \in M$ , it follows that any  $(2,1,\rho)$ -metric is also a  $[2,\rho,1]$ -metric. Hence, by Proposition 2.2, there is no distinction between a  $(2,1,\rho)$ -metric and a  $[2,\rho,1]$ -metric.

**Proposition 3.** If  $d$  is an  $(n,m,\rho)$ -metric on  $M$  with  $\nabla_n(N) \subseteq \rho$ , then  $d$  is an  $[n,\rho,m]$ -metric on  $M$ .

**Proof.** Since, for any  $\underline{x} \in \nabla_n(M)$ ,  $0 = d(\underline{x})$ , it follows that for any  $\underline{a} \in M^m$ ,  $d(\underline{x}) \leq \sum d(\underline{u}\underline{a})$ , where the sum is over all the symmetric  $k$ -parts  $\underline{u}$  of  $\underline{x}$ , and by the Remark 2.4, it follows that (E3a) is satisfied. Hence,  $d$  is an  $[n,\rho,m]$ -metric on  $M$ .  $\square$

Similarly as for the usual metrics, and  $(n,m,\rho)$ -metrics, we have the following proposition.

**Proposition 4.** If  $d$  is an  $[n,\rho,m]$ -metric on  $M$ , then  $d^*: M^n \rightarrow \mathbb{R}$  defined by:

- (i)  $d^*(\underline{x}) = \alpha d(\underline{x})$ , where  $\alpha$  is a positive real number;
- (ii)  $d^*(\underline{x}) = d(\underline{x})/(1+\alpha d(\underline{x}))$ , where  $\alpha$  is a positive real number;
- (iii)  $d^*(\underline{x}) = \min\{\alpha, d(\underline{x})\}$ , where  $\alpha$  is a positive real number;
- (iv)  $d^*(\underline{x}) = \log_\alpha(1+d(\underline{x}))$ , where  $\alpha$  is a positive real number and  $\alpha > 1$ ; and
- (v)  $d^*(\underline{x}) = (d(\underline{x}))^{1/t}$ , where  $t \in \mathbb{N}$ ,

is also an  $[n,\rho,m]$ -metric on  $M$ .

**Proof.** In all the cases, directly from the definition it follows that  $d^*$  satisfies (M0), (M1a) and (M2). The proof that  $d^*$  satisfies (M3a) follows from the following known inequalities:

- (i)  $\alpha(\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_n) \leq \alpha\beta_1+\alpha\beta_2+\dots+\alpha\beta_n$ ;
- (ii)  $(\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_n)/(1+\alpha(\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_n)) \leq (\beta_1/(1+\alpha\beta_1)) + (\beta_2/(1+\alpha\beta_1)) + \dots + (\beta_n/(1+\alpha\beta_n))$ , for  $\alpha > 0$  and  $\beta_j \geq 0$ ;
- (iii)  $\min\{\alpha, \beta\} \leq \min\{\alpha, \beta_1\} + \min\{\alpha, \beta_2\} + \dots + \min\{\alpha, \beta_n\}$ , for  $\beta \leq \beta_1+\beta_2+\dots+\beta_n$ ;
- (iv)  $\log_\alpha(1+\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_n) \leq \log_\alpha(1+\beta_1) + \log_\alpha(1+\beta_1) + \dots + \log_\alpha(1+\beta_1)$ , for  $\alpha > 1$  and  $\beta_j \geq 0$ ; and
- (v)  $(\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_n)^{1/t} \leq (\beta_1)^{1/t} + (\beta_2)^{1/t} + \dots + (\beta_n)^{1/t}$ , for  $t \in \mathbb{N}$  and  $\beta_j \geq 0$ .  $\square$

It is very well known that for the usual metric and pseudometric, i.e.  $(2,1,\rho)$ -metric the condition (M0)

is a consequence of (M1a), (M2) and (M3). That is not the case for the general case of an  $[n,\rho,m]$ -metric. But we have the following proposition.

**Proposition 5. (a)** If  $d: M^n \rightarrow \mathbb{R}$  satisfies (M1a), (M2) and (M3a), then  $d$  is an  $[n,\rho,n-1]$ -metric on  $M$ .

**(b)** If  $d: M^3 \rightarrow \mathbb{R}$  satisfies (M1a), (M2) and (M3a), then  $d$  is a  $[3,\rho,1]$ -metric on  $M$ .

**Proof. (a)** Let  $\underline{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n) \in M^n$ , let  $\underline{a}=(x_2,\dots,x_n) \in M^{n-1}$  and let  $\underline{z}=(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \Delta_n$ . Then, since  $\underline{x}=(\underline{xa})$ , (M1a) and (M3a) imply that  $0=d(\underline{z}) \leq d(\underline{xa})=d(\underline{x})$ , i.e. (M0) is satisfied by  $d$ .

**(b)** For  $\underline{x} \in \Delta_3$ ,  $d(\underline{x})=0 \geq 0$ . If  $\underline{x}=(x,x,y) \in \nabla_3$ , then,  $0=d(x,x,x) \leq d(x,x,y)$ .

Let  $\underline{x}=(x_1,x_2,x_3) \in M^3 \setminus \nabla_3$ . Then:

$$d(x_1,x_1,x_3) \leq d(x_1,x_1,x_2) + d(x_1,x_3,x_2) \text{ and } d(x_1,x_1,x_2) \leq d(x_1,x_1,x_3) + d(x_1,x_2,x_3).$$

This implies that  $d(x_1,x_2,x_3) \geq |d(x_1,x_1,x_2)-d(x_1,x_1,x_3)| \geq 0$ .  $\square$

Next we give some examples.

**Examples 1.** Let  $M$  be a nonempty set:

**a)** The map  $d: M^n \rightarrow \mathbb{R}$  defined by  $d(\underline{x})=0$  for  $\underline{x} \in \Delta_n(M)$  and  $d(\underline{x})=1$  otherwise, is an  $[n,\Delta_n(M),m]$ - metric, for any  $1 < m < n$ , and is called **discrete**  $[n,\Delta_n(M),m]$ - metric.

**b)** Let  $D: M^2 \rightarrow \mathbb{R}$  be a metric on  $M$ , and let  $\alpha$  be a positive real number.

**b.1)** The map  $d_\alpha: M^3 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  defined by:

$$d_\alpha(x,y,z)=\alpha(D(x,y)+D(x,z)+D(y,z))$$

is a  $[3,\Delta_3(M),1]$ -metric and a  $[3,\Delta_3(M),2]$ -metric on  $M$ .

**b.2)** The map  $d_{kmax}: M \rightarrow \mathbb{R}$  defined by:

$$d_{kmax}(x,y,z)=\alpha \cdot \max\{D(x,y),D(x,z),D(y,z)\}$$

is a  $[3,\Delta_3(M),1]$ -metric and a  $[3,\Delta_3(M),2]$ -metric on  $M$ .

**c)** Let  $E$  be the Euclidean plane, and let  $d_p: E^3 \rightarrow \mathbb{R}$  be defined by:

$$d_p(A,B,C) = \text{Perimeter of the "triangle" } ABC.$$

Since the perimeter of a triangle  $ABC$  is the sum of the lengths of the segments  $AB$ ,  $AC$  and  $BC$ , b.1) implies that  $d_p$  is a  $[3,\Delta_3(M),1]$ -metric and a  $[3,\Delta_3(M),2]$ -metric on  $E$ .

**d)** Let  $E$  be the Euclidean plane, and let  $d_A: E^3 \rightarrow \mathbb{R}$  be defined by:

$$d_A(A,B,C) = \text{Area of the "triangle" } ABC.$$

It is easy to check that  $d_A$  is a  $[3,\rho,1]$ -metric on  $E$ , but it is not a  $(3,2,\rho)$ -metric on  $E$ , and so it is not a  $[3,\rho,2]$ -metric on  $E$ , where  $\rho = \{(A,B,C) \mid A,B,C \text{ are collinear points in } E\}$ .

**e)** Let  $S$  be the Euclidean space, and let  $d_v: S^4 \rightarrow \mathbb{R}$  be defined by:

$$d_A(X,Y,Z,U) = \text{Volume of the "tetrahedron" } XYZU.$$

It is easy to check that  $d_A$  is a  $[4,\rho,1]$ -metric on  $S$ , but it is not a  $(4,j,\rho)$ -metric  $S$  for  $j=2,3$ , and so it is not a  $[4,\rho,j]$ -metric on  $S$  for  $j=2,3$ , where  $\rho = \{(A,B,C) \mid A,B,C \text{ are coplanar points in } S\}$ .

**Example 2.** Let  $A$  be a nonempty set, let  $M = A^t$  for  $t \in \mathbb{N}$ ,  $t > 3$ , and let  $d: M^3 \rightarrow \mathbb{R}$  be defined as follows. For three elements  $\underline{x}=(x_1,x_2,\dots,x_t) \in M$ ,  $\underline{y}=(y_1,y_2,\dots,y_t) \in M$ ,  $\underline{z}=(z_1,z_2,\dots,z_t) \in M$ , let

$$d(\underline{x},\underline{y},\underline{z}) = \#\{j \mid j \in \{1,2,\dots,t\}, x_j \neq y_j \text{ or } x_j \neq z_j \text{ or } y_j \neq z_j\}$$

where  $\#$  denotes the number of the elements in the set. Then  $d$  is a  $[3,\rho,1]$ -metric and a  $[3,\rho,2]$ -metric on  $M$ . This example is a generalization of the Hamming distance as in [Ha].

At the end we state some connections with some other generalized metrics, that in fact are special cases of the  $(n,m,\rho)$  and  $[n,\rho,m]$ -metrics.

The notion of a 2-metric on  $M$ , defined in [G1] is a  $(3,1,\rho)$ -metric  $d$  on  $M$  such that:

- 1) for any two distinct elements  $a,b \in M$ , there is an element  $c \in M$ , such that  $d(a,b,c) \neq 0$ ; and
- 2)  $\nabla_3(M) \subseteq \rho$ .

The notion of an  $n$ -metric on  $M$ , defined in [G3] is an  $(n,1,\rho)$ -metric  $d$  on  $M$  such that:

1) for any two distinct elements  $a,b \in M$ , there is an element  $\underline{x} \in M$ , such that  $a,b$  are components of  $\underline{x}$  and  $d(\underline{x}) \neq 0$ ; and

2)  $\nabla_{n+1}(M) \subseteq \rho$ .

The notion of a  $D$ -metric on  $M$ , defined in [Dh1] is a  $(3,1,\Delta_3(M))$ -metric on  $M$ .

The notion of a  $G$ -metric on  $M$ , defined in [MS2] is a  $[3,\Delta_3(M),1]$ -metric  $d$  on  $M$ , that is also a  $(3,2,\Delta_3(M))$ -metric on  $M$ , satisfying:

1)  $d(x,x,y) \leq d(x,y,z)$  for any  $x,y,z \in M$  with  $z \neq y$ ; and

2)  $d(x,y,z) \leq d(x,x,u) + d(u,y,z)$ , for any  $x,y,z,u \in M$ .

## REFERENCES

- [AN] П.С. Александров, В.В. Немыцкий: Условия метризуемости топологических пространств и аксиома симметрии, *Мат. сб.* 3 : 3, 1938, 663-672
- [A1] А.В. Архангельский: Отображения и пространства, *УМН* 21, вып. 4, 1966, 133-184
- [A2] А.В. Архангельский: О поведении метризуемости при факторных отображениях, *ДАН* 164, №2, 1965, 247-250
- [B] L. M. Blumenthal: Some imbedding theorems and characterization problems of distance geometry, *Bull. Amer. Math. Soc.* Volume 49, Number 5, 1943, 321-338
- [C] М. Чобан: О метризуемых пространствах, *Вестн. Моск. Ун-та, сер. Матем., мех*, №3, 1969, 44-50
- [Dh1] B.C. Dhage,: Generalized metric space and mapping with fixed point, *Bulletin of the Calcuta Math. Society*, Vol 84, 1992, 329-336
- [Dh2] B.C. Dhage,: Generalized metric spaces and topological structure II, *Pure Appl.Math. Sci.* 40 (1-2) 1994, 37-41
- [Dh3] B.C. Dhage,: Generalized metric spaces and topological structure I, *An. stiint. Univ. Al.I. Cuza Iasi. Mat(N.S)* 46, 2000, 3-24
- [D1] D. Dimovski: Generalized metrics-( $n,m,\rho$ )-metrics, *Mat. Bilten*, 16, Skopje, 1992, 73-76
- [DM] D. Dimovski, A. Mandak: Incidence structures with  $n$ -metrics, *Zbornik Rad. Fil. Fak. Nis, Ser. Mat.* 6, Nis, 1992, 151-155
- [G1] S. Gähler: 2-metrische Räume und ihre topologische Struktur, *Math. Nachr.* 26, 1963, 115-148
- [G2] S. Gähler: Zur geometrische 2-metrische raume, *Revue Roumaine de Math. Pures et Appl.*, XI (1966), 664-669.
- [G3] S. Gähler: Untersuchungen über verallgemeinerte  $m$ -metrische Räume. I, *Math. Nach.* 40, 1969, 165-189
- [H] J. Hartmanis: Generalized partitions and lattice embedding theorems, *Proc. of Symposia in Pure Mathematics Vol II, Lattice Theory*, AMS 1961, 22-30
- [Ha] R.W. Hamming: Error detecting and error correcting codes, *Bell System Technical Journal* 29 (2), 1950, 147-160
- [Ko] R. Kopperman: All topologies come from generalized metrics, *A. Math. Month.* v95 i2. 89-97
- [Ma1] Z. Mamuzić: Uvod u opštu topologiju, *Matematička biblioteka-17*, Beograd, 1960
- [Ma2] Z. Mamuzić: Abstract distance and neighborhood spaces, *Proc. Prague Symp.*, 1962, 261-266
- [Me1] K. Menger: Untersuchungen über allgemeine Metrik, *Math. Ann.* 100, 1928, 75-163
- [Me2] K. Menger: Statistical metrics, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 25, 1942, 535-537
- [MS1] Z. Mustafa, B. Sims: Some remarks concerning  $D$ -metric spaces, *Proceedings of the Internat. Conference on Fixed Point Theory and Applications, Valencia (Span)*, July (2003). 189-198
- [MS2] Z. Mustafa, B. Sims: A new approach to generalized metric spaces, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, Vol. 7, Number 2, 2006, 289-297
- [Ne1] V. Nemytzki: On the "third axiom of metric spaces", *Tr. Amer. Math. Soc.* 29, 1927, 507-513
- [Ne2] V. Nemytzki: Über die Axiome des metrischen raumes, *Math. Ann.* 104, No 5, 1931, 666-671
- [N1] С. Недев: Об обобщено метризуемых пространствах, *Докл. Болт. Акад. Наук*, 20, №6, 1967, 513-516
- [N2] С. Недев: о-Метризуемые пространства, *Тр. Моск. Мат. Общ.* Том 24, 1971, 201-236
- [NC] С. Недев, М. Чобан: О метризуемости топологических групп, *Вестн. Моск. Ун-та, сер. Матем., мех*, №6, 1968, 18-20
- [P] H.E. Pickett: *A note on generalized equivalence relations*, *Amer. Math. Monthly*, 1966, № 8, 860-861
- [U] J. Ušan:  $\langle Nm, E \rangle$ -seti s  $(n+1)$ -rastojanijem, *Review of Research, PMF, Novi Sad, Ser. Mat.* 17, 2, 1989, 65-87
- [US] J. Ušan, B. Šešelja: *Transitive  $n$ -ary relations and characterizations of generalized equivalences*, *Zbornik Rad. PMF Novi Sad*, 11, 1981, 231-234

# APPLICATION OF GEOGRAPHIC INFORMATION SYSTEM FOR CONTROLLING THE SOIL POLLUTION IN THE MUNICIPALITY VRBAS

The paper presents possibilities of application of GIS systems for governing in environment protection within a municipality using the municipality Vrbas in Vojvodina, as the example. In mentioned municipality was performed modeling for distinct environmental elements, and their natural values are presented along with values after pollution. The main task of this paper is application of GIS technologies for determination of environmental conditions, while the main aim is to point on possible governing over natural elements through these technologies. In this paper was used the ArcGIS Program.

Key words: GIS, governing, environment, Vrbas.

## INTRODUCTION

The Geographical Information System (GIS) provides possibility for changes within geographic area to be predicted. Ratios between various environmental elements should be considered over different models. Overall ecological problems are incorporated in GIS, along with geospatial elements and environmental components including natural, society and capital resources. Data related to air, soil, waters, climate, elements of living and non living things, biocenosis, human beings, objects built by human beings (capital resources) etc. are lodged in.

The municipality Vrbas is one of twelve municipalities in the South Bački District. It is bordered with municipalities Kula, Mali Idjoš, Srbobran, Temerin, Novi Sad, Bački Petrovac, Bačka Palanka and Odžaci. The municipality Vrbas covers area of 356.58 km<sup>2</sup>.

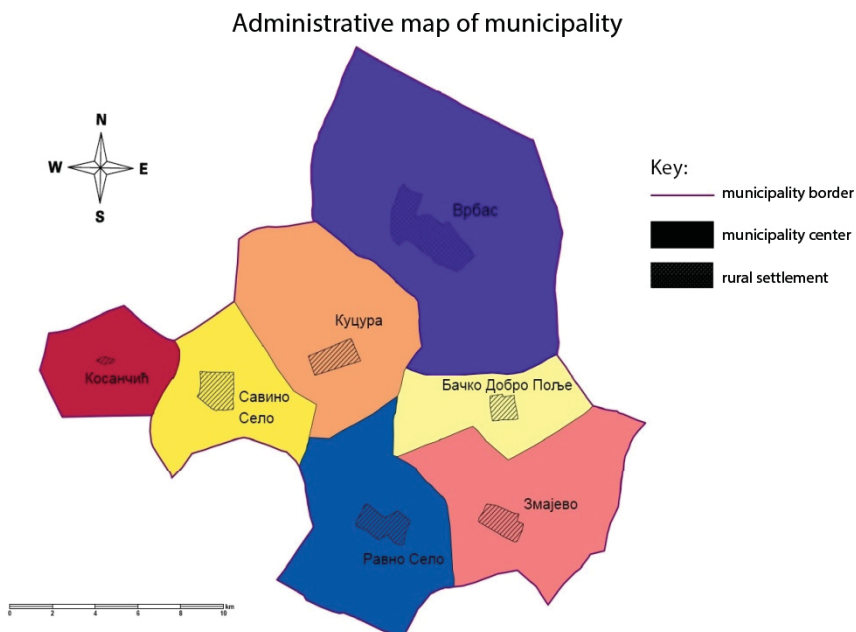


Fig. 1. Map of settlements in the municipality Vrbas (Author: Djekić T., 2013)

<sup>1</sup> University in Nis, Faculty of Natural-mathematic sciences, Department for Geography, Nis, Serbia

According to data of the last official census of inhabitants, held in 2012, the population in the municipality is 45852. The average population density is 129 per km<sup>2</sup>. The municipality consists of 7 settlements.

**Table 1.** General data on the municipality Vrbas

No	settlement	area (km <sup>2</sup> )	population	population density per km <sup>2</sup>
1.	Bačko Dobro Polje	26.83	3929	146
2.	Vrbas	111.74	25907	232
3.	Zmajevo	54.24	4361	80
4.	Kosančić	23.72	163	7
5.	Kucura	54.48	4663	86
6.	Ravno Selo	52.18	3478	67
7.	Savino Selo	33.41	3351	100

Territory of the municipality Vrbas is completely flattened as well as in other municipalities in the Autonomous Province Vojvodina. The highest point is at elevation of approximately 104 m a.s.l in Vrbas and the lowest is in its southeastern part, at the place where the channel Jegrička leaves out the municipality, in the village Zmajevo. In the territory of the municipality Vrbas is only 6 water flows. Their importance is negligible.

On contrary, through its territory pass even 159 channels. The most important are the channel Dunav-Tisa-Dunav (the longest channel in our country) and the Great Channel (Veliki Kanal). Channels are of considerable importance, not only for this but for all municipalities based on agriculture. There are also 5 small, artificial lakes rich in fish, as well as 24 marshes.

### **GIS ANALYSES OF SOIL POLLUTION IN THE MUNICIPALITY VRBAS**

The largest area is covered by loess sediments (38.5 % of total municipal area). Geological composition is the consequence of the Pannonia Sea, which existed here. Clays represent, if they are pure, very useful industrial resource. On contrary, for civil engineers, they represent unsuitable ground for building, as they are impermeable. Carrying capacity of clays is extraordinary low; actually these rocks suffer only minimal weights. Before construction, clayey soils need to be electrochemically consolidated.

The most widespread soil in the municipality Vrbas is meadow peat soil with approximately 67% in abundance. Chernozem is high quality soil for nursery of diverse agricultural plants and is characterized by very quality humus layer. It could be inferred that the soil in the municipality Vrbas is of extraordinary quality for agriculture, and is appropriate use for it.

On the other side, extensive use of pesticides and other chemical compounds led to soil damage and synchronously to environmental damages.

Total area covered by vegetation is 7.5 km<sup>2</sup> what is 2.1% of the municipal territory. Such vegetation is quite reasonable taking into consideration the fact that the economy is based almost completely on agriculture. Soil pollution takes part when superficial horizons are imposed to big masses of waste that could not disintegrate under common atmospheric conditions through self-cleaning.

Development of cities with high population, the increase of standard and spent, accompanied with development of industry, more intensive traffic and intense agriculture lead to significant pollution of environment and the soil. Enormous pollution of soil by organic and inorganic compounds destroys the balance in ecosystem and disturbs common processes in soil, leading to its degradation.

Organic matters that are soil pollutants include fecal waste, food waste, waste from food industry, industry of wood and cellulose, petroleum and its derivatives, oil and oil slick.

Inorganic matter pollutes superficial, rarely deeper horizons of soil. This happens when polluted waste waters flow-out, when solid waste is accumulated (waste with more or less soluble chemical com-

pounds, disposable bags with rest of contents, batteries, metals and nonmetals from production, waste from power plants). All inorganic either elements or compounds have influence on soil composition and deserve negative impact on environment when pollution reaches certain degree.

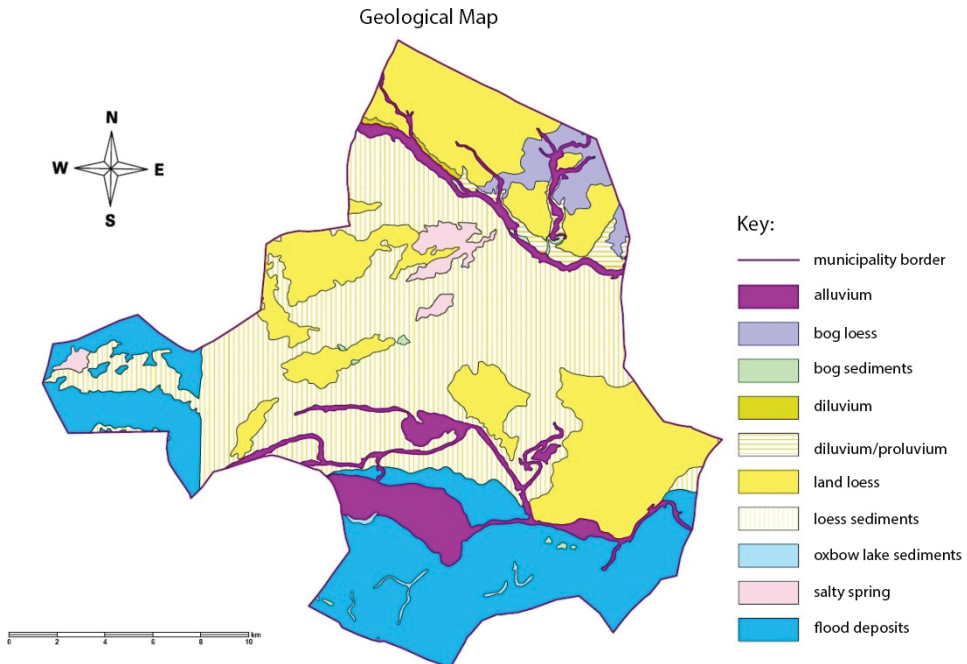


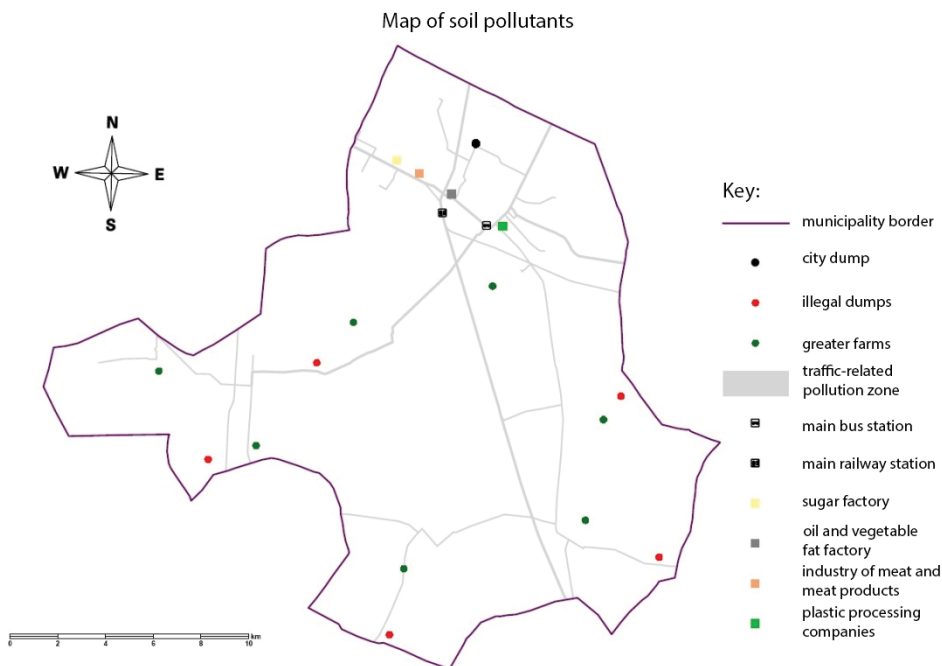
Fig. 2. Geological map of the municipality Vrbas (Author: Djekić T., 2013)

Dominant soil pollutant in the municipality Vrbas are:

- City dump;
- Illegal dumps (discarded waste);
- Farms;
- Traffic;
- Main bus station;
- Main railway station;
- Sugar factory;
- Industry of meat and meat products;
- Oil factories;
- Plastic recycling factory.

Beside these pollutants, agriculture additionally contributes to soil pollution.

Use of artificial and mineral fertilizers in order to obtain a higher production of distinct plant species led to changes in soil properties, particularly microbiological. Mineral and artificial fertilizers contain high amounts of nitrogen, phosphorous and potassium. They are commonly produced as salts required for plant growth. Chemically, they are most frequently nitrates and sulfates. As are soluble, such compounds pollute soil and afterwards leach and damage ground waters along with surface waters. Plants use only a part of these compounds. The remained part is leaching and either sink into depth or be absorbed at surface turning into more stabile compounds, which change chemical composition of soil. The final effect is change of soil acidity (pH) and microbiological properties. Precise data of fertilizer in the municipality Vrbas are lacking.



**Fig. 3.** Application of GIS in recognition of soil pollutants in the municipality Vrbaš (Author: Djekić T., 2013)

According to obtained information data in the territory of Vrbaš are in use wide spectrum of domestic and foreign products, as herbicides. Numerous diverse insecticides and fungicides are also in use, but data on their approximate amount are lacking.

Although pesticides are commonly low resistant and decay in soil is pretty fast, their negative impacts are the consequence of their wide use and extensive influence, along with very toxic substances contained in them. Therefore, pesticides may in short period cause drastic changes in soil quality and fertility, and consequently decrease biological potentials. Insecticides, based on metals, act as abdomen poison when comes in organism through mouth, i.e., digestive system. Their acting mechanism is related for bounding of arsenic for sulphur hydrogen groups in enzymes or replacement of phosphorous by adenosine three phosphates. This leads to metabolic changes and coagulation of proteins. These compounds are very toxic, not only for insects whom are dedicate, but for human beings and animals, too. Fungicides are pesticides served for inhibit various parasitic plants. They are used as liquids for sprinkling agricultural products for preventing development of fungi spores and fungi. Organic compounds of mercury, sulphur, formaldehydes and cuprum are the commonest in use. Herbicides may destroy all or distinct plant species. They are commonly used as acids, particularly sodium and sulphuric acid, and oil solutions. They are dangerous for human beings and animals, not only for weed. Although all these compounds are use for higher and more quality agriculture yield, their long use has adverse effects. Pesticides spread their negative impacts from dedicated group to soil affecting other plants and animals. Furthermore matter cycles over either food chain or direct contact with polluted water and air has negative influence on human beings.

Atrazine is herbicide from pesticide group widely used for weed inhibiting. It carries sign XN what means is harmful for health. It is forbidden for use in Serbia since the Republic Direction for plant protection brought decision on December 31th in 2007. The causes for such decision are extremely toxic component in it and polluted ground waters. Although the situation is not so alarming, its further use could make it very soon.

Organic compounds of mercury are liposoluble (oil-soluble) compounds and because of it posses high accumulative ability (in milky glands making babies particularly vulnerable and exposed to risk). They



tend to accumulate in brain tissue, liver and kidneys.

Heavy mercury poisoning includes symptoms like: weakness of legs and arms, total muscle weakness, reduced visibility and damaged sense of hearing and speaking. In extreme cases come madness, paralysis, coma and death. Formaldehyde brought in organism oxidizes and turns to formic acid that decrease the pH values in blood (with increasing acidity), even can be deadly. Formaldehyde is toxic and carcinogenic compound and may cause asthma.

### **POLLUTANTS IN SOIL THAT MAY BE PRESENTED BY GIS**

Various industrial products pollute soil: either over vapor phases released during combustion into the soil or over different waste materials. Heavy metals when enter once in soil practically remain in it evenly as are not decomposable like other contaminants.

Traffic as soil pollutant. Emissions from vehicles consist of several hundred compounds. Considerable components - pollutants include either liquid or solid particles, carbon monoxide, carbon dioxide, nitrogen and sulphur oxides and carbon hydroxides that are signed all together as vaporous organic compounds. Emissions from vehicles also includes resistant compounds that may retain in environment for many years, alike heavy metals (led, cadmium, poliaromatic carbon hydroxides and chlorine). Sulphur and nitrogen compounds contribute in formation of acid rains and soil desiccation.

The use of soil as traffic route is additional problem as disable soil to be used for other purposes (e.g. in agriculture). Unfortunately the constant growing of cities requires more extensive traffic routes, what has adverse effect on environment.

Illegal and city dumps. All waste from the territory of the municipality Vrbas is left on city dump, distant from the center of the city only a few kilometers. Inadequate discard of waste on unhygienic dumps causes soil and ground water pollutions. Precipitations that percolate through mass of wasting material dissolve dangerous matter and pollute soil and ground waters. Additional problem is that soil pollution affects wider area, not only locally, and damage flora and fauna on and in the ground. Furthermore problem is soil pollution caused by waste particles carried by wind. Percolating waters from dumps harms ground and surface waters and soil due to high content of organic matter and heavy metals.

### **SOIL POLLUTION CONTROL IN THE MUNICIPALITY VRBAS USING GIS**

In agriculture - Soil analyses and appropriate education of agriculturalists. Soil analyses provide with information about proper fertilizer concerning type, amount and period of its application. This mere leads to significant rationalization of fertilizer use in respect to, unfortunately fertilizer use without previous analyses at us. The main task of agricultural experts and agricultural scientists it to achieve high and stable yields of good quality through minimal investment of material, energy and effort. That should be done following rules for maximal efficiency accompanied with protection of environment, agro ecosystem and overall biosphere from injurious impacts and pollutions.

In the field of waste disposal - establishing a plan of waste disposal; define conditions for joining to regional dump; expanding of territory for dump discard on all local communities.

The biggest role in soil pollution has man with his activities. Pollutants of surface and ground waters in the municipality Vrbas are:

- Settlements;
- Industrial objects;
- Agricultural farms;
- Illegal dumps (discarded waste);
- City dump;
- Chemical adding to soil (pesticides and nitrogen fertilizers).

Waste waters are commonest worthless matters that discharge like liquid, suspension or colloid solutions from settlements and industrial objects. They could be divided in three groups:

- waste waters from settlements derived from human beings and animals;
- industrial waste waters;
- atmospheric waters.

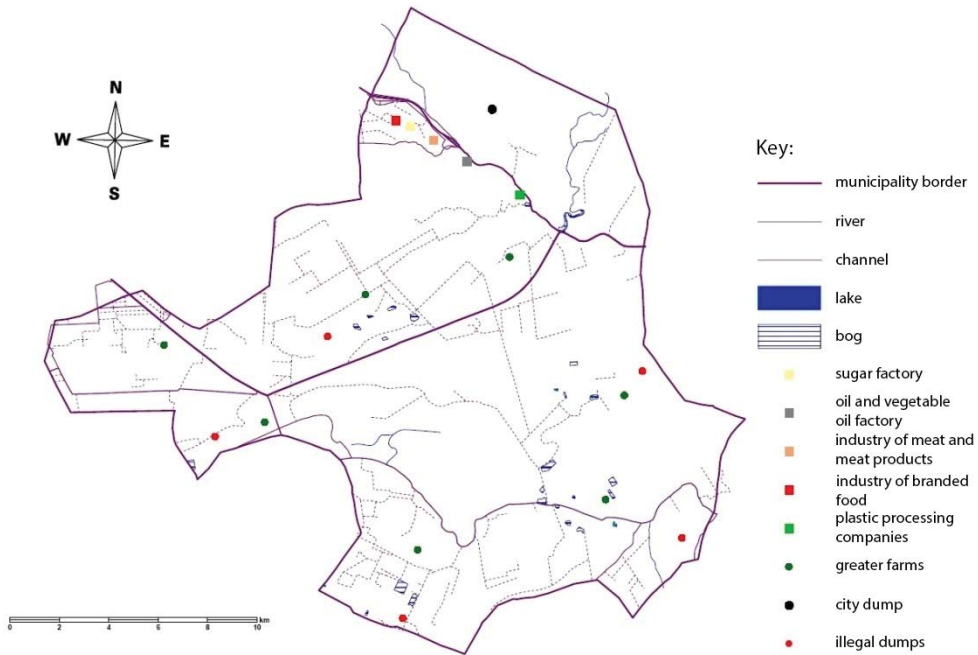


Fig. 4. Soil pollution control in the municipality Vrbas using GIS (Author: Djekić T., 2013)

## CONCLUSION

The quality control of soil pollutants in the municipality Vrbas requires application of GIS technologies from following reasons:

- limited capacities in natural environment;
- high rate of environmental pollution;
- and need for complex ecological problems to be solved.

Complementary part of GIS is establishing of data base and afterwards a cadastre of sources of environmental pollution and integral preventing. A cadastre of sources of environmental pollution represents the initial form for environmental monitoring. Monitoring system includes three main procedures:

- observation and control
- prognosis or attempt to predict possible changes in nature under influence of natural or anthropogenic factors
- regulative measures of environmental conditions and governing within it.

Monitoring needs to include all developing resources in the municipality Vrbas.

## REFERENCES

- [1] Borough P. A., McDonnell R. A. (2006): Principi geografskih informacionih sistema, Prevod sa Engleskog jezika (Bajat B., Blagojević D.), Građevinski fakultet, Univerzitet u Beogradu, Beograd.
- [2] Кукрика М. (2000): Географски Информациони Системи, Универзитет у Београду, Географски факултет, Београд.
- [3] Љешевић М. (2005): Животна средина, Универзитет у Београду, Географски факултет, Београд.
- [4] Љешевић М., Милановић М. (2004): Улога информационих система у истраживању и заштити животне средине, Зборник радова LI, Географски факултет, Београд.
- [5] Lovett A., Appleton K. (2008): GIS for Environmental Decision - Making, CRC Press, Boca Raton, London, New York.
- [6] Marković, J. Đ. (1980): Regionalna geografija SFR Jugoslavije, Građevinska knjiga, Beograd.
- [7] Милановић М., Ђекић Т. (2003): Поступак генерализације садржаја мапа и планова путем ГИС алата, Зборник радова са скупа планска и нормативна заштита простора и животне средине, Географски факултет Универзитета у Београду-Институт за просторно планирање, Асоцијација просторних планера Србије, Палић.

## USE OF BLOGS IN E-LEARNING COURSE

---

*Blogs, like the most of Web 2.0 tools enable instructors to interact with students in various innovative ways. They can be used in various ways in online education. Blogs consist of list of entries in reverse chronological order published on the Web. In this paper we present the use of open source programming tool Mahara for creating and editing students' blogs. We primarily used it for evaluation of students' work. It also improved their experience of learning in online environment, enhanced collaboration and improved communication. The purpose of this paper is to present our experiences and results.*

---

### INTRODUCTION

Today's generation of students are so called digital natives. Children that grew up in a world surrounded with technology, Internet, smart phones, mp3 players, video games etc. They have not just changed incrementally from students of the past, nor simply changed their slang, clothes, body adornments, or styles, as has happened between generations previously.

A really big *discontinuity* has taken place. One might even call it a "singularity" - an event which changes things so fundamentally that there is absolutely no going back. This so-called "singularity" is the arrival and rapid dissemination of digital technology in the last decades of the 20th century [1]. If educators want to reach out to their students, they need to accept this fact, and find new ways of presentation and explanation of their subject matter. One way in doing so is by using technologies that their students use in everyday life. Students can use blogs for presenting their work, they can tweet questions in class, record videos and put them on YouTube, watch videos on YouTube etc. In this paper we will present an implementation of one of these activities in the course Introduction to Information Technologies. Students were using blogs for presenting their seminal paper in this class. In the first part of this paper Web 2.0 technologies and social networks are presented. In the second part of this paper, Mahara a tool for e portfolios is presented and its use in our course. Also the connection of Moodle and Mahara is explained. In the third part of this paper results of use of Mahara are presented. In the fourth section the results are explained and conclusions are given.

### WEB 2.0 AND SOCIAL NETWORKS

Web 2.0 is a version of the Web whose main characteristic is active user participation in the creation of content on the Web site. This users' contribution is reflected in the creation and editing of content, assessment, adding comments and tags. Other users now have new information that content creators are considered to be of significance.

The term Web 2.0 was first used by Tim O'Reilly, Founder and CEO O'Reilly Media Inc. After O'Reilly Media Web 2.0 conference 2004th started the rapid spread its use.

The first Google index in 1998 already had 26 million pages, and by 2000 the Google index reached the one billion mark. By 2008 there were 1 trillion unique URLs on the web at once [2]. Also the majority of Web 2.0 websites have made their data open to the public by using Web API-s and RSS feeds (first was Google Maps). That is why the Web today is little closer to the Web that its creator Tim Berners-Lee envisioned, the Web of open and interconnected data [3].

Social networks are an open place where people meet, collaborate, and share information.

The fact that people are the center of attention when it comes to social networks has led to The Times 2006th person of the year to be ordinary people. That year, in addition to many important things that have happened, the focus of the story is found in the community of people and cooperation between them in the scale that has not previously existed. The World Wide Web has enabled millions of people to put video content on YouTube, or create online metropolis MySpace. New Web technologies enable the collection of various

---

<sup>1</sup> School of Electrical Engineering and Computer Engineering of Applied Science, Belgrade, Serbia

contents raises a number of people, who thus become more important [4].

Collective Intelligence, a phenomenon referred to as “wisdom of crowds” is one of the main characteristics of social networks. This term implies the participation of a large number of people, usually of different backgrounds, habits and ways of thinking, the process of creating digital content. In this way generally leads to better answer questions and test results, as opposed to the process where the views of the individuals considered separately [5].

An example of collective intelligence is folksonomy, collaborative classification of content. This classification is achieved by creating and managing tags.

Creating tags or “tagging” is a very popular way of classifying content on Web 2.0 sites. Tag is a keyword whose role is labeling items or categories. The user is allowed to join any keyword to identify the contents as well as link to social bookmarking case, or a song, video or photos in the case of sites for the exchange of digital content. The main feature is that the tags can be shared, used in searches or recommend based on selection of other users of the same content.

On the social networking sites users are responsible for adding and updating information that are available to everyone. These virtual communities allow its users to share opinions, discuss, collaborate and discuss topics related to their common interests. User generated content and sharing information sent are the main driving force in the formation and maintenance of on-line communities [6].

User generated content has changed the way of the Internet, and instead of the one-way transmission of media content from a number of companies, now its created by the user and exchanged between them [7].

## **BLOGS AND MAHARA ENVIRONMENT**

A blog represents very useful way to allow any user on the Internet to present its personal and business data and to follow their performance and progress in various stages of study or work. A blog is a kind of catalog or journal, because it usually keeps:

- author profile (personal information),
- information about education,
- business activities and current interests,
- opinions about certain topics,
- short reports on work done in stages ...

Blog may contain text, attachments to files, link to web pages, video, audio and multimedia content. It can be used very simply to create e-portfolio (electronic portfolio / digital portfolio).

Mahara is free, open-source ePortfolio system, first established in mid 2006. It started as a project funded by New Zealand’s Tertiary Education Commission’s eCDF (e-learning Collaborative Development Fund) involving several New Zealand’s universities. Mahara is user oriented web application, and as a learner center, it’s a form of Personal Learning Environment (PLE) [8].

Mahara can be connected with a custom Learning Management System (LMS) such as Moodle. In this paper work was used Mahara version 1.4.0 and it has been integrated along with Moodle server, version 2.2.8.

Moodle server: <http://lectio.viser.edu.rs/moodle/>

Mahara server: <http://wip2.viser.edu.rs/mahara/>

Mahara is a stand-alone system that can be integrated into a wider virtual learning framework. Mahara’s architecture is inspired by the modular, extensible architecture of Moodle. The Mahara team has also been heavily involved in the Moodle community, with recent work mostly focused on Moodle Networks. Similarly, Mahara systems can be networked together as well having single sign-on from Moodle 1.9 upwards. In a sense, we see Mahara as a ‘sister’ application although the two systems are not required to go together [8].

In Mahara user controls which items and information are visible to other users within portfolio. All information within someone’s portfolio is called View. Owner of ePortfolio can control what is visible for different user groups.

Mahara has comprehensive blogging tool. Blogs and blog postings may be managed and published to ePortfolio, using the WYSIWYG editor. This text editor allows user to: attach files to posts, embedding images into posts and preparing drafts for later use and publishing. Social networking is one of the features that are

also provided by Mahara. Users can add friends into their list of contacts, send requests and messages.

In addition Mahara is designed to:

- be load balanced across several web servers
- have a share file data from a centralized file server
- have a separate database server.

## MAHARA AND MOODLE

Mahara has been designed as a web application with a plug-in architecture. This means it is possible to scale the application up by separating hardware for search, database, file storage, and web servers. If there is LMS platform with existing users' database, you can allow to registers LMS students easy access to Mahara platform using LDAP (Lightweight Directory Access Protocol) server. If you want your student to be able to authenticate from either Moodle or Mahara it is possible with a LDAP server with Mahara and Moodle pointing to it, so they will have to log in on each platform but with one account.

## CREATING AND EDITING BLOGS IN MAHARA

To start using Mahara user need to be logged on built server. In our case server is located at following link: <https://wip2.viser.edu.rs/mahara/>. To access the server user need to be authenticated on common LDAP server which is used by Moodle and Mahara.

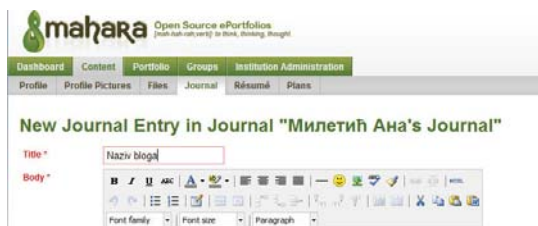


Fig. 1. Creating new journal entry in Mahara

In order to create blog in Mahara you need to choose Content option from main menu, and after that Journal tab which is located under the main menu. Next step is to create New Entry and to enter blog title, context of the blog and to confirm all modifications. Entries are good way to organize blog context into separate units. Every unit consists of title, body which may contain text,

pictures, links, other multimedia data and attachments. After creating blog, owner has to publish it into his e-portfolio profile in order to make blog visible to other users [9].



Fig. 2. Publishing journal entry on profile page

## USING BLOGS IN E-LEARNING COURSE

In order encourage students to apply new information and communication technologies in their learning and work the survey was conducted where students were given to write their term papers in the form of a blog instead of classic Word text and Power Point presentations. This survey was taken on course Information technology including students on first semester who were attended traditional and distance learning classes on study program New Computing Technologies. Population of students who were involved, included group of 20 distance learning and traditional classes group of 148 participants on study programs New Computing Technologies and Audio and Video Technologies.

Students were given detailed instruction for blog structure including following items:

- 1st title: Short introduction "About me",
- 2nd title: Themes and software tools in the field of information technology that interested me the most
- 3rd title: Paper title and introduction with technical requirements for writing.

After blogs submissions students were asked in final discussion to give their answers and opinions on following question: "Do you think that today's students are proficient in the use of technology in everyday life, means that skilled in the use of technology in learning. Do you use modern technology in learning and in what way?"

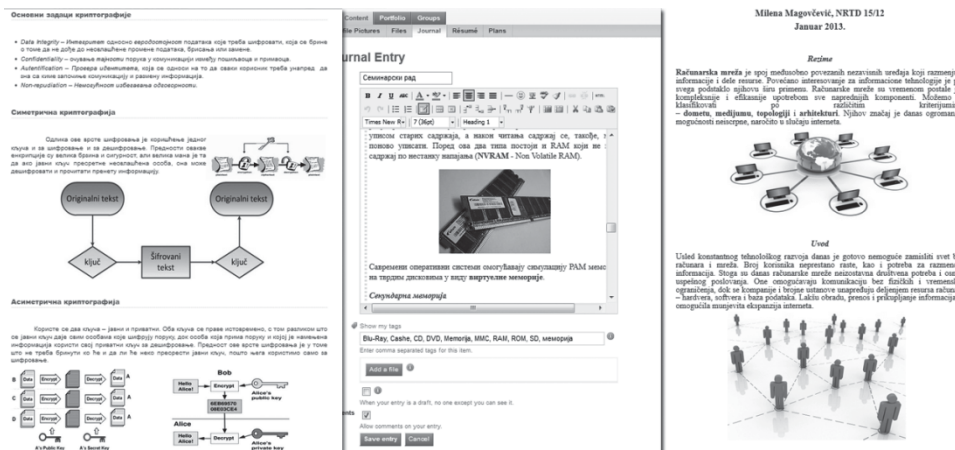


Fig. 3. Examples of students' blogs in Mahara environment

Some of the answers given by the students are:

- “With the fact that we grew up in the era of the Internet, the digital era, we do not just think in other way, but we have different habits. From communication with people who are down to correspondence across different social networks, SMS messages, e-mails, and many other services, we primarily have a different insight into the world and access to information via the Internet.”
- “Many also use Internet technology in the wrong way. Children should learn to use the technology in the right way, to learn about technologies from teachers and parents, not only from their peers, to review critical information from the Internet, to use new technologies for learning and work, not only to communicate with friends and for games. In order to enable all of this could adequately teach students, it is anticipated that in the future and their responsibility in undertaking this work will be the integration of new technologies in the teaching process.”

Results show that today's students are familiar with using technologies in every day's life and also in most cases prefer also to learn using Internet and mobile devices. Concept of blogging is easy way to present students' works in a form of e-portfolio not only to teachers but also to other peers who can be included in evaluation and grading each other's works.

## CONCLUSIONS

In this paper we presented the use of blogging and ePortfolio system Mahara in high education. Students used these technologies to present their seminal papers in the course Information Technologies. Students were given different subjects and presented their work to their fellow colleagues and teachers using Mahara environment. Since they were familiar with this kind of technology they didn't need extra instructions from teachers to use it, and they liked the fact that a certain kind of freedom in presentation was given to them. They also showed enthusiasm and were into this kind of activity in course. So, it is a good idea to use technologies from the world outside of school to bring closer course materials to students.

## REFERENCES

- [1] M. Prensky, “Digital Natives, Digital Immigrants,” *On the Horizon*, vol. 9, 2001.
- [2] “We knew the web was big...,” 25 July 2008. [Online]. Available: <http://googleblog.blogspot.com/2008/07/we-knew-web-was-big.html>. [Accessed 11 July 2013].
- [3] T. Berners-Lee, J. Hendle and O. Lassila, “The Semantic Web,” *Scientific American*, 2001.
- [4] L. Grossman, “Time's Person of the Year: You,” 26 December 2006. [Online]. Available: <http://www.time.com/time/magazine/article/0,9171,1569514,00.html>.
- [5] J. Surowiecki, *The Wisdom of Crowds: Why the Many Are Smarter Than the Few and How Collective Wisdom Shapes Business, Economies, Societies and Nations*, New York: Anchor Books, 2004..
- [6] J. Bernal, *Web 2.0 and Social Networking for the Enterprise: guidelines and examples for implementation and management within your organization*, 2009, IBM Press.

- [7] K. Seongwoon, L. Inseong, L. Kih and J. Seungk, "Mobile Web 2.0 With Multi-Display Buttons," *Communications of the ACM*, 2010.
- [8] <https://mahara.org/>, [Online].
- [9] S. Djenic, A. Miletic, M. Radivojevic and M. Karadzic, *Information technologies - manual*, Belgrade: School of Electrical Engineering and Computer Science Applied Studies, 2012.
- [10] "API Dashboard," [Online]. Available: <http://www.programmableweb.com/apis>.



## THE RESULTS OF MOODLE PLATFORM APPLICATION IN REALIZATION OF TECHNICAL FUNDAMENTS OF INFORMATICS COURSE OF STUDY

---

*This article discusses the application of Moodle software platform in realization of Technical Fundamentals of Informatics course of study at the Faculty of Mathematics and Science in Kosovska Mitrovica. Utilization of this system of E-Learning in student's education reduces time for learning spent in the classroom and allows students to spend more time for individual work, outside the classroom, through E-Learning system, and also allows teachers to devote more attention to each student individually. The above mentioned course is developed by using modern teaching methods and technologies, but at the same time it has been adjusted to students' need and subject of the course. This paper presents the development and realization of the course. Also, the results of students' achievements are presented and compared with results of the traditional teaching methods, as well as the experiences of the course teacher since this was the first course of this type carried out at this Faculty with the full application of methods and technologies of E-Learning.*

---

### INTRODUCTION

New technologies, particularly the Internet, offer various possibilities for improvement of teaching process. E-Learning, or electronic learning, has been present for almost a decade, making learning easier and enhanced by using devices of information and communication technologies. E-Learning brings, with certainty, a whole set of advantages into educational process. In fact, it is not an alternative to present educational process, but rather represents its constitutive part, i.e. its augmentation and enhancement. By implementing E-Learning into educational process, the role of teacher also grows, as well as teacher's importance as a mentor, coordinator and participator in that process. E-Learning puts the student in the center of educational process, so that he/she can take active role and responsibility for educational outcomes. Surely, E-Learning represents a high quality process of education in which everyone actively participates with the aim to achieve given educational goals [1]. Thereby we use modern information and communication technologies intensively, in order to create adjustable virtual environment. With the development and rapid growth of Internet, E-Learning opens great opportunities, and today when we talk about E-

Learning, we practically mean that teaching is carried out, partially or fully, on the basis of Web technology. E-Learning has become an indispensable part of modern education, whether in the formal education or other methods of education which occur throughout life (life-long learning). In recent years, multiple E-Learning platforms (Moodle, WiZiQ, ATutor, Blackboard, WebCT, Meridian Global, Oracle...) which can be successfully implemented in the learning process, because they provide easy customization of Web applications' content for specific characteristics of the subject used therein[2], have been developed. This means creating a wide range of possibilities for setting the content of various electronic forms (audio, video, images, etc...), which on one hand facilitate the knowledge transfer process for teachers, while at the same time simplify learning for students through interaction with the application, which enables the simulation and problem solving, and active coping with problems in the real environment [3-4]. The development of the theory and practical use of multimedia content in Web environment allows students to study and learn meticulously. A typical example of an open source platform that is becoming more and more popular is Moodle [5-6]. Experience in teaching

---

1 Faculty of Mathematics and Science, Kosovska Mitrovica, Serbia

2 Technical Faculty, Cacak, Serbia

3 High School for Electronics and Computers, Belgrade, Serbia

the Technical Fundamentals of Informatics course of study, as well as gained knowledge about the development of contemporary teaching methods, which include the possibility of distance learning, started the idea of research related to formulating the types of multimedia content in Moodle that would adequately support all aspects of learning (lectures, exercises and testing of acquired knowledge), and finding the most appropriate way for their practical implementation.

## MOODLE SOFTWARE PACKAGE

From the perspective of modern education, LMS (Learning Management Systems) have significant impact on many aspects of learning and knowledge transfer. They enable the implementation of Web based interfaces, which generally support a range of activities including forums, electronic learning materials, tasks, knowledge tests, surveys and various other contents. In other words, these platforms simplify acquiring of knowledge by conducting various activities in applications implemented within the LMS environment and encourage students' group work [7-8]. Moodle (Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment) is a very popular LMS. Moodle

is distance learning software used in more than 214 countries worldwide. It is now localized in as much as 75 languages. With about 55,000 registered websites, widely present in teaching of secondary and higher education and the latest version is 2.5.1 [9]. One of the main reasons for its great popularity lies in the fact that Moodle is free software (open-source). Thanks to the modularity and open interfaces Moodle allows developers to design new modules, which increases the possibilities of Moodle package. Also, various models of multimedia and interactive applications can be implemented within the existing modules. Moodle is a platform-independent environment, and can be executed without any additional modification on UNIX, Linux, FreeBSD, Windows, Mac OS X, NetWare and any other system that supports PHP and a database, including most webhost providers. For data storage, Moodle uses MySQL or PostgreSQL environment. Moodle is designed to help educators create online courses in which they were given possibility of full and thorough interactions. Within a single course/subject based on the Moodle distance learning, a variety of options for creating of learning materials and assessing the students' knowledge exist [10].

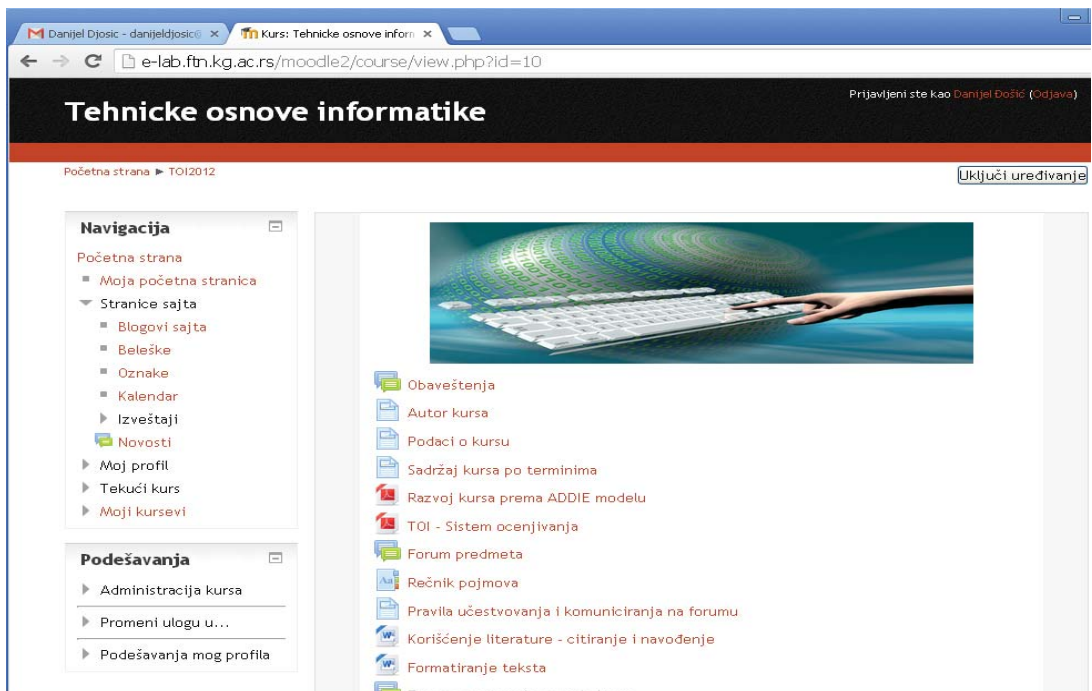


Fig. 1. Page object in the Moodle environment

## ORGANIZATION OF COURSE OF STUDY PAGE IN MOODLE

The first course of study which supported teaching activities and contents carried out in Moodle environment on the Faculty of Mathematics and Science in Kosovska Mitrovica is Technical Fundamentals of Informatics, held in the first year of primary studies during the first semester, at the Department of Computer Science. The duration of this course is ten weeks, and it lasts for one semester. Page that encloses content of this course of study can be accessed by students who were given an access code at the beginning of the semester. By entering the identification password student or teacher opens the Technical Fundamentals of Informatics page (Fig. 1). The course of study's page in Moodle is organized within the functional blocks and their number, arrangement, content, appearance and visibility can be adjusted, according to the needs of learning activities. When "edit" is set, the teacher is allowed to choose which blocks will contain the course, and which will not.

Name of the course is shown in the far upper left corner of the Web page. Below the title is the exact path through the course. All parts are separated and each part is a link to the previous level. Button "edit" (Enable editing) is used to change the mode. When "ordering" is active then within each of the homes of course appears "Add" along with a set of icons used for alterations. The main part of the window is divided into two parts. In the central part there are topics. The left side contains two blocks, navigation and setup, which are used to gain access to individual activities, which are grouped. These include: website blogs, notes, group activities included in the course, links to personnel administration, the latest news and upcoming activities, calendar and other notifications.

General information are given at the beginning of the central part of the site (Fig. 1), such as the notice information about the course and the authors of the course, course content by the terms, overview of course development using ADDIE model, the method of evaluation of pre-exam and exam activities, as well as shortcuts for accessing the forums, through which "online" contact with professors, assistants and students that have access to the page of the course, is established. It also con-

tains a glossary and rules for the use of literature citation. Topics and chapters are recognized in the central part of the course. Each topic follows the curriculum created for the course of Technical Fundamentals of Informatics. Further, each topic includes the activities and resources or the teaching content of the course. Appearance of this column may vary depending on the preferences of the teacher who creates the material. The number of the topic and its name (the title of the chapter) is at the top, in this particular case - first and the last chapter are presented (Fig. 2) but all other chapters are presented in the same manner. Normally these topics include guidance and forum for each topic, lesson, all the materials required for mastering topics, a weekly task and additional materials and interesting facts about the subject. In topic 10 we can see appearance of tests, through which students can test their knowledge. In this course, students are required to respond actively to each test. Other topics include electronic materials in pdf and ppt formats, which students can access from the course page, so that the file opens with the selected chapter in the separate window, or they can download the chapters and save them to disk of their computer, which ensures "offline" use of the electronic materials. Other topics include one or more resources (caption, file, URL address, etc.) and/or activities (lessons, test, vocabulary, forum), a direct implementation of which is supported in Moodle. Access to certain resources can be made time limited to students, forbidden, or prevented by disabling visibility. Management of activities and resources is enabled only in page editing mode page, which is accessible to administrators of page, related professor and his co-workers.

Because of the plan of this course of study, and Moodle's ability to have a task module that allows giving homework we have used this opportunity. Types of tasks are "offline" or "upload" assignment. When it comes to "Offline" activity, the task is meant to be written outside Moodle. Students can see description of the task, but cannot post ("upload") resolution of the task on Moodle. It is also possible to see only your own grade related to the specific task. When the task is being uploaded, the student posts solution to the task on Moodle. File (task) can be of any type: Word document, images, zip or any other.

## Tema 1

### Uvod u tehničke osnove informatike

- Vodič za 1. sedmicu
- Forum - tema 1

### Materijal za učenje

- Pojam računarskog sistema - provera znanja
- Istorijski razvoj računara

### Zadaci

- Zadatak 1. Istorijski razvoj računara

### Dodatni materijal

- Istorijski razvoj računara
- Istorija konpjutera u slikama
- Istorija racunara
- Istorijski razvoj računara - Wikipedia

## Tema 10

### Osnovne komponente računarskog sistema

- Vodič za 10. sedmicu
- Forum - tema 10

### Materijal za učenje

- 9.1. Osnovne komponente računarskog sistema

### Zadaci

- Test znanja 3
- Test znanja 4

### Dodatni materijal

- Struktura hardvera računarskog sistema

Rezultati na kraju kursa TOI 2012/2013

Fig. 2. Threads on a page

Monitoring of students' activities through the points won during some parts of the course is of significant importance for both the students and teachers. This system grants each student access to their grades on tests and quizzes, while maintaining the privacy of such information. For teachers, this is an effective way of administering students' grades (Fig. 3), which can easily be exported into formats compatible with institutional information systems, and also give insight into various statistics related to the students' responses. Module for working with tests, allows creation of database comprising questions used in tests (Fig. 4). There is the possibility of importing (import), exporting (export) and posting (upload) questions within the test. During creation we have to determine a name, test duration, and the time frame in which solving the test is possible. Also, we can define the number of times a user can have access to the test, if solving of the test is possible only with a password, if correct responses should appear at the end of the test and what is the maximum number of points in that test. The following questions were used for creation of tests: Multiple Choice; True/False; Short Answer; Matching; Embedded Answer; Random Short Answer Matching; Numerical with the predetermined ranges for the replies. Additional questions will be added to the

list of available types of questions as the software continues to develop.

		Tehnicke osnove informatike	
		Ukupno za kurs	
Prezime	Ime	Adresa e-pošte	
	Brankica Belošević	brankicabelosevic93@hotmail.com	45,88
	Strahinja Denić	denicstrahinja@five.com	89,13
	Jovan Berović	jovandjorovic93@gmail.com	100,00
	Nikola Filipović	nikfilipovic_19_08@gmail.com	76,58
	Mile Ilić	luxaeterna1993@hotmail.com	77,34
	Marko Ivanočević	markoivanosevicnovo@gmail.com	100,00
	Marko Trivić	maky_raiders@hotmail.com	100,00
	Nikola Jojić	jojs93_n@yahoo.com	86,22

Fig. 3. A summary of all the participants from

Fig. 4. Sample of test

E-Learning, as a new learning process, cannot be implemented successfully if the appropriate pedagogical, didactic and methodological principles are not considered and applied. New technologies allowed us to present the content in a different way, setting a new set of goals for the teacher, because new conditions require us to be good teachers in a different way. To properly use technology, teachers need to be educated and trained not only in the knowledge of the technical capabilities of the computer, but also on changes in educational work to properly and appropriately use a variety of educational opportunities. Because the goal is not just to make teaching materials available. Simple posting of the content of the course of study on the Internet, without respecting the appropriate pedagogical principles is not enough for meeting the educational goals and achieving expected results [11]. We have tried in this course to apply modern teaching methods and technologies and to make the course more interesting and more attractive to students. Number of students who passed the exam increased for more than 15 % compared to the previous school year, when the Moodle platform was not used in teaching of Technical Fundamentals of Informatics, which is a direct result of use of modern teaching methods. Also, at the end of semester a survey was conducted in which students evaluated the usefulness and quality of the Moodle platform, with marks 1 - insufficient, 2 - sufficient, 3 - good, 4 - very good and 5 - great, in order to assess the course. The results of the survey provided the following conclusions: basic learning material (PDF document) (5); basic learning material (PPT presentation) (4); electronic lessons (3.9); additional material (3.8); forums (4); knowledge tests (4.2); self-assessment (3.9); homework (4.1) and an estimate of the whole course (4.3). These results give boost to the intensive work on improving existing and developing new course content in Moodle in the future. Complete Technical Fundamentals of Informatics subject is placed in the Moodle environment. It proved that students have accepted the e-learning remarkably well.

## CONCLUSION

In the past decade, E-Learning has seen a sudden expansion, largely due to advances in information and communication systems. Following interna-

tional trends, but also trying to improve the quality of work in the field of education, many accredited institutions of higher education in Serbia have included this kind of learning in their regular programs at all levels of study. The results in this and related studies suggest that there is great interest and need for further expansion and improvement of such programs [10].

Distance learning is a modern way of teaching wherein participants' distance and availability of materials become less relevant. This paper presents an E-Learning system, describes the features, benefits and utilizations of this system, in order to achieve higher quality realization of this way of learning. "Technical Fundamentals of Informatics" course of study, created within Moodle system for distant learning, has been executed in this paper. Different types of implemented interactive tasks show possible ways of interaction between the student and the learning application. This work should encourage teachers and professors in academic studies, to demonstrate their learning materials to students in a new and interesting way. Pleasant graphical environment with a number of interactive multimedia elements can motivate students to learn independently as well as checking and verification of already acquired knowledge. The virtual environments, based on Moodle, it is also possible to include participants who are located anywhere in the world. This opens the possibility of using external lecturers, critics, consultants etc., as well as the implementation of joint courses with other universities throughout the world.

## ACKNOWLEDGEMENTS

The work presented, was supported by the Serbian Ministry of Education and Science (project III44006 & TP35030).

## REFERENCES

- [1] D. Viduka, B. Viduka, *Pojam i implementacija elektronskog obrazovanja u Srbiji*, Tehnika i informatika u obrazovanju, 978-86-7776-138-7, (2012 ; Čačak)
- [2] D. Soleša, *Obrazovna tehnologija*, Univerzitet u Novom Sadu-Pedagoški fakultet, Sombor. 2006.
- [3] R. Mayer, *Digital multimedia*. Cambridge University Press, 2002.
- [4] W. Milheim, *Interactivity and computer based instruction*, Journal of Educational Technology Systems, vol. 24, no. 3, 1996.

- [5] [Moodle - A Free, Open Source Management System for Online Learning, <http://moodle.org>
- [6] Moodle Community, Moodle Documentation, [http://docs.moodle.org/25/en/Main\\_page](http://docs.moodle.org/25/en/Main_page), Jun, 2013.
- [7] R. Moreno and R. Mayer, *Interactive multimodal learning environments*, Educational Psychology Review, vol. 19, no. 3, pp. 309-326, 2007.
- [8] I. Cheng, A. Basu, R. Goebel, *Interactive multimedia for adaptive online education*, Multimedia, IEEE 16, vol. 1, pp. 16-25. 2009.
- [9] T.Martin-Blas, A. Serrano-Fernández, *The role of new technologies in the learning process: Moodle as a teaching tool in Physics*, Computers and Education, Vol. 521, No. 1. pp. 35-44, 2009.
- [10] N. Bulatović, D. Stefanović, M. Mirković, D. Čulibrk, *Prijava sistema za elektronsko učenje na visokoškolskim ustanovama u Srbiji - pregled aktuelnog stanja*, INFOTEH-JAHORINA Vol. 12, March 2013.
- [11] Internet Education, Washington DC, <http://www.neted.org> (decembar, 2012.)

## PERFORMANCE ANALYSIS OF DUAL MRC DIVERSITY SYSTEM OVER $\eta$ - $\mu$ MULTIPATH FADING CHANNEL

---

*In this paper, dual MRC diversity receiver operating over multipath fading is considered. The probability density function and cumulative distribution function of output signal of wireless communication system operating over  $\eta$ - $\mu$  multipath fading are calculated. These closed form expressions are used for evaluation of the outage probability and the bit error probability of wireless communication system. Furthermore, in this paper, the level crossing rate of the output signal of wireless communication system operating over  $\eta$ - $\mu$  multipath fading is determined. This result can be used for calculation of the average fade duration of wireless communication system. Numerical results are graphically presented to show influence of fading parameters on system performance.*

---

### INTRODUCTION

In wireless communication system the receiver signal is subjected to multipath fading which limits system performance, system capacity and spectral efficiency. The received signal experiences fading resulting in small scale signal envelope variation. It is important to consider how multipath fading effects system performance such as outage probability and bit error probability. Short term fading is result of multipath propagation due to reflection, refraction, diffraction, and scattering of radio wave. There are several distributions which can be used to describe signal envelope variation in fading channels. Rayleigh and Nakagami- $m$  distribution can be used to describe signal envelope variation in multipath fading non line-of-sight environment and Rician and  $k$ - $\mu$  distribution can be used to describe signal envelope variation in multipath fading line-of-sight environment. In shadowing fading environment signal envelope variation can be described by log-normal and gamma distributions and in composite shadowed multipath fading environment signal envelope variation can be well described with Kand  $K_\alpha$  distributions. In multipath fading channels where in-phase component power and quadrature component power are different, signal envelope variation can be modeled with Nakagami- $q$  and  $\eta$ - $\mu$  distributions. In this paper  $\eta$ - $\mu$  fading effect on system performance is considered. The  $\eta$ - $\mu$  distribution is general distribution and some other distribution can be derived from  $\eta$ - $\mu$  distribution as special cases. The  $\eta$ - $\mu$  distribution has two parameters. The parameter  $\eta$  is related to the scattering wave power ratio of in-phase and quadrature components and the parameter  $\mu$  is associated with the number of clusters of multipath propagation. By setting  $\eta=0$  the  $\eta$ - $\mu$  distribution reduce to Nakagami- $m$  distribution and for  $\mu=1$ , the  $\eta$ - $\mu$  distribution approximate Nakagami- $q$  distribution. For  $\eta=0$  and  $\mu=1$ , Rayleigh distribution can be obtained from  $\eta$ - $\mu$  distribution. There are several combining techniques which can be used to reduce  $\eta$ - $\mu$  fading effect on system performance. The most popular combining techniques are maximal ratio combining (MRC), equal gain combining (EGC), and select combining (SC) [5]. The MRC provides the best performance but has the most complex realization. This manner of combining requires channel state information available on each diversity branch. The EGC enables the performance comparable to MRC and has lower complexity implementation then MRC. EGC is intermediate solution. In SC receiver, processing is performed only on one diversity branch which is selected and no channel state information is required at the receiver. The squared MRC receiver output signal is equal to the sum of squared MRC receiver input signals. The EGC receiver output signal envelope is equal to the sum of EGC receiver input signals envelopes. The SC receiver selects and output the branch with the highest signal-to-noise ratio or the branch with the strongest signal, assuming the equal noise power among branches. The

---

<sup>1</sup> Faculty of Mathematics and Science, Kosovska Mitrovica, Serbia

<sup>2</sup> High Technical school, Nis, Serbia

<sup>3</sup> Faculty of Electronic Engineering, Nis, Serbia

$\eta$ - $\mu$  fading is recently reported in literature[1]. In this work wireless communication mobile system with dual branch MRC diversity receiver operating over  $\eta$ - $\mu$  multipath fading environment is considered. The main goal of diversity reception is upgrading transmission reliability and increasing channel capacity without increasing transmission power and bandwidth. In this paper, the fast convergence infinite series expressions for probability density function and cumulative distribution function of MRC output signal are derived and the expression in form of single integral for level crossing rate of MRC output signal is also obtained. The level crossing rate is calculated as the average value of the first derivative of MRC receiver output signal. In this work the average fade duration of proposed system is determined as the ratio of the outage probability and level crossing rate. To the best knowledge authors, the results obtained in this paper no reported in literature. The results derived in this work can be used in designing wireless communication system operating over  $\eta$ - $\mu$  multipath fading environments.

### LEVEL CROSSING RATE OF MRC RECEIVER OUTPUT SIGNAL

The level crossing rate is the second order performance measure of communication system. This important performance measure can be calculated as average value of the first derivative of MRC receiver output signal. In this paper MRC diversity reception is considered providing the best performance of outage probability and bit error probability. At each branch MRC diversity receiver estimates the value of receiver signal envelope. It is way, the MRC receiver is the most complicated for practical realization. The squared MRC receiver output signal is:

$$z^2 = x_1^2 + y_1^2 \quad (1)$$

where  $x_1$  and  $y_1$  are  $\eta$ - $\mu$  random signal envelope at inputs of MRC receiver. The first derivative of MRC output signal  $x$  is:

$$z = \frac{1}{z}(x_1 x_1 + y_1 y_1) \quad (2)$$

The squared  $\eta$ - $\mu$  random variable  $x_1$  can be written in the form:

$$x_1^2 = x_{11}^2 + x_{12}^2 + \dots + x_{1\mu}^2 + x_{21}^2 + x_{22}^2 + \dots + x_{2\mu}^2 \quad (3)$$

where  $x_{1i}, i=1,2,\dots,\mu$  independent, zero mean, Gaussian random variables with variances  $\delta_1^2$  and  $x_{2i}, i=1,2,\dots,\mu$  independent, zero mean, Gaussian random variables with variances  $\delta_2^2$ . The squared  $\eta$ - $\mu$  random variable  $y_1$  is:

$$y_1^2 = y_{11}^2 + y_{12}^2 + \dots + y_{1\mu}^2 + y_{21}^2 + y_{22}^2 + \dots + y_{2\mu}^2 \quad (4)$$

where  $y_{1i}, i=1,2,\dots,\mu$  independent, zero mean, Gaussian random variables with variances  $\delta_1^2$  and  $y_{2i}, i=1,2,\dots,\mu$  independent, zero mean, Gaussian random variables with variances  $\delta_2^2$ . The first derivatives of  $x_1$  and  $y_1$  are [2]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{x_1} (x_{11} \dot{x}_{11} + x_{12} \dot{x}_{12} + x_{1\mu} \dot{x}_{1\mu} + x_{21} \dot{x}_{21} + x_{22} \dot{x}_{22} + x_{2\mu} \dot{x}_{2\mu}) \text{ and} \\ \dot{y}_1 &= \frac{1}{y_1} (y_{11} \dot{y}_{11} + y_{12} \dot{y}_{12} + y_{1\mu} \dot{y}_{1\mu} + y_{21} \dot{y}_{21} + y_{22} \dot{y}_{22} + y_{2\mu} \dot{y}_{2\mu}) \end{aligned} \quad (5)$$

After substituting (5) in (2), the expression for the first derivative of the MRC output signal becomes:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{1}{z} (x_{11} \dot{x}_{11} + x_{12} \dot{x}_{12} + x_{1\mu} \dot{x}_{1\mu} + x_{21} \dot{x}_{21} + x_{22} \dot{x}_{22} + x_{2\mu} \dot{x}_{2\mu} + \\ &+ y_{11} \dot{y}_{11} + y_{12} \dot{y}_{12} + y_{1\mu} \dot{y}_{1\mu} + y_{21} \dot{y}_{21} + y_{22} \dot{y}_{22} + y_{2\mu} \dot{y}_{2\mu}) \end{aligned} \quad (6)$$

The first derivative of Gaussian random variable is Gaussian random variable. Linear transformation of



Gaussian random variables is Gaussian random variable. Therefore, the first derivative of MRC receiver output signal has the conditional Gaussian distribution. The Gaussian distribution is determined with average value and variance. The average value the first derivative of MRC receiver output signal is:

$$\begin{aligned} \bar{\dot{z}} = & \frac{1}{z} (\overline{x_{11}\dot{x}_{11}} + \overline{x_{12}\dot{x}_{12}} + \overline{x_{1\mu}\dot{x}_{1\mu}} + \overline{x_{21}\dot{x}_{21}} + \overline{x_{22}\dot{x}_{22}} + \overline{x_{2\mu}\dot{x}_{2\mu}} + \\ & + \overline{y_{11}\dot{y}_{11}} + \overline{y_{12}\dot{y}_{12}} + \overline{y_{1\mu}\dot{y}_{1\mu}} + \overline{y_{21}\dot{y}_{21}} + \overline{y_{22}\dot{y}_{22}} + \overline{y_{2\mu}\dot{y}_{2\mu}}) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

since:

$$\begin{aligned} \overline{\dot{x}_{11}} = \overline{\dot{x}_{12}} = \dots = \overline{\dot{x}_{1\mu}} = \overline{\dot{x}_{21}} = \overline{\dot{x}_{22}} = \dots = \overline{\dot{x}_{2\mu}} = 0 \text{ and} \\ \overline{\dot{y}_{11}} = \overline{\dot{y}_{12}} = \dots = \overline{\dot{y}_{1\mu}} = \overline{\dot{y}_{21}} = \overline{\dot{y}_{22}} = \dots = \overline{\dot{y}_{2\mu}} = 0 \end{aligned}$$

The variance of the first derivative of MRC receiver output signal is[3]:

$$\begin{aligned} \delta_z^2 = & \frac{1}{z^2} (x_{11}^2 \delta \dot{x}_{11}^2 + x_{12}^2 \delta \dot{x}_{12}^2 + \dots + x_{1\mu}^2 \delta \dot{x}_{1\mu}^2 + x_{21}^2 \delta \dot{x}_{21}^2 + x_{22}^2 \delta \dot{x}_{22}^2 + \dots + x_{2\mu}^2 \delta \dot{x}_{2\mu}^2 + \\ & + y_{11}^2 \delta \dot{y}_{11}^2 + y_{12}^2 \delta \dot{y}_{12}^2 + \dots + y_{1\mu}^2 \delta \dot{y}_{1\mu}^2 + y_{21}^2 \delta \dot{y}_{21}^2 + y_{22}^2 \delta \dot{y}_{22}^2 + \dots + y_{2\mu}^2 \delta \dot{y}_{2\mu}^2) \end{aligned} \quad (8)$$

where are:

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}_{11}^2 = \delta \dot{x}_{12}^2 = \dots = \delta \dot{x}_{1\mu}^2 = 2\pi^2 f_m^2 \delta_1^2 = f_1^2 \\ \delta \dot{x}_{21}^2 = \delta \dot{x}_{22}^2 = \dots = \delta \dot{x}_{2\mu}^2 = 2\pi^2 f_m^2 \delta_2^2 = f_2^2 \\ \delta \dot{y}_{11}^2 = \delta \dot{y}_{12}^2 = \dots = \delta \dot{y}_{1\mu}^2 = 2\pi^2 f_m^2 \delta_1^2 = f_1^2 \\ \delta \dot{y}_{21}^2 = \delta \dot{y}_{22}^2 = \dots = \delta \dot{y}_{2\mu}^2 = 2\pi^2 f_m^2 \delta_2^2 = f_2^2 \end{aligned} \quad (9)$$

After substituting (9) in (8), the expression for variance of the first derivative of the MRC output signal becomes:

$$\begin{aligned} \delta_z^2 = & \frac{1}{z^2} (f_1^2 (x_{11}^2 + x_{12}^2 + \dots + x_{1\mu}^2) + f_2^2 (x_{21}^2 + x_{22}^2 + \dots + x_{2\mu}^2) + f_1^2 (y_{11}^2 + y_{12}^2 + \dots + y_{1\mu}^2) + \\ & + f_2^2 (y_{21}^2 + y_{22}^2 + \dots + y_{2\mu}^2)) = \frac{1}{z^2} (f_1^2 (x_{11}^2 + x_{12}^2 + \dots + x_{1\mu}^2 + y_{11}^2 + y_{12}^2 + \dots + y_{1\mu}^2) + \\ & + f_2^2 (x_{21}^2 + x_{22}^2 + \dots + x_{2\mu}^2 + y_{21}^2 + y_{22}^2 + \dots + y_{2\mu}^2)) = \frac{1}{z^2} (f_1^2 z_1 + f_2^2 z_2) \end{aligned} \quad (10)$$

where:

$$\begin{aligned} z_1 = x_{11}^2 + x_{12}^2 + \dots + x_{1\mu}^2 + x_{21}^2 + x_{22}^2 + \dots + x_{2\mu}^2 \\ z_2 = y_{11}^2 + y_{12}^2 + \dots + y_{1\mu}^2 + y_{21}^2 + y_{22}^2 + \dots + y_{2\mu}^2 \end{aligned}$$

The squared MRC output signal is:

$$z^2 = x_1^2 + y_1^2 = z_1 + z_2 \text{ or } z_1 = z^2 - z_2 \quad (11)$$

The expression for  $f$  variance of  $\dot{z}$  can be written in the form:

$$\delta_z^2 = \frac{1}{z^2} (f_1^2 (z^2 - z_2) + f_2^2 z_2) \quad (12)$$

The conditional probability density function of  $\dot{z}$  is [4]:

$$p_{z/z_2}(\dot{z}/z_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_z} \cdot e^{-\frac{\dot{z}^2}{2\delta_z^2}} = \frac{z}{\sqrt{2\pi}\sqrt{f_1^2 (z^2 - z_2) + f_2^2 z_2}} \cdot e^{-\frac{\dot{z}^2 \cdot z^2}{2(f_1^2 (z^2 - z_2) + f_2^2 z_2)}} \quad (13)$$

The joint probability density function of  $z$ ,  $\dot{z}$  and  $z_1$  is:

$$p_{z\dot{z}z_2}(z\dot{z}z_2) = p_{\dot{z}/z z_2}(z/z z_2) \cdot p_{z z_2}(z z_2) = p_{\dot{z}/z z_2}(z/z z_2) p_{z_2}(z_2) p_{z/z_2}(z z_2) \quad (14)$$

where  $p_{z/z_2}(z/z_2) = \left| \frac{dz_1}{dz} \right| p_{z_1}(z^2 - z_2)$ ,  $\left| \frac{dz_1}{dz} \right| = 2z$

After substituting, the expression for joint probability density function of MRC output signal, the first derivative of MRC output signal and  $z_2$  becomes:

$$p_{z\dot{z}z_2}(z\dot{z}z_2) = p_{\dot{z}/z z_2}(z z_2) \cdot p_{z_2}(z_2) \cdot 2z \cdot p_{z_1}(z^2 - z_2) \quad (15)$$

The joint probability density function of the MRC receiver output signal and the first derivative of MRC receiver output signal is:

$$p_{z\dot{z}}(z\dot{z}) = \int_0^{z^2} dz_2 p_{z\dot{z}z_2}(z\dot{z}z_2) = \int_0^{z^2} dz_2 p_{\dot{z}/z z_2}(z z_2) \cdot p_{z_2}(z_2) \cdot 2z \cdot p_{z_1}(z^2 - z_2) \quad (16)$$

The level crossing rate of the MRC receiver output signal can be evaluated as the average value of the MRC receiver output signal is [6]:

$$\begin{aligned} N_z &= \int_0^\infty d\dot{z} p_{z\dot{z}}(z\dot{z}) \dot{z} d\dot{z} = \int_0^{z^2} dz_2 \cdot p_{z_2}(z_2) \cdot 2z_2 \cdot p_{z_1}(z^2 - z_2) \int_0^\infty d\dot{z} p_{\dot{z}/z z_2}(z z_2) = \int_0^{z^2} dz_2 \cdot p_{z_2}(z_2) \cdot \\ &\cdot 2z_2 \cdot p_{z_1}(z^2 - z_2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta_z = \int_0^{z^2} dz_2 \cdot p_{z_2}(z_2) \cdot 2 \cdot p_{z_1}(z^2 - z_2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{f_1^2 z^2 + z_2 (f_2^2 - f_1^2)} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{z^2} dz_1 p_{z_1}(z^2 - z_2) p_{z_2}(z_2) \sqrt{f_1^2 z^2 + z_2 (f_2^2 - f_1^2)} \end{aligned} \quad (17)$$

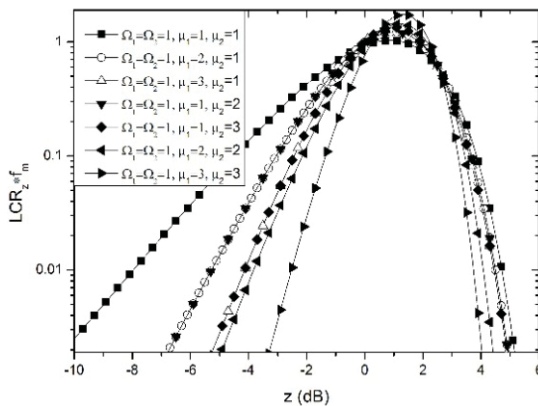


Fig. 1. Normalized LCR for dif.  $\mu_1$  and  $\mu_2$

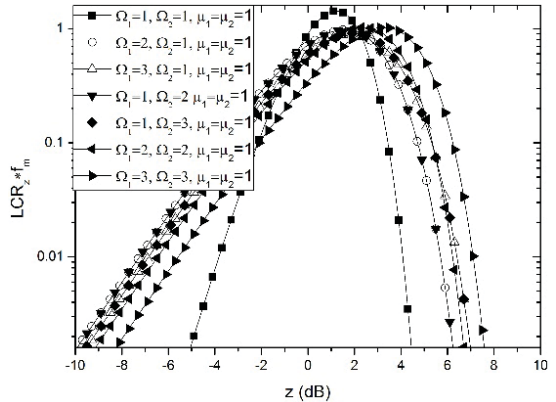


Fig. 2. Normalized LCR for dif.  $\Omega_1, \Omega_2$

In Figure 1 and 2, the normalized average level crossing rate of MRC receiver output signal is presented versus MRC receiver output signal for different values of fading parameters  $\mu_1$  and  $\mu_2$  and average power of MRC receiver inputs signal  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$ . This curves have maximum. As parameter  $\mu$  increases, the level crossing rate degrades as fading severity increases. The increasing of average level crossing rate results in system performance degradation. The fading severity (parameter  $\mu$ ) has greater influence on level crossing rate than average power of MRC receiver inputs signal.

The expression for average level crossing rate of MRC receiver output signal is derived in form of single integral. The expression can be used for calculation of average fade duration of wireless communication system with dual branch MRC receiver operating over  $\eta$ - $\mu$  multipath fading environments.

The probability density function of  $z_1$  and  $z_2$  are:

$$p_{z_1}(z_1) = \frac{1}{\Gamma(\mu_1)} \left( \frac{\mu_1}{\Omega_1} \right)^{\mu_1} z_1^{\mu_1-1} e^{-\frac{\mu_1}{\Omega_1} z_1}$$

$$p_{z_2}(z_2) = \frac{1}{\Gamma(\mu_2)} \left( \frac{\mu_2}{\Omega_2} \right)^{\mu_2} z_2^{\mu_2-1} e^{-\frac{\mu_2}{\Omega_2} z_2}$$
(18)

### THE FIRST ORDER STATISTICS OF MRC DIVERSITY RECEIVER

The outage probability and bit error probability are the first order performance of wireless communication system. The outage probability is equal cumulative distribution function for the value of the outage threshold [7-8]. The probability density function of MRC receiver output signal is:

$$p_z(z) = \frac{4\sqrt{\pi}(2\mu)^{2\mu+1/2} h^{2\mu}}{\Gamma(2\mu) H^{2\mu-1/2} \Omega^{2\mu+1/2}} z^{4\mu} \cdot e^{-\frac{4\mu h z^2}{\Omega}} I_{2\mu-1/2} \left( \frac{4\mu H z^2}{\Omega} \right)$$
(19)

where is  $H = \frac{\eta^{-1} - \eta}{4}$ ,  $h = \frac{2 + \eta^{-1} - \eta}{4}$  and  $\mu = \frac{E^2(z^2)}{2v(z^2)} \left( 1 + \left( \frac{H}{h} \right)^2 \right)$

The previous expression can be written in the form:

$$p_z(z) = \frac{4\sqrt{\pi}(2\mu)^{2\mu+1/2} h^{2\mu}}{\Gamma(2\mu) H^{2\mu-1/2} \Omega^{2\mu+1/2}} z^{4\mu} e^{-\frac{4\mu h z^2}{\Omega}} \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{2\mu H}{\Omega} \right)^{2i+2\mu-1/2} \frac{1}{i! \Gamma(i+2i+2\mu+1/2)} z^{4i+4\mu-1} =$$

$$= \frac{4\sqrt{\pi}(2\mu)^{2\mu+1/2} h^{2\mu}}{\Gamma(2\mu) H^{2\mu-1/2} \Omega^{2\mu+1/2}} e^{-\frac{4\mu h z^2}{\Omega}} \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{2\mu H}{\Omega} \right)^{2i+2\mu-1/2} \frac{1}{i! \Gamma(i+2\mu+1/2)} z^{4i+6\mu-1}$$
(20)

The cumulative distribution of MRC receiver output signal is:

$$F_z(z) = \int_0^z p_z(t) dt = \frac{4\sqrt{\pi}(2\mu)^{2\mu+1/2} h^{2\mu}}{\Gamma(2\mu) H^{2\mu-1/2} \Omega^{2\mu+1/2}} \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{2\mu H}{\Omega} \right)^{2i+2\mu-1/2} \frac{1}{i! \Gamma(i+2\mu+1/2)} \int_0^z dt t^{4i+6\mu-1} e^{-\frac{4\mu h t^2}{\Omega}} =$$

$$= \frac{4\sqrt{\pi}(2\mu)^{2\mu+1/2} h^{2\mu}}{\Gamma(2\mu) H^{2\mu-1/2} \Omega^{2\mu+1/2}} \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{2\mu H}{\Omega} \right)^{2i+2\mu-1/2} \frac{1}{i! \Gamma(i+2\mu+1/2)} \frac{1}{2} \left( \frac{\Omega}{4\mu h} \right)^{2i+3\mu} \gamma \left( 2i+3\mu, \frac{4\mu h}{\Omega} z^2 \right)$$
(21)

where  $\gamma(x, \alpha)$  incomplete gamma function[9].

The outage probability is defined as probability that MRC receiver output signal is falls below outage threshold. The outage probability can be calculated by formula.

$$P_0 = \int_0^{z_0} p_z(z) dz = F_z(z_0)$$
(22)

Where  $z_0$  is outage probability. The average bit error rate can be derived by averaging the conditional bit error rate, over the PDF of MRC receiver output signal:

$$P_e = \int_0^{\infty} p_e(z) p_z(z) dz$$
(23)

For a non-coherent frequency shift keying (NCFSK) or a binary differential phase-shift keying (DPSK) system, the conditional probability of error for a given SIR,  $z$ , is given by  $P_e = 1/2 \exp(-\alpha z)$ , with  $\alpha=1$  for BDPSK, and with  $\alpha=1/2$  for NCFSK.

### CONCLUSION

In this paper, the wireless mobile communication system with maximum ratio combining receiver, with two inputs, operating over  $\eta$ - $\mu$  multipath fading environments is considered. The infinite series ex-

pression for probability density function and cumulative distribution function for MRC receiver output signal are calculated. These expressions are used for evaluation well-accepted performance measure of proposed system, such as the outage probability and the bit error probability density. Using the  $\eta$ - $\mu$  distribution for description signal envelope variation in fading channel, the high level generality is achieved due to for different values fading parameters can be obtained outage probability and bit error probability for systems operating over Nakagami- $m$ , Nakagami- $q$  and Rayleigh channels. The MRC receiver, is considered in this paper, enables the best performance of system which is affected to  $\eta$ - $\mu$  multipath fading. The numerical results are presented graphically to shown how the parameter fading affects outage probability and bit error probability. The outage probability and bit error probability are the first order performance measure of wireless communication systems. In this paper are studied and the second order performance measure proposed wireless communication system such as average level crossing rate of MRC receiver output which is calculated in form of single integral. The obtain expression for level crossing can be used for evaluation the average fade duration of wireless communication system with dual branch MRC receiver operating over  $\eta$ - $\mu$  multipath fading. The average fade duration is calculated as ratio of outage probability and average level crossing rate. The results for outage probability, bit error probability and level crossing rate can be applied for designing at wireless communication system which use diversity technique with MRC receiver to reduce the effects  $\eta$ - $\mu$  multipath fading system performance and system capacity.

## REFERENCES

- [1] Yacoub, M. D., *The  $k$ - $\mu$  distribution and the  $\eta$ - $\mu$  distribution*. IEEE Antennas and Propagation Magazine, vol. 49, no. 1, pp. 68-81. 2007.
- [2] E. Mekic, M. Stefanovic, P. Spalevic, N. Sekulovic, A. Stankovic, "Statistical Analysis of Ratio of Random Variables and Its Application in Performance Analysis of Multihop Wireless Transmissions", MATHEMATICAL PROBLEMS IN ENGINEERING, article ID 841092, 2012.
- [3] E. Mekic, N. Sekulovic, M. Bandjur, M. Stefanovic, P. Spalevic, "The distribution of ratio of random variable and product of two random variables and its application in performance analysis of multi-hop relaying communications over fading channels", PRZEGLAD ELEKTROTECHNICZNY, vol. 88 br. 7A, str. 133-137, 2012.
- [4] A. Matovic, E. Mekic, N. Sekulovic, M. Stefanovic, M. Matovic and C. Stefanovic, "The distribution of the ratio of the products of two independent  $\alpha$ - $\mu$  variates and its application in the performance analysis of relaying communication systems", MATHEMATICAL PROBLEMS IN ENGINEERING, 2013.
- [5] N. Sekulovic, M. Stefanovic, C. Mihajlo, "Performance of Dual Branch SSC Receiver in Correlated alpha-mu Fading Channels", WIRELESS PERSONAL COMMUNICATIONS, vol. 65 br. 1, str. 143-156, 2012.
- [6] A. Panajotovic, N. Sekulovic, M. Stefanovic, D. Draca, "Average Level Crossing Rate of Dual Selection Diversity over Correlated Unbalanced Nakagami- $m$  Fading Channels in the Presence of Cochannel Interference (Article)", IEEE COMMUNICATIONS LETTERS, vol. 16 br. 5, str. 691-693, 2012.
- [7] M. K. Simon, M. S. Alouini, *Digital Communication over Fading Channels*, USA: John Wiley & Sons. 2000.
- [8] J. Proakis, "Digital Communications", 4<sup>th</sup>ed. New York: McGraw-Hill, 2001.
- [9] I. Gradshteyn, I. Ryzhik. *Tables of Integrals, Series, and products*, Academic Press, New York 1994.

# ON THE STATUS OF THE GROUND INFRASTRUCTURE FOR SATELLITE REMOTE SENSING FOR THE REGIONS OF SIBERIA AND THE FAR EAST OF RUSSIA

## О НАЗЕМНОЙ ИНФРАСТРУКТУРЕ КОСМИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА СИБИРИ И ДАЛЬНОГО ВОСТОКА РОССИИ

---

*We present the current state of the distributed infrastructure of the Center for Shared Access to Satellite Remote Sensing Data that provides rapid access to remote sensing data for Siberia and the Far East of Russia. The ground data acquisition systems, the active archive, and the automated data processing system form the core components of the research infrastructure.*

---

### ВВЕДЕНИЕ

За 50 лет, прошедших с момента запуска первых спутников дистанционного зондирования Земли, передаваемая ими информация изменила некоторые традиционные отрасли науки и стала основой для возникновения нескольких новых научных направлений. Благодаря передаваемым с орбиты данным о процессах, протекающих на Земле, удалось впервые создать прогностические модели климата, повысить точность прогноза опасных метеорологических явлений, построить глобальную систему мониторинга лесных пожаров [1]. На основе данных оперативного спутникового мониторинга функционируют информационные системы государственных служб, чья деятельность связана с учетом и сохранением природных ресурсов [2].

В настоящее время на орбите находится свыше сотни спутников, оснащенных аппаратурой дистанционного зондирования Земли. Только в планах Российского космического агентства запуск около 20 космических аппаратов (КА) дистанционного зондирования до 2020 года. Объем данных, передаваемых на Землю всеми этими аппаратами, продолжает расти со скоростью в несколько терабайт за сутки [3,4].

Задача обработки и анализа такого объема данных требует создания соответствующей инфраструктуры для приема, обработки и архивного хранения данных дистанционного зондирования и информационных продуктов, полученных на их основе. Работы по созданию централизованного архива данных дистанционного зондирования Земли в Сибирском отделении Российской академии наук (СО РАН) были начаты в 2007 году. К этому времени работа с данными дистанционного зондирования велась в институтах СО РАН независимо друг от друга. Первый централизованный архив данных дистанционного зондирования (ДДЗ) в Новосибирске был создан на базе Института вычислительных технологий (ИВТ СО РАН).

Первоначальный план предполагал решение на основе имеющихся в архиве данных широкого круга задач, связанных с мониторингом как природных, так и социально-экономических процессов [5], построение распределенной системы каталогов для поиска файлов в каталоге по широкому перечню атрибутов [6,7], а также интеграцию с аналогичными системами, развиваемыми в Дальневосточном отделении РАН [8]. В 2012 году все созданные ресурсы были объединены в рамках Центра коллективного пользования данными дистанционного зондирования Земли (ЦКП ДДЗ СО РАН).

Сами по себе файлы, содержащие восстановленные в соответствии с известными методиками

1 Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russia

2 V. S. Sobolev Institute of Geology and Mineralogy SB RAS, Novosibirsk, Russia

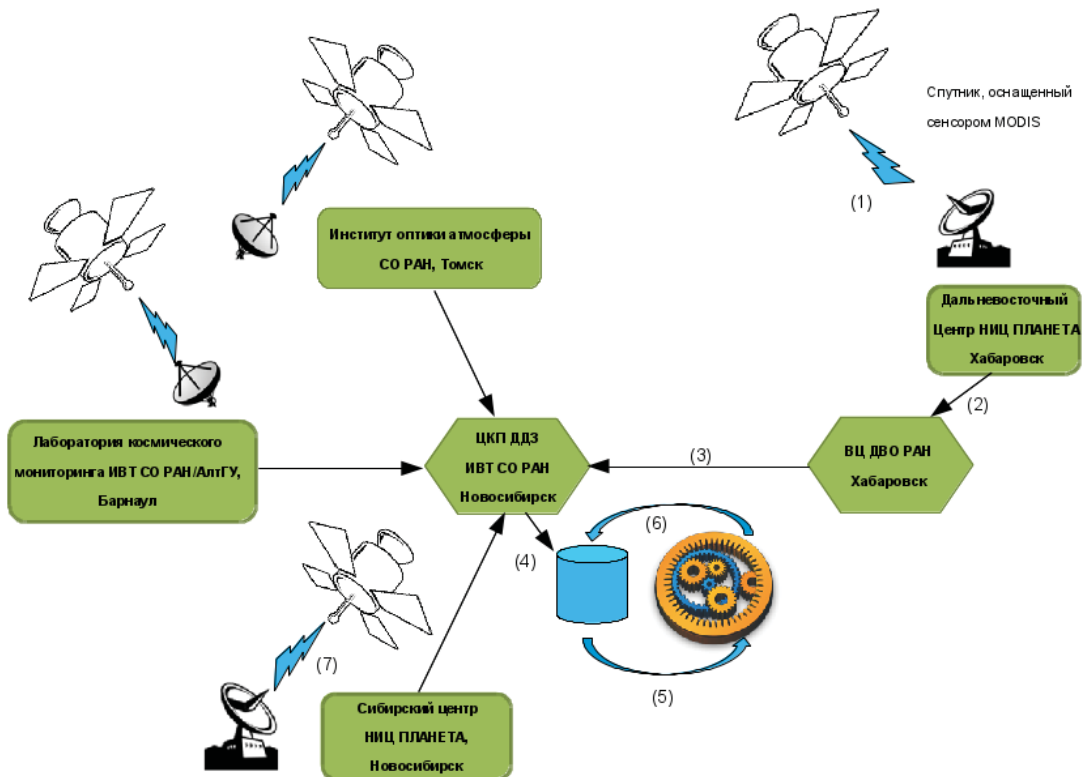
3 Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

характеристики атмосферы и земной поверхности, могут служить лишь одним из источников информации для экспертного сообщества. Для вовлечения всего объема накопленных данных в исследовательскую работу необходимы новые информационные системы, способные извлекать информацию из множества файлов каталога. Обеспечение необходимых условий для функционирования таких систем является одной из основных целей развития представленной в настоящей работе инфраструктуры.

## ОРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ

Создание Центра коллективного пользования позволяет избежать необходимости выделения технических и организационных ресурсов, необходимых для поддержания постоянно пополняющегося в автономном режиме архива спутниковых данных, в каждом институте Сибирского отделения и ВУЗе, где есть исследователи, заинтересованные в работе с архивом. В нынешней форме работа архива обеспечивается благодаря участию нескольких организаций.

Прием данных с ряда космических аппаратов, передающих их в режиме прямой трансляции, осуществляется в сибирском и дальневосточном центрах НИЦ «Планета», входящих в структуру Российской службы по гидрометеорологии и мониторингу окружающей среды (Росгидромет), а также в Институте оптики атмосферы СО РАН (ИОА СО РАН, г. Томск). Данные, принятые в Дальневосточном центре НИЦ «Планета» (г. Хабаровск), передаются в Вычислительный центр Дальневосточного отделения РАН (ВЦ ДВО РАН). Оттуда по каналу Сети передачи данных СО РАН они копируются в Новосибирск, где в ИВТ СО РАН осуществляются их обработка и хранение (Рис. 1).



**Рис. 1.** Этапы работы системы приема и потоковой обработки спутниковых данных: (1) появление спутника в зоне видимости станции, (2) запись исходных данных (Level 0) в архив, (3) загрузка данных по выделенному каналу 40 Мбит/с на FTP-сервер в Новосибирске, (4) запись в открытый архив для долговременного хранения, (5) запуск процедуры оперативной обработки данных MODIS с генерацией информационных продуктов в параллельном режиме на вычислительном кластере под управлением системы управления потоковой обработкой Taverna, (6) восстановление значений физических величин по значениям яркости спектральных каналов, (7) прием данных на следующем приемном комплексе и повторение всей процедуры.

Организации, поставляющие исходные данные для архива ЦКП, также поддерживают свои собственные системы обработки и архивации спутниковых данных, ориентированные, как правило, на специфику решаемых этими организациями задач. Так, ВЦ ДВО РАН совместно с Институтом космических исследований РАН и НИЦ «Планета» реализует проект по созданию информационной системы для работы со спутниковыми данными по территории Дальнего Востока [9,10]. В ИОА СО РАН поддерживается региональная база данных информационных продуктов, произведенных на основе спутниковых данных, и программное обеспечение для их обработки [11]. Одновременно с использованием данных в своих системах, эти организации передают часть поступающих к ним данных для обработки в архив ЦКП сразу после их получения с приемных комплексов.

Поступающие в ЦКП исходные данные и продукты их обработки в короткий срок публикуются в открытом каталоге, доступ к которому осуществляется, в настоящее время, по протоколу FTP. В тех случаях, когда доступ к данным ограничен лицензионными соглашениями, действует система заказов, позволяющая авторизованным пользователям получать необходимые продукты [8].

Возможности ЦКП не должны ограничиваться только предоставлением доступа к открытому каталогу генерируемых продуктов. Перспективным направлением развития является предоставление исследователям возможности выполнять собственные алгоритмы обработки над всем объемом данных, имеющихся в архиве.

## **АППАРАТНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ**

Основными компонентами наземных систем для работы со спутниковыми данными являются комплекс приема и декодирования данных, передаваемых с космического аппарата, вычислительная система, позволяющая осуществлять стандартные этапы обработки данных, такие как радиометрическая и геометрическая коррекция, уточнение географической привязки данных, коррекция данных с учетом модели рассеяния излучения в атмосфере, а также генерацию тематических информационных продуктов, основанных на взаимосвязи между соотношениями яркости отраженного излучения в различных спектральных каналах и физическими свойствами отражающей поверхности.

В настоящее время в ЦКП поступают данные из трех центров, оснащенных необходимым оборудованием для приема данных с большинства находящихся на орбите КА. С ростом их числа чаще возникают ситуации, когда сеансы связи накладываются во времени. В таких случаях сбор данных из нескольких центров приема, расположенных в относительной близости друг от друга, позволяет согласовать расписание приема так, чтобы вся необходимая информация могла быть собрана без потерь и без дублирования. Эта задача могла бы быть решена за счет создания специализированного протокола автоматизированного обмена информацией о принимаемых данных между станциями приема. Работа по внедрению такого протокола очень перспективна, но потребует межведомственных согласований.

Для передачи данных в ЦКП используются каналы связи сетей передачи данных Сибирского и Дальневосточного отделений Российской Академии наук [12]. Так, данные, принятые в Хабаровске, через три-пять минут после окончания сеанса связи становятся доступны в Новосибирске, благодаря наличию арендованного канала связи пропускной способностью 40 Мбит/с. При передаче данных между Томском и Новосибирском маршрутизация осуществляется сторонними операторами связи.

Современные спутниковые сенсоры порождают большой объем информации, которая передается на Землю по стандартным радиоканалам со скоростью до 15 Мбит/с. За один сеанс связи, продолжительностью около 15 минут может быть передано около 1 Гб. Ещё десять лет назад передача такого объема данных по наземным каналам связи была трудноосуществима. В настоящее время, благодаря повсеместному развитию Интернет, стоимость каналов связи значительно снизилась, что сделало возможным передачу таких объемов данных. Ускоренное развитие

технологий «наземной» передачи информации позволяет пересмотреть концепцию архитектуры пространственно распределенной сети приемных станций, популярную еще сравнительно недавно в России.

Следующим элементом инфраструктуры ЦКП являются системы хранения данных. Со времени создания архива в 2007 году сменилось уже три поколения этих систем. На первом этапе использовались дисковые массивы, присоединяемые по протоколу iSCSI непосредственно к серверам обработки. Затем была введена в строй система хранения на основе сети хранения данных в выделенными серверами, экспортирующими дисковое пространство как сетевую файловую систему NFS. Наконец, на третьем этапе был осуществлен переход к использованию масштабируемой сетевой файловой системы на основе коммерческой распределенной системы OneFS. В настоящее время объем накопленных в архиве данных составляет около 129 ТБ. Общее число файлов в архиве - около 33 миллионов. Объем данных прирастает в среднем со скоростью 80 ГБ в день.

### АРХИВ СПУТНИКОВЫХ ДАННЫХ

В настоящее время архив ЦКП ДДЗ СО РАН содержит информационные продукты, получаемые на основе данных, поступающих от пяти спутниковых систем: Landsat, SPOT, Terra, Aqua и NPP. Данные в архиве собираются для всей территории Сибири (см. Рис. 2).

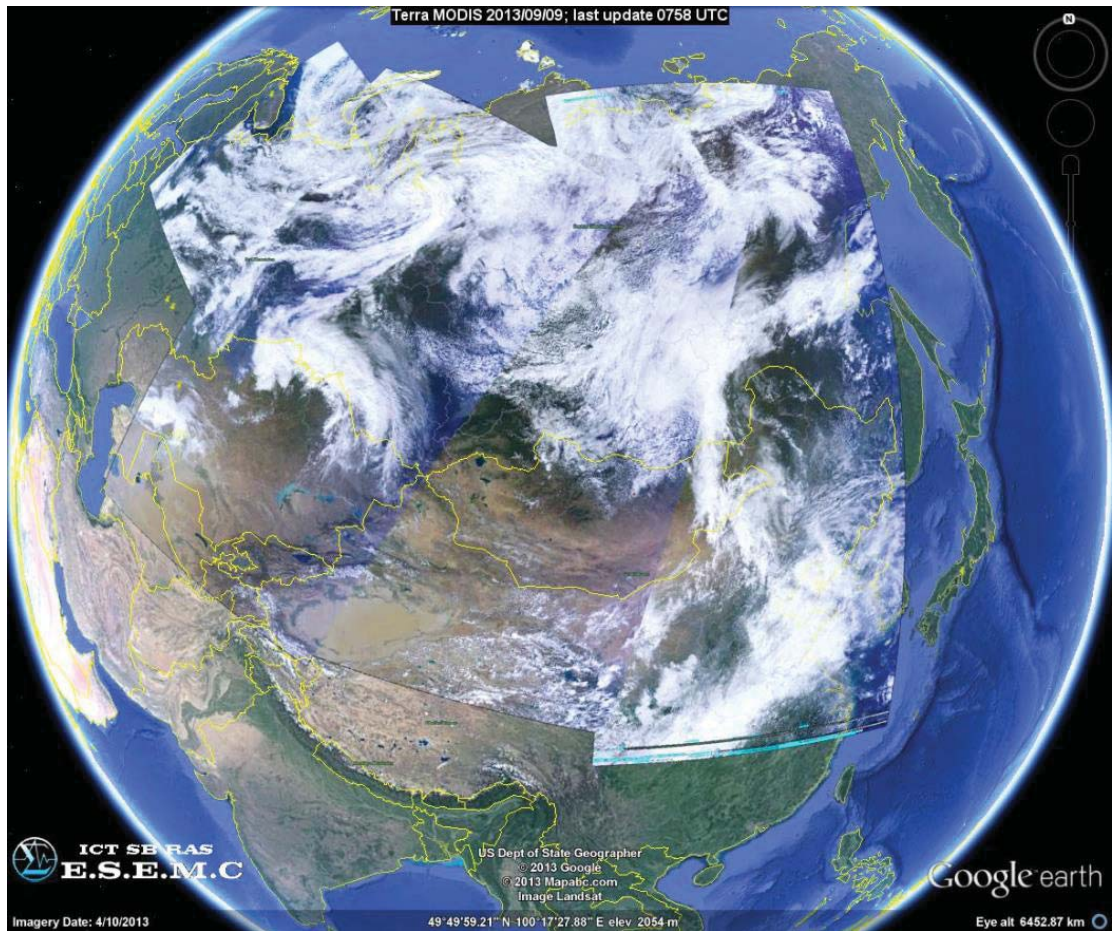


Рис. 2. Данные приняты сибирским и дальневосточным центрами НИЦ «ПЛАНЕТА» Росгидромета. Обработаны в ИВТ СО РАН. Отображение на глобус - Google Earth. Изображение построено на основе скорректированных коэффициентов спектральной яркости отраженного излучения, вычисленных по данным сенсора MODIS спутника Terra (США). Данные за 09.09.2013.



Спутники серии Landsat обеспечивают непрерывный мониторинг Земли на протяжении 40 лет. В настоящее время на орбите находится восьмой космический аппарат этой серии, Landsat 8, обеспечивающий съемку в 11 спектральных диапазонах видимого и инфракрасного излучения с разрешением 30 м в видимой части спектра и 100 м в инфракрасной. Данные поступают из архива геологической службы США после проведения геометрической коррекции и интерполяции на единую сетку с разрешением 30 м. В настоящее время данные Landsat, относящиеся как к архивным, так и к активным КА, распространяются свободно.

Серия спутников SPOT администрировалась компанией SPOT Image, созданной Космическим агентством Франции. Эти спутники передавали данные среднего разрешения, используемые в первую очередь для исследований почв и растительного покрова. К данным SPOT предоставляется ограниченный доступ в соответствии с требованиями лицензионного соглашения (данные Spot Image® используются по соглашению с компанией Spot Image). До окончания срока службы КА в декабре 2012 года данные поступали с приемного комплекса Сибирского центра НИЦ «Планета» (см. Рис. 3).

Большая часть объема архива относится к данным, поступающим ежедневно с сенсоров MODIS, установленных на спутниках Terra и Aqua, а также с сенсора VIIRS, установленного на спутнике NPP «Suomi» (см. Рис. 4). Эти сенсоры имеют широкую полосу захвата и, тем самым, обеспечивают ежедневное покрытие большей части территории Сибири. Данные поступают с приемных комплексов в течение нескольких минут после окончания сеанса приема и передаются на обработку. Основной массив информационных продуктов становится доступным через 10 - 15 минут по окончании обработки. В дальнейшем по заранее определенному расписанию генерируются информационные продукты, использующие все данные за один или несколько дней.

Также в архиве содержатся данные о состоянии атмосферы, полученные в результате численного моделирования и реанализа метеорологических наблюдений, которые публикуются метеорологическими службами в рамках протоколов Всемирной службы погоды, и непосредственно данные, поступающие с сети наземных наблюдений СО РАН. Структура архива и распределение объемов данных приведены в Таблице 1.

## **СИСТЕМА ОПЕРАТИВНОЙ ОБРАБОТКИ**

Оригинальная система оперативной обработки спутниковых данных, созданная и эксплуатируемая в ЦКП ДДЗ СО РАН [13], является ключевой компонентой инфраструктуры. Система предназначена для получения широкого ассортимента информационных продуктов.

Основной объем продуктов генерируется на основе данных, поступающих с широкозахватного спектрорадиометра MODIS (MODerate resolution Imaging Spectrometer), экземпляры которого установлены на спутниках Terra и Aqua. Спектрорадиометр имеет 36 каналов в различных диапазонах длин волн от 0,4 мкм до 14 мкм. Возможность сопоставления значений в спектральных каналах позволяет не только определять основные типы изображаемых объектов: водоемы, облачность, различные типы растительности, снежный покров и др., но и восстанавливать некоторые физические характеристики поверхности и атмосферы с помощью ранее определенных регрессионных соотношений [14].

Реализованная в ЦКП ДДЗ СО РАН система обработки данных MODIS является адаптацией методик и программного обеспечения, разрабатываемого в рамках поддержки миссий Terra и Aqua. Для получения каждого информационного продукта используется соответствующий пакет программ PGE (Product Generation Executable). Доступ к исходным текстам таких пакетов предоставляется по запросу службой обработки данных MODIS в Национальном управлении по авиации и исследованию космического пространства (NASA).

Каждый пакет PGE получает в качестве входных данных набор файлов, содержащих информацию о состоянии атмосферы, рельефе, а также ряд других продуктов MODIS, и создает новый продукт, содержащий как сами значения определяемых параметров, так и оценки достигнутой точности.

Большая часть файлов представляется в формате HDF-EOS - версии иерархического формата данных HDF, предназначенного для хранения и передачи многомерных массивов чисел с плавающей точкой. Формат HDF-EOS определяет способы хранения данных, специфичные для дистанционного зондирования Земли, такие как значения яркости, заданные в области поверхности Земли, излучение от которой поступает в одну ячейку поперечного сканера.

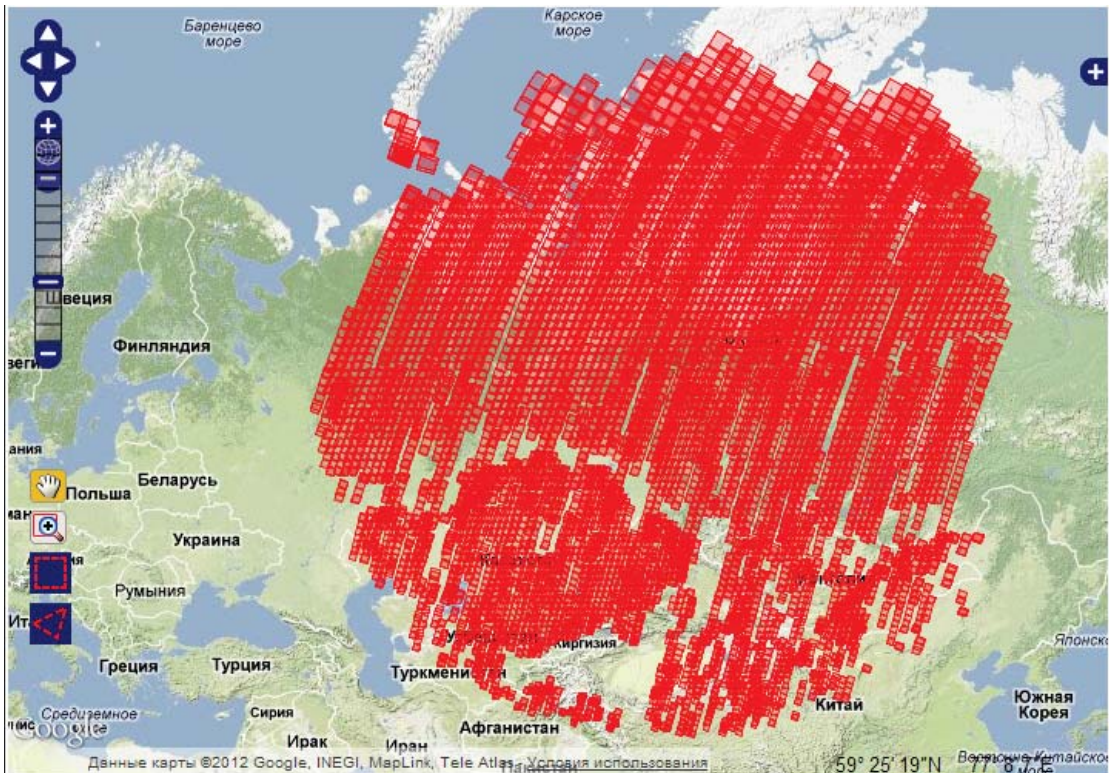
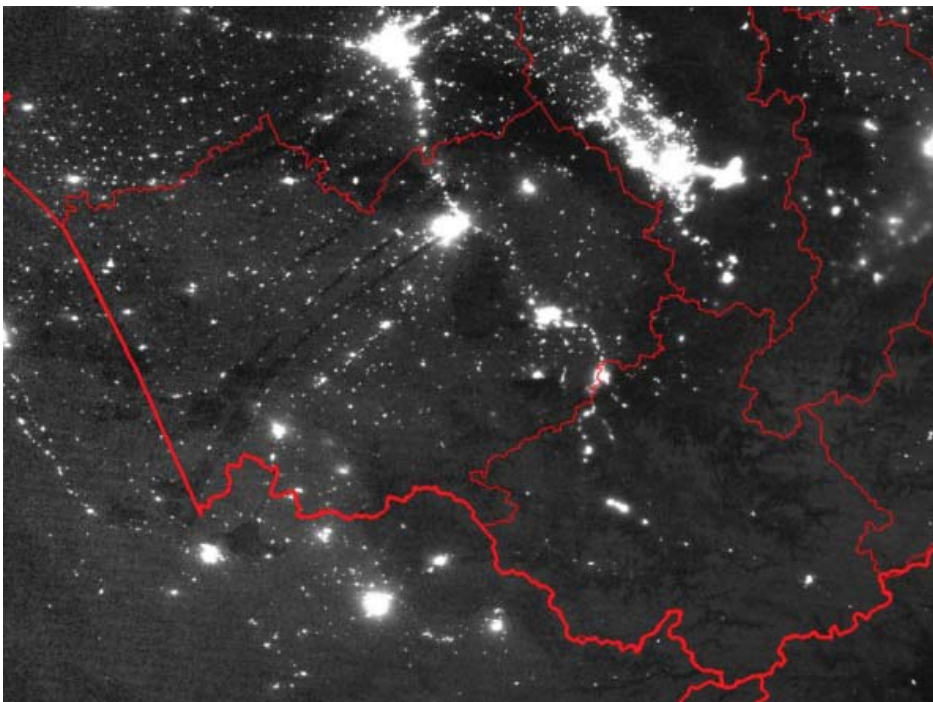


Рис. 3. Контуры сцен, полученных со спутника SPOT (Франция), данные с разрешением до 30м предоставляются безвозмездно организациям СО РАН. Онлайн каталог построен на основе технологии OpenLayers.

Таблица 1. Объемы данных в разделах архива ЦКП ДДЗ СО РАН по состоянию на конец 2013 г.

Источник данных	Объем (ГБ)	Примечание
Landsat	4 500	Пополняющийся архив Landsat (Landsat 5, 7, 8)
SPOT	24 810	Архив данных со спутников SPOT 2/4 за 2008-2012 гг.
Terra	41 900	Архив информационных продуктов, полученных на основе данных, поступающих со спектрорадиометра MODIS на КА Terra за 2011 - 2013 гг.
Aqua	16 820	Архив данных, поступающих со спектрорадиометра MODIS и инфракрасного сенсора AIRS на КА Aqua, и информационных продуктов, полученных на их основе за 2012 - 2013 гг.
NPP	18 700	Архив исходных данных, поступающих с КА NPP «Suomi», и информационных продуктов, полученных на их основе
другие источники	1 040	Данные реанализа метеорологических наблюдений и численного прогноза погоды, определенные на сетке с разрешением 1°, и данные, поступающие с автоматических метеостанций СО РАН
Прочее	24 330	Оперативные данные, данные в форматах, оптимизированных для визуализации, продукты альтернативных веток обработки и другие материалы



**Рис. 4.** Изображение Алтайского края и соседних территорий, полученное на основе данных сенсора VIIRS, установленного на спутнике Suomi NPP. Четко видны населенные пункты, автодороги, железнодорожные пути.

Запуск PGE осуществляется по мере готовности входных наборов данных. Зависимости между PGE задают потоки обработки, предполагающие запуск нескольких десятков PGE для получения одного продукта. Для синхронизации исполнения таких потоков был привлечен диспетчер вычислительных процессов Taverna [15], дополненный необходимыми функциями. Использование диспетчера вычислительных процессов позволило реализовать обработку данных на вычислительном кластере с общей файловой системой. Тем самым, значительно сократилось время генерации продуктов, повысилась устойчивость и эластичность системы.

В перечень ежедневно производимых информационных продуктов, полученных на основе данных MODIS и представленных в ежедневно пополняющемся архиве ЦКП ДДЗ СО РАН (Таблица 2) на сайте ЦКП (<http://sdc.ict.nsc.ru>), включены альbedo поверхности, характеристики атмосферы, растительного покрова, карты снежного покрова и другая оперативная информация.

#### **ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ИНФРАСТРУКТУРЫ ЦКП**

В целом, инфраструктура хранения и обработки ЦКП ДДЗ СО РАН представляет собой основу для построения новых информационных систем, использующих извлекаемые из архива данные для решения междисциплинарных фундаментальных и прикладных задач мониторинга природной среды и социально-экономических процессов. Такого рода информационные системы берут на себя, в первую очередь, решение задач извлечения временных рядов с ограничениями, зависящими как от метаданных, так и от самих данных, а также выполнения алгоритмов анализа данных непосредственно в разделах архива. Можно представить себе несколько примеров подобных задач. Например, с помощью имеющихся в архиве данных можно определить с точностью до дня, как долго за всю историю наблюдений заданная территория находилась под снежным покровом. В случае труднодоступных территорий решение такой задачи без использования спутниковых данных невозможно.

**Таблица 2.** Представленные в архиве информационные продукты, генерируемые на основе получаемых данных, на примере данных сенсора MODIS, установленного на спутнике Terra: 1 - название продукта в номенклатуре EOS, 2 - уровень обработки, 3 - разрешение (\* - разрешение продукта в каждом канале соответствует разрешению в спектральных каналах прибора), 4 - описание продукта, 5 - возможные применения.

1	2	3	4	5
MOD02	1B	*	значения яркости в спектральных каналах, измеренные на верхней границе атмосферы	входные данные для последующей обработки
MOD03	1B	*	географическая привязка: координаты, высота над уровнем моря, положение спутника на орбите и солнечные углы	входные данные для последующей обработки
MOD04	2	10км	аэрозольная оптическая толщина атмосферы, распределение размеров взвешенных частиц	исследования климата, атмосферная коррекция других продуктов, оценка биомассы, сгорающей при лесных пожарах
MOD05	2	1км/5км	содержание водяного пара в атмосфере	гидрология, атмосферная коррекция других продуктов
MOD07	2	5км	вертикальные профили атмосферы	мониторинг озонового слоя, прогноз циклонической активности, состояние атмосферы
MOD09	2,2G	250/500m	коэффициенты спектральной яркости, восстановленные с учетом влияния атмосферы	описание и мониторинг земного покрова, моделирование климата
MOD 10	2	500м	карта снежного покрова	индикатор климата
MOD13	2	250м/1км	вегетационные индексы	мониторинг растительности, рассчитывается каждые 8 дней
MOD14	2,3	1км	точки термальных аномалий	индикатор лесных пожаров
MOD35	2	250м/1км	карта облачного покрова	атмосферная коррекция других продуктов
MCD43	3	1км/16км	коэффициенты спектральной яркости, восстановленные с учетом влияния атмосферы и положения солнца (ДКСЯ), альbedo поверхности, используются данные с сенсоров на спутниках Aqua и Terra	оценка состояния растительности

В качестве другого примера можно привести задачу выбора фрагментов из архива данных среднего разрешения, попадающих на территорию, где были зарегистрированы признаки лесного пожара или наводнения (см. Рис. 5). Собственно сопоставление годовой динамики спектральной яркости или их комбинаций за несколько лет может дать новую информацию об изменениях, происходящих на определенной территории, которые невозможно было бы выявить на отдельных снимках.

### СОПОСТАВЛЕНИЕ С АНАЛОГАМИ

Инфраструктуры хранения и обработки спутниковых данных существуют в различных масштабах. Пожалуй, наиболее известной и активно развивающейся структурой является подсистема хранения и обработки данных в Системе наблюдения Земли (Earth Observing System Data and Information System, EOSDIS) [4]. Инфраструктура EOSDIS формировалась на протяжении многих лет в тесном контакте с пользователями. Необходимость развития региональной информационной инфраструктуры, примером которой является ЦКП ДДЗ СО РАН, обусловлена потребностью в максимальном быстром получении информационных продуктов для определенной территории,

а также необходимостью интеграции данных, поступающих с сети наземных наблюдений и перспективных КА Российского космического агентства.



**Рис. 5.** Изображения получены с помощью сервисов Google Earth и ICT ESEM.C Direct Readout Service (<http://satview.esemc.nsc.ru/>), видны детали затопления окрестностей Хабаровска. На правом снимке отражено состояние области размером 90 на 100 км на 28 августа близко к пику паводка, на левом - 13 июля, когда еще ничто не предвещало катастрофы.

Система хранения и обработки данных для Российского космического агентства в настоящее время создается на основе Национального центра оперативного мониторинга Земли. Эта система предназначена в первую очередь для обеспечения данными административных служб [16]. Важно отметить, что задачи предоставления результатов спутникового мониторинга коммерческим потребителям и государственным службам во многом отличаются от научно-исследовательских задач.

Для решения проблемы предоставления доступа к данным дистанционного зондирования для научно-исследовательских задач на протяжении многих лет развивается система обработки и хранения данных в Институте автоматики и проблем управления Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИАПУ ДВО РАН) [17]. В рамках этой работы решены задачи привлечения внешних вычислительных ресурсов для обработки данных. Система направлена на генерацию информационных продуктов по запросу и не предполагает хранения всего объема информационных продуктов на дисковом архиве. Такой подход не дает возможности эффективно извлекать ряды значений вычисляемых величин за продолжительные временные промежутки.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

На протяжении шести лет совместными усилиями институтов СО РАН, ВУЗов Сибирского региона и центров НИЦ «Планета» создается архив данных дистанционного зондирования Земли. В настоящее время объем этого архива превышает 100 ТБ и продолжает пополняться со скоростью около 80 ГБ в день. На основе такого активного дискового архива могут выполняться различные количественные исследования изменений природной среды. Архив, а также его аппаратное и программное обеспечение, система взаимодействия с центрами приема данных составляют ядро информационно-вычислительной инфраструктуры Центра коллективного пользования данными дистанционного зондирования СО РАН.

Сокращенная версия настоящей работы опубликована в журнале «Вычислительные технологии», 2013, т. 18, специальный выпуск.

## **БЛАГОДАРНОСТИ**

Работа выполнена при поддержке Президентской программы «Ведущие научные школы РФ» (грант № НШ-6293.2012.9), Программы базовых фундаментальных исследований СО РАН (проект № IV.38.2.1), Програм-

мы интеграционных фундаментальных исследований СО РАН (проект № 131а), Программы Президиума РАН (проект № 4.10), РФФИ (гранты №№ 12-07-00545-а, 13-07-12105-офи\_м).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Michael K., Murphy K., Lowe D., Masuoka E., Vollmer B., Tilmes C., Teague M., Ye G., Maiden M., Goodman H.M., Justice C. Implementation of the Land, Atmosphere Near Real-time Capability for EOS (LANCE). Proceedings IGARSS-2010. Honolulu. 2010. P.1442-1445.
- [2] Андреев М.В., Галеев А.А., Ефремов В.Ю., Ильин В.О., Крашенинникова Ю.С., Лупян Е.А., Мазуров А.А., Назиров Р.Р., Прошин А.А., Флитман Е.В. Построение автоматизированных систем сбора, хранения, обработки и представления спутниковых данных для решения задач мониторинга окружающей среды. Солнечно-земная физика. 2004. Т.5. С.8-11.
- [3] Лупян Е.А., Саворский В.П., Шокин Ю.И., Алексанин А.И., Назиров Р.Р., Недолужко И.В., Панова О.Ю. Современные подходы и технологии организации работы с данными дистанционного зондирования Земли для решения научных задач. Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2012. № 5. С.21-44.
- [4] Ramapriyan H.K., Behnke J., Sofinowski E., Lowe D., Esfandiari M.A. Evolution of the Earth Observing System (EOS) Data and Information System (EOSDIS). Standard-Based Data and Information Systems for Earth Observation. 2010. P.63-92.
- [5] Добрецов Н.Н., О.И. Потатуркин, Чубаров Л.Б., Шокин Ю.И. О проекте распределенной информационно-вычислительной системы сбора, хранения и обработки данных дистанционного зондирования Земли для регионов Сибири и Дальнего Востока. Вестник КазНУ им. аль-Фараби, Серия: Математика, механика, информатика, Т.58 №3. Ч.1. С.492-496.
- [6] Якубайлик О.Э. Формирование программно-технологического обеспечения системы мониторинга состояния природной среды и ресурсов. Труды Международной конференции «Актуальные вопросы современной техники и технологии». Липецк. 2013. С.51-55.
- [7] Матвеев А.Г., Якубайлик О.Э. Система управления контентом геоинформационного веб-портала «Геофреймворк». Современные проблемы науки и образования. 2013. № 6. URL: <http://science-education.ru/113-10997>
- [8] Шокин Ю.И., Пестунов И.А., Смирнов В.В., Синявский Ю.Н., Скачкова А.П., Дубров И.С., Левин В.А., Алексанин А.И., Алексанина М.Г., Бабяк П.В., Громов А.В., Недолужко И.В. Распределенная информационная система сбора, хранения и обработки спутниковых данных для мониторинга территорий Сибири и Дальнего Востока. Журнал Сибирского федерального университета Серия: Техника и технологии. 2008. Т.1, №4, С.291-314.
- [9] Лупян Е.А., Сорокин А.А., Крамарева Л.С., Гирина О.А. Разработка информационной системы для работы с данными дистанционного спутникового мониторинга Дальнего Востока России с целью обеспечения научной и образовательной деятельности в области исследования и контроля состояния окружающей среды и опасных природных явлений. Труды Международной конференции «Информационные технологии и высокопроизводительные вычисления». Хабаровск. 2011. С.213 - 217.
- [10] Смагин С.И., Лупян Е.А., Сорокин А.А., Бурцев М.А., Верхотуров А.Л., Гирина О.А., Ефремов В.Ю., Крамарева Л.С., Прошин А.А., Толпин В.А. Информационная система работы с данными спутниковых наблюдений региона Дальнего Востока России для проведения научных исследований в различных областях знаний. Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2013. Т.10, №1. С.277-291.
- [11] Afonin S.V., Belov V.V., Engel M.V., Kokh A.M. Development of a database of regional satellite information and software for processing of this information in the Institute of Atmospheric Optics SB RAS. Proc. SPIE, 11th Internat. Symp. on Atmos. and Ocean Optics, Atmos. Phys. Tomsk. 2004. P.267-276.
- [12] Шокин Ю.И. Построение системы регионального спутникового мониторинга на основе корпоративной сети передачи данных СО РАН. Труды Международной конференции «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании». 2013. Усть-Каменогорск. 2013. Ч.2. С.286-292.
- [13] Шокин Ю.И., Антонов В.Н., Добрецов Н.Н., Кихтенко В.А., Лагутин А.А., Смирнов В.В., Чубаров Д.Л., Чубаров Л.Б. Распределенная система приема и обработки спутниковых данных Сибири и Дальнего Востока. Текущее состояние и перспективы развития. Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2012. Т.9, №5. С.45-54.
- [14] Лагутин А.А., Никулин Ю.А., Жуков А.П., Лагутин Ал.А., Резникова А.Н., Синицин В.В., Шмаков И.А. Математические технологии оперативного регионального спутникового мониторинга характеристик атмосферы и подстилающей поверхности. ч.1. MODIS. Вычислительные технологии. 2009. Т.12, № 2. С.67-89.
- [15] Hull D., Wolsfencroft K., Stevens R., Goble C., Pocock M.R., Li P., Oinn T. Taverna: a tool for building and running workflows of services. Nucleic Acids Research. 2006. Vol.34. P.W729-W732.
- [16] Бурцев М.А., Емельянов К.С., Ефремов В.Ю., Лупян Е.А., Мазуров А.А., Пахомов Л.А., Прошин А.А., Саворский В.П. Построение информационной системы удаленной работы с каталогами данных НЦ ОМЗ. Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2010. Т.7, №4. С.64-71.
- [17] Недолужко И.В., Бабяк П.В., Тарасов Г.В., Ерёмченко В.С. Инфраструктура приёма, распределенной обработки и поставки спутниковых данных в центре коллективного пользования регионального спутникового мониторинга ДВО РАН. Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2012. Т.9. №3. С.324-331.

## EXPLICIT FINITE DIFFERENCE METHOD FOR SOLVING POWER FLOW EQUATION WITH APPLICATIONS IN FIBER OPTICS MODELING

---

*Numerical method for solving time-dependent and time-independent power flow equation has been developed and tested. Explicit finite difference method was used in order to obtain angular power distribution solving time-independent power flow equation. Same method was used in solving time-dependent power flow equation which has resulted with solution for frequency response and bandwidth of the system.*

---

### INTRODUCTION

Need for fast data transmission grew steeply over last decade. In that light optical fibers became one of the best alternatives. Beside the possibility of transmitting large amounts of data fast, optical fibers have many others advantages. The most important are insensitivity to electromagnetic fields, smaller dimensions, smaller mass/length ratio and simple installation. Taking all of these advantages into account makes optical fibers excellent choice for data transmission.

Constant growth of data transmitted through data networks requires improvement of transfer characteristics of optical fibers. In order to examine and improve fiber characteristics several methods has been developed. Commonly used methods are ray tracing model, electromagnetic approach and solving power-flow equation. Ray tracing method calculates individual path for every ray that travels through fiber. Using this method impulse response, that includes modal induced loss and modal dispersion, can be determined. This method is computationally very demanding since it requires generation of large number of individual ray paths. Electromagnetic approach, beside it's very complicated, is very limited since only time delay of individual modes can be calculated using this method. On the other side usage of power flow equation [1] lets us efficiently model modal dispersion and modal loss in order to determine their influence on fibers transfer characteristics. Moreover, by using time-dependent power flow equation we can model all three important transfer characteristics of optical fibers; that is impulse response, frequency response and bandwidth.

Analytical solution of power flow equation exists only for some particular cases, with limitations in width and incidence angle of incidence light beam [1-3]. If we want to calculate transfer characteristics in generalized way, that is to include modal dependence of diffusion, choose incidence angle of light as well as width of light beam, we have to use some numerical approach. Several numerical approaches can be used for solving either time-independent or time-dependent power flow equation, such as finite elements method, nodal integral method, finite difference method and others [4-6]. When light propagation is modeled in two dimensions, like it is case with power flow equation, finite difference method is best choice.

At first implicit finite difference method prevailed over the explicit finite difference method, mainly because of the unconditioned stability which provided larger integration steps compared to explicit method [7]. Nevertheless this doesn't affect better computational efficiency of implicit finite difference method because there's necessity of manipulation with large matrices in every computational step. When we take this into account we can say that, although explicit finite difference method is more sensitive in the aspect of scheme stability, it's simpler and more efficient than implicit finite difference method. That is why we have chosen to use explicit finite difference method for solving power flow equation.

---

<sup>1</sup> Faculty of natural science, Kosovska Mitrovica, Serbia

<sup>2</sup> Faculty of natural science, Kragujevac, Serbia

## EXPLICIT FINITE DIFFERENCE METHOD

First we will show how we employed explicit finite difference method in order to solve time-independent power flow equation. Later same method will be employed in solving time-dependent power flow equation. Examples for both equations are also shown.

Time-independent power flow equation can be written as [1]:

$$\frac{\partial P(\theta, z)}{\partial z} = -\alpha(\theta)P(\theta, z) + \frac{D(\theta)}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \theta \frac{\partial P(\theta, z)}{\partial \theta} \right) \quad (1)$$

where  $P(\theta, z)$  is power distribution over angle and space;  $\alpha(\theta)$  is mode-dependent attenuation; and  $D(\theta)$  is the mode-dependent coupling coefficient. Mode-dependent attenuation can be written in the form  $\alpha(\theta) = \alpha_0 + A\theta^2 + \dots$ , where  $\alpha_0$  is loss common to all modes. It can be accounted for by multiplying the end-solution by  $e^{-\alpha_0 z}$  [7, 8], so equation (1) can be rewritten in form:

$$\frac{\partial P(\theta, z)}{\partial z} = -A\theta^2 P(\theta, z) + \frac{D}{\theta} \frac{\partial P(\theta, z)}{\partial \theta} + D \frac{\partial^2 P(\theta, z)}{\partial \theta^2} \quad (2)$$

The tacit assumption that coupling coefficient  $D(\theta)$  is constant has been routinely made when mode coupling by the power flow equation has been investigated in the absence of reliable estimates of other terms in the expansion series of  $D(\theta)$ . Boundary conditions for equation (1) are:

$$P(\theta_c, z) = 0; \quad D \frac{\partial P}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = 0 \quad (3)$$

where  $\theta_c$  is critical angle of the fiber. First condition means that modes that propagate at angles  $\theta > \theta_c$  don't transfer power. Second condition implies that mode coupling is limited only to modes that propagate at angles  $\theta > 0$ .

Using central difference scheme for derivatives  $(\partial P(\theta, z))/\partial \theta$  and  $(\partial^2 P(\theta, z))/\partial \theta^2$  [4, 9]:

$$\left( \frac{\partial P(\theta, z)}{\partial \theta} \right)_{i,j} = \frac{P_{i+1,j} - P_{i-1,j}}{2\Delta\theta} + O(\Delta\theta)^2 \quad (4)$$

$$\left( \frac{\partial^2 P(\theta, z)}{\partial \theta^2} \right)_{i,j} = \frac{P_{i+1,j} - 2P_{i,j} + P_{i-1,j}}{(\Delta\theta)^2} + O(\Delta\theta)^2 \quad (5)$$

and forward difference scheme for derivative  $(\partial P(\theta, z))/\partial z$ :

$$\left( \frac{\partial P(\theta, z)}{\partial z} \right)_{i,j} = \frac{P_{i,j+1} - P_{i,j}}{\Delta z} + O(\Delta z) \quad (6)$$

equation (2) can be written in form [10]:

$$P_{i,j+1} = \left( \frac{\Delta z D}{\Delta\theta^2} - \frac{\Delta z D}{2\theta_i \Delta\theta} \right) P_{i-1,j} + \left( 1 - \frac{2\Delta z D}{\Delta\theta^2} - \Delta z A \theta_i^2 \right) P_{i,j} + \left( \frac{\Delta z D}{2\theta_i \Delta\theta} + \frac{\Delta z D}{\Delta\theta^2} \right) P_{i+1,j} \quad (7)$$

where subscripts  $i$  and  $j$  refer to discrete steps  $\Delta\theta$  i  $\Delta z$  for angle  $\theta$  and length  $z$ , respectively.

Boundary conditions (3) now become:

$$P_{N,j} = 0, P_{0,j} = P_{1,j} \quad (8)$$

where  $N = \theta_c/\Delta\theta$  is grid dimension in direction  $\theta$ . In order to overcome singularity problem in points  $\theta = 0$  we use relation [6]:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) = 2 \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=0} \quad (9)$$

The input condition must also be expressed in difference form. For example, the plane-wave launch distribution, which is in the form of a Dirac delta function, can be expressed as:

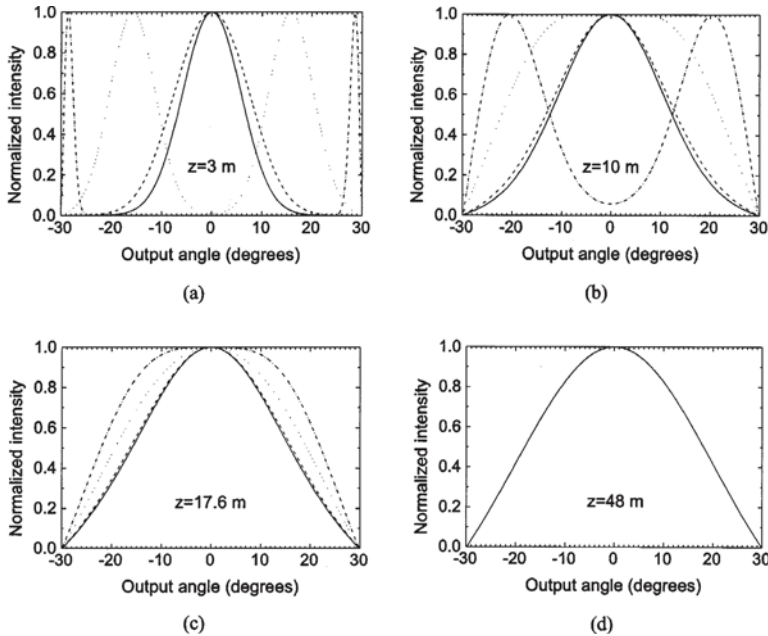


$$\begin{aligned}
 P(\theta, 0) &= 1, \quad \text{za } \theta = \theta_0 \\
 P(\theta, 0) &= 0, \quad \text{za } \theta \neq \theta_0
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

with  $0 < \theta < \theta_c$ , where  $\theta_0$  is the angle of the launch to the fiber axis.

To facilitate the comparison of results, we applied our method to (Mitsubishi Rayon) Eska Premier SI POF fiber, because this fiber was used in the experiment of Zubia *et al.* [11]. This fiber has a core diameter of  $d = 0.98$  mm, a refractive index of the core of  $n_1 = 1.492$ , a theoretical numerical aperture (N.A.) of 0.5, and a critical angle  $\theta_c = 19.6^\circ$  (measured inside the fiber; i.e.,  $\theta_c = 30^\circ$  measured in air). Values of  $D = 7.5 \times 10^{-4}$  rad<sup>2</sup>/m and  $A = 1.37$  (rad<sup>2</sup>m)<sup>-1</sup> have been reported for this fiber [11, 12].

Our numerical solution of the power flow equation gives the evolution of the normalized output power distribution with fiber length  $z$  as  $z$  is increased incrementally from zero until the steady state distribution is achieved. At each step a new distribution curve is obtained with a decreased maximum and increased width. The situation is shown in Fig. 1 for four such selected  $z$  values, each with four different input angles  $\theta_0 = 0, 5.5, 16, 29^\circ$  (measured in air). In keeping with what has become a customary way of presenting such distributions [12], they are shown in Fig. 1 with their maxima normalized. Attention is drawn to the shift that occurs in the corresponding distribution curves while  $z$  is moved throughout the parts of Fig. 1. In the calculations we used step lengths  $\Delta\theta = 0.05^\circ$  and  $\Delta z = 0.0002$  m to achieve stability in our finite-difference scheme [4, 6].

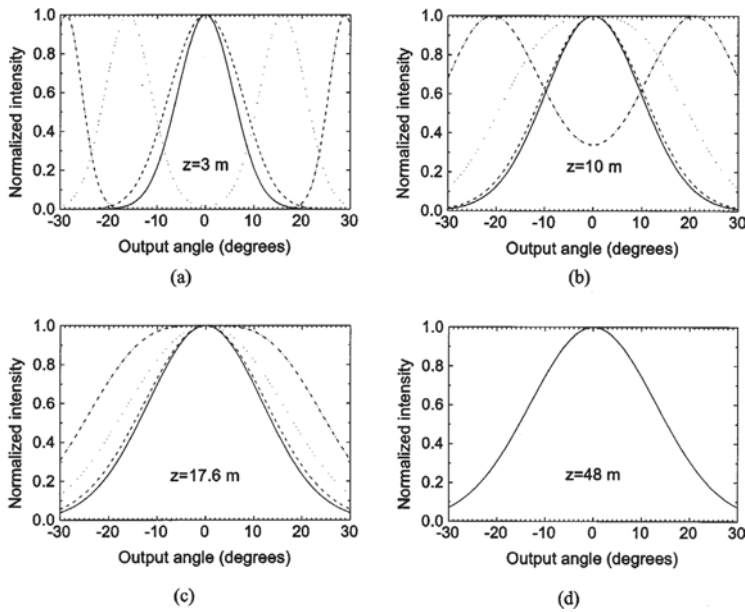


**Fig. 1.** Numerically determined normalized output angular power distribution for a plane wave launched with input angles  $\theta_0 = 0^\circ$  (solid curves),  $5.5^\circ$  (dashed curves),  $16^\circ$  (dotted curves), and  $29^\circ$  (dashed-dotted curves) at various locations along the SI POF:  $z = 3$  m,  $z = 10$  m,  $z = 17.6$  m, and  $z = 48$  m.

Since our method can accommodate any initial condition we were able to test it with known analytical solution for same fiber. Without going into limitations of analytical method we will present obtained results for fiber mentioned above [10] and compare it with our numerical results. Results obtained by numerical solution are presented in Fig. 1, while analytical solutions are presented in Fig. 2.

Differences appear primarily for the highest modes and in the tails of the distribution curves. In our view, the tails in the analytical solution of Fig. 2 incorrectly imply that power is transmitted even at angles above the critical angle of  $30^\circ$  in air, as indicated by the nonzero intensity at  $+30^\circ$  and  $-30^\circ$  in Fig. 2. This difference between Figs. 1 and 2 is more pronounced for larger launch angles and is attributed to

the influence of the boundary condition at  $\theta = \theta_c$  [ $P(\theta_c, z) = 0$ ], which the analytical solution ignores.



**Fig. 2.** Analytically determined normalized output angular power distribution for a plane wave launched with input angles  $\theta_0 = 0^\circ$  (solid curves),  $5.5^\circ$  (dashed curves),  $16^\circ$  (dotted curves), and  $29^\circ$  (dashed-dotted curves) at several locations along the SI POF:  $z = 3$  m,  $z = 10$  m,  $z = 11.6$  m, and  $z = 48$  m.

Thus our numerical solution of the power flow equation, which takes into account the boundary conditions at both  $\theta = 0$  and  $\theta = \theta_c$ , is more accurate.

By solving time-independent power flow equation we can determine coupling length of optical fibers. If we want to calculate transfer characteristics of optical fibers we have to employ Gloge's time-dependent power flow equation, which can be written in form [2]:

$$\frac{\partial P(\theta, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial z} \frac{\partial P(\theta, z, t)}{\partial t} = -A\theta^2 P(\theta, z, t) + \frac{D}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \theta \frac{\partial P(\theta, z, t)}{\partial \theta} \right] \quad (11)$$

The derivative  $\partial t / \partial z$  can be obtained using the group velocity of a mode with characteristic angle  $\theta$ , which is  $\frac{dz}{dt} = \frac{c}{n(1 + \theta^2/2)}$  [2]. Neglecting the delay  $n/c$  common to all modes, it follows [8]:

$$\frac{\partial P(\theta, z, t)}{\partial z} = -A\theta^2 P(\theta, z, t) - \frac{n}{2c} \theta^2 \frac{\partial P(\theta, z, t)}{\partial t} + \frac{D}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \theta \frac{\partial P(\theta, z, t)}{\partial \theta} \right) \quad (12)$$

By applying the Fourier transform,  $p(\theta, z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\theta, z, t) e^{-j\omega t} dt$ , the time-dependent equation (12) transforms into (13):

$$\frac{\partial p(\theta, z, \omega)}{\partial z} = - \left[ A\theta^2 + j\omega \frac{n}{2c} \theta^2 \right] p(\theta, z, \omega) + \frac{D}{\theta} \frac{\partial p(\theta, z, \omega)}{\partial \theta} + D \left( \theta \frac{\partial^2 p(\theta, z, \omega)}{\partial \theta^2} \right) \quad (13)$$

where  $\omega = 2\pi f$  is the angular frequency. The boundary conditions are same as for the time-independent power flow equation (3).

It is apparent that  $p(\theta, z, \omega)$  is complex. We can therefore separate  $p(\theta, z, \omega)$  into its real and imaginary parts,  $p = p' + jp''$ . Equation (13) can now be rewritten as the following simultaneous differential equations:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p^r}{\partial z} &= -A\theta^2 p^r + \frac{D}{\theta} \frac{\partial p^r}{\partial \theta} + D \frac{\partial^2 p^r}{\partial \theta^2} + \omega \frac{n}{2c} \theta^2 p^i \\ \frac{\partial p^i}{\partial z} &= -A\theta^2 p^i + \frac{D}{\theta} \frac{\partial p^i}{\partial \theta} + D \frac{\partial^2 p^i}{\partial \theta^2} - \omega \frac{n}{2c} \theta^2 p^r\end{aligned}\quad (14)$$

Once  $p^r$  and  $p^i$  are obtained by solving equations (14), frequency response at  $z$  can be easily calculated [13]. After separating the power flow equation (13) into two simultaneous equations (14), we solved the latter (14) by explicit finite difference method. Using central difference scheme (4) and (5) for derivatives  $\partial p(\theta, z, \omega) / \partial \theta$  and  $\partial^2 p(\theta, z, \omega) / \partial \theta^2$  and forward difference scheme (6) for derivative  $(\partial P(\theta, z, \omega) / \partial z)$  equations (14) can be written in the form [4, 6, 8]:

$$\begin{aligned}p_{k,l+1}^r &= \left( \frac{\Delta z D}{\Delta \theta^2} - \frac{\Delta z D}{2\theta_k \Delta \theta} \right) p_{k-1,l}^r + \left( 1 - \frac{2\Delta z D}{\Delta \theta^2} - \Delta z A \theta_k^2 \right) p_{k,l}^r + \\ &+ \left( \frac{\Delta z D}{2\theta_k \Delta \theta} + \frac{\Delta z D}{\Delta \theta^2} \right) p_{k+1,l}^r + \frac{\omega n \Delta z}{2c} \theta_k^2 p_{k,l}^i\end{aligned}\quad (15)$$

and

$$\begin{aligned}p_{k,l+1}^i &= \left( \frac{\Delta z D}{\Delta \theta^2} - \frac{\Delta z D}{2\theta_k \Delta \theta} \right) p_{k-1,l}^i + \left( 1 - \frac{2\Delta z D}{\Delta \theta^2} - \Delta z A \theta_k^2 \right) p_{k,l}^i + \\ &+ \left( \frac{\Delta z D}{2\theta_k \Delta \theta} + \frac{\Delta z D}{\Delta \theta^2} \right) p_{k+1,l}^i - \frac{\omega n \Delta z}{2c} \theta_k^2 p_{k,l}^r\end{aligned}\quad (16)$$

Boundary conditions (3) now become:

$$p_{N,l}^r = 0, \quad p_{N,l}^i = 0 \quad \text{and} \quad p_{0,l}^r = p_{1,l}^r, \quad p_{0,l}^i = p_{1,l}^i \quad (17)$$

where  $N = \vartheta / \Delta \vartheta$  is the grid size in the  $\theta$  direction. In order to prevent the problem of singularity at grid points  $\theta = 0$ , the relation (9) is used [6].

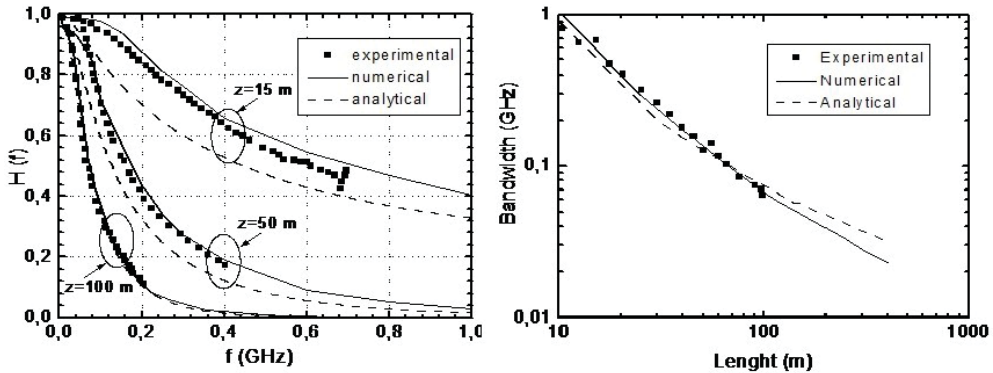


Fig. 3. Left - Comparison of numerical results, measurements by Mateo et al. [13] and analytical solution [15] for frequency response of the HFBR fiber. Right - Comparison of numerical results, measurements by Mateo et al. [13] and analytical solution [15] for the functional dependence of the HFBR fiber bandwidth on its length.

In order to test our results we have used our method and obtained frequency response and bandwidth of the same SI POF that was investigated by Mateo et al. [13]. The fiber is HFBR-RUS100 (HFBR) from Agilent, with numerical aperture  $NA=0.47$  (corresponding to the inner critical angle of  $\theta_c = 18.5^\circ$ ) and  $0.22$  dB/m of nominal attenuation. Values for  $A$  and  $D$  that we have used are  $A=0.7539$  ( $\text{rad}^2 \text{m}^{-1}$ ) and  $D \approx 4.31 \times 10^{-4}$   $\text{rad}^2/\text{m}$  [14].

In Fig. 3 (left), frequency response of the HFBR fiber is shown for the fiber lengths of 15, 50 and 100 m, and are compared with experimental results obtained by Mateo et al. [13] as well as with the analytical solution [15]. In figure 3 (right) our numerical results for the bandwidth for the HFBR fiber is compared to Mateo et. al's [13] experimental measurements and to our recent analytical solution [15, 16].

## CONCLUSION

We have shown full numerical solution of power flow equation obtained by explicit finite difference method. Our method overcomes problems that are present in analytical solution of power flow equation. We were able to model, both, modal coupling process and modal loss. Firstly we solved time-independent power flow equation for one fiber and compared it to analytical solution, where we can clearly see advantage of our method. Later we have solved time-dependent power flow equation, whose solving is necessary if transfer characteristics of fiber are to be known. Solution has been compared to, both, experimental and analytical solution for sampled fiber. From the results above, we can conclude that our solution is stable, general and more accurate than analytical solution.

## ACKNOWLEDGEMENTS

The work described in this paper was supported by grant from Serbian Ministry of Education and Science [Project No. 171011].

## REFERENCES

- [1] Gloge D. Optical power flow in multimode fibers. *Bell Syst. Tech. J.* Vol. 51. 1972. P. 1767-1783.
- [2] Gloge D. Impulse Response of Clad Optical Multimode Fibers. *AT&T Tech. J.* Vol. 52. 1973. P. 801-816.
- [3] Drljaca B, Savovic S, Djordjevich A. Calculation of frequency response in step-index plastic optical fibers using the time-dependent power flow equation. *Opt. Laser Eng.* Vol. 49. 2011. P. 618-622.
- [4] Anderson J. D. *Computational Fluid Dynamics.* McGraw-Hill. New York. 1995.
- [5] Caldwell J, Savović S, Kwan Y. Y. Nodal integral and finite difference solution of one-dimensional Stefan problem. *J. Heat Transf.-Trans. ASME* 125, 2003. P. 523-527.
- [6] Djordjevich A, Savović S. Investigation of mode coupling in step index plastic optical fibers using the power flow equation. *IEEE Photon. Technol. Lett.* 12, 2000. P. 1489-1491.
- [7] Rousseau M, J eunhomme L. Numerical solution of the coupled-power equation in step index optical fibers. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 25, 1977. P. 577-585.
- [8] Savović S, Djordjevich A. Influence of numerical aperture on mode coupling in step index plastic optical fibers. *Appl. Opt.* Vol. 43. 2004. P. 5542-5546.
- [9] Savović S, Djordjevich A. Influence of initial dopant distribution in fiber core on refractive index distribution of thermally expanded core fibers. *Opt. Mat.* Vol. 30. 2008. P. 1427-1431.
- [10] Djordjevich A, Savović S. Numerical solution of the power flow equation in step index plastic optical fibers. *J. Opt. Soc. Am. B* Vol. 21, 2004. P. 1437-1442.
- [11] Toshiki P. T. Shoji Y. Numerical solution of power flow in multimode W-type optical fibers. *App. Opt.* Vol. 19. No. 10. 1980. P. 1647-1652.
- [12] Zubia J, Durana G, Aldabaldetrekú G, Arrue J, Losada M. A, Lopez-Higuera M. New method to calculate mode conversion coefficients in SI multimode optical fibers. *J. Lightwave Technol.* Vol. 21, 2003. P. 116-181.
- [13] Dugas J, Maurel G. Mode-coupling processes in poly-(methyl methacrylate) -core optical fibers. *Appl. Opt.* Vol. 31. 1992. P. 5069-5019.
- [14] Mateo J, Losada M.A, Zubía J. Frequency response in step index plastic optical fibers obtained from the generalized power flow equation. *Opt. Express* Vol. 17. 2009. P. 2850-2860.
- [15] Drljaca B, Djordjevich A, Savović S. Frequency response in step-index plastic optical fibers obtained by numerical solution of the time-dependent power flow equation. *Opt. Las. Tec.* Vol. 44. 2012. P. 1808-1812.
- [16] Drljaca B, Savović S, Djordjevich A. Calculation of the frequency response and bandwidth in step-index plastic optical fibres using the time-dependent power flow equation. *Phy. Scr. T.* 149. 2012.
- [17] Drljaca B, Savović S, Djordjevich A. Calculation of the frequency response of step-index plastic optical fibers using the time-dependent power flow equation. *Opt. Lasers Engg.* Vol. 49, 2011. P. 855-858.

## COMPUTER OPTIMIZATION IN CHOOSING INTERNAL COMBUSTION ENGINE AND GEARBOX FOR GIVEN VEHICLE PERFORMANCE BY TRACTION DIAGRAM

---

*Design and construction modern motor vehicles in mass production are based on typified powertrain and joint platform in order to increase the competitiveness and lower product prices. Internal combustion engine and gearbox are adopted for vehicle in development from a range of finished products available in the market. The article presents the optimization of selection internal combustion engine and gearbox by traction diagram toward those input parameters of the vehicle dynamics. During the process, the program performs the comparison between vehicle performance in development with the performance of the selected engine and gearbox obtained through traction diagram. The optimal choice is obtained according to the given criteria, related to the power and torque of the engine and transmission ratios. The program displays digital and analog results through tables and graphs.*

---

### INTRODUCTION

The first step in the design process a new motor vehicle is to define vehicle segment, areas of application and determination of output performance such as maximum speed, acceleration, time for reaching a certain speed, maximum climb, etc. Due to high competition, engineers have a very difficult task which requires the design of a new model for a short time. For large manufacturers that time is on average 18 months, which is many times shorter than the time that was previously available. In this complex process, the vehicle should be maximally adjusted to the market demands, that is often opposite of technical requirements. Therefore, this complex process always comes down to optimization, and not uniquely defining fulfillment of certain criteria to the maximum extent.

Large manufacturers of motor vehicles have sophisticated models in the design due to which it is possible to fulfill that complex task in a short period of time. The new model is typically constructed on a joint platform of other models, but the engine and transmission are chosen from the existing one on the market. Besides techno - economic requirements that must be met, there are also the environmental, which includes optimal emission and low fuel consumption. Therefore, it is important to optimally adjust the engine and transmission during the vehicle design stage.

### MOTOR VEHICLES POWERED BY INTERNAL COMBUSTION ENGINE

Internal combustion engines with manual transmission are the most common types of powertrain in the motor vehicles despite a lack of spending scarce fossil fuels. They are characterized by high power per unit of weight, easy installation in the vehicle, easy start, and maintainability. With additional measures, today's engines have relatively low fuel consumption and specific systems for the treatment of exhaust gases.

In addition, the characteristics of the internal combustion engine are functionally different from the defined characteristics of an ideal powertrain.

Power required for moving the vehicle is defined by expression:

$$P_o = M_o \cdot \omega_t = F_o \cdot r_d \cdot \omega_t = F_o \cdot V \quad (1)$$

$F_o$  [N] Motive force

1 School of Electrical Engineering and Computer Science Applied Studies, Belgrade, Serbia

2 IT FUSION, Belgrade, Serbia

$\omega_t$  [1/s] Angular velocity of the wheel

$V$  [m/s] Vehicle speed

$r_d$  [m] Dynamic radius of the wheel

Characteristic of the ideal powertrain provides maximum power to the drive wheels at all speeds, as shown in Figure 1a.

$$P_o = F_o \cdot V = P_{\max} = \text{const} \quad (2)$$

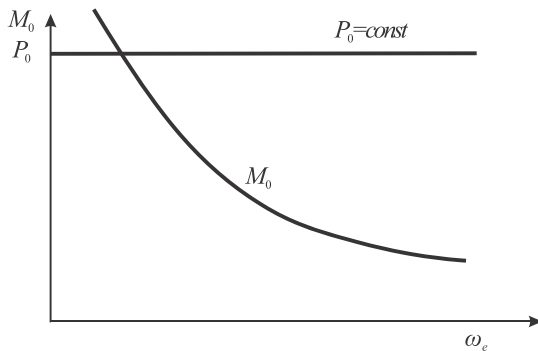


Fig. 1a. Characteristic of the ideal powertrain

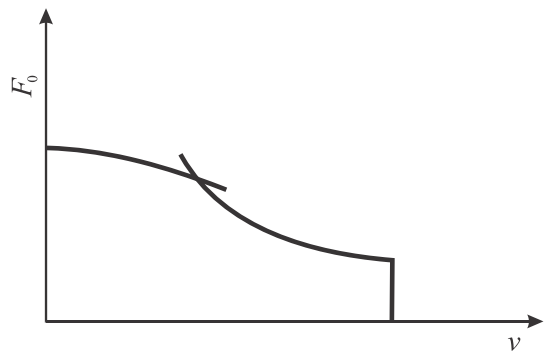


Fig. 1b. Characteristics of the ideal powertrain with limitations

Figure 1a. shows that the ideal characteristic of engine power is determined by a straight line and hyperbolic change of torque on the drive wheels, depending on the angular velocity.

Besides, it is important to note that the vehicle performances are not only affected by maximal engine power but also characteristics at partial load and different operating modes. This is dictated by the laws of the vehicle dynamics.

Despite the condition that motive force should be greater than the total resistance, there is also a condition that it should be less than the maximum longitudinal force of adhesion-dependent by coefficient of friction and normal load.

$$X_\varphi = \varphi \cdot Z_\varphi \quad (3)$$

- $X_\varphi$  [N] Longitudinal force of adhesion
- $\varphi$  [-] Coefficient of friction
- $Z_\varphi$  [N] Normal force

Therefore, the diagram in Figure 1a is corrected in accordance with the constraints of dynamic friction and maximum speed of the vehicle, as shown in Figure 1b.

Due to deviation speed characteristics of internal combustion engines from the ideal hyperbolic traction, desired performance can be achieved only by increasing the number of gear ratios, resulting in the complicated construction of gearbox to the limit of techno-economic feasibility.

Therefore it is very important to incorporate powertrain and vehicle, in fact make a right selection of appropriate engine and transmission on the market, according to the characteristics of the vehicle.

## PROGRAM STRUCTURE

The program is based on four criteria and contains a database of torque speed characteristics of internal combustion engines and transmission ratios of gearboxes that are widely used.

The input parameters of the program:

- Axle to axle length:  $l_o$  [m]
- Mass of the empty vehicle:  $m_s$  [kg]

- Vehicle width:  $B$  [m]
- Mass of the load:  $m_k$  [kg]
- Vehicle height:  $h$  [m]
- Drag coefficient:  $c_x$  [-]

Ratio of the front longitudinal

- Dynamic radius of the wheel:  $r_d$  [m]
- length to axle to axle length:  $l_p/l_o$  [%]
- Height of center of gravity:  $h_c$  [m]
- Driving axle: front - rear

Output performance:

- Maximal speed:  $V_{\max}$  [m/s]
- Maximal climb:  $u_{\max}$  [%]
- Climb in the highest gearing ratio:  $u_v$  [%]
- Time for reaching 100 km/h:  $t_{100}$  [s]

### CRITERION 1 - MAXIMAL SPEED

Maximal speed is one of basic parameters to estimate traction-dynamic characteristics of vehicle. Furthermore, to the average buyer of motor vehicle maximal speed is the main criterion for the selection of vehicle. As the criteria for comparison of motor vehicles, maximal speed could be observed as number of ways, through the balance of power, pull balance or dynamic characteristic. In the article, the maximal vehicle speed is calculated over pull balance, comparing the drive torque of the engine to the moments of external resistances on the flywheel, depending on angular velocity flywheel.

For vehicle motion, motive force must be equal or higher than the sum of resistances:

$$F_o = \sum R \quad (4)$$

$$F_o = R_f + R_v + R_u + R_a \quad (5)$$

$$\frac{M_e \cdot i_m \cdot i_o \cdot \eta}{r_d} = m \cdot g \cdot f \cdot \cos \alpha + kA \cdot V^2 + m \cdot g \cdot \sin \alpha + \left( m \cdot \frac{dV}{dt} + J_m \cdot \frac{dV}{dt} \cdot \frac{1}{r_d^2} \right) \quad (6)$$

- $M_e$  [Nm] - Engine torque on the flywheel
- $i_m$  [-] - Gearbox transmission ratio
- $i_o$  [-] - Final drive transmission ratio
- $m$  [kg] - Mass of the vehicle
- $f$  [-] - Rolling resistance coefficient
- $\alpha$  [°] - Road gradient
- $k$  [kg/m<sup>3</sup>] - Reduced drag coefficient
- $A$  [m<sup>2</sup>] - Equivalent frontal area of the vehicle
- $J_m$  [kgm<sup>2</sup>] - Moment of inertia of the drive wheel and rotating parts

The equation of the first criterion:

$$M_e = \frac{r_d}{i_m \cdot i_o \cdot \eta} \cdot \left[ m \cdot g \cdot f + kA \cdot V^2 \right] \quad (7)$$

Calculation of the maximum speed includes straight road without climbing, and since the speed is constant there is no acceleration. For selected maximum speed and transmission, program defines the torque curve of sum of resistance and compared it with the drive torque, seeking for their intersection, point B in Figure 2.

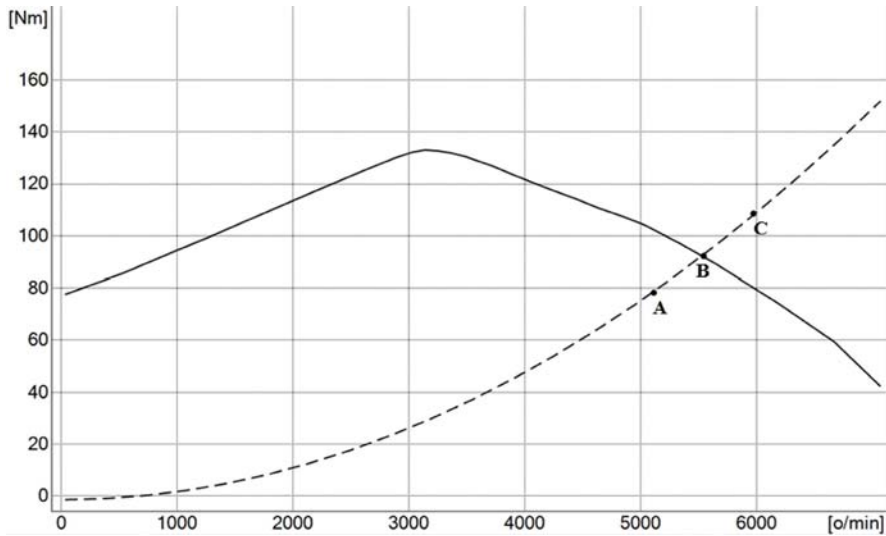


Fig. 2. Dependence drive torque and torque of sum of resistance from engine speed

If the point C on the resistance curve is determined by maximal speed from input parameters,  $M_{eC} > M_{eB}$ , it is evident that powertrain could not achieve desired speed for defined vehicle parameters. This means that for the given powertrain, criterion 1- the maximal speed of the vehicle is not fulfilled. If the point A on the resistance curve is determined by maximal speed from input parameters,  $M_{eA} < M_{eB}$ , even at maximum speed engine has a torque reserve, what provides that criterion 1 - the maximal speed of the vehicle is fulfilled.

Assessment, how maximal speed that vehicle can develop is close to the specified speed from input parameters is defined through coefficient of evaluation:

$$\delta_{ij}^I = \frac{M_{eB}}{M_{eA}} > 1 \quad (8)$$

Coefficient of evaluation index consists of:

- Upper index "I" - provides the number of criteria
- First under index "i" - engine number from the database
- Second under index "j" - gearbox number from the database

If the value of the coefficient of evaluation closer to 1, the powertrain is more responsive to the demands of designer according to the criterion of maximum speed, and if the coefficient is less than 1, criteria 1 - maximal speed cannot be achieved, so the possibility of considering the observed combination through further calculation rejects.

## CRITERION 2 - MAXIMAL CLIMB

Climbing resistance is a component of force of gravity and it is parallel to the road surface with the opposite direction to the direction of movement. Road climb is usually expressed through  $tg\alpha$ , and not through  $\sin\alpha$ :

$$u[\%] = 100 \cdot tg\alpha \quad (9)$$

For small values of road climb, for angles around  $10 - 12^\circ$ , it could be adopted without greater mistake  $tg\alpha \approx \sin\alpha$ .

For larger angles this approximation can lead to significant error.

Rolling resistance coefficient and road climb are the main parameters that define the characteristics of the road from the standpoint of the resistance.



Sum of resistances for maximal road climb,  $R_\psi$  is defined by expression (10):

$$R_\psi = G \cdot (f \cdot \cos \alpha_{\max} + \sin \alpha_{\max}) = G \cdot \psi_{\alpha \max} \quad (10)$$

$\psi_{\alpha \max}$  [-] - coefficient of sum of resistances

Motive force  $F_{o \max}$  or propulsive force of vehicle, is defined by expression (11):

$$F_{o \max} = \frac{M_{e \max} \cdot \eta \cdot i_o \cdot i_l}{r_d} \quad (11)$$

$i_l$  [-] - Transmission ratio in the first gear

The first condition that program sets is comparing value of motive force with value of sum of resistances. If  $F_{o \max} < R_\psi$  - the possibility of considering the observed combination through further calculation rejects.

The second condition involves the determination limit of adhesion, which requires defining normal load on the drive axle.

Normal force in the case of front drive axle:

$$Z_{p\varphi} = \frac{G \cdot \cos \alpha \cdot (l_z + h_c \cdot f)}{[l_o + (f + \varphi) \cdot h_c]} \quad (12)$$

Normal force in the case of rear drive axle:

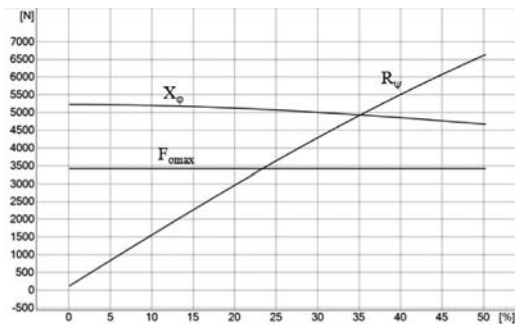
$$Z_{z\varphi} = \frac{G \cdot \cos \alpha \cdot (l_p - h_c \cdot f)}{[l - (f + \varphi) \cdot h_c]} \quad (13)$$

Longitudinal force of adhesion:

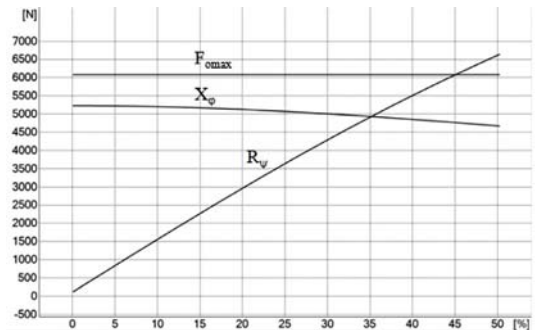
$$X_\varphi = \varphi \cdot Z_\varphi \quad (14)$$

After determination longitudinal force of adhesion, program is comparing it with sum of resistances. If  $X_\varphi < R_\psi$ , specified climb cannot be overcome due to the structural characteristics of the vehicle, or insufficient normal load on the drive axle, or insufficient coefficient of friction, whose value is adopted to match to the good asphalt ( $\varphi=0,85$ ). In that case, program shows in output data maximal climb that vehicle can overcome.

If both conditions are fulfilled it is necessary to determine the maximal climb  $u_{l \max}$  and compare it with required climb from input parameters  $u_{\max}$ , in order to define coefficient of the evaluation of this criterion.



**Fig. 3a.** Dependence sum of resistances, motive force and longitudinal force of adhesion from road climb (longitudinal force of adhesion greater than motive force)



**Fig. 3b.** Dependence sum of resistances, motive force and longitudinal force of adhesion from road climb (longitudinal force of adhesion less than motive force)

In Figures 3a. and 3b. is shown the method of determining maximal climb that vehicle can overcome.

In Figure 3a. the resistance curve  $R_\psi$  first intersects the curve of motive force  $F_{o \max}$ , which means that the maximal climb is limited by engine torque.

In Figure 3b. the resistance curve first intersects the curve of longitudinal force of adhesion, which means that the maximal climb is limited by the structural characteristics of the vehicle.

Coefficient of evaluation for second criterion indicates how many times is maximal climb that vehicle can overcome  $u_{lmax}$  larger than required climb from input parameters  $u_{max}$ .

$$\delta_{ij}^{II} = \frac{u_{lmax}}{u_{max}} \quad (15)$$

### CRITERION 3 - MAXIMAL CLIMB IN THE LAST GEAR

Criterion 3 estimates excess of traction upon overcoming a road climb in the last gear.

Block diagram, shown in Figure 4, presents a procedure for determining maximal climb for the vehicle in the last gear (for gearbox with five gears).

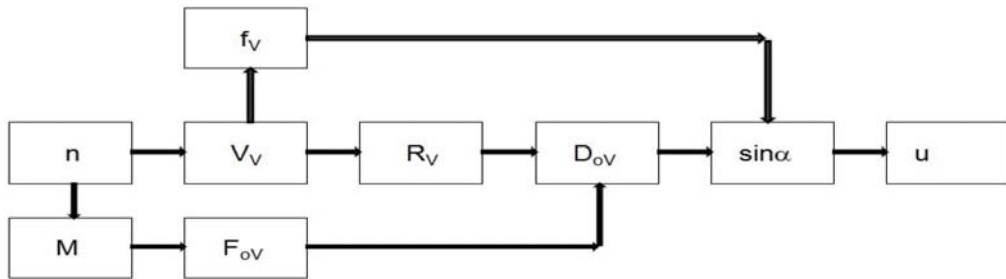


Fig. 4. - Block diagram for determining maximal climb in the last gear

$D_{ov}$  [-] - dynamic characteristic in the last gear

Soviet academician E.A. Chudakov introduced dynamic characteristic after noticing the problem that two cars with the same motive forces, at the same speed, but with different weights, couldn't have the same traction characteristics. Dynamic characteristic includes the impact of aerodynamic drag and weight of a vehicle, using the fact that all resistances, except aerodynamic drag, are proportional to the mass of the vehicle.

$$D_{ov} = \frac{F_{ov} - R_v}{G} \quad (16)$$

Maximal climb is obtained through expression (17) in dependence of dynamic characteristic and rolling resistance coefficient.

$$\sin \alpha = \frac{D_o - f \cdot \sqrt{1 - D_o^2 + f^2}}{1 + f^2} \quad (17)$$

The coefficient of evaluation of the third criterion is formed as a ratio of maximal climb that vehicle can overcome in the last gear  $u_{Vmax}$ , and the set climb from input parameters  $u_V$ , under the condition  $u_{Vmax} > u_V$ .

$$\delta_{ij}^{III} = \frac{u_{Vmax}}{u_V} \quad (18)$$

### CRITERION 4 - TIME FOR REACHING A SPEED OF 100KM/H

The fourth criterion is determination the time for reaching a speed of 100 km/h, because that performance is often referred in technical description of the vehicle.

Time for reaching a certain speed is usually obtained with graphic and analytical methods using dia-

gram  $1/a = f(V)$ . Result is calculated as integral of the areas  $t_z = \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{a} dV$ .

The article presents other method of calculation the time for reaching a certain speed, where that time presents sum of elemental time periods from 0.1s, starting from set speed on the diagram of dependence engine torque from engine speed, on the basis of which the motive force is calculated and then also the acceleration. The gear changes occur when the motive force in actual gear becomes lower than it would be in higher gear  $F_{oi} < F_{oi+1}$ .

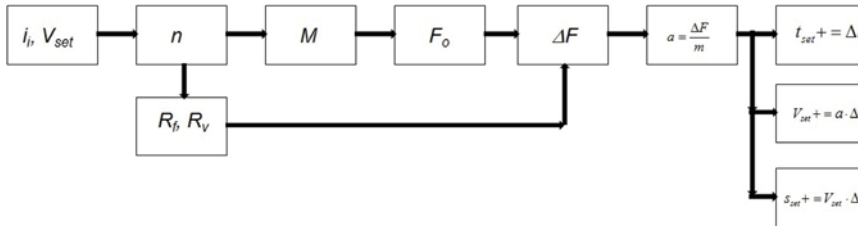


Fig. 5 - Block diagram for determining the time for reaching a certain speed

The criterion is fulfilled when obtained time is less than desired time in input parameters  $t_{100} > t_{100actual}$ . The coefficient of evaluation of the fourth criterion:

$$\delta_{21}^{IV} = \frac{t_{100}}{t_{100actual}} \quad (19)$$

### OUTPUT DATA OF THE PROGRAM

Based on the coefficients of evaluation the program calculates the final coefficient, which evaluates all four with weighting factors:

$$\delta_{ij} = 0,25 \cdot \delta_{ij}^I + 0,25 \cdot \delta_{ij}^{II} + 0,25 \cdot \delta_{ij}^{III} + 0,25 \cdot \delta_{ij}^{IV} \quad (20)$$

With the weighting factors some criteria can be evaluated with greater priority than the others. Because of that, the user has a possibility to change the weighting factors. All four criteria can be evaluated with equal priority, as shown with expression (20). Optimal combination of engine and gearbox is the one with the lowest value of final factor.

As a final result, the program shows a traction diagram for vehicle with optimal powertrain, as shown in Figure 6.

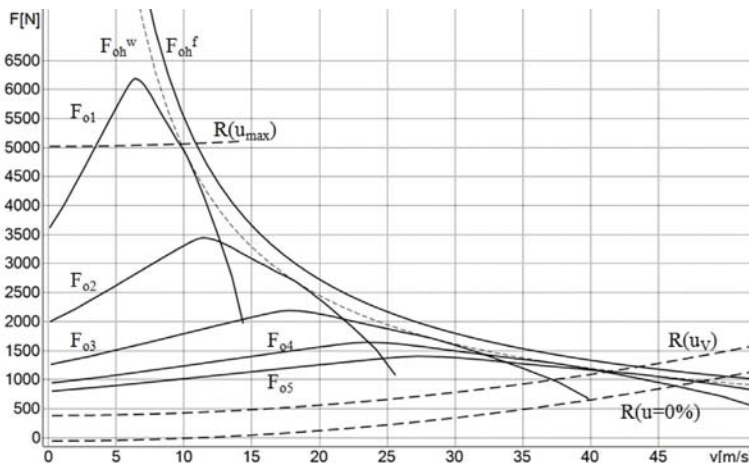


Fig. 6. Traction diagram for vehicle with optimal powertrain

Traction diagram presents graphic interpretation of pull balance, displaying resistance forces and motive forces in dependence of vehicle speed. It also shows the ideal characteristic of the vehicle - hyperbole of traction.

Hyperbole of traction on the flywheel:

$$F_{oh}^f = \frac{P_{e\max}}{V} \quad (21)$$

Hyperbole of traction on the drive wheels:

$$F_{oh}^w = \frac{P_{e\max} \cdot \eta}{V} \quad (22)$$

## CONCLUSION

The article presents a program for optimal choice the internal combustion engine and gearbox, for vehicle in the design stage toward traction and dynamic characteristics. Program is based on four criteria: maximal speed, maximal climb, maximal climb in the last gear, time for reaching a speed of 100 km/h, so accordingly determines the right combination of engine and gearbox from database.

The database is constantly updated with new engines and gearboxes. The program can be improved and supplemented with additional criteria. This program evaluates only traction and dynamic characteristics of vehicles that do not include fuel consumption. But since the CO<sub>2</sub> emission is global issue, directly related to the fuel consumption, in future program could be improved also with this criteria. In addition, it is possible to upgrade the program to evaluate other kinds of powertrain, not just internal combustion engines, than hybrid and electric drive, which are much closer to the ideal hyperbole of traction. Adjustment of certain criteria, introducing resistance trailers into consideration it is possible to adapt program to work with commercial vehicles also.

## REFERENCES

- [1] Janković D. Ivanović G. Todorović J. Rakićević B. Teorija kretanja motornih vozila, Mašinski fakultet, Beograd 2001.
- [2] Simić D. Motorna vozila, Naučna knjiga, Beograd 1977.
- [3] Janković. D. Uputstva za izradu vučnog proračuna motornih vozila, Mašinski fakultet, Beograd 1992.
- [4] Robert Bosch, Driving Stability System, Plochingen 2005.
- [5] Tomić M. Petrović S. Motori sa unutrašnjim sagorevanjem, Mašinski fakultet, Beograd 2009.

## PHYSICAL MODELS AND THE MATHEMATICAL MODELING OF THE COUPLED PROCESSES IN ENGINEERING SYSTEMS

### ФИЗИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЯЗНЫХ ПРОЦЕССОВ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

---

*The experimental correlations between physical characteristics in the coupled processes are time-consuming or not possible. Inability to obtain such equations and the introduction of the concepts of sustainability, destruction, resource of technical objects in a closed system is assumed. Physical models for coupled problems are formulated in the framework of open nonequilibrium systems on the basis of Onsager's approach. The modified boundary element method for solution coupled problems is offered. The modification is based on an analytical integration and differentiation of the influence functions and on the parallelization at all stages of solving problems at the level of the algorithm.*

---

#### ВВЕДЕНИЕ

Цели и задачи, возникающие при анализе поведения сложных технических систем, диктуют соответствующие требования к теории и расчетному аппарату. Если для оценки прочности крупных объектов, например, моста, достаточно использовать экспериментальные данные по деформации стандартного образца, а для математических расчетов использовать схему конечных разностей, метод конечных элементов или метод граничных элементов, то для соответствующего анализа конструкций в экстремальных условиях эксплуатации этого уже недостаточно. При воздействии различных физических полей, например, при сильных перепадах температур или изменении химического состава за счет диффузии примеси, могут происходить фазовые превращения, что приводит к изменению характеристик, необходимых для расчетов. Путь экспериментального определения этих изменений бесперспективен, а зачастую невозможен, поскольку эксперимент требует учета только одного вида воздействий при прочих равных условиях. При наличии прочих физических воздействий возникает проблема согласования, связанная с различными представительными объемами и характерными временами протекания механических и физических процессов для одного и того же объекта. Для математически корректной постановки связанной задачи необходимо согласование представительных объемов. Для сеточных методов, включая метод конечных элементов, это означает существенное увеличение числа узлов, а значит и порядка разрешающей системы линейных алгебраических уравнений. По этому пути сейчас идет развитие численных методов, полагаясь на бурное развитие компьютерной техники, но математика ограничивает возможности решения таких систем и, начиная с некоторого порядка, решения теряют смысл. Этот путь мало изучен и, по-видимому, тупиковый. Таким образом, при решении связанных задач, моделирующих взаимное влияние параллельно протекающих физических и механических процессов, возникают две основные трудности. Первая обусловлена изменением физико-механических характеристик материала при деформировании в условиях наложения физических полей. Вторая обусловлена разномасштабностью процессов, требующих значительных вычислительных затрат при решении. В работе предлагается один из вариантов решения двух поставленных задач - алгоритм решения связанной задачи деформирования с учетом физических воздействий. В основу алгоритма заложены физическая и математическая модели процесса, согласованные между собой. Для построения физической модели деформируемый образец рассматривается как открытая термодинамическая система, для которой внешние напря-

---

<sup>1</sup> Institute of Engineering Sciences, Ural Division RAS, Yekaterinburg, Russia

жения не отождествляются с внутренними [1]. Математическое моделирование основывается на модифицированном методе граничных элементов (ММГЭ) [2].

## ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Простейшей физической моделью деформирования является постулат Гука о линейной зависимости между напряжениями и деформациями. Согласно закону Гука, упругие деформации прямо пропорциональны вызывающим их внешним воздействиям. На основе этой модели была построена линейная теория упругости [3]. Однако переход к упругопластическому деформированию, который является фазовым переходом второго рода с образованием диссипативных структур (по Пригожину) [4], не позволяет использовать эту модель. Появляется точка, в которой отсутствует производная - это точка бифуркации. Поэтому для изучения упругого участка диаграммы деформирования образца, при решении задач теории малых упругопластических деформаций, предлагается использовать синергетический подход в рамках нелинейной теории упругости. В этом случае деформируемое тело рассматривается как открытая термодинамическая система с неквадратичным упругим потенциалом, а пластическая деформация как диссипативный процесс, основанный на двух аддитивных механизмах - дислокационном упрочнении и разупрочнении от образования несплошностей. При этом в качестве внутренней обобщенной силы будет выступать деформация  $\varepsilon$ , в качестве внутреннего обобщенного потока - внутреннее напряжение  $\sigma$ , а приложенное внешнее напряжение  $\sigma_p$  будет играть роль внешнего обобщенного потока.

Поскольку процесс деформирования является неравновесным, то для него справедливо уравнение Онзагера, устанавливающее связь между обобщенным потоком и обобщенной силой

$$\sigma(\varepsilon) = L(\varepsilon)\varepsilon, \quad (1)$$

где  $L(\varepsilon)$  - коэффициент взаимности Онзагера.

Далее полагается, что коэффициент  $L(\varepsilon)$  нелинейно зависит от обобщенной силы. Коши предложил представлять зависимость между напряжениями и упругими деформациями в виде степенных рядов. Согласно гипотезе Коши, было принято, что в упругой области зависимость  $L(\varepsilon)$  имеет вид:

$$L(\varepsilon) = E(1 - q\varepsilon + m\varepsilon^2), \quad (2)$$

где  $E$  - модуль упругости материала;  $q$  и  $m$  - коэффициенты.

Разложение функции  $L(\varepsilon)$  было ограничено квадратичным слагаемым, т.к. вклад слагаемых с более высокими степенями, в условиях малых деформаций, незначителен. Поскольку геометрическая линейность в рамках данной работы сохраняется, то предположение о зависимости (2) не приводит к классической нелинейной теории упругости.

Согласно построенной модели, отклик материала в упругой области определяется упругим потенциалом четвертой степени относительно обобщенных сил, а внешняя энергия определяется внешней нагрузкой  $\sigma_p$ , величину которой можно регулировать. Таким образом, при аппроксимации (2) и стационарном состоянии, поведение термодинамической системы зависит от двух постоянных величин. Следуя качественному анализу поведения открытых термодинамических систем в стационарном режиме [5], можно определить не только коэффициенты  $q$  и  $m$ , но и трижды вырожденную критическую точку, выше которой происходит хрупкое разрушение материала. Окрестность критической точки является метастабильной областью, где в любой момент времени может произойти переход в пластическую область. Пусть  $\varepsilon_c$  - деформация в критической точке, тогда

$$\varepsilon_c = \frac{3P^*}{E}; \quad q = \frac{E}{3P^*}; \quad m = \frac{E^2}{27P^{*2}}. \quad (3)$$

Потенциальная ветвь упругого деформирования на диаграмме напряжение - деформация описывается зависимостью:

$$\sigma = E \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{E}{P^*} \varepsilon + \frac{1}{27} \frac{E^2}{P^{*2}} \varepsilon^2 \right) \varepsilon. \quad (4)$$

На стадии диссипативного течения, после фазового перехода второго рода, определяющим являются движение и размножение дислокаций. С ростом деформации увеличивается плотность дислокаций, образуются их скопления, происходит упрочнение материала. С другой стороны, с увеличением плотности дислокаций затрудняется их движение, что стимулирует возникновение и рост микродефектов. Для описания диссипативной ветви диаграммы деформирования образца используется свойство аддитивности процессов дислокационного упрочнения и разупрочнения.

Принято считать, что упрочнение материала при пластической деформации обусловлено непрерывным повышением плотности дислокаций в процессе эволюции дислокационной структуры [7,8]. Экспериментально установлено [8], что зависимость между напряжением  $\sigma$  и плотностью дислокаций  $\rho_D$  имеет вид:  $\sigma \sim \sqrt{\rho_D}$ . Деформация  $\varepsilon$  определяется средней длиной пробега дислокаций и их плотностью, т.е.  $\varepsilon \sim \rho_D$ . Таким образом, механизм дислокационного упрочнения выражается параболической зависимостью между напряжением и деформацией

$$\sigma = g + h\sqrt{\varepsilon}. \quad (5)$$

Здесь  $g$  и  $h$  - величины, для которых известна их зависимость от параметров состояния материала (температуры, концентрации примеси, размера зерна и др.).

Процесс разупрочнения определяется образованием микронесплошностей. В предположении, что разупрочнение пропорционально поврежденности  $\omega$ , что соответствует концепции Качанова [6], получаем простое кинетическое уравнение для описания разупрочнения

$$\frac{d\omega}{d\varepsilon} = \alpha\omega. \quad (6)$$

Выразим решение уравнения (6) через напряжение, получим:

$$\sigma = \sigma_0 \exp(\alpha\varepsilon). \quad (7)$$

В области диссипативного течения функция (7) очень близка к более простой квадратичной зависимости, которая и используется в дальнейшем.

Окончательно, для одномерного случая в области диссипативного течения зависимость напряжение-деформация имеет вид, согласно [2]:

$$\sigma = \sigma_T + \frac{4(\sigma_B - \sigma_T)}{3\sqrt{\varepsilon_B - \varepsilon_T}} \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_T} - \frac{(\sigma_B - \sigma_T)}{3(\varepsilon_B - \varepsilon_T)^2} (\varepsilon - \varepsilon_T)^2. \quad (8)$$

Здесь  $\sigma_T$  - предел текучести материала при растяжении;  $\sigma_B$  - временное сопротивление материала на разрыв.

Под физической характеристикой материала  $\sigma_T$  подразумевается точка фазового перехода второго рода для физической модели. В действительности, точки, соответствующие фазовому переходу на кривой нагружения, отличаются от предела текучести, который является условной величиной, а в классической модели может быть угловой точкой. Смысл второй физической величины  $\sigma_B$  становится ясным, если рассматривать точку на диссипативной ветви диаграммы нагружения образца, в которой вклад разупрочнения и упрочнения становится одинаковым. В этой точке касательный модуль к кривой нагружения равен нулю, что соответствует общепринятому понятию максимума.

## ДЕФОРМАЦИОННЫЙ РЕСУРС И РАЗРУШЕНИЕ

Согласно предлагаемой модели поведение образца (материальной точки) определяется внешним воздействием и внутренним откликом материала на каждой стадии. Под разрушением материала в точке будем понимать критическую ситуацию, когда энергия внешнего воздействия сравнивается с внутренним потенциальным и диссипативным энергетическим откликом материала

ла. Текущий ресурс в каждый момент деформации будет определяться разностью энергий внешнего воздействия и внутренней реакции материала.

Энергия внешнего воздействия определяется формулой

$$W_p = \int_0^t \sigma_p(\tau) \varepsilon(\tau) d\tau.$$

На первой стадии упругий потенциал определен формулой

$$\Psi_e = \int_0^\varepsilon E(1 - q\gamma + m\gamma^2) \gamma d\gamma = \frac{E\varepsilon^2}{2} - \frac{Eq\varepsilon^3}{3} + \frac{Em\varepsilon^4}{4}. \quad (9)$$

Поведение системы на этой стадии будет определяться разностью

$$W_{res} = W_p - \Psi_e,$$

которую можно назвать остаточным ресурсом.

На второй стадии дислокационного упрочнения при образовании диссипативных структур энергия затрачиваемая материалом определяется вторым слагаемым функции (8), тогда энергетический отклик определяется формулой

$$\Psi_{DIS} = \int_{\varepsilon_e}^\varepsilon \left[ \frac{\sigma_1 - \sigma_T}{(\varepsilon_B - \varepsilon_T)^{1/2}} (\gamma - \varepsilon_T)^{1/2} \right] d\gamma \quad (10)$$

$$\Psi_{DISSIP} = \int_{\varepsilon_{DIS}}^\varepsilon \left[ \frac{\sigma_1 - \sigma_T}{(\varepsilon_B - \varepsilon_T)^{1/2}} (\gamma - \varepsilon_T)^{1/2} - \frac{\sigma_2 - \sigma_T}{(\varepsilon_B - \varepsilon_T)^2} (\gamma - \varepsilon_T)^2 \right] d\gamma. \quad (11)$$

На последней стадии разупрочнения поведение системы определяется третьим слагаемым функции (8), а энергия интегралом

$$\Psi_{SOFT} = \int_{\varepsilon_{DISSIP}}^\varepsilon \left[ \frac{\sigma_2 - \sigma_T}{(\varepsilon_B - \varepsilon_T)^2} (\gamma - \varepsilon_T)^2 \right] d\gamma \quad (12)$$

Текущий остаточный ресурс системы определяется разностью

$$\Psi_{RES} = W_p - \Psi_e - W_{DIS} - W_{DISSIP} - W_{SOFT} \quad (13)$$

Уравнение  $\Psi_{RES} = 0$  позволяет определить значение деформации  $\varepsilon_{fr}$ , при котором произойдет разрушение. Отметим, разрушение может произойти на любой из рассматриваемых стадий, тогда соответствующие слагаемые в (13) отсутствуют.

После  $\sigma_B$  диаграмма  $\sigma \sim \varepsilon$  приходит в неустойчивое состояние и для вычисления распределенных характеристик необходимо применение аппарата статистической механики, однако для вычисления интегральных характеристик, входящих в (13) детерминированные зависимости (8) могут быть достаточны для первого приближения.

## ПРИМЕР

В качестве примера рассмотрено испытание цилиндрического образца из стали X70. Экспериментальные данные получены из опытов на растяжение на серво-гидравлической испытательной машине INSTRON.

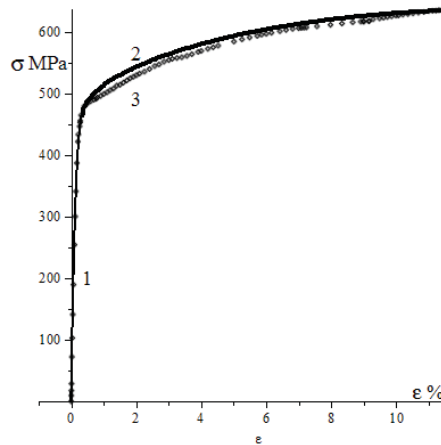
Испытания проводились при следующих значениях параметров: длина образца  $l=0.03$  м; диаметр образца  $d=0.0048$  м;  $E=2.2 \cdot 10^5$  МПа;  $\nu=0.28$ ;  $\sigma_T=478$  МПа;  $\sigma_B=618$  МПа;  $\varepsilon_B=11.4$

На рис. 1 представлено сравнение экспериментального графика зависимости  $\sigma \sim \varepsilon$  и модельной кривой согласно формулам (4) и (8).

Модельная диаграмма полностью определяется двумя точками фазовой плоскости  $\{\sigma_T, \varepsilon_T\}$ ,  $\{\sigma_B, \varepsilon_B\}$  и условиями непрерывности, вытекающими из требований фазовых переходов



второго рода с образованием диссипативных структур [4]. Согласно гипотезе «единой кривой», зависимость (8) может быть перенесена на двумерный случай с заменой  $\sigma$  и  $\varepsilon$  на интенсивность касательных напряжений и интенсивность деформаций сдвига, соответственно. Многочисленные сравнения для различных металлов в широком интервале изменения температур и концентраций диффундирующего водорода приведены в [2].



**Рис. 1.** Кривые нагружения для стали X70:  
 ••••• - экспериментальный график;  
 --- модельная кривая.

Для удобства ресурс можно нормировать величиной

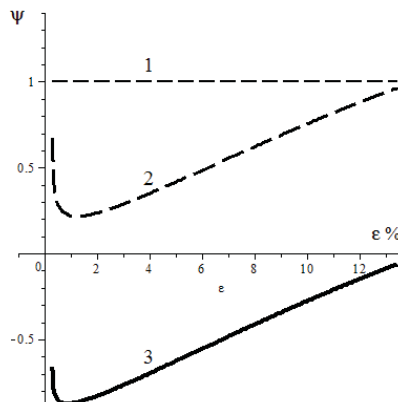
$$W_p = \sigma_p \cdot \varepsilon_s,$$

где  $\sigma_p$  - внешняя распределенная нагрузка. Тогда остаточный ресурс запишется в виде

$$0 \leq Re := \frac{W_p - \Psi_e - \Psi_{DIS} - \Psi_{DISSIP} - \Psi_{SOFT}}{W_p} \leq 1$$

и  $Re = 1$  до начала деформирования,  $Re = 0$  в момент разрушения.

Окончательные диаграммы для ресурса имеют вид Рис. 2.



**Рис. 2.** 1 -  $\frac{W_p}{W_p}$ ; 2 -  $\frac{\Psi_e + \Psi_{DIS} + \Psi_{DISSIP}}{W_p}$ ; 3 -  $Re$

Здесь для наглядности ресурс изображен с обратным знаком.

## МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МГЭ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В качестве примера рассмотрим краевую задачу теории упругости в стандартной постановке: определить компоненты вектора перемещения  $u_i$ , тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$  и тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ , которые удовлетворяют в области  $\Omega$  системе уравнений

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (14)$$

и заданным граничным условиям

$$\text{на поверхности } S_f: \sigma_{ij}n_j = f_i = f_i^*, \quad \text{на поверхности } S_u: u_i = u_i^*. \quad (15)$$

Здесь  $b_i$  - известные массовые силы,  $\sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ , по повторяющемуся индексу везде производится суммирование от 1 до 2 для двумерной задачи и от 1 до 3 - для трехмерной,  $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ ,  $\mu$  - модуль упругости при сдвиге,  $\nu$  - коэффициент Пуассона,  $\delta_{ij}$  - единичный тензор,  $S = S_u \cup S_f$  - поверхность области  $\Omega$ ,  $n_i$  - вектор внешней нормали к поверхности,  $f_i^*$  и  $u_i^*$  - известные граничные значения поверхностных напряжений и перемещений.

Интегральная форма примет следующий вид:

$$u_i(\xi) = \int_{S_f} [u_{ij}^*(\xi, x) f_j^*(x) - f_{ij}^*(\xi, x) u_j(x)] dS(x) + \\ + \int_{S_u} [u_{ij}^*(\xi, x) f_j(x) - f_{ij}^*(\xi, x) u_j^*(x)] dS(x)$$

где

$$u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)\mu} [(3-4\nu)\ln(r)\delta_{ij} - \nabla_i \mathbf{r} \nabla_j \mathbf{r}], \\ f_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) = \frac{-1}{8\alpha\pi(1-\nu)\mathbf{r}^\alpha} \left\{ [(1-2\nu)\delta_{ij} + \beta \nabla_i \mathbf{r} \nabla_j \mathbf{r}] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(\nabla_i r n_j - \nabla_j r n_i) \right\}$$

Пусть граница  $S$  области  $\Omega$  некоторым образом разбита на граничные элементы. Примем сначала простейший вид интерполяции поверхностных напряжений и перемещений - будем считать компоненты векторов поверхностного напряжения и перемещения постоянными на каждом элементе и отнесем их к узловым точкам, помещенным в середины элементов. Пусть поверхность типа  $S_f$  содержит  $N$  элементов, которые мы обозначим  $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(N)}$ , а поверхность типа  $S_u$  содержит  $M$  элементов, которые мы обозначим  $S^{(N+1)}, S^{(N+2)}, \dots, S^{(N+M)}$ . В соответствии с интегральными уравнениями, перемещение  $u_i^{(p)}$  узла  $x^{(p)}$ , лежащего на элементе  $S^{(p)}$ , можно выразить следующим образом:

$$\frac{1}{2} u_i^{(p)} = \sum_{q=1}^N \left( f_j^{(q)*} \int_{S^{(q)}} u_{ij}^*(x^{(p)}, x) dS(x) - u_j^{(q)} \int_{S^{(q)}} f_{ij}^*(x^{(p)}, x) dS(x) \right) + \\ + \sum_{q=N+1}^{N+M} \left( f_j^{(q)} \int_{S^{(q)}} u_{ij}^*(x^{(p)}, x) dS(x) - u_j^{(q)*} \int_{S^{(q)}} f_{ij}^*(x^{(p)}, x) dS(x) \right), \quad i=1, 2, p=1, \dots, M+N. \quad (16)$$

Здесь  $f_j^{(q)*}$ ,  $q=1, \dots, N$  - известные из граничных условий значения компонентов поверхностного напряжения,  $f_j^{(q)}$ ,  $q=N+1, \dots, N+M$  - неизвестные значения,  $u_j^{(q)*}$ ,  $q=N+1, \dots, N+M$  - известные из граничных условий значения компонентов перемещения узла,  $u_j^{(q)}$ ,  $q=1, \dots, N$  - неизвестные значения. Соотношения (16) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений  $u_j^{(q)}$  и  $f_j^{(q)}$ . Коэффициентами системы являются интегралы  $\int_{S^{(q)}} u_{ij}^*(x^{(p)}, x) dS(x)$  и  $\int_{S^{(q)}} f_{ij}^*(x^{(p)}, x) dS(x)$  от компонентов функций  $u_{ij}^*$  и  $f_{ij}^*$  по граничным

элементам для точек влияния, помещенных в узловые точки  $x^{(p)}$ . После решения системы уравнений (16) перемещение и деформации в любой внутренней точке  $\xi$  области  $\Omega$  могут быть вычислены по формулам

$$u_i(\xi) = \sum_{q=1}^{N+M} f_j^{(q)} \int_{S^{(q)}} u_j^*(\xi, x) dS(x) - \sum_{q=1}^{N+M} u_j^{(q)} \int_{S^{(q)}} f_{ij}^*(\xi, x) dS(x)$$

$$\varepsilon_{ij}(\xi) = \sum_{q=1}^{N+M} f_k^{(q)} \int_{S^{(q)}} w_{ijk}^*(\xi, x) dS(x) - \sum_{q=1}^{N+M} u_k^{(q)} \int_{S^{(q)}} g_{ijk}^*(\xi, x) dS(x)$$

Напряжения  $\sigma_{ij}(\xi)$  вычисляются по найденным деформациям  $\varepsilon_{ij}(\xi)$  с помощью соотношения (14).

Таким образом, для реализации описанного метода необходимо вычислять криволинейные интегралы по граничным элементам от компонентов функций влияния и их пространственных производных для различных точек влияния, лежащих как на границе, так и внутри области. Стандартный подход к решению предполагает численное вычисление этих интегралов в каждой конкретной задаче. Более универсальным подходом является получение аналитических формул для точного вычисления всех необходимых интегралов. Для прямолинейных элементов с постоянной аппроксимацией нужно получить соотношения для вычисления следующих интегралов:

$$I(u_{ij}^*) = \int_{AB} u_{ij}^*(\xi, x) dS(x), \quad I(f_{ij}^*) = \int_{AB} f_{ij}^*(\xi, x) dS(x),$$

$$I(u_{ij,k}^*) = \int_{AB} \frac{\partial u_{ij}^*(\xi, x)}{\partial \xi_k} dS(x), \quad I(f_{ij,k}^*) = \int_{AB} \frac{\partial f_{ij}^*(\xi, x)}{\partial \xi_k} dS(x), \quad (17)$$

где  $AB$  - произвольный отрезок на плоскости,  $\xi$  - произвольная точка влияния.

Для вывода компактных формул аналитического интегрирования использована следующая процедура.

Расчетному блоку из произвольного прямолинейного граничного элемента и произвольной точки влияния ставится в соответствие блок из специального «базового» элемента и соответствующей точки влияния, так чтобы интегралы для двух блоков были связаны. В результате для вычисления интегралов по произвольному отрезку для произвольной точки влияния надо будет лишь специальным образом подобрать новую точку влияния и вычислить по полученным элементарным формулам интегралы по базовому элементу.

Рассмотрим на плоскости отрезок  $AB$ , где  $A(A_1, A_2)$  и  $B(B_1, B_2)$  - произвольные точки, и точку влияния  $\xi(\xi_1, \xi_2)$  (рис. 3). Мы предполагаем, что при обходе границы против часовой стрелки движение

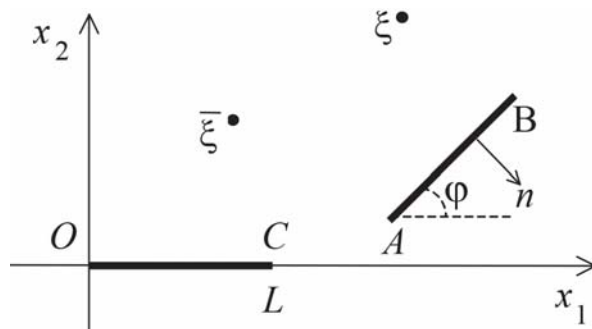


Рис. 3. Базовый элемент

вдоль элемента  $AB$  происходит от точки  $A$  к точке  $B$ , т.е. внешняя нормаль ориентирована так, как показано на Рис. 3. Действующие на отрезке  $AB$  перемещения  $u = (u_1, u_2)$  и поверхностные напряжения  $f = (f_1, f_2)$  вызывают в точке  $\xi$  некоторое перемещение  $u(\xi) = (u_1(\xi), u_2(\xi))$ . Осуще-

свим преобразование координат, сохраняющее расстояния и отображающее точку  $A$  в начало координат  $O(0,0)$ , а точку  $B$  - в точку  $C(L,0)$ , где  $L = \sqrt{(B_1 - A_1)^2 + (B_2 - A_2)^2}$  - длина отрезка  $AB$ . Такое преобразование является комбинацией параллельного переноса и поворота на угол  $\varphi$  (рис. 3). Произвольная точка  $x(x_1, x_2)$  на плоскости отображается в точку  $\bar{x}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ , связанную с ней соотношениями

$$x = Q\bar{x} + A, \quad \bar{x} = Q^{-1}(x - A), \quad (18)$$

где  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ ,  $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$  - матрица поворота,  $Q^{-1} = Q^T$ ,

$$q_{11} = q_{22} = \frac{B_1 - A_1}{L} = \cos \varphi, \quad q_{12} = -q_{21} = -\frac{B_2 - A_2}{L} = -\sin \varphi.$$

Используя эти соотношения, можно установить следующую связь между интегралами от функций влияния по отрезку  $AB$  и соответствующими интегралами по отрезку  $OC$  для точки влияния  $\bar{\xi}$ :

$$\begin{pmatrix} I(u_{11}^*) & I(u_{12}^*) \\ I(u_{21}^*) & I(u_{22}^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{I}(u_{11}^*) & \bar{I}(u_{12}^*) \\ \bar{I}(u_{21}^*) & \bar{I}(u_{22}^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I(f_{11}^*) & I(f_{12}^*) \\ I(f_{21}^*) & I(f_{22}^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{I}(f_{11}^*) & \bar{I}(f_{12}^*) \\ \bar{I}(f_{21}^*) & \bar{I}(f_{22}^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix}$$

здесь

$$\bar{I}(u_{ij}^*) = \int_{OC} u_{ij}^*(\bar{\xi}, x) dS(x), \quad \bar{I}(f_{ij}^*) = \int_{OC} f_{ij}^*(\bar{\xi}, x) dS(x),$$

Для вычисления интегралов по отрезку  $OC$  произвольной длины  $L$  и произвольной точки влияния  $\bar{\xi}$  получены простые аналитические формулы:

$$\bar{I}(u_{11}^*) = c_1 \left( (c_2 + 1)(\bar{\xi}_2 Q_3 - L) + \frac{c_2}{2}(L Q_1 + \bar{\xi}_1 Q_2) \right),$$

$$\bar{I}(u_{12}^*) = -\frac{1}{2} c_1 \bar{\xi}_2 Q_2, \quad \bar{I}(u_{22}^*) = c_1 \left( (c_2 - 1) \bar{\xi}_2 Q_3 + c_2 \left( \frac{1}{2}(L Q_1 + \bar{\xi}_1 Q_2) - L \right) \right),$$

$$\bar{I}(f_{11}^*) = c_3 \left( (c_4 + 1) Q_3 + \bar{\xi}_2 d_1 \right), \quad \bar{I}(f_{12}^*) = c_3 \left( -\frac{1}{2} c_4 Q_2 - \bar{\xi}_2 d_2 \right), \quad \bar{I}(f_{21}^*) = c_3 \left( \frac{1}{2} c_4 Q_2 - \bar{\xi}_2 d_2 \right),$$

$$\bar{I}(f_{22}^*) = c_3 \left( (c_4 + 1) Q_3 - \bar{\xi}_2 d_1 \right)$$

где

$$c_1 = -\frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)}, \quad c_2 = 3-4\nu, \quad c_3 = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)}, \quad \tilde{n}_4 = 1-2\nu,$$

$$Q_1 = \ln \left( (\bar{\xi}_1 - L)^2 + \bar{\xi}_2^2 \right), \quad Q_2 = \ln \left( \bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_2^2 \right) - \ln \left( (\bar{\xi}_1 - L)^2 + \bar{\xi}_2^2 \right), \quad Q_3 = \arctg \left( \frac{\bar{\xi}_1}{\bar{\xi}_2} \right) - \arctg \left( \frac{\bar{\xi}_1 - L}{\bar{\xi}_2} \right),$$

$$d_1 = \frac{\bar{\xi}_1 - L}{(\bar{\xi}_1 - L)^2 + \bar{\xi}_2^2} - \frac{\bar{\xi}_1}{\bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_2^2}, \quad d_2 = \bar{\xi}_2 \left( \frac{1}{\bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_2^2} - \frac{1}{(\bar{\xi}_1 - L)^2 + \bar{\xi}_2^2} \right)$$

Ускорение счета при переходе от численного интегрирования к аналитическому для упругой задачи приведено в таблице

Таблица 1.

$n/p$	$k, M$	$t_1^i, \text{с}$	$t_1^a, \text{с}$	$k_1^y$	$t_3^i, \text{с}$	$t_3^a, \text{с}$	$k_3^y$
1	200; 4	4737	1.472	3218	418	0.220	1900
2	200; 4	2370	0.736	3220	224	0.218	1027
4	200; 4	1210	0.367	3297	108	0.246	440
8	200; 4	614	0.221	2778	59	0.328	180
16	200; 4	297	0.117	2538	29	0.393	74
32	200; 4	148	0.112	1325	16	2.047	7.8
2	500; 10	15157	5.0	3031	3292	0.815	4039
4	500; 10	7491	2.4	3121	1657	0.739	2242
8	500; 10	3746	1.2	3121	829	0.708	1171
16	500; 10	1874	0.6	3123	433	0.844	513

$n/p$  - отношение по рядка системы к числу используемых процессоров,

$k$  - число точек разбиения на каждой из  $M$  частей границы области,

$t_1$  - время вычисления интегралов от компонентов функций Грина для граничных точек

$t_3$  - время вычисления интегралов от функций Грина и их производных для внутренних точек области:

$t_1^i, t_3^i$  - время численного интегрирования,

$t_1^a, t_3^a$  - время вычисления интегралов по аналитическим формулам,

$t_1^y, t_3^y$  - соответствующие коэффициенты ускорения.

Как видно из таблицы, ускорение счета примерно в 3000 раз, что очевидно. Подстановка точку в известную формулу быстрее, чем численное интегрирование  $N$  сингулярных интегралов.

Подобные формулы получены для более точного вычисления интегралов, использующие линейный разрывный элемент и интерполяцию на дуге окружности.

## ПРИМЕРЫ

Расчет напряженно-деформированного состояния в упругих областях, имеющих геометрические дефекты различной формы, является важной задачей при оценке надежности конструкций. Создание компьютерных программ, способных быстро оценивать состояние объекта при изменении условий эксплуатации, позволит вовремя оценить риск возникновения необратимых процессов, таких как пластическая деформация или разрушение. Предложенные в предыдущей главе алгоритмы решения задач могут служить базой для таких программ. В данном параграфе на примерах задач деформирования областей с дефектами различной конфигурации продемонстрирована эффективность предложенного метода решения.

## ПЛАСТИНА С ТРЕЩИНОЙ

Деформация протекает в условиях плоского напряженного состояния, длина пластины  $a = 20$  м, ширина пластины  $2b = 2$  м, длина трещины  $2d = 0.2$  м,  $f = 1 \text{ Н/м}^2$ . Параметры упругости были приняты следующими:  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $\nu = 0.33$ .

Преимущества ММГЭ проявляются при решении задач для областей с трещинами. В этом случае аналитически получены лишь решения вблизи вершины трещины. Зачастую этого достаточно, однако, если необходимо найти решение в некоторой конечной области, эти решения нужно каким-то образом сопрягать с решениями вдали от трещины. Правая асимптотика стремится к нулю, что не правильно, классическое решение не аналитическое. Метод позволяет получить непрерывное решение во всей области, и которое у вершины трещины близко к известному аналитическому решению.

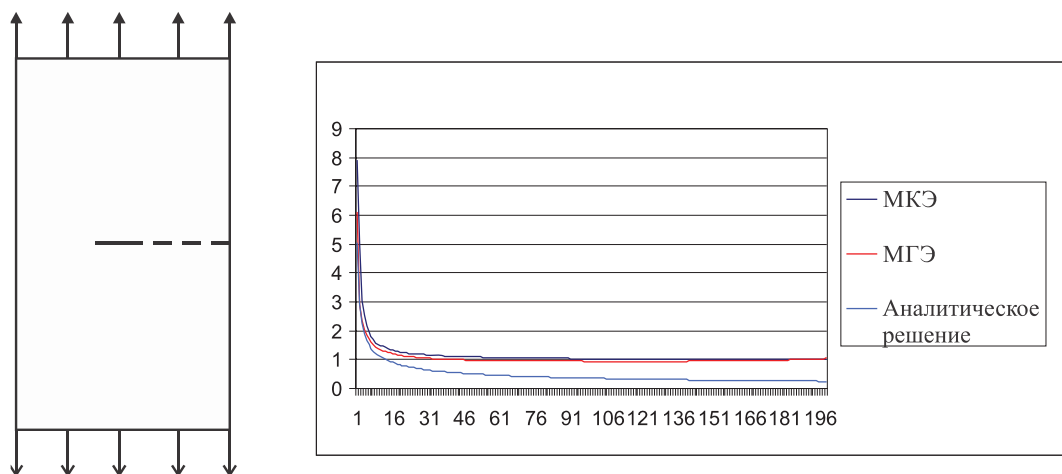


Рис. 4. Отношение  $\sigma_{yy}/\sigma_p$  растягивающих и внешних напряжений

## ВЫВОДЫ

Таким образом, была построена физическая модель отклика материала на нелинейное воздействие в рамках открытой неравновесной термодинамической системы. Был выполнен переход к согласованной математической модели для представительного объема. Использование ММГЭ позволило свести решение задачи во внутренних точках области  $\Omega$  к решению на границе  $S$  и получить непрерывные деформации в любой точке рассматриваемой области. Влияние пластической деформации было определено через общую диссипацию энергии, что не требовало расчета полного распределения пластической деформации. Таким образом, в результате применения предложенного алгоритма были существенно снижены временные затраты на решение краевой задачи.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 13-01-00516

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Федотов В.П. Термомеханический подход к моделированию диаграммы нагружения // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2013. №2. С.53-62.
- [2] Федотов В.П., Спесак Л.Ф. Модифицированный метод граничных элементов в задачах механики, теплопроводности и диффузии. Екатеринбург: УрО РАН, 2009. 164 с.
- [3] Хан Х. Теория упругости: Основы линейной теории упругости и ее применения. М.: Мир, 1988. 344 с.
- [4] Пригожин И., Кондепуди Д. Современная термодинамика от тепловых двигателей до диссипативных структур. М.: Мир, 2002. 461 с.
- [5] Томпсон Дж.М. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М.: Мир, 1985. 256 с.
- [6] Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М: Наука, 1974.312 с.
- [7] Мешков Ю.Я. Физические основы разрушения стальных конструкций. Киев: Наук.думка, 1981. 238 с.
- [8] Хоникомб Р. Пластическая деформация металлов. М.: Мир, 1972. 406 с.
- [9] Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 528 с.

## REQUIREMENTS FOR AN INFORMATIONAL MODEL OF A SCIENTIFIC HERITAGE DIGITAL LIBRARY

### ТРЕБОВАНИЯ К ИНФОРМАЦИОННОЙ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОННОЙ БИБЛИОТЕКИ ПО НАУЧНОМУ НАСЛЕДИЮ

---

*The article considers functional requirements for a model of Scientific Heritage Digital Library (SHDL) and architecture of its organization. Requirements for a model of SHDL is defined, firstly, by the information needs of researchers, and secondly, by maintaining long-term reliability of data storage. The identification of information resources is very important. Also it is necessary to support the search by attributes, full-text search, browse by categories and dictionary-classifiers and it is desirable to support semantic search. Based on the stated requirements for the DL, the layered architecture of its organization is proposed.*

---

#### ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается технологический подход к созданию типовой модели информационной системы (ИС), предназначенной для поддержки электронной библиотеки (ЭБ) по научному наследию. Документы, связанные с научным наследием, до нынешнего века преимущественно хранились в государственных и частных архивах, библиотеках или составляли содержание различного рода коллекций. Качественное обслуживание этих ресурсов требовало значительных материальных затрат и (или) энтузиазма индивидуумов и не могло обеспечить полнофункционального доступа исследователей к ним. Современный подход к организации работ с материалами научного наследия связан в первую очередь с мировой тенденцией перевода разнородной информации с бумажных носителей в цифровую форму и с созданием крупномасштабных информационных хранилищ. Представление информации и знаний в электронной форме позволяет принципиально по-иному создавать, хранить, организовывать доступ и использовать информацию. Наряду с этим формируется новый класс информационных систем, предназначенных для управления электронными информационными ресурсами - электронные библиотеки [1]. При этом возникает целый ряд новых задач, в их числе - организация разграниченного пользовательского доступа к собранной информации и предоставления пользователю непосредственно самой информации. И здесь главным моментом является обеспечение интероперабельности создаваемых информационных систем (обеспечение способности двух или более систем обмениваться информацией и правильно ее использовать в совместной работе), что приводит к требованию унификации описаний, соответствия всех интерфейсов и протоколов соответствующим мировым стандартам [1, 2].

#### НАУЧНОЕ НАСЛЕДИЕ

Под научным наследием будем понимать совокупность продуктов деятельности научного сообщества: это опубликованные результаты научных исследований и экспериментов (публикации, проекты и др.), библиографические и фактографические базы данных, сведения об ученых и их достижениях и научно-организационной деятельности. Сюда же относится большое количество неопубликованных документов, таких как отчеты, письма, воспоминания, записки, фотоматериалы. Эти ресурсы представляют значительный интерес не только для научных сотрудников и других членов мирового научного сообщества, но и для культурных и деловых слоев любого

---

<sup>1</sup> The State Public Scientific Technological Library of the SB RAS, Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russia

современного социума. В настоящий момент значительная часть информационных ресурсов по научному наследию труднодоступна широкому кругу общественности. Определенная часть соответствующей информации представлена в Интернет, однако материалы существенно разрознены, плохо систематизированы и структурированы. При создании их описаний недостаточное внимание уделяется вопросам интероперабельности - слабо применяются соглашения и рекомендации по стандартизации представления документов и средства интеграции разнородных информационных ресурсов. Необходимость обеспечения эффективного использования ресурсов по научному наследию делает актуальной задачу интеграции разнородных данных.

Для документов ИС по научному наследию важной проблемой является идентификация, определяющая конкретно для каждого факта (суждения о документе), кто является его автором, где и когда он получен, с какими другими фактами он связан. Для этого необходима поддержка различных уровней абстракции при описании информации - от кратких до очень подробных описаний информационных объектов. Необходимы также поддержка поиска по атрибутам, полнотекстового поиска, желательны семантического поиска, просмотр ресурсов по категориям, ключевым терминам и словарям-классификаторам.

Для наиболее полного удовлетворения потребностей научного сообщества необходимо создание интеллектуальных ИС, в качестве составных компонентов которых выступают, наряду с традиционной информационной системой, еще и рассуждающая ИС, формализующая правила логического вывода, а также интеллектуальный интерфейс. Развитие сети Интернет предоставило создателям интеллектуальных ИС новые возможности, связанные с одновременным доступом к множеству разнородных источников данных, что открывает широкие перспективы в развитии более совершенных технологий получения информации. Многие современные исследования в области интеллектуального поиска опираются на неявное предположение о возможности широкого распространения более или менее подробной стандартизации представления информации. Однако в большинстве реализаций электронных библиотек документы являются слабоструктурированными - хотя и снабженными метаданными, но при этом имеющими неструктурированные элементы [3, 4].

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОННОЙ БИБЛИОТЕКИ**

Проблема поиска информации - одна из вечных проблем человечества. Чтобы решить проблему доступа к информации человечество создало библиотеки - универсальную систему хранения «информации и знаний», их систематизации и каталогизации [3, 4].

Под термином электронная библиотека (ЭБ) в данной работе будем понимать систему управления структурированными каталогизированными коллекциями разнородных электронных (цифровых) документов (в отличие от печатных изданий, микрофильмов и других носителей). ЭБ должна обеспечить все аспекты организации обработки, хранения и доступа к информации, многосторонний поиск и навигацию в каталогах и предоставить пользователю непосредственно найденный ресурс (публикацию, документ, фотографию, описание факта и др.), а также дополнительные сведения о нем, например, об авторах, библиографии, организации и т.п.

Электронные библиотеки - явление относительно новое, но уже достаточно популярное [5]. Тем не менее, ЭБ сегодня следует рассматривать как множество слабосвязанных сущностей, объединяемых на первый взгляд только общим названием [6, 7].

За высокой популярностью словосочетания «электронная библиотека» стоит не только и не столько дань моде, сколько попытка охарактеризовать новый феномен - возникновение принципиально нового класса систем, призванных аккумулировать и распространять информацию в электронной форме [8]. А большой интерес к самим системам данного класса объясняются актуальными потребностями общества и наличием развивающихся возможностей по их удовлетворению. В связи с этим можно сформулировать основные цели, стоящие перед ЭБ:



- управление информационными ресурсами;
- обеспечение доступа к информации;
- сохранение научного и культурного наследия;
- повышение эффективности научных исследований и обучения.

В большинстве случаев ЭБ представляет собой веб-сайт, где накапливаются различные тексты (литературные, научные и технические, в том числе и публикации, компьютерные программы, электронные карты и т.п.) и медиа-файлы. В существующих разработках электронных библиотек, как правило, поиск и доступ к информации обеспечивается только посредством визуальных графических интерфейсов. Это хорошо для пользователя-человека, но плохо для пользователя-системы. Для обеспечения функций поиска вне графических интерфейсов требуется поддержка специальных сетевых сервисов и языков запросов. В идеальном случае все ИС должны поддерживать единый поисковый профиль и единый язык запросов [1].

Однако в общем случае под термином «электронная библиотека» могут фигурировать совершенно различные объекты, такие как архивы цифрового контента и наборы программного обеспечения для управления этим контентом. Электронной библиотекой может называться система сетевых сервисов, предоставляющих доступ к цифровому контенту, объединенных единой системой управления этим доступом [9]. Такое определение ЭБ полностью соответствует определению традиционной библиотеки как организации в системе, например, министерства культуры [1].

В настоящее время нет какой-либо универсальной системы поддержки ЭБ, которая отвечала бы всем требованиям и ожиданиям пользователей. Анализ существующих систем ЭБ (см., например, [10]) показывает их разнородность на нескольких уровнях:

- на уровне информационной модели, которую они обеспечивают;
- на уровне поддержки пользователей и групп пользователей;
- на уровне функциональных возможностей.

Из-за этой разнородности ЭБ и игнорирования нужд их пользователей возникают проблемы

- интеграции информации из различных ЭБ;
- классификации и сквозного поиска информации;
- сравнения ЭБ по предоставляемой функциональности;
- оценка и сравнение производительности различных систем ЭБ;
- добавления новых типов хранимых объектов;
- добавления новых функциональных возможностей;
- резервного копирования.

Уже существуют достаточно мощные ИС, удовлетворяющие в той или иной степени потребности пользователей в научной информации, однако основной недостаток большинства систем - ограниченные возможности в обеспечении интеграции ресурсов как внутри каждой из систем, так и с внешними системами.

Основу разработки модели ЭБ должны составлять, прежде всего, стандарты и международные рекомендации, формирующие профиль ЭБ, под которым понимается набор из одного или нескольких базовых нормативно-технических документов (стандартов и спецификаций). Разработка профиля ЭБ должна быть ориентирована на решение поставленной задачи с указанием, при необходимости, выбранных классов, подмножеств, опций базовых стандартов, которые являются необходимыми для выполнения заданной функции [11]. Наиболее важным является профиль метаданных, описывающий информацию, циркулирующую в системе. Выбор профиля должен основываться на выполнении следующих требований:

- включать в себя основные типы информации, требующейся для поддержки научной работы;
- быть открытыми, т. е. обеспечивать доступ к соответствующей информации по этим описаниям;
- быть расширяемыми, т. е. обеспечивать возможность детализации описаний;
- обеспечивать возможности интеграции информации;
- обеспечивать возможности уникальной идентификации информации;
- обеспечивать возможности размещения и поиска информации в распределенной среде;
- быть ориентированными на современные и перспективные технологии описания и использования информации;
- обеспечивать возможности интероперабельности с внешней средой.

При работе с цифровыми объектами уже выработан определенный набор стереотипов, отсутствие которых вызывает дискомфорт [1]. Одним из элементов этого набора является требование наличия взаимных ссылок между цифровыми объектами, проявляющихся, например, в виде гиперсвязей в пользовательских графических интерфейсах просмотра информации. Реализация взаимных ссылок в цифровых документах не представляет большой сложности, однако при этом проявляются специфические моменты. Во-первых, электронный объект с реализованными связями уже не совсем соответствует своему печатному оригиналу. Во-вторых, внедренные в объект связи должны быть гарантировано актуальными. Так появляется требование обеспечения ссылочной целостности данных. Это очень жесткое требование, которое тяжело обеспечить даже в хорошо формализованных системах управления базами данных. Приемлемым решением, обеспечивающим ссылочную целостность данных, здесь может быть замена жестких гиперссылок динамическими связями между документами на уровне системы управления.

Дополнительно отметим, что в информационные объекты ЭБ могут содержать информацию, которая не имеет к объектам хранения традиционных библиотек никакого отношения [7]. Речь может идти:

- об электронных копиях элементов хранения традиционных архивов;
- об изображениях элементов хранения традиционных музеев;
- о видео-, аудио-информации, полученной разными способами, например, видеозапись доклада, сделанного на конференции;
- о научных или других фактах;
- и т. д. и т. п.

Для решения возникающих проблем необходимо использовать концептуальные модели, обобщающие накопленный опыт в сфере создания и использования ЭБ [10].

## **ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОННОЙ БИБЛИОТЕКИ ПО НАУЧНОМУ НАСЛЕДИЮ**

Как отмечалось выше, основными целями создания ЭБ по научному наследию являются:

- предоставление пользователям быстрого доступа к информационным ресурсам по научному наследию;
- публичное предоставление результатов научных исследований;
- предотвращение утраты ценных научных коллекций для будущих поколений;
- создание новых технологий научных исследований, эффективного инструментария для их проведения.

Как известно, большая часть научной информации быстро устаревает. Но это не относится к ма-

териалам по научному наследию. Для этого типа информационных ресурсов важно хранить описание жизненного цикла этих ресурсов и иметь возможность восстановить состояние ресурса на любой момент времени. Кроме того, существуют информационные ресурсы, которые могут быть доступны длительное время. К таковым, например, относятся документы, имеющие длительную юридическую силу, патенты, мультимедийная информация об исторических событиях, которая может быть востребована через любой период времени. Кроме того, научные отчеты институтов, речи ученых, письма и служебные записки могут также иметь историческую ценность, становясь только еще ценнее со временем. Поэтому системы должны поддерживать возможность длительного хранения информационных ресурсов с возможностью восстановления их.

Как уже отмечалось, для документов по научному наследию важной проблемой является идентификация информационных ресурсов [12, 13], определяющая конкретно для каждого факта авторство, время получения, связь другими фактами или объектами. Исходя из целей ЭБ по научному наследию и анализа существующих систем, направленных на поддержку научных исследований, можно сформулировать следующие функциональные требования к модели электронной библиотеки по научному наследию:

- надежное долговременное и неисчезающее хранение информации;
- актуальность, полнота, достоверность происхождения документов;
- историчность информации;
- географическая привязка информации;
- наличие словарей-классификаторов (справочников), для обеспечения идентификации и классификации ресурсов;
- поддержка неоднородных и слабо структурированных информационных ресурсов;
- поддержка взаимосвязей информационных ресурсов;
- предоставление информации в виде, выбранном пользователем;
- наличие интеллектуальных служб обслуживания запросов пользователя;
- наличие программных интерфейсов для поддержки аналитической работы пользователя с помощью программных приложений;
- поддержка интероперабельности и на программном, и на семантическом уровне;
- поддержку работы с внешними источниками.

Наиболее важным выводом из вышесказанного является то, что информационная модель ЭБ должна быть многоуровневой и состоять как минимум из следующих компонент [14, 15] (рис. 1): хранилище данных - репозиторий, сервер метаданных, словари-справочники, сервер приложений.

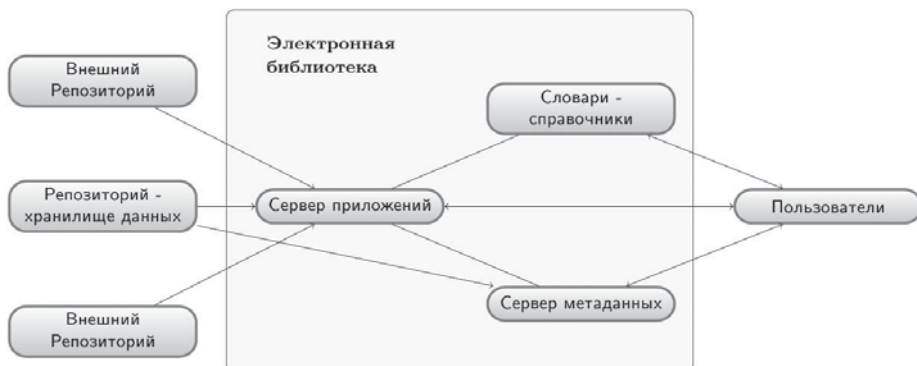


Рис. 1. Архитектура электронной библиотеки

## ВЫБОР МЕТАДАНЫХ ДЛЯ ЭЛЕКТРОННЫХ БИБЛИОТЕК ПО НАУЧНОМУ НАСЛЕДИЮ

Так как информация в ИС является отображением реальных или материальных существей (предметов, процессов, явлений, персон, публикаций и т. п.), то ИС следует рассматривать как множество информационных объектов - наборов данных, представляющих (описывающих) эти существи. В работах [2, 12] был определен профиль ЭБ как необходимый набор стандартов и компонент ИС.

Эффективным средством описания информационных объектов в ИС являются метаданные, то есть данные, являющиеся неотъемлемой частью информационного объекта и описывающие реальный объект или группу объектов (рис. 2).



Рис. 2. Структура информационной системы

В настоящее время существует большое количество систем метаданных, предназначенных для описания различных классов информационных объектов. Использование систем метаданных (схем данных) пока еще недостаточно формализовано. Информационные системы, ориентированные на одинаковые классы информационных объектов используют различные, часто, оригинальные системы метаданных и форматы метаописаний, а также разные подходы к решению прикладных задач. Решением этих проблем занимаются многие организации во всем мире. Большое внимание им уделяют такие международные организации как W3C<sup>2</sup>, DDCMI[16], OCLC<sup>3</sup>, IFLA<sup>4</sup>, IETF<sup>5</sup>, ISO<sup>6</sup>.

Под интероперабельностью любой информационной системы, в том числе и электронной библиотеки, понимается степень ее способности взаимодействовать с другими информационными системами, в том числе и с человеком. Но если при взаимодействии с человеком (как с информационной системой) основная нагрузка на обеспечение взаимопонимания ложится на человека, который в состоянии обработать даже плохо организованную информацию, то обеспечение эффективного взаимодействия между собственно информационными системами требует специальных технологических методов и общих соглашений.

Метаданные необходимы для решения следующих задач:

- предоставление сведений об объекте для получения представления о его содержании, структуре, способах использования и т. д.;
- сбор и систематизация информации об объектах;
- выбор из множества объектов определенного подмножества по формальным признакам и сопоставление объектов по формальным признакам;

2 World Wide Web Consortium (W3C) - <http://www.w3.org/>

3 Online Computer Library Center - <http://oclc.org/>

4 International Federation of Library Associations - <http://www.ifla.org/>

5 Internet Engineering Task Force ( IETF ) - <http://www.ietf.org/>

6 International Organization for Standardization - <http://www.iso.org/>

- установление динамических связей между объектами;
- внутрисистемные технологические задачи, связанные представлением и систематизацией объектов и т. п.;
- внешние технологические задачи, связанные, прежде всего, с обменом данными с внешними информационными системами.

Для формирования описательных метаданных применяются несколько стандартов, являющихся расширениями рекомендаций Dublin Core [16]. Используемый профиль определяет список элементов данных (полей), необходимых для создания записи соответствующего типа (вида) и раскрывает содержание элементов данных [1]. Для эффективной работы сервера приложений необходимо использовать набор словарей-классификаторов, содержащих как классификационные признаки, так и наборы ключевых терминов (тезаурусов с отношениями), по которым производится систематизация и классификация материала.

Словари (ключевые признаки) - это особый вид метаданных, которые отражают наиболее существенные свойства объекта, имеющие наибольшее значение с точки зрения информационной системы. Их специфика определяется терминологией конкретной предметной области, которой посвящена электронная библиотека.

Имеется ряд российских (например, УДК<sup>7</sup>, ГРНТИ<sup>8</sup>) и международных (например, MSC-2000<sup>9</sup>, ORTELIUS<sup>10</sup>) словарей для классификации научных данных. Однако в целом эти словари содержат только общенаучную информацию и не годятся (использовать их все равно надо) для систематизации материалов по научному наследию конкретной научной школы. Необходимо рассматривать различные типы ключевых терминов, а именно:

- ключевые термины-идентификаторы объектов;
- ключевые термины в стандартном понимании;
- ключевые термины, описывающие персону;
- ключевые термины, описывающие организацию;
- ключевые термины, описывающие временные периоды;
- ключевые термины, описывающие географические понятия.

Метаданные существенным образом зависят от природы и структуры объектов реального мира, от способа представления их в виде информационных объектов и от специфики информационной системы. Учитывая это, необходимо классифицировать описываемые объекты. Законченная совокупность правил, достаточная для формирования метаописаний в определенном классе информационных систем и/или для решения определенного класса задач над информационными объектами представляет собой систему метаданных.

## **ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ**

Рассмотренная модель информационной системы, работающей с материалами научного наследия, реализована на примере научной школы Алексея Андреевича Ляпунова - основателя теоретического программирования и российской кибернетики, в виде электронной библиотеки по моделям динамики биосферы, а также как учебные пособия по курсам «Современные проблемы информатики и вычислительной техники», «Вычислительные системы», «Информатика» и «Экология».

Основной каталог информационных ресурсов сервера метаданных информационной системы

7 УДК - Универсальная десятичная классификация

8 ГРНТИ - Государственный рубрикатор научно-технической информации.

9 MSC-2000 - Математический классификатор - <http://www.ams.org/msc/msc.html>

10 The «Ortelius Thesaurus on Higher Education» - [http://cordis.europa.eu/cerif/src/sum\\_concl.htm](http://cordis.europa.eu/cerif/src/sum_concl.htm)

строится в соответствии со схемой метаданных МЕКОФ<sup>11</sup>. Для долговременного хранения документов используется репозиторий DSpace<sup>12</sup>. Стандартная схема метаданных DSpace, основанная на схеме DCMI[16], расширена полями, отвечающими основным требованиям МЕКОФ. Для поддержки процесса наполнения полнотекстовых баз созданные профили метаданных зарегистрированы в системе DSpace и в соответствии с ними настроены рабочие процессы, а также пользовательский интерфейс системы.

Чтобы выполнять обмен метаданными между DSpace в соответствии с расширенным профилем, создан сервис, выполняющий преобразование схем метаданных из внутренней схемы DSpace в схему сервера метаданных и в схему DCMI с использованием квалификаторов (QDC<sup>13</sup>). Реализован также OAI-сервис [17], который в пакетном режиме периодически, в соответствии с расписанием, проводит синхронизацию метаданных репозитория и сервера метаданных. Для заполнения основного каталога метаданных в соответствии с созданными схемами метаданных используются контролируемые словари из справочного блока сопровождения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанная модель информационной системы может быть использована как типовая модель системы для работы с документами, связанными с научным наследием, поскольку решает основные задачи, предъявляемые к этим системам:

- обеспечение системы надежного долговременного хранения цифровых (электронных) документов с сохранением всех смысловых и функциональных характеристик исходных документов и связей между ними;
- обеспечение «прозрачного» поиска и доступа пользователей к документам, как для ознакомления, так и для анализа содержащихся в них фактов;
- организация сбора информации по удаленным хранилищам данных (репозиториям), поддерживающих протокол OAI-PMN [17].

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проекты 12-07-00472, 13-07-00258), а также программы Государственной поддержки научных школ РФ (грант НШ-5006.2014.9).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Жижимов О.Л., Мазов Н.А., Федотов А.М. Некоторые заметки об эволюции цифровых репозиториях традиционных библиотек к полнофункциональным электронным библиотекам. Вестник Владивостокского государственного университета экономики и сервиса. № 3(7). 2010. С.55-63.
- [2] Федотов А.М., Барахнин В.Б., Жижимов О.Л., Федотова О.А. Технология создания корпоративных информационных систем учета трудов научных работников. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. Т.9. Вып.2. 2011. С.31-41.
- [3] Федотов А.М., Барахнин В.Б. Проблемы поиска информации: история и технологии. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. Т.7. Вып.2. 2009. С.3-17.
- [4] Шокин Ю.И., Федотов А.М., Барахнин В.Б. Проблемы поиска информации. Новосибирск: Наука. 2010
- [5] Земсков А.И., Шрайберг Я.Л. Электронные библиотеки [Текст]: учеб. пособие для студентов ун-тов и вузов культуры и искусств и др. учеб. заведений. 3-е изд. М.: ГПНТБ России. 2004.
- [6] Антопольский А.Б., Вигурский К.В. Концепция электронных библиотек [Электронный ресурс]. Электронные библиотеки: рос. науч. электронный журн. Т.2. Вып.2. 1999. URL: <http://www.elbib.ru/index.phtml?page=elbib/rus/journal/1999/part2/antopol> (дата обращения: 04.05.2010).
- [7] Воройский Ф.С. Электронные и традиционные библиотеки - суть не одно и то же [Электронный ресурс]. Электронные библиотеки: рос. науч. электронный журн. Т.6. Вып.5. 2003. URL: <http://www.elbib.ru/index.phtml?page=elbib/rus/journal/2003/part5/voroisky> (дата обращения: 04.05.2010).

11 ГОСТ 7.19-2001 Формат для обмена данными. Содержание записи.

12 <http://www.dspace.org>.

13 Qualified Dublin Core (QDC) - <http://www.dublincore.org/documents/dcmi-terms/>

- [8] Акимов С.И., Елизаров А.М., Ершова Т.В., Коголовский М.Р., Федоров А.О., Хохлов Ю.Е. Научно-методическая поддержка разработки научных электронных библиотек [Электронный ресурс]. Электронные библиотеки: рос. науч. электронный журн. 2005. Т.8. Вып. 1. URL: <http://www.elbib.ru/index.phtml?page=elbib/rus/journal/2005/part1/AEEKFH>.
- [9] Шокин Ю.И., Федотов А.М. Жижимов О.Л., Гуськов А.Е., Столяров С.В. Электронные библиотеки - путь интеграции информационных ресурсов Сибирского отделения РАН. Вестник КазНУ, специальный выпуск. № 2. 2005. С.115-127.
- [10] Candela L., Castelli D., Fuhr N., Ioannidis Y., Klas C.-P., Pagano P., Ross S., Saidis C, Schek H.-J., Schuldt H., Springmann M. Current Digital Library Systems: User Requirements vs Provided Functionality. IST-2002-2.3.1.12. Technology-enhanced Learning and Access to Cultural Heritage. March 2006.
- [11] ГОСТ Р ИСО / МЭК ТО 10000-2-99. Информационная технология. Основы и таксономия функциональных стандартов. Часть 2. Принципы и таксономия профилей ВОС.
- [12] Федотов А.М., Барахнин В.Б., Жижимов О.Л., Федотова О.А. Проблемы создания информационных систем учета трудов научных сотрудников СО РАН. Труды IV Междунар. конф. «Системный анализ и информационные технологии» (САИТ-2011) (Абзаково, Россия, 17-23 августа 2011). Челябинск: ЧелГУ, 2011. С.85-91.
- [13] Федотов А.М., Жижимов О.Л., Князева А.А., Колобов О.С., Мазов Н.А., Турчановский И.Ю., Федотова О.А. Проблемы авторитетного контроля для распределенных электронных библиотек и библиографических баз данных. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. Т.9. Вып.1. 2011. С.89-101.
- [14] Федотов А.М. Методологии построения распределенных систем. Вычислительные технологии. Т.11. 2006. С.3-17.
- [15] Жижимов О.Л., Федотов А.М., Федотова О.А. Построение типовой модели информационной системы для работы с документами по научному наследию. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. Т.10. № 3. 2012. С.5-11.
- [16] DCMI - Dublin Core Metadata Initiative (<http://www.dublincore.org/>).
- [17] The Open Archives Initiative Protocol for Metadata Harvesting. Protocol Version 2.0 of 2002-06-14. Open Archives Initiative: The OAI Executive; OAI Technical Committee. 2004. <http://www.openarchives.org/>.

## NONLINEAR DISPERSION MODELS OF WAVE HYDRODYNAMICS ON A SPHERE AND CONSERVATIVE LAWS

### НЕЛИНЕЙНО-ДИСПЕРСИОННЫЕ МОДЕЛИ ВОЛНОВОЙ ГИДРОДИНАМИКИ НА СФЕРЕ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

---

*In the paper the nonlinear dispersion equations of wave hydrodynamics on a rotating sphere are derived without the assumption of the flow potentiality. The balance equations for impulse and for full energy of the received models are obtained. The model takes into account the possibility of unsteady behavior of the bottom surface. In the particular case, we have developed a Boussinesq-type model, for which an energy balance is fulfilled.*

---

#### ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] на основе масштабирования 3D-уравнений гидродинамики на вращающейся сфере получена нелинейно-дисперсионная (НЛД-) модель, при выводе было использовано условие потенциальности течения. В работе [2] для случая плоской геометрии показано, что НЛД-уравнения можно получить без предположения о потенциальности течения, введя условие независимости главной части горизонтальной составляющей вектора скорости от вертикальной координаты. В настоящей работе аналогичный результат получен в сферической геометрии. Для НЛД-модели на вращающейся сфере выписаны уравнения баланса импульса и энергии. Выведена новая модель типа Буссинеска на сфере, которая сохраняет структуру полностью-нелинейной НЛД-модели и для которой имеет место баланс энергии.

#### УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА НА СФЕРЕ.

Рассмотрим систему координат  $O\lambda\theta r$ , привязанную к центру сферы, вращающейся с постоянной скоростью  $\Omega$ , где  $\lambda$  - долгота, отсчитываемая к востоку от некоторого меридиана ( $0 \leq \lambda < 2\pi$ ),  $\theta = \pi/2 - \varphi$  - дополнение до широты  $\varphi$  ( $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ ),  $r$  - радиальная координата. Считается, что сила притяжения  $\mathbf{g}$  направлена к центру Земли, а толщина слоя воды мала по сравнению с радиусом  $R$ , поэтому  $g = |\mathbf{g}|$  и плотность воды  $\rho$  берутся постоянными,  $\rho \equiv 1$ . Введем обозначения:  $J = -r^2 \sin \theta$  - якобиан преобразования от декартовых координат к сферическим,  $v^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) - контравариантные компоненты скорости ( $v^1 = \dot{\lambda}$ ,  $v^2 = \dot{\theta}$ ,  $v^3 = \dot{r}$ );  $v_\gamma$  ( $\gamma = 1, 2, 3$ ) - ковариантные компоненты скорости, связанные с  $v^\alpha$  формулами [1, 3]

$$v_1 = \Omega r^2 \sin^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta v^1, \quad v_2 = r^2 v^2, \quad v_3 = v^3 = w. \quad (1)$$

Уравнения идеальной несжимаемой жидкости в сферических координатах будем рассматривать в виде

$$(Jv^1)_\lambda + (Jv^2)_\theta + (Jw)_r = 0, \quad (2)$$

$$v_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} + wv_r + \nabla p = \mathbf{r}, \quad (3)$$

$$w_t + \mathbf{u} \cdot \nabla w + ww_r + p_r = -g + r_3, \quad (4)$$

---

<sup>1</sup> Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russia



где  $w$  - радиальная, или «вертикальная», составляющая скорости  $v^3$ ,  $\mathbf{u}=(v^1, v^2)^T$ ,  $\mathbf{v}=(v_1, v_2)^T$  - векторы, составленные соответственно из контравариантных и ковариантных компонент «горизонтальной» составляющей вектора скорости;  $p$  - давление,  $\nabla=(\partial/\partial\lambda, \partial/\partial\theta)$ ,  $\mathbf{r}=(r_1, r_2)^T$ ,

$$r_1 = 0, \quad r_2 = (\Omega + v^1)^2 r^2 \sin\theta \cos\theta, \quad r_3 = (\Omega + v^1)^2 r \sin^2\theta + (v^2)^2 r. \quad (5)$$

Задачу о поверхностных волнах рассмотрим в следующей формулировке [3]: бесконечный слой жидкости, внутри которого справедливы уравнения (2) - (4), ограничен снизу непроницаемым подвижным дном  $r = R - h(\lambda, \theta, t)$ , а сверху - свободной поверхностью  $r = R + \eta(\lambda, \theta, t)$ , причем на этих границах выполнены условия

$$(\eta_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \eta - w)|_{r=R+\eta} = 0, \quad p|_{r=R+\eta} = 0, \quad (h_t + \mathbf{u} \cdot \nabla h + w)|_{r=R-h} = 0. \quad (6)$$

Для вывода уравнений мелкой воды на сфере введем характерные масштабы. Пусть  $L$  и  $h_0$  - масштабы в горизонтальном и вертикальном направлениях,  $a_0$  - характерная амплитуда волны,  $\alpha = a_0/h_0$  - параметр нелинейности. С величиной  $L$  свяжем горизонтальный масштаб  $\lambda_0$ , измеренный в радианах:  $\lambda_0 = L/R = \varepsilon/\mu$ , где  $\varepsilon = h_0/R \ll 1$  - относительная толщина слоя воды,  $\mu = h_0/L$  - параметр частотной дисперсии. Масштаб времени  $t_0$  определим формулой  $t_0 = L/\sqrt{gh_0}$ . Тогда масштаб угловой скорости распространения волны определяется как  $\omega_0 = \lambda_0/t_0 = (\varepsilon/\mu)\sqrt{gh_0}/L = \sqrt{gh_0}/R$ . За масштаб «горизонтальной» угловой скорости частиц жидкости в волне также принимается величина  $\omega_0$ . Через  $s = r - R$  обозначим новую переменную. В соответствии с введенными масштабами определим безразмерные переменные:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad \bar{\theta} = \frac{\theta}{\lambda_0}, \quad \bar{h} = \frac{h}{h_0}, \quad \bar{s} = \frac{s}{h_0}, \quad \bar{H} = \frac{H}{h_0}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{a_0}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega_0}, \quad (7)$$

$$\bar{v}^\beta = \frac{v^\beta}{\omega_0}, \quad \bar{v}_\beta = \frac{v_\beta}{R\sqrt{gh_0}} \quad (\beta=1,2); \quad \bar{w} = \frac{w}{\mu\sqrt{gh_0}}, \quad \bar{p} = \frac{p}{gh_0}. \quad (8)$$

Соотношения (8) для обезразмеривания компонент скорости непосредственно вытекают из формул (7) и отличаются от тех, что рассмотрены в работе [1].

### УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА В ПРИБЛИЖЕНИИ «ТОНКОГО СЛОЯ»

В работе [1] приведена модификация уравнений Эйлера для случая, когда отброшены члены порядка  $O(\varepsilon)$  на основании предположения о малости толщины океанического слоя. Если использовать для обезразмеривания исходных уравнений Эйлера формулы (7), (8), то соответствующие уравнения при игнорировании членов порядка  $O(\varepsilon)$  примут следующий вид:

$$(J_0 v^1)_\lambda + (J_0 v^2)_\theta + (J_0 w)_s = 0, \quad (9)$$

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} + w \mathbf{v}_s + \nabla p = \mathbf{r}, \quad (10)$$

$$\mu^2 (w_t + \mathbf{u} \cdot \nabla w + w w_s) + p_s = -1, \quad (11)$$

при этом  $J_0 = -\sin\theta$ ,  $\mathbf{u}=(v^1, v^2)^T$ ,  $\mathbf{v}=(v_1, v_2)^T$ ,  $\nabla=(\partial/\partial\lambda, \partial/\partial\theta)$ ,  $\mathbf{r}=(r_1, r_2)^T$ ,

$$v_1 = (\Omega + v^1) \sin^2\theta, \quad v_2 = v^2, \quad (12)$$

$$r_1 = 0, \quad r_2 = \frac{\varepsilon}{\mu} (\Omega + v^1)^2 \sin\theta \cos\theta. \quad (13)$$

Граничные условия (6) для системы уравнений (9) - (11) принимают следующий вид:

$$(\alpha \eta_t + \alpha \mathbf{u} \cdot \nabla \eta - w)|_{s=\alpha \eta} = 0, \quad (14)$$

$$p|_{s=ah} = 0, \quad (15)$$

$$(h_t + \mathbf{u} \cdot \nabla h + w)|_{s=-h} = 0. \quad (16)$$

Отталкиваясь от безразмеренных модифицированных 3D-уравнений (9) - (16), приступим к выводу приближенных моделей.

### ВЫВОД НЛД-УРАВНЕНИЙ НА СФЕРЕ

В моделях мелкой воды искомыми величинами являются полная глубина жидкости  $H$  и вектор скорости  $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\lambda, \theta, t)$ . Возьмем за  $\mathbf{c}$  среднюю по глубине скорость  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{c} = (c^1, c^2)^T = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\alpha\eta} \mathbf{u} ds. \quad (17)$$

Выражение (17) записано в безразмерном виде,  $H = \alpha\eta + h$ . Тогда уравнение неразрывности для НЛД-модели примет следующий вид:

$$H_t + \nabla \cdot (H\mathbf{c}) = 0, \quad (18)$$

где оператор дивергенции вычисляется по формуле

$$\nabla \cdot \mathbf{c} = \frac{(J_0 c^1)_\lambda + (J_0 c^2)_\theta}{J_0}. \quad (19)$$

Уравнение (18) вытекает (см. [1]) из уравнения несжимаемости (9), проинтегрированного по толщине слоя жидкости с учетом граничных условий (14), (16).

### ОСНОВНОЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ ВЫВОДА. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

Для вывода НЛД-модели будем использовать разложение компонент вектора скорости в ряды по степеням параметра  $\mu^2$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \mu^2 \mathbf{u}^1 + O(\mu^4), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mu^2 \mathbf{v}_1 + O(\mu^4), \quad w = w_0 + \mu^2 w_1 + O(\mu^4). \quad (20)$$

Определив для удобства величины

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \Omega \sin^2 \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

из соотношений (12) получаем представление

$$\mathbf{v} = \mathbf{K} + M\mathbf{u}. \quad (21)$$

Так как в длинноволновом приближении изменение «горизонтальных» компонент скорости по оси  $Os$  незначительно по сравнению с их изменением в «горизонтальной плоскости», будем считать, что

$$(\mathbf{u}^0)_s = 0. \quad (22)$$

Соотношения (20) и (22) и являются основными условиями получения приближенной модели. Используя их, на первом этапе вывода выразим функции  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $w$  через введенную выше скорость  $\mathbf{c}$  приближенной модели. Сначала найдем связь между  $w_0$  и  $\mathbf{u}^0$ . Подстановка функций  $\mathbf{u}$  и  $w$  вида (20) в уравнение (9) позволяет получить соотношение  $\nabla \cdot \mathbf{u}^0 + (w_0)_s = 0$ , интегрируя которое в пределах от  $-h$  до  $s$  и учитывая, что функция  $\mathbf{u}^0$  не зависит от  $s$ , имеем

$$(s+h)\nabla \cdot \mathbf{u}^0 + w_0(s) - w_0|_{s=-h} = 0. \quad (23)$$

Далее используем граничное условие (16), из которого при использовании разложений (20) вытекает

$$w_0|_{s=-h} = -D_0 h, \quad D_0 = \partial / \partial t + \mathbf{u}^0 \cdot \nabla.$$

С учетом этого выражения из (23) получаем линейное распределение  $w_0$  по глубине:

$$w_0(s) = -D_0 h - (s+h) \nabla \cdot \mathbf{u}^0. \quad (24)$$

Следующий шаг - установление связи между скоростями  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{c}$ . Подставляя первое из разложений (20) в формулу (17), имеем

$$\mathbf{c} = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\alpha\eta} (\mathbf{u}^0 + \mu^2 \mathbf{u}^1 + O(\mu^4)) ds = \mathbf{u}^0 + \mu^2 \frac{1}{H} \int_{-h}^{\alpha\eta} \mathbf{u}^1 ds + O(\mu^4). \quad (25)$$

Отсюда следует, что первую из формул (20) можно переписать в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{c} + \mu^2 \mathbf{V} + O(\mu^4), \quad \mathbf{V} = \mathbf{u}^1 - \frac{1}{H} \int_{-h}^{\alpha\eta} \mathbf{u}^1 ds, \quad (26)$$

причем имеет место равенство

$$\int_{-h}^{\alpha\eta} \mathbf{V} ds = 0. \quad (27)$$

С учетом формулы (21) получаем

$$\mathbf{v} = \mathbf{K} + M\mathbf{c} + \mu^2 M\mathbf{V} + O(\mu^4). \quad (28)$$

Наконец, из (20) с учетом (24) и вытекающей из (25) формулы  $\mathbf{u}^0 = \mathbf{c} + O(\mu^2)$  имеем требуемое для компоненты  $w$  представление с точностью до членов порядка  $O(\mu^2)$ :

$$w(s) = -Dh - (s+h) \nabla \cdot \mathbf{c} + O(\mu^2), \quad (29)$$

где  $D$  - оператор полной производной:

$$D = \partial / \partial t + \mathbf{c} \cdot \nabla. \quad (30)$$

Формулы (26), (28), (29) используются ниже при выводе уравнений НЛД-модели.

### ФОРМУЛА ДЛЯ ДАВЛЕНИЯ В НЛД-МОДЕЛИ НА СФЕРЕ

Чтобы выразить давление через переменные НЛД-модели, интегрируем уравнение (11) по «вертикальной» координате в пределах от  $s$  ( $-h \leq s \leq \alpha\eta$ ) до  $\alpha\eta$  и с учетом условия (15) и равенства  $\mathbf{u} = \mathbf{c} + O(\mu^2)$ , вытекающего из (26), получаем

$$\mu^2 \int_s^{\alpha\eta} (Dw + ww_\zeta + O(\mu^2)) d\zeta - p(s) = s - \alpha\eta. \quad (31)$$

Подынтегральное выражение в левой части равенства (31) вычисляем с использованием формулы (29) для  $w$ :

$$Dw + ww_s = -D^2 h - (s+h) [D(\nabla \cdot \mathbf{c}) - (\nabla \cdot \mathbf{c})^2] + O(\mu^2) = -R_2 - (s+h)R_1 + O(\mu^2),$$

где

$$R_1 = D(\nabla \cdot \mathbf{c}) - (\nabla \cdot \mathbf{c})^2, \quad R_2 = D^2 h. \quad (32)$$

Из (31) с учетом полученных выражений вытекает формула распределения давления по координате  $s$  ( $-h \leq s \leq \alpha\eta$ ):

$$p(s) = H - (s+h) - \mu^2 \left[ (H - (s+h))R_2 + \left( \frac{H^2}{2} - \frac{(s+h)^2}{2} \right) R_1 \right] + O(\mu^4) = \tilde{p}(s) + O(\mu^4). \quad (33)$$

## УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НЛД-МОДЕЛИ НА СФЕРЕ

Используя выражения (26), (28), (29) и формулу для давления (33), выведем уравнения движения НЛД-модели, исходя из векторного уравнения (10).

Сначала преобразуем  $r_2$ , опираясь на формулу (26):

$$r_2 = \frac{\varepsilon}{\mu} \left( \Omega + (c^1 + O(\mu^2)) \right)^2 \sin \theta \cos \theta = \frac{\varepsilon}{\mu} (\Omega + c^1)^2 \sin \theta \cos \theta + O(\varepsilon \mu).$$

В силу предположения о малости  $\varepsilon$  будем считать, что

$$r_2 = \frac{\varepsilon}{\mu} (\Omega + c^1)^2 \sin \theta \cos \theta, \quad (34)$$

сохранив за правой частью уравнения (10) обозначение  $\mathbf{r}$ . Интегрируя уравнение (10) по полной глубине и учитывая условие (15), приходим к соотношению

$$\int_{-h}^{\alpha \eta} (\mathbf{v}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} + w \mathbf{v}_s) ds + \nabla \int_{-h}^{\alpha \eta} p ds - p|_{s=-h} \nabla h = \int_{-h}^{\alpha \eta} \mathbf{r} ds. \quad (35)$$

Так как вектор  $\mathbf{r}$ , ввиду (34), не зависит от  $s$ , то правая часть (35) равна  $\mathbf{r}H$ . Преобразуем соотношение (35), используя представление  $w$  и  $p$  через переменные  $c, H$ . Для вычисления членов с давлением из левой части (35) используем формулу (33):

$$\nabla \int_{-h}^{\alpha \eta} p ds - p|_{s=-h} \nabla h = \alpha H \nabla \eta - \mu^2 \left[ \nabla \left( \frac{H^3}{3} R_1 + \frac{H^2}{2} R_2 \right) - H \nabla h \left( \frac{H}{2} R_1 + R_2 \right) \right] + O(\mu^4). \quad (36)$$

Для вычисления слагаемого с «вертикальной» компонентой скорости применим формулы (28) и (29), что позволяет после ряда выкладок и с учетом (27) получить выражение

$$\int_{-h}^{\alpha \eta} w \mathbf{v}_s ds = \mu^2 M \int_{-h}^{\alpha \eta} w \mathbf{V}_s ds = \mu^2 M \left[ Dh \mathbf{V}|_{s=-h} - (Dh + H(\nabla \cdot \mathbf{c})) \mathbf{V}|_{s=\alpha \eta} \right] + O(\mu^4). \quad (37)$$

Группа членов уравнения (35), содержащая «горизонтальные» компоненты скорости, преобразуется с помощью аналогичных приемов, включающих подстановку выражений (26), (28), вынос операции дифференцирования из-под знака интеграла и применение формулы (27), что приводит к соотношению, объединяя которое с (37), будем иметь

$$\int_{-h}^{\alpha \eta} (\mathbf{v}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} + w \mathbf{v}_s) ds = H M \mathbf{c}_t + H (\mathbf{c} \cdot \nabla) (\mathbf{K} + M \mathbf{c}) + O(\mu^4).$$

Вывод этой формулы полностью аналогичен тому, что приведен в работе [1]. Сравнивая полученное равенство с интегралом (35) и учитывая (36), приходим к следующему уравнению движения НЛД-модели

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \alpha \nabla \eta = \mu^2 \left[ \frac{1}{H} \nabla \left( \frac{H^3}{3} R_1 + \frac{H^2}{2} R_2 \right) - \nabla h \left( \frac{H}{2} R_1 + R_2 \right) \right] + \mathbf{r} + O(\mu^4). \quad (38)$$

Здесь для упрощения записи введен новый вектор  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ , который в отличие от вектора из (21) не зависит от  $s$  и определяется через скорость  $\mathbf{c}$ :  $\mathbf{v} = \mathbf{K} + M \mathbf{c}$ .

Таким образом, выведена система НЛД-уравнений (18), (38) без предположения о потенциальности исходного 3D-течения, совпадающая с той, что получена в [1]. Что же дает условие потенциальности? Сравнение выводов НЛД-моделей показывает, что это условия в [1] позволяет в явном виде выписать член  $\mathbf{u}^1$  разложения скорости  $\mathbf{u}$ , и тем самым явно вычислить  $\mathbf{V}$  из (26). Как следует из настоящей работы, для вывода уравнения движения эта явная формула не нужна, достаточно соотношения (27). Однако, если исходное 3D-течение потенциально, то определив из НЛД-модели скорость  $\mathbf{c}$ , можно уточнить значение скорости  $\mathbf{u}$  по формуле (26).

## УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА ИМПУЛЬСА

Перейдем к размерным переменным и перепишем систему уравнений (18), (38), отбрасывая  $O(\mu^4)$ :

$$H_t + \nabla \cdot (H \mathbf{c}) = 0, \quad H = \eta + h, \quad (39)$$

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{v} + g \nabla \eta = \frac{1}{H} \nabla \left( \frac{H^3}{3} R_1 + \frac{H^2}{2} R_2 \right) - \nabla h \left( \frac{H}{2} R_1 + R_2 \right) + \mathbf{r}, \quad (40)$$

причем компоненты векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{r}$  выражаются через компоненты вектора  $\mathbf{c}$  :

$$v_1 = (\Omega + c^1) R^2 \sin^2 \theta, \quad v_2 = R^2 c^2; \quad r_1 = 0, \quad r_2 = (\Omega + c^1)^2 R^2 \sin \theta \cos \theta.$$

Приведем другие формы записи полученной НЛД-модели. Из формулы (33) вытекает, что в качестве функции давления в НЛД-модели можно рассматривать  $\tilde{p}(s)$ . Если через  $P$  обозначить среднее по толщине слоя жидкости давление

$$P = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} \tilde{p} ds = \frac{gH}{2} - \frac{H^2}{3} R_1 - \frac{H}{2} R_2, \quad (41)$$

то уравнение движения (40) запишется следующим образом:

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\nabla(PH)}{H} = \mathbf{r} + q \nabla h, \quad (42)$$

при этом

$$q = \frac{1}{H} \tilde{p}|_{s=-h} = g - \frac{H}{2} R_1 - R_2. \quad (43)$$

Умножая уравнение (39) на  $\mathbf{v}$ , а (40) на  $H$  и складывая результаты, приходим к записи НЛД-уравнения движения с дивергентной левой частью:

$$(H\mathbf{v})_t + \nabla \cdot (H\mathbf{c} \otimes \mathbf{v}) + \nabla(PH) = qH\nabla h + H\mathbf{r}, \quad (44)$$

где  $\mathbf{c} \otimes \mathbf{v}$  - тензорное произведение векторов.

## УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА ЭНЕРГИИ.

Для получения уравнения баланса энергии выполним ряд преобразований уравнения движения (42), умножив каждое из скалярных уравнений на отвечающую ему компоненту вектора скорости и сложив полученные уравнения. Тогда группа членов, содержащих скорость, запишется в виде

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{v}_t + \mathbf{c} \cdot (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{c} \cdot \mathbf{r} = D \left( \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}}{2} - U \right), \quad (45)$$

где  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (c^1 R \sin \theta)^2 + (c^2 R)^2$ ,  $U = (\Omega R \sin \theta)^2 / 2$ ,  $D$  - оператор полной производной (30). Далее преобразуем оставшиеся члены уравнения (42), умноженного на  $\mathbf{c}$ , к следующему виду:

$$\frac{\mathbf{c} \cdot \nabla(PH)}{H} - q\mathbf{c} \cdot \nabla h = \frac{\nabla \cdot (\mathbf{c}PH)}{H} - P\nabla \cdot \mathbf{c} - qDh + qh_t.$$

По аналогии с проведенными в работе [2] выкладками, можно показать, что справедливо равенство

$$P\nabla \cdot \mathbf{c} + qDh = -D \left( \mathcal{E} - \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}}{2} + U \right),$$

где через  $\mathcal{E}$  обозначена полная энергия НЛД-модели:

$$\mathcal{E} = \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}}{2} + \frac{H^2}{6} (\nabla \cdot \mathbf{c})^2 + \frac{H}{2} (\nabla \cdot \mathbf{c}) Dh + \frac{(Dh)^2}{2} + \frac{g(H-2h)}{2} - U. \quad (46)$$

Это выражение для энергии нетрудно получить, проинтегрировав по толщине слоя жидкости выражение для полной энергии 3D-модели гидродинамики, учтя при этом формулы (17), (20), (29), отбросив члены порядка  $O(\mu^4)$  и поделив результат на  $H$  (см. работу [2], в которой аналогичные выкладки подробно описаны для случая плоской геометрии). Объединяя все члены уравнения движения (42), умноженного на  $c$ , имеем

$$\mathcal{E}_t + \mathbf{c} \cdot \nabla \mathcal{E} + \frac{\nabla \cdot (\mathbf{c}PH)}{H} + qh_t = 0. \quad (47)$$

Умножим полученное уравнение на  $H$  и сложим с уравнением неразрывности (39), умноженным на  $\mathcal{E}$ . Получаем искомое уравнение энергии

$$(H\mathcal{E})_t + \nabla \cdot (\mathbf{c}H(\mathcal{E} + P)) + Hqh_t = 0, \quad (48)$$

которое может быть записано также в форме

$$\frac{\partial J_0 H \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial J_0 c^1 H (\mathcal{E} + P)}{\partial \lambda} + \frac{\partial J_0 c^2 H (\mathcal{E} + P)}{\partial \theta} = -J_0 H q h_t, \quad J_0 = -R^2 \sin \theta, \quad (49)$$

аналогичной той, что приведена в работе [2] для течений на плоскости. Уравнение (49) имеет консервативный вид в случае стационарной донной поверхности.

## МОДЕЛЬ ТИПА БУССИНЕСКА

При выводе НЛД-уравнений (18), (38) предположение о малости амплитуды волн не использовалось. Допуская связь между параметрами  $\alpha$  и  $\mu^2$ , приходим к уравнениям типа Буссинеска, отличающимся от полностью нелинейной НЛД-модели тем, что группа дисперсионных членов принимает слабо-нелинейный вид. Далее будем считать, что  $\alpha = O(\mu^2)$ .

Выразим из уравнения неразрывности дивергенцию  $\nabla \cdot \mathbf{c} = -DH/H$  и перепишем выражение для  $R_1$  следующим образом:  $R_1 = D(H\nabla \cdot \mathbf{c})/H$ . Тогда для  $P$  и  $q$ , определенных формулами (41), (43) и переписанных в безразмерном виде, получим выражения

$$P = \frac{H}{2} - \mu^2 \left( \frac{H}{3} D(H\nabla \cdot \mathbf{c}) + \frac{H}{2} D^2 h \right), \quad q = 1 - \mu^2 \left( \frac{1}{2} D(H\nabla \cdot \mathbf{c}) + D^2 h \right). \quad (50)$$

Учитывая, что  $H = \alpha\eta + h$ , и пренебрегая в выражениях (50) членами порядка  $O(\alpha\mu^2)$ ,  $O(\alpha^2\mu^2)$ , приходим к модифицированным выражениям  $P_B$  и  $q_B$ , которые после возвращения к размерным переменным примут вид:

$$P_B = \frac{gH}{2} - \frac{h}{3} D(h\nabla \cdot \mathbf{c}) - \frac{h}{2} D^2 h, \quad q_B = 1 - \frac{1}{2} D(h\nabla \cdot \mathbf{c}) - D^2 h. \quad (51)$$

Следовательно, используя запись уравнения движения в форме (42) с формулами (51), приходим к НЛД-модели типа Буссинеска со следующим уравнением движения:

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\nabla (P_B H)}{H} = \mathbf{r} + q_B \nabla h. \quad (52)$$

Уравнение баланса полной энергии, которая теперь принимает вид

$$\mathcal{E}_B = \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}}{2} + \frac{h^2}{6} (\nabla \cdot \mathbf{c})^2 + \frac{h}{2} (\nabla \cdot \mathbf{c}) Dh + \frac{(Dh)^2}{2} + \frac{g(H-2h)}{2} - U, \quad (53)$$

получается тем же способом, что и в предыдущем параграфе, и имеет форму, аналогичную уравнению (48):

$$(H\mathcal{E}_B)_t + \nabla \cdot (\mathbf{c}H(\mathcal{E}_B + P_B)) + Hq_B h_t = 0. \quad (54)$$

Это уравнение записывается также в виде (49) при замене величин  $\mathcal{E}, P, q$  на  $\mathcal{E}_B, P_B, q_B$ .

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Дан вывод НЛД-модели гидродинамики на вращающейся притягивающей сфере, не использующий условие потенциальности исходного 3D-течения. Построены новые модели типа Буссинеска для течений над подвижным неровным дном. Для каждой из НЛД-моделей получено выражение для полной энергии, вытекающее из вида полной энергии уравнений Эйлера при учете условий вывода моделей. Выписаны уравнения баланса полной энергии, являющиеся следствием НЛД-уравнений и имеющие важное значение для обоснования физической содержательности приближенных моделей. Структура определяющих уравнений моделей Буссинеска повторяет структуру исходной полностью нелинейной НЛД-модели, что позволяет применять единый для всех слабо дисперсионных моделей подход к построению численных алгоритмов.

## **БЛАГОДАРНОСТИ**

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 12-01-00721-а), а также в рамках программы Государственной поддержки научных школ РФ (грант НШ-5006.2014.9).

## **ЛИТЕРАТУРА**

- [1] Fedotova Z.I., Khakhimzyanov G.S. Full nonlinear dispersion model of shallow water equations on a rotating sphere. *J. Appl. Mech. and Technical Phys.*, V.52, No.6. 2011. P. 865-876.
- [2] Федотова З.И., Хахимзянов Г.С. Анализ условий вывода нелинейно-дисперсионных уравнений. *Вычислительные технологии*. Т.17, № 5. 2012. С.94-108.
- [3] Хахимзянов Г.С. Шокин Ю.И., Барахнин В.Б., Шокина Н.Ю. Численное моделирование течений жидкости с поверхностными волнами. Новосибирск: Изд-во СО РАН. 2001.

## TEACHING OF MATHEMATICS THROUGH DIFFERENT MEDIUMS CHANNELS OF KNOWLEDGE TRANSFER

---

*This paper describes a solution in teaching mathematics to students of electrical engineering. This solution is based on the outcome of the research conducted on students who attended the Mathematics 1 Course via traditional method of learning on one hand, and students who used the distance learning system on the other hand. For the purpose of this study we performed comparative analyses of different channels for knowledge transfer. It focuses entirely on the process of realization of both teaching methods by using different mathematical tools in order to achieve further development of interactivity and better visualization of teaching problems.*

---

### INTRODUCTION

In teaching mathematics, facts, skills, conceptual structures, methods and general strategies of solving problems have to be connected. Not quite an easy task! Above all, a non-adequate method leads easily to a strong aversion to mathematics as a “difficult” subject.

Question: “Why is mathematics difficult to learn?”

A countless number of specialists of all kinds - mathematicians, pedagogues, professors and psychologists, have been trying to answer this question. It is necessary to study in detail all the relevant factors for the acquisition of knowledge in mathematics. Such research can contribute to a great extent to making teaching mathematics more efficient. However, in mathematics there must be an information feedback in relation to each student activity. This interface is implemented using educational software.

### TEACHING MATHEMATICS

In the process of teaching, in addition to the transfer of new teaching content, it is also necessary to work on students’ motivation. Motivation should be both external and internal: in order to appreciate their own efforts, students need to identify the ways in which they can apply what they learn. They also need to understand that learning is to their own benefit. The role of the teacher is to show students, by using various teaching methods from different scientific fields,

how to relate themselves in everyday life to new information and how to use this throughout their lives. Thus comprehensiveness is very important in the creation of educational programs. Teaching mathematics can be defined through a set of different methods and their basic functions.

The correct order of application of the method can yield positive results. Any deviation from the order or the use thereof may have negative effects on the student in terms of accepting information. The process of teaching mathematics should be based on the following methods:

- The method of oral presentation - the teacher explains, the student listens partly acquiring knowledge. This method is very important but insufficient for a clear introduction of new material. Math class should not be confined to this method.
- The method of discussion - interaction that takes place in the form of setting up and solving a specific problem, initiating cognitive activity of students. This method should be carried out very carefully. Classes of mathematics are characterized by ongoing introduction of a large number of mathematical concepts. There are often cases when the teacher explains complex concepts while the students do not acquire the basic concepts because of the explanation’s lack in clarity.
- The method of demonstration - It is based on the introduction and clarification of concepts

---

<sup>1</sup>Singidunum University, Belgrade, Serbia

<sup>2</sup>School of Electrical Engineering and Computer Science, Belgrade, Serbia



through examples and assignments. The tasks should be characteristic in terms of type of the problem or solution methods.

- The method of (independent) practice - The student completes an appointed task on his own. This can be done at the board, in the notebook but also with the help of specialized software for mathematics. This work can be carried out also outside the school, in which case it is recommended that contents should be more complex than the teaching material.
- The method of consulting the literature - This method is almost not applicable in the classroom and, if used, it is usually part of the independent work of students on a specific topic with a presentation of a research paper in the end. The use of this method in teaching mathematics should help students get an insight into different ways of using literature, accept different views on a certain concept and develop critical thinking.
- Generally speaking, students are individuals each of them with a different way of learning. This leads to the fact that the teaching process must use methods that fit most diverse ways of learning. Inclination towards mathematics varies too. Also, prior knowledge and students' demands are different. Therefore, in teaching mathematics there must be an information feedback concerning the teacher's work and each student activities. The existence of such a feedback is no longer conditional on the students' computer literacy, but for the most part, on the teacher.

### **DESCRIPTION OF THE EDUCATIONAL SOFTWARE EMPLOYED**

This section gives a description of the educational software which is based on specific features of the teaching process. We will show ways of how to use this software in classroom as well as one of the possibilities of distributing materials. Depending on their characteristics, capabilities and manufacturers, educational software is divided into commercial and non-commercial:

- Commercial software: They cost a lot which makes them unavailable to many of our insti-

tutions and individuals. On the other hand, they are well documented and supported by various operating systems which are incredibly powerful and flexible (eg, Mathematica, Maple, Matlab, ...).

- Non-commercial software: There are not many of them that can be used for a complete teaching process. Usually they are open sources with the ability to self-adapt to the needs of the teachers. Good design can be achieved using several different software thus analyzing different approaches.

Today there is a variety of software packages designed for work with mathematical content. The question is which to choose. Most of them enable user to perform symbolic, numerical and graphical operations, this way the graphics capabilities of the computer help students see mathematics, the algebra part of the software ensures that the math works, and the use of expressive programming language creates math....

### **DISTRIBUTION OF EDUCATIONAL MATERIALS FOR DISTANCE LEARNING**

Educational materials that are created with the help of educational software can be distributed much faster and easier than paper versions. Among advantages we can mention the continuous adaptation and improvement of the material without any financial investments. For the distribution of educational content during the teaching process, we opt for Moodle, a distance learning system already in use.

Moodle was developed on the basis of early experience of previous versions of multi-user collaborative authoring tools. Moodle is designed to provide a general purpose environment for collaborative annotation of XML files. Access to collaborative annotation is made by a client application that is used to propose, achieve and evaluate the annotation files that describe learning materials.

Moodle is designed to assist educators in creating online courses with the possibility of full and rich interaction. Moodle Company is based in Perth, Western Australia. The programme itself was created by Martin Dougiamas (as his doctoral dissertation). Moodle exists since 1999. (since 2001 with the present architecture) and is now devel-

oping as a Free Software project, supported by a team of developers as well as users all over the world. Literally this means that users can download it free, modify and further distribute it.

### ANALYSIS OF LEARNING OUTCOMES

The subject of the empirical study is to determine the state and perform a comparative analysis of different methodologies during class lectures using traditional, mixed and distance learning methods.

The following subjects have been analyzed: engineering mathematics, discrete mathematics, probability and statistics. All these subjects are taught using the above mentioned methods. The traditional combined method was attended by students who had oral presentations of the subject and, in addition to regular lectures and computer exercises, laboratory exercises. In addition to the classical type of exam where students are given assignments they are supposed to solve, the examination also contained tests via the computer checking their knowledge of theoretical concepts. These tests have been created as a combination of tests of knowledge of the subject and possibilities to apply it into practice. The tests contained 30 questions that were randomly chosen from a database of 150 questions.

The students with the distance learning system had the teaching sessions over the platform. Students from all study groups received learning materials in electronic form, but those for distance learning were more complex and interactive. Colloquia and written parts of the exam were laid in the same way for all methods of teaching.

The goal was to detect differences in the teaching approach, perceive the pros and cons and, based on that, to raise the efficiency and quality of teaching mathematics.

This paper presents only the results obtained for the engineering mathematics, although it showed a similar tendency in all mathematical subjects analyzed.

The sample was a group of 67 students from the first year of study, school year 2012/2013, which had only traditional education, without laboratory exercises and computer tests, another group of 90 students who used the combined method and fi-

nally a group of 25 students who used distance learning.

Parameters of the analysis were the motivation, which is given by the regular attendance on the platform and average evaluation marks, which are given by the mutual correlation of various teaching methods.

Motivation of students: the attendance to lessons and the participation on the platform are indicators of student motivation. Attendance is given by the records of the teachers and expressed as a percentage with respect to the total number of classes held during a semester (15 weeks).

The results show that there are differences in the results related to the method of teaching.

**Table 1.** Review of students' motivation

Engineering Mathematics	Number of students	Attendance expressed in percentage	Variance	Standard deviation
The Combined Method	90	86,66	2,46	1,57
Distance Learning	25	72,66	2,99	1,73

An analysis of variances indicates that there are differences in motivation and presence in relation to teaching methods. The smallest variance shows that the combined method has the best results.

It can be seen that the introduction of modern technology into the teaching process increases the number of interested attendees. The attendance on the platform - indicator of motivation - is between those at classical methods and the combined ones, although number of attendees is smaller. This only shows that there is still resistance to this way of acquiring knowledge even among those students who have chosen this type of studying. In conclusion students do not use enough all the resources offered by distance learning and by thus do not achieve optimal results in the first year as compared to the final one.

The graduation rate: the results of passing the exams and colloquia suggest that motivation as well as attendance are not crucial, but they are important factors in passing the exams. The graduation rate is influenced by a good methodology and the

combination of modern types of working.

The statistic analysis of the relevant parameters is done based on the results of the graduation rate study and using the analysis of variances.

The results achieved by the students in all three groups were compared.

The observed parameters were the average score (arithmetical average), variances as well as the standard deviation. In order to compare the results, we calculated the correlation coefficient.

**Table 2.** Graduation grades

Engineering Mathematics	Number of students	Average grade	Variance	Standard deviation
The combined Method	90	7,42	0,32	0,57
Distance Learning	25	7,12	0,53	0,73

For an insight into how motivation affects the average grade, we performed the correlation between the variances obtained in the table above. The correlation coefficient is 0.89 in the case of combined methods and 0.92 in the case of distance learning. These numbers close to 1 indicate that the average score highly depends on motivation.

Distance learning obtained the highest value, which is logical as students who chose this form of learning have to compensate the lack of "live teaching" which exists in other types, by regular visits on the platform.

## CONCLUSION

In years, the need for distance education in our country will be even greater. The reasons to that are economic as in the future the younger generation will seek to combine work and study. The teacher in online teaching must have additional competencies in relation to "traditional education". He/she must have excellent communication and organizational skills, high professional competence and specific skills needed to work with information technology.

Moodle is a system that provides very good opportunities for student education through the Internet. The wealth of opportunities offered,

particularly the modules for testing and communication, partially overcomes the biggest drawback of distance learning, which is the lack of socialization of students due to the distance between them and the professor.

An important feature of the system for distance learning is that it allows storage and distribution of multimedia learning content intended for personal assimilation (text, audio, and video), testing and self-testing. The system must provide the tools to fully manage learning processes.

It is necessary to perform additional optimization of traditional materials with various software tools which should help combining different methods of teaching with ways of knowledge distribution. Thanks to this, the adaptation of the content will be fully adjusted to the needs of the students.

## REFERENCES

- [1] Jain, P., Kulis, B., Davis, J. V., Dhillon, I. S., Sonnenburg, S., Bach, F., & Cheng Soon, O. "Metric and Kernel Learning Using a Linear Transformation." *Journal Of Machine Learning Research*, 13(3), 519-547.
- [2] Minghui, G." Classroom Assessments in Mathematics: High School Students' Perceptions." *International Journal Of Business & Social Science*, 2012, 63-68.
- [3] Shoultz, C, Shoultz, "Learning STEMs beyond the Classroom", *Phi Kappa Phi Forum*, 92, 2, p. 25, Business Source Premier, EBSCOhost.
- [4] Leite, Walter L.; Svinicki, Marilla; and Shi, Yuying: *Attempted Validation of the Scores of the VARK: Learning Styles Inventory With Multitrait-Multimethod Confirmatory Factor Analysis Models*, pg. 2. SAGE Publications, 2009.
- [5] Ana Savić, Jelena Gavrilović, Ivana Kostić Kovacević „Free software for learning mathematics “ *International Journal of Science, Inovation and New Technology* , February 2012, vol.1.No 3.
- [6] Ana Savić, Svetlana Štrbac Savić, Jelena Gavrilović, Ivana Kostić Kovacević „ *Methods of teaching mathematics “ SED konferencija Uzice, septembar 2012.*
- [7] M. Merkle, P. Vasić, *Verovatnoća i statistika - sa primerima i primerima*, III izdanje, Beograd 2001.
- [8] Z. Ivković, *Teorija verovatnoća sa matematičkom statistikom*, Građevinska knjiga, Beograd, 1976.

## POSSIBILITIES OF USE OF MOBILE COMPUTING IN DISTANCE LEARNING

---

*Today the number of users accessing Internet through their mobile device is growing rapidly. On the other hand a significant number of online content and services are adjusted for these devices. Availability of new technologies is attracting young people to use it in every aspect of their lives. Therefore educational institutions have a unique opportunity to bring sources of knowledge closer to their students. This can improve interaction between students and teachers. In this paper we have explored the possibilities of extending existing LMS (Learning Management System) for access from mobile devices.*

---

### INTRODUCTION

The vast majority of the population of our planet, including the underdeveloped parts, some of which are even without electricity (with some type of coverage of mobile telephony and mobile batteries and chargers), has access to mobile communications.

With the number of mobile subscribers standing at 3.2 billion people, nearly half the world's population now uses mobile communications. It is expected that a further 700 million subscribers will be added by 2017 and the 4 billion-subscriber milestone will be reached in 2018. Mobile subscriber penetration stands at 45 percent globally, while mobile connection penetration is now 94 percent [1].

Popularization of mobile telecommunications is happening very quickly. People spend 63% of time online using desktop computers, and 37% of the time on mobile devices. Some industries, such as newspapers, search, maps, weather, instant messaging, are the most affected by the lesser use of desktop computers, because their products are used less and less.

Today's world and young people especially live a very fast life. They are used to have all the information they need with only one click away and to access it whenever and wherever they need it. People are using mobile technology to complete their everyday tasks, to socialize with friends, and businesses around the world are allowing them to complete everyday transactions. It is then important that education institutions keep up with these changes, and to make learning materials available on mobile devices.

Mobile apps are the fastest growing dimension of the mobile space in higher education right now, with impacts on virtually every aspect of informal life, and increasingly, every discipline in the university [2].

Mobile learning (M-learning) is seen as the natural evolution of e-learning, according to Hoppe, Joner, Millard, and Sharples, "m-learning is e-learning using a mobile device and wireless transmission." [3].

### MOBILE LEARNING IN HIGHER EDUCATION

Mobile learning is the study of how to harness personal and portable technologies for effective education. The term also covers research into technology-enabled learning across contexts and learning in an increasingly mobile society [4].

Some early data suggested in a study conducted by Abilene Christian University that mobile students are more connected with teachers and teaching assistants. Marking a student "absent" in class, for example, generates an automatic e-mail to the student, who then responds with an explanation.

The data show that teachers and students are embracing "mobile learning" as increasingly essential to higher education.

---

<sup>1</sup> School of Electrical Engineering and Computer Engineering of Applied Science, Belgrade, Serbia

In terms of final class performance measured by grades in reports, quizzes, tests, and so on, there is not much difference: the mobile students showed very slightly higher averages in each category. But there were some more pronounced differences in how the two groups approached their work.

iPhone students on average watched each video podcast five times, both inside and outside the class. That access and repetition had some intriguing results. They contacted the teacher much less [than the non-phone students], and they showed clear evidence of being able to do more on their own, and intuit new things. Though limited in scope, Powell's study suggests that "translating" class content into mobile digital information doesn't hurt academic performance, even as it seems to encourage student initiative and mastery of lab techniques [5].

There are number of universities in the world that are experimenting with the use of mobile applications in the education. Some examples are:

- Berkeley Mobile International Collaborative represents student created mobile apps. Student had to prepare a business plan and an idea of mobile app as a part of Center for Entrepreneurship and Technologies in the engineering school at Cal [6].
- Princeton Mobile is a complete, feature-packed rewrite. It is designed for anyone who wants on-the-go information or wants to stay connected to Princeton. Features include: real-time shuttle information, the campus map, the directory, news, events, course listings, the library catalog, etc. [7].
- Stanford University's iPhone and iPad Apps Course - Lectures and slides from Stanford's iPhone and iPad application development course can now be freely accessed online through iTunes. The appearance of the course material made iTunes history with one million downloads by the seventh week [2].
- The University of Michigan's Mobile Apps Center brings together instruction and app building resources to allow students and faculty to create and distribute useful apps to the U-M community [2].
- University of Virginia iPhone and Android Apps - Virginia has developed its campus app through WillowTree apps. Augmented reality features allow users to personalize their maps. The app has many components useful for alumni too, allowing them to follow sporting events live and easily connect with UVA clubs [2].

## MOBILE APPLICATIONS

Mobile technologies provide more and more functionalities that are mainly developed for desktop environments. Mobile device computing power and memory are now enough to process the same amount of data as personal computer when displaying a web based form.

Powerful mobile operating systems enable for devices to connect to a computer network and consume data from the Internet by using enterprise architecture services or some other lightweight solutions. As for the software architecture, we could say that mobile devices are enterprise-ready, putting aside enterprise security and management issues.

Mobile software platforms are built to enable application development in programming languages that are also used in desktop or server-side solutions. By using comprehensive SDK's (Software Development Kit), mobile developers can draw-out the maximum functionalities that mobile devices can give.

There is also a possibility to develop a thin-client application using HTML and JavaScript. This kind of development brings benefits such as creating cross-platform applications that can be run on any smart phone or tablet.

Main technical question concerning the mobile platforms for learning and teaching is readiness to use an existing LMS for bringing features closer to students. LMSs are now mainly web-based and equipped with backend web services to enable multiple clients. Those clients can access LMS features using web service operations through HTTP (Hyper Text Transfer Protocol). Mobile applications can use those features as well by using programming libraries provided in SDK.

## SPECIFICS OF USING MOBILE APPLICATION FOR LEARNING

The courses that use m-learning are usually based on the blended learning model.

Blended learning is a combination of different approaches and strategies to teaching with the objective of making learning more effective and personalized.

The use of blended learning methodologies is acceptable since it is believed that both e-learning and m-learning present a series of pros and cons, as in all new applications. Therefore, the forms of blended learning are able to take advantage of the benefits of the technological innovation without having to sacrifice the strong points of the more traditional and consolidated modalities of a classroom setting.

The transformations in the current didactics used for mobile learning are mainly linked to the fact that the learning activity takes place through a new tool - the mobile device. And, just as online didactics differ from face to face didactics, didactics via mobile devices must also take into consideration some elements that differ from face to face and online didactics.

Obviously, these elements are not linked exclusively to the mobile device in itself, but to the peculiarities of mobile learning: the time gaps and places of its use. Just as online didactics cannot be a simple transposition of personal didactics in the most traditional sense, the same is also true for didactics via mobile learning - it cannot be a mere transposition of online didactics. We decided to structure the course using learning object approach.

From the tests and studies carried out so far, it seems that the mobile devices are very flexible technologies which can support various models, from those Modules should be short, and last no longer than five to ten minutes. Users should be able to use small fragments of time spent waiting or free time for learning, by reading small pieces of data, doing quizzes or using forums or chats. The computational power and other properties of mobile devices make it difficult in most cases to use complex or multimedia content, although devices of the same size are used for entertainment with great commercial success. It should be possible to use an m-learning system without reading a user manual and the experience of studying with the help of such devices should be interesting and engaging [3].

To make it easier for the student to organize and process the new information, and help the student to connect the selected representations in order to create a coherent mental representation, we have tried to:

- Structure the text in a clear and comprehensible way; in particular we have explained the conceptual relations among its parts (cause/effect, confrontation/comparison, classification, and so on).
- Supply an "outline" of the key points.
- Indicate the key words.
- Supply graphic representations to correlate the new concepts

It is indicated that certain learner activities are being supported effectively and positively through features of mobile technologies. Mobility, coupled with ease of software access and integration of media and applications, allows pupils to work more continuously across home and school settings, allows activities to be initiated outside the school, or practice on exercises to be undertaken when or where desired (vocabulary exercises on a Saturday afternoon in a car, for example). From a cognitive learning perspective, it is clear that current mobile technologies grasp the attention of many pupils; pupils engage in acquisition of knowledge through a range of sensory (visual, auditory, kinesthetic). Some researchers have reported impacts on learning in specific cognitive areas, enhancing the manipulation of ideas and knowledge, rather than supporting the earlier engagement and acquisition stages of cognition. What is clear from these outcomes is that the form of learning activity and the provision of ownership make a difference to outcome. This being the case, implementation frameworks need to focus centrally on appropriate learning activities; there is an important role in schools for both the teacher and manager to know about learning activities that will support the learner, allow for opportunities to extend and engage learning outside the classroom as well as inside the classroom, and enable the learner to gain as full an ownership of the mobile technology for learning as possible [8].

## MOODLE PLATFORM

Moodle is acronym for Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment. It is a course management system (CMS) - also known as a learning management system (LMS) or a virtual learning environment (VLE). With this platform educators can build an effective and quality online course.

The system also encourages peer interaction and discussions using forums, group collaboration using assignments and peer-review of written homework. Some basic Moodle functionalities are: storing files, communication support, providing collaboration and evaluation among students.

There are many possibilities for students to upload their home works using Moodle's built-in editor or produce an offline assignments. For educators there is selection of tools provided to conduct student learning and to facilitate communication. [9]

Moodle as a LMS is used to support traditional classroom lessons and to improve communication. Information for students are open and easy to access in any time, allowing students to manage their time and to be reminded of important information and dates for assignments and tests.

On the other side for teachers Moodle offers many benefits in planning, organizing and recording courses. Teachers can follow student's improvement, lead topic discussions or mediate in collaborative and team work. What is also important is easy backup and file migration from one course to another. Once the course is recorded it can be easily reset and prepared for the next season.

Advantages of Moodle platform include numerous features and activity modules. Many of our users prefer activity modules (such as forums, databases and wikis) to build richly collaborative communities of learning around their subject matter (in the social constructionist tradition), while others prefer to use Moodle as a way to deliver content to students (such as standard SCORM packages) and assess learning using assignments or quizzes [10].

## USING MOBILE TECHNOLOGIES WITH MOODLE

Mobile access is clearly becoming a preferred option for most web services on the Internet, and Moodle sites are no exception.

Mobile platforms have web browsers, so Moodle works immediately without any modification. However, an interface designed for a computer does not always work perfectly on a small screen. Some solutions here are themes designed for small screens, such as MyMobile<sup>2</sup>, others use more structured solutions in core UCLA mobile framework<sup>3</sup>.

The core developers of Moodle have decided to focus on writing native mobile.

Apps are available in Google Play and also Apple Store. The app can be installed directly from mobile device. It should be searched for "Moodle Mobile" the author/owner must be "Moodle Pty Ltd"

Android: <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.moodle.moodlemobile>

iOS: <https://itunes.apple.com/es/app/moodle-mobile/id633359593>

In the login screen, "teacher" or "student" in the Username field should be typed and clicked on the Add button. Then the user is logged automatically to a Moodle demo site for testing the app [11].

## MOBILE APPLICATION FOR MOODLE

Moodle can be used on a mobile device by downloading a native app, such as the official Moodle Mobile app<sup>4</sup>. An administrator can also set a theme for mobile devices in *Settings > Site administration > Appearance > Themes > Theme selector*. The MyMobile theme<sup>5</sup> is especially designed for mobile devices. The Simple theme<sup>6</sup> is multi device optimized. The Standard fluid theme<sup>7</sup> is a good start if the user

2 <http://moodle.org/mod/data/view.php?d=26&rid=4757>

3 <http://m.ucla.edu/about/>

4 [http://docs.moodle.org/24/en/Mobile\\_app](http://docs.moodle.org/24/en/Mobile_app)

5 [http://docs.moodle.org/24/en/MyMobile\\_theme](http://docs.moodle.org/24/en/MyMobile_theme)

6 [https://moodle.org/plugins/view.php?plugin=theme\\_simple](https://moodle.org/plugins/view.php?plugin=theme_simple)

7 [https://moodle.org/plugins/view.php?plugin=theme\\_standard\\_fluid](https://moodle.org/plugins/view.php?plugin=theme_standard_fluid)

likes to code its own responsive web design theme in Moodle or if he/she uses the 'standard' theme and would like to make it ready for smart phones and tablets [12].

In figure 1 is showed starting screen for Moodle mobile, and an example of a page with text.

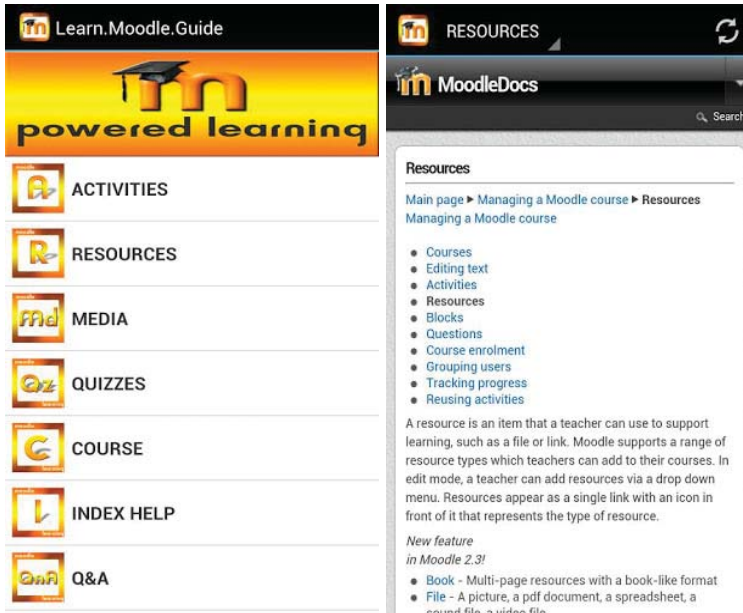


Fig 1. Screens of the Moodle mobile application

In figure 2 Moodle mobile application user screen is shown, and a screen with activity examples. On the user screen there are basic information about an user, such as full name, email address, city, country, description. On this screen it is possible to add contact, send note or send message to the user.

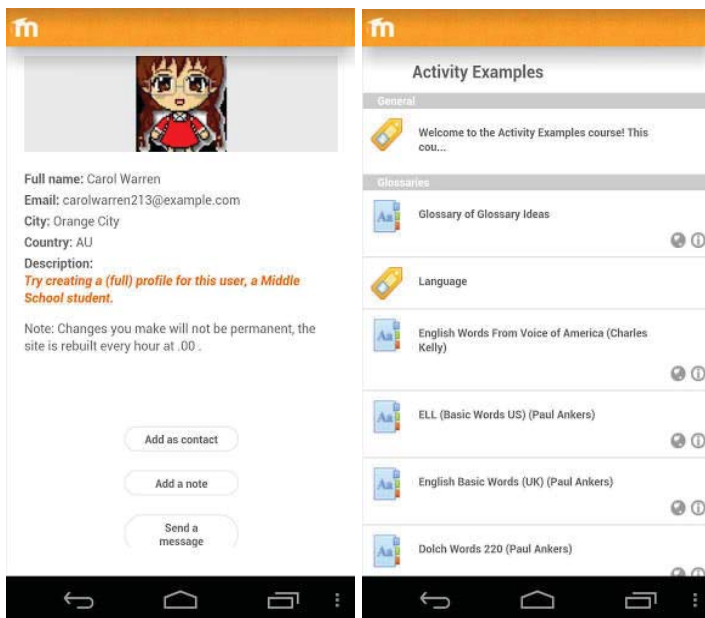


Fig. 2. Moodle mobile application user screen and activity examples



## CONCLUSION

In this paper we investigated the possibilities of using mobile devices in learning and teaching in higher education institution. The results of different studies conducted in different schools in different countries show that students and teachers can have many benefits from using mobile application in learning and teaching. Many universities have developed their own mobile applications, which can be used to facilitate students' life on campus, as a means for learning and teaching, or as students' project in class. What can be concluded is that is important for educators to keep pace with technologies and to adjust methods of teaching to the new generations of students.

## REFERENCES

- [1] N. Eddy, "Mobile Subscribers to Hit 4 Billion by 2018: MWC," 25 February 2013. [Online]. Available: <http://www.eweek.com/mobile/mobile-subscribers-to-hit-4-billion-by-2018-mwc/>. [Accessed 7 July 2013].
- [2] L. Johnson, S. Adams and M. Cummins, "The NMC Horizon Report: 2012 Higher Education Edition," The New Media Consortium, Austin, Texas, 2012.
- [3] M. Ally, *Mobile Learning Transforming the Delivery of Education and Training*, Edmonton, AB T5J 3S8: AU Press, Athabasca University, 2009.
- [4] M. Sharples and J. Roschelle, "Guest Editorial: Special Issue on Mobile and Ubiquitous Technologies for Learning," *IEEE Transactions on Learning Technologies*, vol. 3, pp. 4-5, 2010
- [5] J. Cox, "Can the iPhone save higher education?," 10 March 2010. [Online]. Available: <http://www.networkworld.com/news/2010/032310-iphone-higher-education.html?page=1>. [Accessed 6 July 2013].
- [6] L. Knobel, "Berkeley team wins global mobile app competition," 18 February 2011. [Online]. Available: <http://www.berkeleyside.com/2011/02/18/berkeley-team-wins-global-mobile-app-competition/>. [Accessed 07 July 2013].
- [7] [Online]. Available: <https://play.google.com/store/apps/details?id=edu.princeton.mobile&hl=en>.
- [8] D. Passey, "Mobile Learning in School Contexts: Can Teachers Alone Make It Happen?," *IEEE Transactions on Learning Technologies*, vol. 3, pp. 68-81, 2010.
- [9] T. J. Benjamin A. Perez, *Choosing the Right Learning Management System*, 2011.
- [10] "Moodle.org," [Online]. Available: <https://moodle.org/about/>.
- [11] "Mobile app," [Online]. Available: [http://docs.moodle.org/dev/Mobile\\_app](http://docs.moodle.org/dev/Mobile_app). [Accessed 08 July 2013].
- [12] "Mobile app," [Online]. Available: [http://docs.moodle.org/25/en/Moodle\\_Mobile\\_app](http://docs.moodle.org/25/en/Moodle_Mobile_app). [Accessed 08 July 2013].

## NUMERICAL MODELING OF SOLIDS FRACTURE UNDER INTENSIVE DYNAMIC LOADING

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ ПРИ ИНТЕНСИВНОМ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

---

*With intensive dynamic loading in a solid produces a large number of cracks, leading to the formation of fragments of various shapes and sizes. Natural heterogeneity of the structure of materials affects the nature of the distribution of physical and mechanical characteristics of the material in terms of the body in question and taking into account this factor in the equations of solid mechanics is only possible with a random distribution of the initial strength properties of deviations from the nominal value.*

---

#### ВВЕДЕНИЕ

Высокоскоростное ударное и взрывное нагружения твердых тел находят широкое применение в технике, промышленности, военном деле [1-4]. При рассмотрении этих процессов исследователей интересует не только напряженно-деформированное состояние тела, но и в гораздо большей степени разрушение и фрагментация твердых тел. Для этого необходимо определить уровень повреждений, достигнутый в ходе нагружения, чтобы по нему спрогнозировать, возможно, или нет разрушение элемента конструкции. В случае, когда поврежденность превысила критическое значение, необходимо определить место и характер разрушения, форму разрушенных частей, а в задачах дробления - получить информацию о форме осколков, их скорости и распределении по массе. В связи с этим, для научного обеспечения конструкторских и инженерных разработок, создание новых и совершенствование существующих методик расчета разрушения и фрагментации твердых тел при интенсивном динамическом нагружении является весьма актуальным.

Численный метод, используемый для расчета фрагментации твердых тел, должен учитывать распределение начальных неоднородностей по объему тела, описывать накопление поврежденности в процессе деформирования, возникновение, рост и слияние трещин. При этом возникает ряд ограничений, накладываемых на выбор численной схемы, вида расчетных

ячеек, механизма раздвоения сеток (при образовании трещин), модели роста повреждений, критерия разрушения и способа описания контактного взаимодействия образовавшихся осколков. Для решения задач фрагментации наиболее подходит лагранжев подход к описанию движения разрушаемой среды. По сравнению с эйлеровым подходом, он значительно упрощает отслеживание свободных и контактных границ.

В реальных материалах процесс разрушения всегда определяется внутренней структурой среды, наличием неоднородностей, как правило, вызванных различной ориентацией зерен в поликристаллическом материале или неоднородностями в составе композиционных материалов, различием в микропрочности внутри зерна и на межзеренной или межфазной границе. Анизотропия свойств каждого зерна (различие упругих модулей компонентов в композиционном материале) вызывает концентрацию напряжений и неоднородность деформации на микроуровне, что, по мере нагружения, приводит к локализации разрушения. В связи с этим, для повышения степени соответствия численно моделируемого процесса с экспериментальными данными, необходимо внести определенные возмущения в физико-механические характеристики разрушаемой среды, причем представляет определенный интерес случайное распределение факторов, определяющих прочностные свойства материала. При такой постановке задачи процесс разрушения

---

<sup>1</sup> Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk State University, Tomsk, Russia

приобретает вероятностный характер, что соответствует теоретическим представлениям и экспериментальным данным.

Введение в методику расчета сведений о поликристаллической структуре материала требует большого количества экспериментальных данных и повышенных требований к мощностям вычислительной техники, что ограничивает возможности реализации и применения подобного подхода. В связи с этим, предлагается упрощенный вариант моделирования вероятностного механизма разрушения.

Используемые в большинстве современных работ по разрушения и фрагментации элементов конструкций соотношения механики деформируемого твердого тела не учитывают данного фактора, что существенно искажает реальную картину ударного и взрывного разрушения элементов конструкций. Последнее особенно проявляется при решении осесимметричных задач, где все точки по окружной координате рассчитываемого элемента исходно равноправны, в силу используемых при численном моделировании стандартных уравнений механики сплошных сред. На практике, однако, имеется широкий ряд задач, где фрагментация является преимущественно вероятностным процессом, например, взрывное разрушение осесимметричных оболочек, где характер дробления заранее неизвестен, пробитие и разрушение толстых преград ударником по нормали к поверхности и т.д. Определяющее влияние неоднородности структуры материала проявляется также в задачах пробития тонких преград, в процессах так называемого “лепесткования” преграды.

Для того, чтобы моделируемый процесс фрагментации отражал реальную картину поведения разрушаемых тел, полученную в экспериментах, необходим учет естественной гетерогенности в уравнениях механики деформируемого твердого тела, что возможно при использовании вероятностных законов распределения ФМХ по объему рассматриваемого элемента конструкции. Для этого необходимо внести случайное распределение начальных отклонений прочностных свойств от номинального значения в физико-механические характеристики тела (моделирование начальных дефектных структур материала). В

этом случае процесс разрушения приобретает вероятностный характер, что полностью соответствует экспериментальным данным.

## ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Для описания процессов деформирования и дробления твердых тел используется модель пористого прочного сжимаемого идеально упругопластического тела. Основные соотношения, описывающие движение прочной сжимаемой идеально упругопластической среды, базируются на законах сохранения массы, импульса и энергии [1,5-6], и замыкаются соотношениями Прандтля-Рейсса при условии текучести Мизеса. Уравнение состояния берется в форме Тета и Ми - Грюнайзена [1]. Известно, что пластические деформации, давление и температура оказывают влияние на предел текучести и модуль сдвига, поэтому модель дополнялась соотношениями, апробированными в работе [7].

Система уравнений описывает движение продуктов детонации (ПД), как невязкого нетеплопроводного газа, в качестве уравнения состояния ПД берется уравнение Ландау-Станюковича [1]. Система уравнений, описывающая движение газа, получается аналогично уравнениям для сжимаемого прочного тела из общих законов сохранения массы, количества движения, энергии и замыкается уравнением состояния, конкретизирующим рассчитываемый газ. При моделировании процесса детонации заряда ВВ, при лагранжевом способе описания движения среды, использовался подход, предложенный в работе [8]. При сжатии ВВ в счетной ячейке до критического значения уравнение состояния, описывающее поведение твердого тела, заменялось уравнением состояния продуктов детонации.

Для расчета упругопластических и газодинамических течений используется методика, реализованная на тетраэдрических ячейках и базирующаяся на совместном использовании метода Уилкинса [5,6] для расчета внутренних точек тела и метода Джонсона [9,10] для расчета контактных взаимодействий. Разбиение трехмерной области на тетраэдры происходит последовательно с помощью подпрограмм автоматического построения сетки. Естественная фрагментация толстостенной упругопласти-

ческой оболочки и преграды рассчитывается с помощью введения вероятностного механизма распределения начальных дефектов структуры материала для описания отрывных и сдвиговых трещин. В качестве критерия разрушения при интенсивных сдвиговых деформациях в задачах используется достижение эквивалентной пластической деформацией или удельной величиной работы пластических деформаций своего предельного значения [1,11]. Начальные неоднородности моделировались тем, что предельная эквивалентная пластическая деформация распределялась по ячейкам оболочки с помощью модифицированного генератора случайных чисел, выдающего случайную величину, подчиняющуюся выбранному закону распределения. Плотности вероятности случайных величин брались в виде нормального гауссовского распределения со средним арифметическим, равным табличному значению и варьируемой дисперсией. Численные эксперименты с подрывом толстостенных цилиндрических оболочек показывают [12], что на формирование осколочного спектра дисперсия начального распределения прочностных свойств влияет гораздо сильнее, чем его форма, что снижает требования, предъявляемые при выборе закона распределения и позволяет в аналитических и численных расчетах использовать практически любой унимодальный закон.

В численных расчетах, для моделирования начальных неоднородностей применяется следующий подход [12]. Некоторый параметр или параметры - как правило, коэффициент разрушения или предел текучести, распределяется по ячейкам или узлам (в зависимости от выбранного подхода к описанию разрушения) расчетной области по нормальному закону распределения. Под коэффициентом разрушения здесь понимается отношение критического значения параметра поврежденности в данной ячейке (узле) к номинальному значению, например отношение критического значения эквивалентной пластической деформации к максимальной деформации при использовании деформационных критериев. При отсутствии привязки к эксперименту, используется, как правило, дисперсия 10-процентного отклонения (96% значений случайной величины

попадают в интервал  $\pm 10\%$  от номинального значения). Распределение осуществляется с помощью модифицированного генератора случайных чисел, выдающего величину, подчиняющуюся указанному закону распределения.

Вопрос корреляции распределяемых величин достаточно важен, однако он, фактически, предполагает моделирование вполне определенной структуры, что в свою очередь, требует большого количества экспериментальных данных и создания модели среды с наличием такой структуры (применительно к численному моделированию на дискретной сетке). Ввиду сложности данного вопроса, при распределении различных параметров их можно считать независимыми (если используемая модель накопления и роста поврежденности не предполагает явной связи между ними). Например, максимальное значение эквивалентной пластической деформации (при использовании деформационных критериев) и предел текучести, с точки зрения микроуровня независимы: дефекты на межзеренной границы могут препятствовать пластическим деформациям, но в то же время, приводить к более раннему образованию микротрещины.

Поскольку гауссовское распределение определено на всем пространстве, от минус бесконечности, до плюс бесконечности, в практических приложениях требуется ограничить интервал, исключив области, вероятность попадания в которые близка к нулю. В силу этого на практике, как правило, для распределения случайных величин по нормальному закону используют отрезок (в зависимости от дисперсии распределения), например, 10%-го отклонения от номинального значения, что позволяет исключить нефизические значения случайных величин.

## **ПРИМЕРЫ 3D РАСЧЕТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕРОЯТНОСТНОГО ПОДХОДА**

Задаче дробления упругопластических цилиндров, рассматриваемой в плоской двумерной постановке, посвящены работы [13-14].

В ходе решения трехмерных задач в качестве тестового расчета было проведено численное моделирование задачи о разрушении кольца, одетого на металлическую трубку, заполнен-

ную ВВ [15]. На рис. 1 представлена схема опыта по взрывному расширению цилиндра [15].

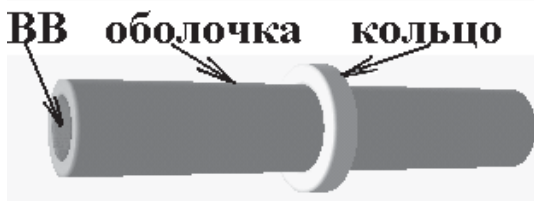


Рис. 1. Схема эксперимента

Медная трубка длиной 20 см заполнена ВВ. Внутренний радиус трубки 1,150 см, внешний - 1,698 см. В качестве ВВ использовался тротил. На середину трубки надето кольцо, с внутренним диаметром, равным диаметру трубки и внешним радиусом 2,5 см. Высота кольца составляла 1,0 см. Расчетная сетка, используемая в данном расчете, составляла около 500 тысяч тетраэдрических ячеек. Для описания разрушения использовался метод раздвоения по узлам - при выполнении в окрестности узла критерия разрушения (в качестве которого был принят критерий по эквивалентной пластической деформации), происходит расщепление узлов и образование поверхности разрушения.

В начальный момент времени происходит срабатывание детонатора на одном из торцов трубки и детонационная волна начинает распространяться вдоль оси медной оболочки. В момент, когда взрывная волна доходит до середины оболочки, где расположено кольцо, характер процесса начинает меняться. Кольцо начинает играть роль дополнительного ребра жесткости и тормозит расширение оболочки, происходящее под действием давления продуктов детонации. Одновременно с этим начинается разгон самого кольца. Эволюция оболочки и кольца в процессе расширения представлена на рис. 2 (продукты детонации не показаны на рис. 2, в, г, д, е). Схема эксперимента обеспечивает уменьшение влияния различных геометрических неоднородностей и особенностей сборки заряда ВВ, поэтому кольцо имеет достаточно равномерную радиальную скорость по всей окружности. В связи с тем, что скорость деформации практически одинакова для всех точек кольца, основную роль в процессе зарождения трещин начинают играть начальные неоднородности.

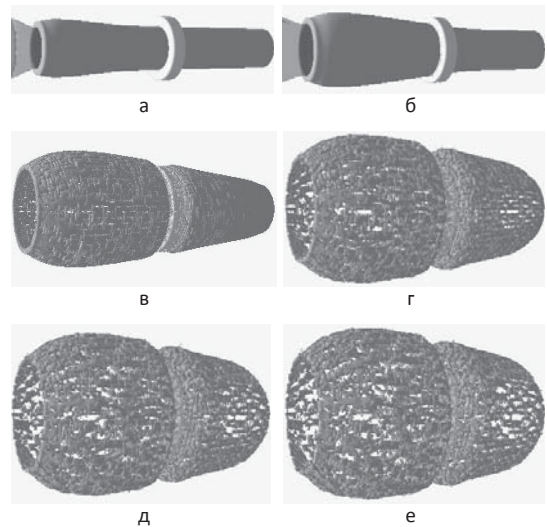


Рис. 2. Процесс разрушения оболочки и кольца: а-10 мкс; б-20 мкс; в-40 мкс; г-60 мкс; д-70 мкс; е-75 мкс

Предельное значение эквивалентной пластической деформации распределялось по ячейкам расчетной области по нормальному закону распределения с дисперсией десятипроцентного отклонения. Распределение осуществлялось с помощью модифицированного генератора случайных чисел, выдающего величину, подчиняющуюся указанному закону распределения.

Внесение начальных неоднородностей в физико-механические свойства материала приводит к более раннему срабатыванию критерия разрушения на дефектах структуры и последующей разгрузке материала на образовавшейся при этом поверхности разрушения. По мере расширения кольца можно наблюдать локализацию деформаций в вершинах радиальных трещин, образовавшихся на начальных неоднородностях и формирование достаточно крупных осколков (рис. 3). На осколочном спектре в координатах «масса осколка/номер осколка» (рис. 4) (кружки - эксперимент, крестики - численный расчет) можно наблюдать 21 относительно крупный осколок, что вполне удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными [15] (Рис. 5). На графике (рис. 4) виден характерный излом кривой между крупными осколками, образованными радиальными трещинами и более мелкими, образованными в результате взаимодействия трещин. Несмотря на то, что использование

метода раздвоения по узлам увеличивает число осколков мелкой фракции, описанный подход вполне может быть применен для предсказания числа крупных фрагментов, а также для определения поля скоростей осколков.

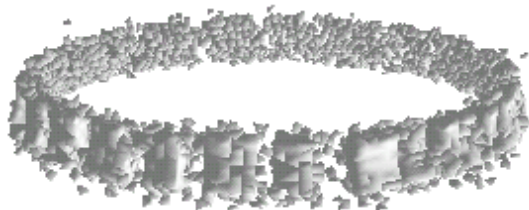


Рис. 3. Разделение кольца на осколки

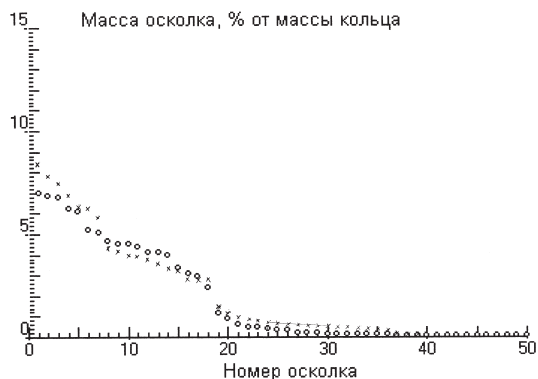


Рис. 4. Осколочный спектр

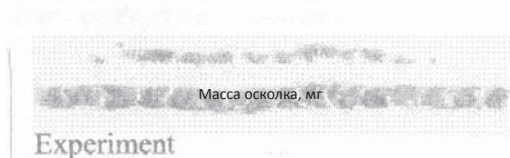


Рис. 5. Эксперимент [15]

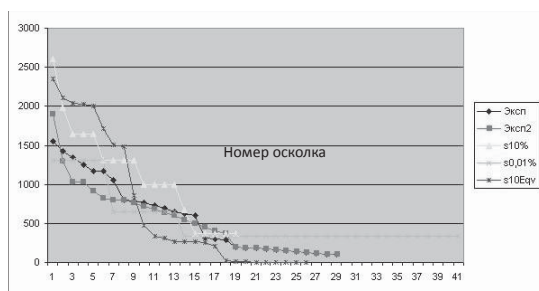


Рис. 6. Осколочный спектр. Влияние дисперсии

Причем не только для простых элементов, как кольцо, но и для более сложных объектов, в том числе замкнутых оболочек. Осколочные спектры для двух экспериментов [15] и трех расчетов приведены на рис. 6. В численных экс-

периментах рассматривались дисперсии 10% и 0,01% (критерий разрушения по предельному значению окружных пластических деформаций) и дисперсия 10% (критерий разрушения по предельному значению эквивалентной пластической деформации). Качественное совпадение результатов вполне удовлетворительное, количественное зависит от экспериментально найденных значений дисперсии.

Разрушение упругопластических цилиндров при мгновенном подрыве зарядов ВВ в случае заданного и естественного дробления рассматривалось в работе [16]. Задачи решались в трехмерной постановке, т.к. такой подход позволяет исследовать процессы динамического нагружения цилиндров более полно по сравнению с одномерным и двумерным подходами. Заданное дробление реализовывалось с использованием линий локального ослабления прочностных характеристик материала вдоль образующих и окружности цилиндров, естественное дробление - с использованием вероятностного подхода к описанию начального распределения физико-механических характеристик материала оболочек.

Численное моделирование в пространственной постановке задачи расширения толстостенных упругопластических оболочек под действием скользящей детонационной волны было проведено в [17]. Процесс пробития тонкой преграды стальной оболочкой оживальной формы, заполненной взрывчатим веществом (ВВ) рассмотрен в [18, 19]. Ниже рассмотрен ряд задач о пробитии слоистых и разнесенных преград высокоскоростными ударниками с учетом процесса фрагментации и взаимодействия осколков

В трехмерной постановке рассматривалась задача о пробитии двухслойной преграды (стеклотекстолит СТ-НТ + алюминиевый сплав Д16) шариком из стали ШХ-15. Диаметр шарика 1,27 см, вес - 8,4 г. Толщина преграды: СТ-НТ-1,05 см, Д16-0,6 см, диаметр - 3 см. Были проведены расчеты соударения шарика и преграды по нормали к поверхности последней. Скорость ударника равнялась 900 м/сек. Картина процесса представлена на рисунке 7. Внедрение шарика сопровождается разрушением двухслойной преграды и образованием облака

осколков при сквозном пробитии последней (рисунок 7, в).

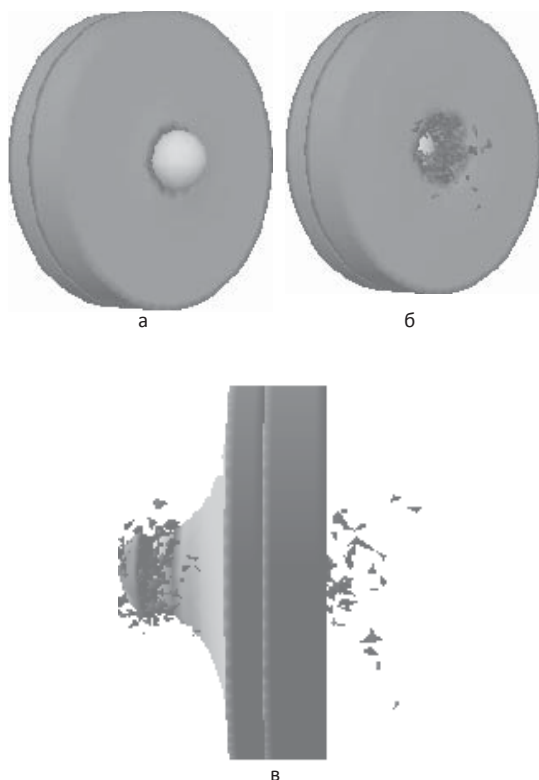


Рис. 7. Пробитие преграды стальным шариком: а-5 мкс; б-25 мкс; в-54 мкс.

Снижение скорости ударников является важной задачей для многих практических приложений. Для этого используются многослойные разнесенные преграды из различных материалов. На Рис. 8 для момента времени 40 мкс приведены результаты столкновения цилиндрического элемента с преградой состоящей из стальной, алюминиевой, титановой и трех стальных пластин (расположение пластин от внешней поверхности). Начальная скорость ударника  $V=2000$  м/с.

Данная система пластин, как видно по результатам расчетов, не обеспечивает надежной защиты прикрываемых ею объектов при начальной скорости ударника  $V=2000$  м/с хотя и снижает остаточную скорость до 1200 м/с.

Итог взаимодействия слоистой разнесенной преграды с цилиндрическим ударником при начальной скорости соударения  $V=1000$  м/с приведен на рис. 9 для момента времени 220 мкс.



Рис. 8. Взаимодействие ударника и преграды в момент времени 40 мкс. 2-D сечение системы преграда-ударник (скорость)



Рис. 9. Взаимодействие ударника и преграды в момент времени 220 мкс. 2-D сечение системы преграда-ударник (скорость)

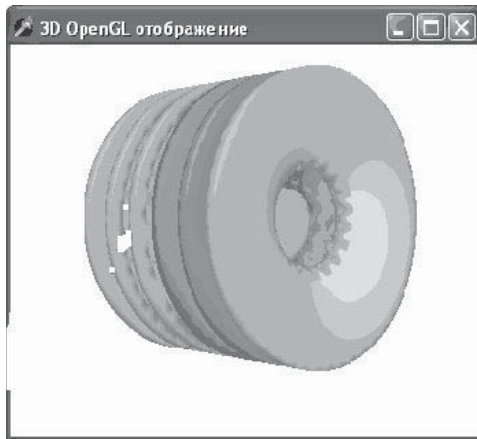
Полученные результаты показывают, что при начальной скорости ударника  $V=1000$  м/с преграда не поглощает всю кинетическую энергию, хотя уменьшает конечную скорость ударника до 150 м/с, которая все же достаточно велика и может нанести неприемлемые разрушения защищаемого объекта.

На рис. 10 приведены результаты взаимодействия слоистой разнесенной преграды с цилиндрическим ударником при начальной скорости соударения  $V=800$  м/с для момента времени 220 мкс.

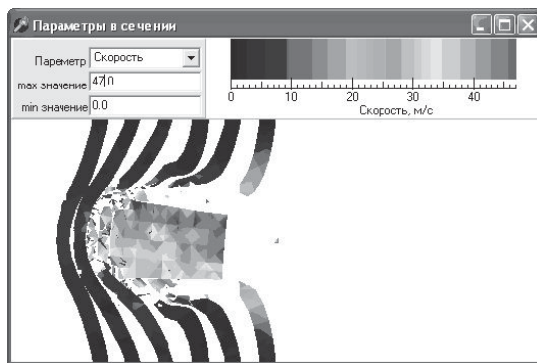
При начальной скорости ударника  $V=800$  м/с процесс протекает достаточно медленно, поэтому расчет произведен до момента времени  $t=220$  мкс. Следует отметить значительное снижение конечной скорости ударника, которая в момент времени  $t=220$  мкс достигает 40 м/с.

Следует отметить интересную особенность данного расчета. Здесь отчетливо наблюдает-

ся отклонения изначально нормального удара цилиндра по преграде от осевой симметрии. Это объясняется вероятностным характером разрушения соударяющихся тел



а



б

Рис. 10. Взаимодействие ударника и преграды в момент времени 220 мкс: а - трехмерная картина соударения; б - 2-D сечение системы преграда-ударник (скорость).

На основе полученных результатов, можно сделать вывод о том, что только учет реальной структуры материалов позволяет адекватно экспериментальным данным рассчитывать процессы разрушения и фрагментации элементов конструкций.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Физика взрыва/ Под ред. К.П.Станюковича. М.: Наука. 1975.  
 [2] Ахмадеев Н.Х. Динамическое разрушение твердых тел в волнах напряжений. Уфа: БФАН СССР. 1988.  
 [3] Райнхарт Д., Пирсон Д. Поведение материалов при импульсных нагрузках. М.: Изд-во иностран. лит. 1958.  
 [4] Ионов В.Н., Селиванов В.В. Динамика разрушения де-

формируемого тела. М.: Машиностроение. 1987.

[5] Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений . Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир. 1967. С. 212 - 263.  
 [6] Wilkins M.L. Computer simulation of dynamic phenomena. Berlin-Heidelberg-New-York: Springer. 1999.  
 [7] Steinberg D.J. , Cochran S.G., Guinan M.W. A constitutive model for metals applicable at high - strain rate. J. Appl. Phys. V.51. 1980. P.1496-1504.  
 [8] Гольдин В. Я., Калиткин Н. Н., Левитан Ю. Л., Рождественский Б. Л. Расчет двумерных течений с детонацией. ЖВМиМФ. Т. 12. 1972. С. 1606-1611.  
 [9] Johnson G.R., Colby D.D., Vavrick D.J. Tree-dimensional computer code for dynamic response of solids to intense impulsive loads . Int. J. Numer. Methods Engng. V. 14. 1979. P. 1865-1871.  
 [10] Johnson G.R. Dynamic analysis of explosive-metal interaction in three dimensions . Trans. ASME. J. of Appl. Mech. V. 48. 1981. P. 30-34.  
 [11] Крейнхаген К.Н., Вагнер М.Х., Пыechoчки Дж. Дж., Бюрк Р.Л.. Нахождение баллистического предела при соударении с многослойными мишенями . Ракетная техника и космонавтика. Т.8. 1970. С. 42-47.  
 [12] Пашков С.В. Численное моделирование фрагментации толстостенных цилиндрических оболочек при взрывном нагружении. Дисс. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук.2000. Томск.  
 [13] Герасимов А.В., Пашков С.В. Численное моделирование дробления толстостенных упругопластических оболочек . Вычислительные технологии. Т.6. 2001. С.118-124.  
 [14] Герасимов А.В., Пашков С.В. Фрагментация толстостенных упругопластических оболочек при взрывном нагружении.Химическая физика. Т.21. 2002. С.34-36.  
 [15] Diep Q.V., Moxnes J.F., Nevstad G. Fragmentation of projectiles and steel rings using 3D numerical simulations. 21th International Symposium of Ballistics. 2004.  
 [16] Герасимов А.В., Михайлов В.Н. Пашков С.В. Моделирование деформирования и разрушения толстостенных оболочек при действии интенсивных динамических нагрузок. Трехмерный подход. Вещества, материалы и конструкции при интенсивных динамических воздействиях. Труды Межд. конф. V Харитоновские тематические научные чтения. Саров. 2003. С. 78-82.  
 [17] Герасимов А.В., Пашков С.В. Разрушение замкнутых камер скользящей детонационной волной. Сб. материалов четвертой межд. школы-семинара "Внутрикамерные процессы, горение и газовая динамика дисперсных систем ". Ст. - Петербург. Т. II. 2004. С. 153-158.  
 [18] Герасимов А.В., Пашков С.В. Численное моделирование естественного дробления твердых тел. Физическая мезомеханика. Т. 7. 2004. С. 313-316.  
 [19] Герасимов А.В., Пашков С.В. Моделирование естественного дробления твердых тел при ударных и взрывных нагружениях. Химическая физика. Т.24.2005. С. 48-54.



# HIGH SCALABLE COMPUTING USING HYBRID ARCHITECTURE SUPERCOMPUTER

## МАСШТАБИРУЕМЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ ГИБРИДНОГО КЛАСТЕРА

---

*We consider computational techniques for numerical simulation of particular astrophysical processes and modeling seismic fields in non-uniform elastic medium on a supercomputer cluster with hybrid architecture, installed in Siberian Supercomputing Center. While such techniques have a good level of intrinsic parallelism, they are difficult to implement both as a numerical method and as a software program. The main distinctive feature of the developed algorithms is the focusing on the cluster's architecture, which is built using CPU and GPU computational modules and effectively uses combination of MPI and CUDA programming tools. We also study scalability of the algorithms implementations on the hybrid cluster.*

---

### ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день развитие вычислительных систем гибридной архитектуры является одним из приоритетных направлений в создании энергоэффективной высокопроизводительной вычислительной техники. Хорошо известными примерами таких гибридных систем являются суперкомпьютеры ЛОМОНОСОВ, TSUBAME 2.0, Tianhe-1A, Titan, использующие GPU NVIDIA, а также суперкомпьютер Tianhe-2, занимающий первое место в списке TOP-500 и основанный на использовании специализированного вычислительного сопроцессора Intel Xeon Phi. Кроме того, отдельного внимания заслуживает установленный в Техасском университете суперкомпьютер Stampede, в котором применяются оба этих устройства - как Intel Xeon Phi, так и GPU NVIDIA. В России в настоящий момент новый сопроцессор Intel Xeon Phi используется в составе кластера МВС-10П, установленного в МЦЛ РАН, и в составе кластера аналогичной архитектуры, установленного в Южно-Уральском Государственном Университете.

Список TOP-500 даёт хорошее представление об основных тенденциях в развитии суперкомпьютеров - это, прежде всего, многоядерность и параллелизм. Так, суперкомпьютер Titan содержит 560640 процессоров, включая 261632 ядра NVIDIA Kepler K20x. А система IBM BlueGene/Q Sequoia, рекордсмен по числу вы-

числительных ядер, включает 1572864 ядер.

Нет никаких сомнений в том, что создание специальных масштабируемых алгоритмов и программ с высокой степенью параллелизма является чрезвычайно актуальной задачей и основным способом достижения мультипетафлопсной и эксафлопсной производительности.

Проблема исследования масштабируемости параллельных алгоритмов при их реализации на современных многоядерных компьютерах и будущих суперЭВМ эксафлопсной производительности выходит за уровень технологических задач и требует научно-исследовательского подхода к ее решению. Вычислительные алгоритмы, как правило, являются более консервативными по сравнению с развитием средств вычислительной техники. Одним из характерных примеров являются задачи астрофизики. С каждым днем требования к астрофизическим моделям всё возрастают, и модели, которые несколько лет назад были актуальными, сейчас уже считаются устаревшими, а их улучшение и усложнение требует использования всё больших вычислительных ресурсов. К подобным задачам относится исследование движения галактик в плотных скоплениях, столкновения между которыми являются важным эволюционным фактором [1], а также решение системы уравнений Власова-Пуассона, описывающей бесстолкновительное движение гра-

---

<sup>1</sup> Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia

витирующего вещества в звездных системах или пыли в протопланетных дисках. Математическое моделирование играет важнейшую роль в теоретическом исследовании данных астрофизических процессов. При этом одной из острых вычислительных проблем в таких задачах является соотношение реальных масштабов моделируемых систем: так, линейный размер Солнца составляет порядка  $10^9$  метров, в то время как линейный размер сколлапсированной звезды составляет величину порядка  $10^4$  метра, а размер галактики -  $10^{20}$  метров. С точки зрения вычислительного эксперимента это приводит к необходимости использовать очень подробную сетку.

Другим примером задачи, решение которой находится на пике возможностей современных суперЭВМ, является моделирование распространения упругих волн в 3D средах с целью построения трехмерных геометрий строения геофизических объектов. В качестве метода решения используется сеточный разностный метод, а область моделирования представляется изотропной 3D неоднородной сложно построенной упругой средой. Использование графических ускорителей позволяет сократить время численной реализации алгоритма, следовательно, можно значительно ускорить время счета прямых задач, необходимых для интерпретации данных вибросейсмического зондирования

Далее в статье подробно рассмотрены алгоритмы и методы решения данных задач, адаптированные специально для гибридных систем. Тестовые расчеты и численные эксперименты с оценками степени масштабируемости алгоритмов были проведены на кластере Сибирского суперкомпьютерного центра.

## **АРХИТЕКТУРНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ЦКП ССКЦ СО РАН**

В настоящее время в ССКЦ имеется гетерогенный кластер НКС-30Т+GPU, который используется в режиме коллективного пользования институтами СО РАН. Часть кластера построена на основе блейд-серверов HP BL2x220c с процессорами Intel Xeon (архитектура MPP), пиковая производительность 30 ТФлопс, программирование с применением MPI и OpenMP; гибрид-

ное расширение на серверах HP SL390s с тремя GPU NVIDIA Tesla M2090 (архитектура GPGPU), его пиковая производительность составляет 85 ТФлопс, в том числе 79 ТФлопс на GPU. Параллельное программирование осуществляется при помощи средств CUDA C/C++ и OpenCL.

На кластере установлена операционная система Red Hat Enterprise Linux 5.4; очередь заданий PBS Pro 11.1. Установлен пакет «Intel Cluster Studio XE SP1 for Linux», в состав которого входят оптимизирующие компиляторы с языков C/C++ и Fortran, а также Intel MPI 4.1. Поскольку компиляторы поддерживают директивы OpenMP, то тем самым поддерживаются две парадигмы параллельных вычислений: Message Passing Interface и multithreading. Для программирования на GPU NVIDIA на кластере установлены CUDA 5.0 и PGI Accelerator 13.10.

В состав кластера входят: 576 процессоров (2688 ядер) Intel Xeon E5450/E5540/X5670; 120 процессоров GPU Nvidia Tesla M2090 (61440 ядер); SMP сервер с большой оперативной памятью HP DL980 G7 (8 процессоров, 80 ядер) Intel E7-4870, оперативная память 1024 Гбайта). Все узлы кластера связаны между собой через Infiniband QDR. Кластерная файловая система IBRIX (4 сервера, 32 Тбайта доступной дисковой памяти) также подключена по Infiniband.

Таким образом, в состав гетерогенного кластера входят вычислительные блоки с MPP-архитектурой, гибридной архитектурой с использованием карт NVIDIA Tesla M2090 (40 узлов SL390s, на каждый узел 3 GPU) и HP DL980 G7 с SMP-архитектурой. Такая структура кластера отвечает требованиям центров коллективного пользования, поскольку приходится решать самые разнообразные задачи из различных областей знаний, и наличие нескольких архитектур в центре даёт возможность выбрать оптимальную, исходя из специфики решения задачи. Например, для плохо распараллеливаемых задач часто используют SMP-сервера с большой оперативной памятью.

Принципиально имеется возможность, при такой схеме построения центра, задействовать все ресурсы гетерогенного кластера при решении одной задачи. Подробнее о составе технических и программных средств, пакетах прикладных программ можно посмотреть на сайте ССКЦ

<http://www2.sccc.ru/>.

Особенностью программирования задач на кластере с MPP-архитектурой, ориентированной на решение больших задач, прежде всего 3D, является применение параллельных языков MPI и OpenMP, поскольку это обусловлено архитектурой кластера, построенного с использованием многопроцессорных серверов с общей памятью (SMP). При таком подходе внутри каждого вычислительного модуля формируются несколько потоков с помощью как MPI, так и OpenMP. Таким образом, поддерживаются две современных парадигмы параллельных вычислений - MPI для систем с распределенной памятью (кластеров) и OpenMP для систем с общей памятью. Схема вычислений предусматривает запуск на каждый вычислительный узел кластера по одному MPI-процессу, который запускает внутри каждого вычислительного модуля несколько потоков с помощью OpenMP.

Другая технология высокопроизводительных вычислений связана с реализацией параллельного алгоритма на гибридной архитектуре следующего вида: суперкомпьютер состоит из набора соединенных между собой узлов, для обмена данными используется MPI; каждый узел состоит из двух CPU и трех GPU; на каждом узле запускается один процесс MPI, управляющий вычислениями (процесс выполняется на CPU); из MPI процесса запускаются три вычислительных потока OpenMP (threads), каждый из которых управляет работой своего GPU; для управления тремя GPU из одного CPU используется технология Multi-GPU. В альтернативном варианте запускаются три MPI процесса на узел, каждый из которых управляет закрепленным за ним GPU.

### **ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ГАЛАКТИК GPUPEGAS**

В данном разделе мы даем краткое изложение (детали могут быть найдены в работе [2]) дизайна вычислительной технологии, которая используется для решения задач, связанных с моделированием взаимодействующих галактик, на гибридных суперЭВМ, оснащенных графическими ускорителями. Стоит также отметить,

что если для графических ускорителей уже существуют астрофизические пакеты, например GAMER[3], а также другие коды, функционал которых частично использует графические ускорители, то для ускорителей Intel Xeon Phi коллективом авторов был разработан первый в мире программный комплекс [4], использующий данную вычислительную технологию. Задача моделирования столкновения галактик сводится к совместному моделированию самогравитирующей газовой и бесстолкновительной (звезды и темная материя) компонент. Газовая компонента моделируется с помощью системы уравнений идеальной магнитной газовой динамики. Необходимость моделирования газовой динамики с учетом магнитного поля была обусловлена наблюдениями замагниченности хвостов галактик [5]. Для моделирования бесстолкновительной компоненты используется модель, основанная на первых моментах бесстолкновительного уравнения Больцмана [6]. Такое сочетание моделей позволяет использовать единый численный метод для решения соответствующих систем уравнений.

Для решения уравнений газовой динамики и уравнений для первых моментов бесстолкновительного уравнения Больцмана используется комбинация метода крупных частиц и метода Годунова [7], со специально адаптированным лагранжевым этапом, на котором происходит перенос вещества, для эффективного использования графических ускорителей [8]. Численный метод был верифицирован на тестах Годунова (три классические задачи о распаде произвольного газодинамического разрыва и тест о распаде разрыва для первых моментов бесстолкновительного уравнения Больцмана), тесте Погорелова (задача о распаде магнитно-газодинамического разрыва), тесте Аксенова (новый газодинамический тест с гладким аналитическим решением), задаче Седова о точечном взрыве, неустойчивостях Кельвина-Гельмгольца и Релея-Тейлора, задаче о получении равновесных вращающихся конфигураций самогравитирующего газового облака, четвертой задаче конференции Венген-2004 о столкновении двух самогравитирующих газовых сфер, авторская модификация задачи о столкновении двух самогравитирующих газовых сфер, сравнении авторского чис-

ленного метода с SPH методом на задаче сжатия невращающегося газового облака, сжатия быстровращающегося газового облака, сжатия вращающегося молекулярного облака и на задаче сжатия Эвхарда. Для решения уравнения Пуассона используется подход, основанный на быстром преобразовании Фурье.

В основе параллельной реализации решения гидродинамических уравнений лежит трехмерная декомпозиция расчетной области. По одной координате разрезание происходит средствами технологии MPI, по двум другим с использованием технологии CUDA (см. рис. 1).

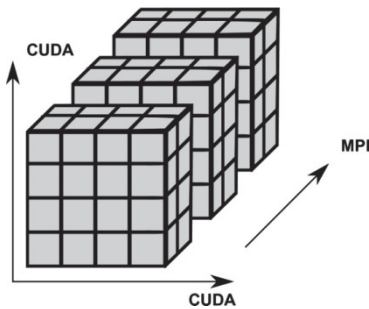


Рис. 1. Декомпозиция расчетной области для решения гидродинамических уравнений.

Это связано с топологией и архитектурой гибридного суперЭВМ НКС-30Т+GPU Сибирского суперкомпьютерного центра ИВМиМГ СО РАН, который был использован для вычислительных экспериментов. Модификация численного метода решения гидродинамических уравнений позволяет на каждом этапе численного метода независимо вычислять значения потоков через каждую ячейку. Декомпозиция области на каждом этапе осуществляется с перекрытием одного слоя граничных точек соседних областей. Стоит отметить, что такая модификация метода не ограничивается только архитектурой CUDA, она также легко применима для ускорителей Intel Xeon Phi [4]. Также может быть использована и другая сетевая топология.

В случае использования гибридной реализации необходимо определить три понятия масштабируемости.

1. SingleGPU performance (сильная масштабируемость в рамках одного GPU) - уменьшение времени счета одного шага одной и той же задачи при использовании большего числа графических ядер.

2. FFTW performance (сильная масштабируемость при использовании библиотеки FFTW) - уменьшение времени счета одного шага одной и той же задачи при использовании большего числа процессоров или ядер.

3. MultiGPU performance (слабая масштабируемость при использовании многих GPU) - сохранения времени счета одного шага одного и того же объема задачи при одновременном увеличении количества GPU-ускорителей.

Результаты эффективности программной реализации приведена на рисунке 2.

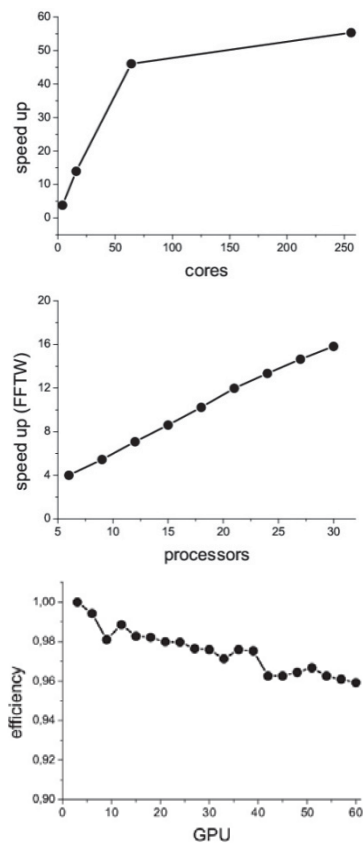


Рис. 2. SingleGPU, FFTW и MultiGPU производительность соответственно.

Основным предназначением разработанного программного комплекса GPUPEGAS является моделирование столкновения галактик различных типов и под различными углами. В качестве модельной задачи рассмотрим задачу столкновения дисковых галактик под углом. Первое облако задается сферической обла-

стью, равномерно заполненной газом массы  $10^{42}$  кг, второе облако задается эллипсоидальной областью в отношении осей 1:2:1, наклоненный под углом 45 градусов к оси столкновения. В ходе встречного движения облаков с равными начальными скоростями 600 км/с происходит их столкновение.

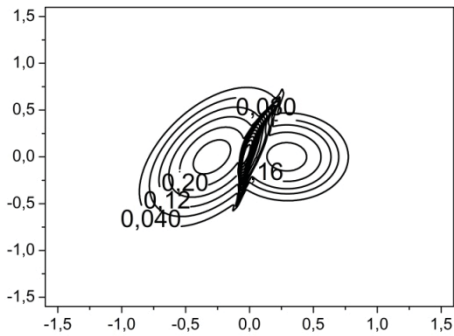


Рис. 3. Безразмерная плотность газовых облаков в момент времени  $10^{14}$  секунд.

На рисунке 3 показано столкновение и «тонкий всплеск» при начальном ударе галактик. Расчет был сделан с использованием 96 графических ускорителей на кластере НКС-30Т+GPU Сибирского суперкомпьютерного центра ИВ-МиМГ СО РАН на расчетной сетке  $1024^3$ , было сделано порядка  $10^5$  шагов по времени.

### МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН В ТРЕХМЕРНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Построение трехмерных геометрий строения геофизических объектов и определения параметров упругой среды связано с решением набора прямых геофизических задач. Варьируя геофизические параметры и, соответственно, проводя расчеты по выбранным численным алгоритмам можно создать геометрическую модель изучаемых объектов. Для детальных исследований упругая трехмерная среда представляется наиболее подробно, что отражается на применяемой сетке. Поэтому эксперименты по численному моделированию проводятся на суперкомпьютерах, которые могут быть MPP архитектурой или гибридной. Из проведенных экспериментов применительно к задачам геофизики использование графических процессоров от Nvidia показало их высокую эффективность.

Численное моделирование распространения упругих волн в 3D изотропной неоднородной упругой среде [9] является трудоемкой вычислительной задачей. Это связано с реализацией решения уравнений теории упругости для трехмерного варианта. При этом постановка задачи представлена в терминах вектора скоростей смещений и тензора напряжений. Представленные в постановке задаче коэффициенты являются функциями трех координат.

Одним из подходов для решения такой задачи численного моделирования является разностный метод [10]. Используемая разностная схема является явной.

Для проведения численных экспериментов строится и трехмерная модель упругой среды. Поскольку используется предложенный метод, то данные для модели задаются в каждой точке разностной схемы. В зависимости от входных данных такие модели могут быть весьма подробными, поэтому в память одного вычислительного узла они не помещаются.

Параллельная реализация программы основана на применении одномерной декомпозиции расчетной области на подобласти между используемыми для расчетов GPU с использованием MPI и применением CUDA для реализации параллельных вычислений непосредственно на GPU. При этом одному ядру CPU соответствует один GPU. Таким образом, вычислительная область делится на подобласти, слои, вдоль оси Oz. Необходимые параметры для вычислений инициализированы на CPU и копируются на GPU, где и проводятся вычисления по разностной схеме. Вычисления по численному алгоритму для каждой из подобластей проводятся независимо на выделенном GPU с использованием CUDA в 2D. Поскольку у соседних GPU есть общие данные, расположенные в плоскости Oxy, то между ними реализованы обмены данными посредством CPU с использованием MPI. Разработана программа для численного моделирования 3D сейсмических полей с использованием комбинации MPI и CUDA.

На гибридном кластере НКС-30Т проводились эксперименты по сравнению работы программных реализаций, где для моделирования используется только CPU и MPI, и где используется комбинация CPU и GPU, т.е. MPI и CUDA.

Такие эксперименты проводились по масштабированию параллельного алгоритма, когда область вычислений увеличивается пропорционально количеству вычислителей, и по изучению поведения программы при увеличении количества вычислительных ядер для зафиксированной области. Для проведения расчетов при масштабировании использовалась трехмерная модель упругой среды с количеством точек  $383 \times 383 \times 383$  для одного GPU и 110 итераций по численному алгоритму. Результаты сравнения работы программ представлены на Рис. 4, Рис. 5.

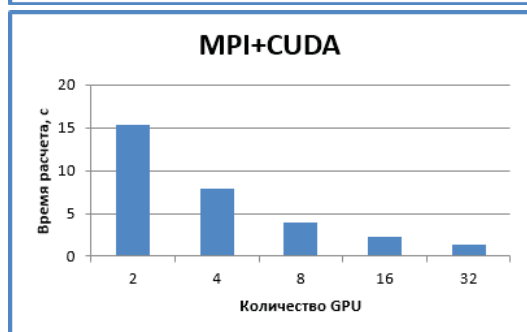
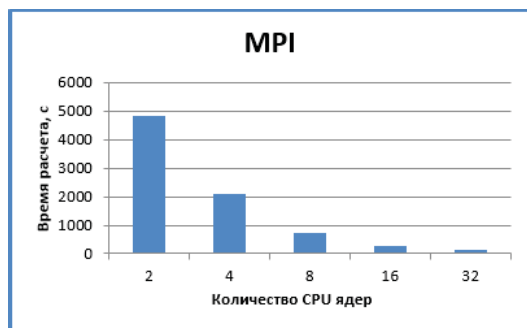


Рис. 4. Изменение времени расчета алгоритма численного моделирования в зависимости от числа вычислительных ядер CPU и количества GPU.

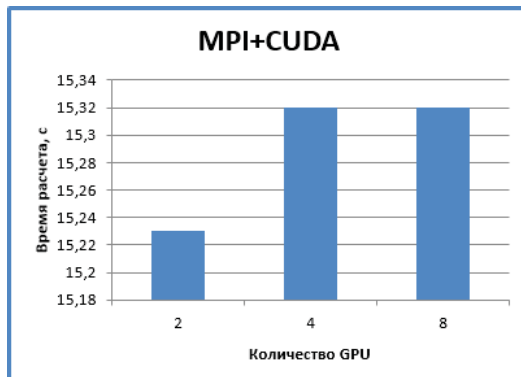
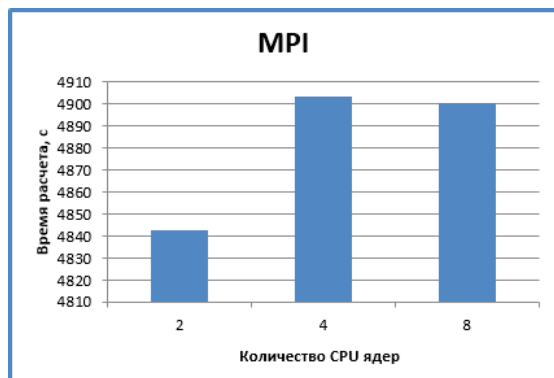


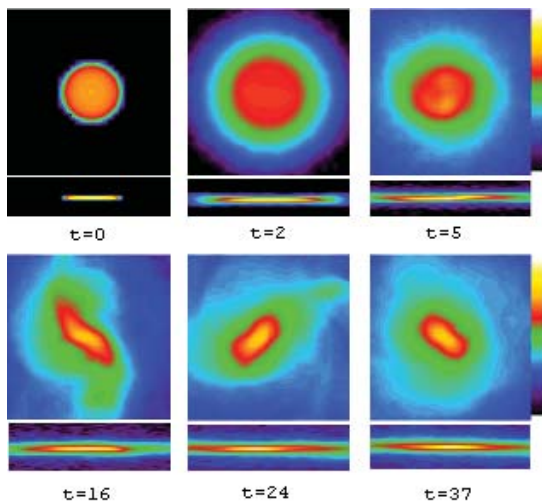
Рис. 5. Изменение времени расчета алгоритма численного моделирования при масштабировании.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ В ЗАДАЧАХ АСТРОФИЗИКИ И ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ

Для моделирования некоторых задач астрофизики и физики плазмы необходимо решать систему уравнений, состоящую из уравнения Власова и уравнения Пуассона, на подробной сетке и на больших временных масштабах. Фактически, для проведения серийных численных экспериментов для нестационарной задачи с 1 миллиардом сеточных узлов (сетка  $1000 \times 1000 \times 1000$ ) и 100 миллиардов модельных частиц, необходимых для адекватного воспроизведения 6-мерной функции распределения вещества, один временной шаг должен обрабатываться за абсолютное время не больше 1 секунды (на Рис. 6 показан пример типичного вычислительного эксперимента). Учитывая, что для прослеживания траектории одной частицы требуется порядка 100 арифметических действий с плавающей точкой, то ясно, что эта задача требует использования компьютеров эксафлопсного класса. При этом создаваемые параллельные алгоритмы должны эффективно масштабироваться для использования на сотнях тысяч и миллионах вычислительных элементов (процессоров или ядер).

Существующие параллельные алгоритмы используют подходы адаптивного измельчения сетки [11]; декомпозицию области, основанную на представлении гравитационного потенциала в виде суммы близкодствующей и дальнедействующей частей [12]; алгоритмы решения СЛАУ, получаемых после аппроксима-

ции уравнения Пуассона [13,14]. Тем не менее, все они имеют определенные ограничения по масштабируемости для трехмерных задач, решаемых на тысячах процессорах или ядер.



**Рис. 6.** Типичный вычислительный эксперимент: трехмерное моделирование звездной компоненты вращающейся дисковой галактики с образованием барообразной неустойчивости и изгибных деформаций. Выполнено 37 тыс. временных шагов.

Мы предлагаем новый метод декомпозиции области для решения нестационарных задач, включающих в себя уравнение Пуассона и уравнение Власова. Метод основан на частичном предвычислении функции Грина для заданных сеточной функции потенциала и соответствующих краевых условий и методе сопряжения подобластей, предложенном в работе [15]. Общая схема метода для суперкомпьютеров с распределенной памятью описана в работе [16]. Далее приведем схему реализации этого алгоритма для суперкомпьютеров с гибридной архитектурой, состоящих из CPU и GPU.

Поскольку каждой ячейке (узлу) сетки соответствует около 100 частиц, то основная вычислительная трудоемкость сосредоточена в интегрировании уравнений движения частиц, в то время как решение уравнения Пуассона занимает не более 1-2% от общей трудоемкости. В связи с этим оправдано хранить сеточные функции плотности и потенциала в памяти CPU, а хранение массивов с координатами и скоростями частиц в памяти GPU.

1. Выполняется параллельное решение урав-

нения Пуассона с помощью декомпозиции области.

- Решение уравнения Пуассона с нулевыми граничными условиями. На этом шаге используется только CPU. Обмены данными между CPU отсутствуют.
- Выполняется вычисление значений потенциала на границах подобластей и обмен значениями между соседними подобластями. Выполняется средствами MPI.
- Решение уравнения Лапласа с вычисленными граничными условиями. Итоговое решение уравнения Пуассона равно сумме решений с шага 1.с и 1.а.

2. Интегрирование уравнений движения частиц.

- Передаем сеточные функции потенциала из памяти CPU в память GPU. Передаем массивы частиц, которые «переместились» из других подобластей, предназначенных для вычислений на других CPU. Выполняется средствами CUDA.
- Вычисляем координаты частиц на новом шаге по времени (используя массивы координат частиц с предыдущего шага, хранящиеся в памяти GPU). Вычисляем сеточную функцию плотности. Вычисления выполняются параллельно, используется максимально большое количество ядер GPU. Выполняется средствами CUDA.
- Передаем сеточные функции плотности из памяти GPU в память CPU. Передаем массивы частиц, которые «перелетели» в соседние подобласти, предназначенные для вычислений на других CPU. Выполняется средствами CUDA.
- Передаем массивы с «переместившимися» частицами в соседние подобласти (соответствующим CPU). Выполняется средствами MPI.

3. Переход на следующий временной шаг. Переход к этапу алгоритма 1.а.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для класса нестационарных задач гравитационной газовой динамики, описан новый вычислительный алгоритм на основе метода круп-

ных частиц и метода Годунова, позволяющий проводить вычислительные эксперименты по изучению динамики самогравитирующего газа в трехмерной постановке в широком диапазоне параметров. На основе предложенных алгоритмов создан программный комплекс GPUPEGAS для гибридных суперЭВМ, оснащенных графическими ускорителями. Проведенные эксперименты для двух программных реализаций алгоритма численного моделирования в геофизике показали, что алгоритм хорошо масштабируется и использование GPU дает значительный эффект. Несмотря на то, что при вычислениях приходится копировать данные между CPU и GPU, использование гибридного кластера имеет свои преимущества и может быть использовано для трехмерных разностных методов. Экспериментальное исследование алгоритма для решения нестационарных задач, включающих в себя уравнение Пуассона и уравнение Власова, проведенное в Сибирском Суперкомпьютерном Центре, основанное на последовательности запусков с различным числом вычислительных ядер (вплоть до 50 тысяч) показало его линейную масштабируемость. Также было проведено теоретическое исследование алгоритма и его масштабируемости вплоть до 6 миллионов вычислительных ядер (нитей).

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа была выполнена при поддержке грантами РФФИ 13-07-00589, 14-07-00832, 14-05-00867, 14-01-31088, 14-07-00241, 14-01-31199, грантом Президента РФ МК - 4183.2013.9, МИП № 39 СО РАН, МИП № 130 СО РАН, а также при поддержке компании Intel.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тутуков А.В. Роль внешних факторов в эволюции галактик. *Астрономический журнал*. Т.83, № 6. 2006. Стр. 496-508.
- [2] Kulikov I. A new GPU-accelerated hydrodynamical code for numerical simulation of interacting galaxies. *Astro-Ph*. 2013. URL: <http://arxiv.org/abs/1311.0861>
- [3] Schive H., Tsai Y., Chiueh T. GAMER: a GPU-accelerated Adaptive-Mesh-Refinement Code for Astrophysics. *The Astrophysical Journal*. Vol. 186. 2010. P.457-484.
- [4] Куликов И.М., Черных И.Г., Глинский Б.М. AstroPhi: программный комплекс для моделирования динамики астрофизических объектов на гибридных суперЭВМ, оснащенных ускорителями Intel Xeon Phi. *Вестник ЮУрГУ*. № 2. 2013. Стр. 57-79.

- [5] Fletcher A. et al. Magnetic fields and spiral arms in the galaxy M51. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. Vol. 412, I. 4. 2011. P. 2396-2416.
- [6] Mitchell N., Vorobyov E., Hensler G. Collisionless Stellar Hydrodynamics as an Efficient Alternative to N-body Methods. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. Vol. 428, I. 3. 2013. P. 2674-2687.
- [7] Vshivkov V., Lazareva G., Snytnikov A., Kulikov I., Tutukov A. Hydrodynamical code for numerical simulation of the gas components of colliding galaxies. *The Astrophysical Journal Supplement Series*. Vol. 194, I. 47. 2011. P. 1-12.
- [8] Kulikov I. PEGAS: Hydrodynamical code for numerical simulation of the gas components of interacting galaxies. *Asociación Argentina de Astronomía Book Series*. № 4. 2013. P. 91-95.
- [9] Глинский Б.М., Караваев Д.А., Ковалевский В.В., Мартынов В.Н. Численное моделирование и экспериментальные исследования грязевого вулкана «Гора Карабетова» вибросейсмическими методами. *Вычислительные методы и программирование*. М.: Изд-во Моск. Гос. ун-та, 2010, Том 11, №1, С. 99-108.
- [10] Virieux J. P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method *Geophysics*, Volume 51, April 1986, Number 4, p. 889-901
- [11] Huang J., Greengard L. A Fast Direct Solver for Elliptic Partial Differential Equations On Adaptively Refined Meshes. *SIAM J. Sci. Comput.* 2000. Vol.21. P.1551-1566.
- [12] Balls G.T., Colella P. A Finite Difference Domain Decomposition Method Using Local Corrections for the Solution of Poisson's Equation. *J. Comp. Physics*. 2002. Vol.180. P.25-53.
- [13] Terekhov A.V. Parallel Dichotomy Algorithm for Solving Tridiagonal System of Linear Equations with Multiple Right-Hand Sides. *Parallel Computing*. 2010. Vol.36. P.423-438.
- [14] Яненко Н.Н., Коновалов А.Н., Бугров А.Н., Шустов Г.В. Об организации параллельных вычислений и «распараллеливании» прогонки. *Численные методы механики сплошной среды*. 1978. Т.9. С.139-146.
- [15] James R.A. The Solution of Poisson's equation for Isolated Source Distributions. *J. Comp. Physics*. 1977. 25, pp.71-93.
- [16] N. Snytnikov. Scalable Parallel Algorithm for Solving the Collisionless Boltzmann-Poisson System of Equations. *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*. 2012. V. 453. P. 393.



## INTEGRATED MODELING OF THE ARCTIC EAST-SIBERIAN SHELF HYDRODYNAMICS

### КОМПЛЕКСНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ ВОСТОЧНО-СИБИРСКОГО ШЕЛЬФА АРКТИКИ

---

*In connection with the plans of the industrial development of oil and gas fields located in the catchment areas of the Arctic rivers and the ocean shelf, current research is the problem of the state and variability of the natural hydrological regime of the Arctic water basins. The purpose of our research is to create integrity of numerical models intended to describe the mechanisms of interaction between land and sea waters of the East Siberian Arctic sector and the study of their variability. The complex includes the models of the Arctic ice and water circulations, a model of Arctic shelf zone, a model of sediment seabed including permafrost, a model of Lena river catchment area, data assimilation and analysis of simulation results. This paper presents the first results of integrated research.*

---

#### ВВЕДЕНИЕ

Восточно-Сибирский регион Арктического шельфа является уникальным природным комплексом, характеризующимся своеобразным геологическим строением, особенностью климата и ледово-гидрологического режима, специфической геоморфологией дна и островов. Сток рек, ледовые и гидрологические процессы в регионе влияют на формирование гидрологического режима всего Северного Ледовитого океана. В поверхностных арктических водах вплоть до Северного полюса широким шлейфом прослеживаются аномалии характеристик пресной воды моря Лаптевых и Восточно - Сибирского моря. Природные процессы в регионе моря Лаптевых дают начало многим аномалиям, определяющим погодные и ледовые условия на трассе Северного морского пути.

Влияние речного стока распространяется на водный баланс, процессы опреснения, термический и ледовый режим океана и его частей. Тепловой сток реки Лена является одним из ведущих климатообразующих факторов моря Лаптевых. Река дренирует большую часть Северо-Восточной Сибири, а ее воды аккумулируют распределенное в южных широтах тепло и выносят его в морскую акваторию. Река Лена образует уникальный природный объект - дельту на границе раздела фронтальной зоны суша-море. Исследования, проходившие в рамках Международного полярного года, зафиксировали значительные изменения гидрологических характеристик реки Лена. Среди них - уменьшение толщины льда зимой, увеличение температуры водного потока в паводковый период, раннее разрушение припайного льда в устьевой области, увеличение термоэрозии с начала 80-х годов. Считается, что увеличение темпов термоэрозии с начала 80-х гг., приводящее к исчезновению островов, полностью соотносится с ростом температуры водного потока вследствие потепления.

Водосборы сибирских рек находятся на территории с наличием многолетней мерзлоты, хранящей огромные запасы органического углерода. Данные экспедиционных исследований регистрируют масштабную эмиссию метана в атмосферу из мелководной части шельфа в Восточно-Сибирском море и море Лаптевых [1]. Предполагается, что очаги разгрузки метана могут быть связаны с деградацией подводных мерзлых пород и нарушением условий существования газовых гидратов на шельфе морей восточного сектора Арктики в результате происходящего потепления.

1 Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Novosibirsk, Russia

2 Institute of Computational Technologies, Novosibirsk, Russia

3 Institute for Water and Environmental Problems, Novosibirsk branch, Russia

В течение многих лет в море Лаптевых работают международные программы и экспедиции (например, «АВЛАП-2002», «ЛАПЭКС» «Полярная», «Система моря Лаптевых» «Лена», «TRANSDRIFT»), ставящие своей задачей исследование изменений, которые происходили и происходят в природной среде региона моря Лаптевых. В дополнение к данным, полученным в результате экспедиционных исследований, разрабатываются международные программы (CLIVAR ВПИК/WCRP, CMIP). В связи с этим актуальным представляется разработка и усовершенствование базовых физико-математических моделей, которые способны воспроизводить и оценивать предсказуемость климатической системы в различных временных и пространственных масштабах.

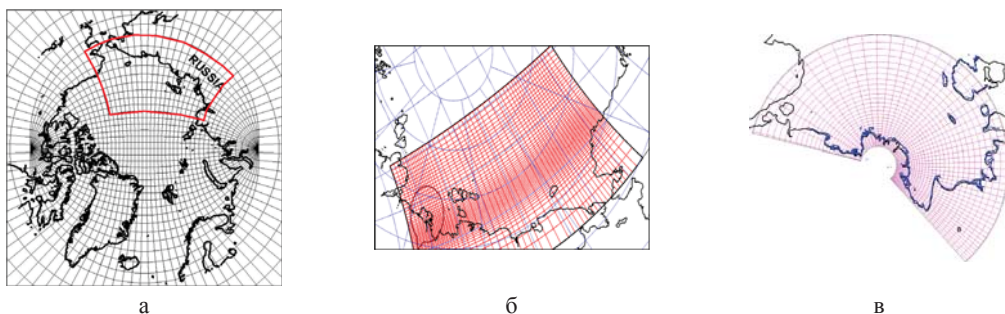
Для проведения исследований в институтах Сибирского отделения РАН в рамках интеграционного проекта ИП №109 разрабатывается комплекс численных моделей:

- циркуляции вод и льда Северного Ледовитого океана,
- шельфовой зоны Восточно-Сибирского моря, моря Лаптевых и Чукотского моря,
- осадочного слоя морского дна в условиях поддонной многолетней мерзлоты,
- речного стока бассейна водосбора реки Лена,
- усвоения данных наблюдений и анализа результатов моделирования,
- водообмена в устьевых областях рек арктической зоны.

Целью создания такого комплекса является изучение механизмов, влияющих на формирование термического режима и структуры солёности Восточно-Сибирского шельфа, выделении роли речного стока в этих процессах, исследование взаимодействия морских и речных вод и исследование их изменчивости при вариации глобальных климатических параметров.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ШЕЛЬФОВОЙ ЗОНЕ ОКЕАНА

Разработанная в ИВМиМГ СО РАН система вложенных моделей Северного Ледовитого океана и Северной Атлантики (СЛО и СА) [2,3] (сеточное разрешение 10-25 км в полярных районах), шельфовой зоны океана (разрешение 3-4 км) и модель окрестностей дельты реки Лена (разрешение до 400 м) предлагается для исследования особенностей распространения вод реки Лена и их роли в формировании локальной циркуляции моря Лаптевых (Рис. 1).



**Рис. 1.** Вид численных сеток, используемых при построении вложенных моделей: а) репроективная численная сетка для региональной модели Северная Атлантика - Северный Ледовитый океан; б) численная сетка для региональной модели морей Восточно-Сибирского шельфа; в) численная сетка для региональной модели территории моря Лаптевых, прилегающей к дельте р.Лена. На Рис. 1.а схематично выделена область моря Лаптевых и Восточно-Сибирского моря; на рис. 1.б окружностью показана область дельты реки Лена для дальнейшего уточнения сетки (Рис. 1.в)

В результате работы крупномасштабных численных моделей с использованием данных реанализа атмосферы NCEP/NCAR восстановлена система взаимодействия водных масс Северной Атлантики и СЛО, включая циркуляцию вод в морях сибирского шельфа с 1948 по 2012 гг. Результаты моделирования показали, что основными источниками водных масс Восточно-Сибирского шель-

фа являются: пресные воды, связанные с речным стоком, осадками и тальми водами; атлантические воды, поступающие через Баренцево море и пролив Фрама и распространяющиеся на восток вдоль шельфового склона; воды Тихого океана, поступающие через Берингов пролив и распространяющиеся вдоль шельфа на запад в сторону Восточно-Сибирского моря и моря Лаптевых. Перераспределение водных масс в регионе связано, с одной стороны, с преобладающим типом циркуляции атмосферы Арктики и водных масс СЛО, с другой - с интенсивностью речного стока.



Рис. 2. Поверхностная циркуляция водных масс (модельный расчет) в морях Восточно-Сибирского шельфа и прилегающей области в сентябре 2007г

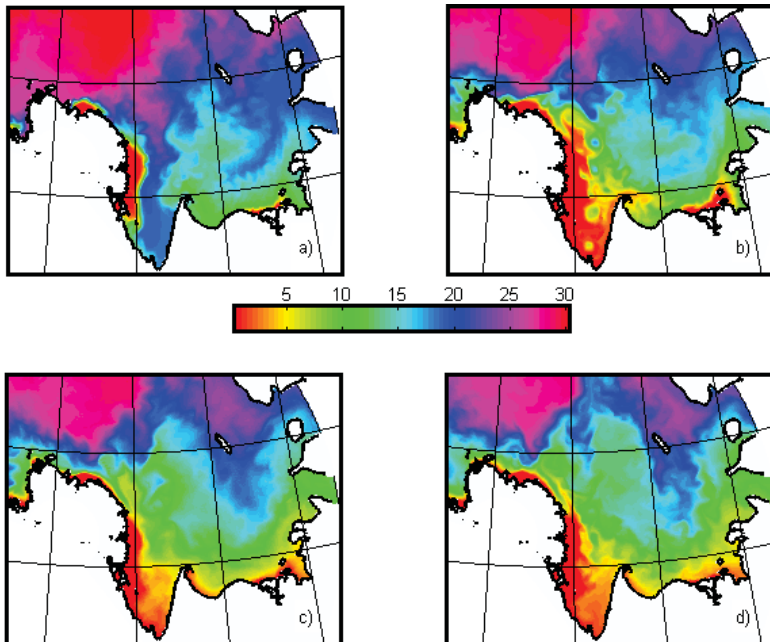


Рис. 3. Соленость (в промилле). Результат моделирования. Распространение плюма пресных вод р.Лена на шельфе моря Лаптевых в летний период 2008г: а) 31 мая; б) 30 июня; в) 31 июля; д) 31 августа

На рис. 2 представлена циркуляция водных масс в морях Восточно-Сибирского шельфа и прилегающей области, полученная по результатам расчетов крупномасштабной модели. Стрелками показано направление движения вод, Видны, что поступающий с запада потоки вод проникает в море Лаптевых и может вызывать дополнительный нагрев. В поверхностном слое воды вдоль побережья движутся в общем направлении на восток. Это течение носит название Сибирского вдольберегового течения (СВТ). СВТ берет начало в море Лаптевых, откуда распресненные обильным стоком реки Лены воды через проливы Новосибирских островов проникают в западную часть Восточно-Сибирского моря. При движении далее на восток к этому потоку присоединяются пресные воды рек, среди которых Индигирка и Колыма являются наибольшими. СВТ

движется вдоль всего побережья Восточно-Сибирского моря и через пролив Лонга проникает в Чукотское море. Циркуляция вод в шельфовой зоне по результатам моделирования отличается значительной изменчивостью.

Более подробно состояние вод моря Лаптевых воспроизводилось с помощью системы вложенных моделей. Исследовалось развитие и распространение плюма речных вод в условиях лета 2008 г. Данный временной период выбран в связи с наличием результатов наблюдений в этом регионе по программе Международного Полярного года (МПГ). Полученная в численном эксперименте траектория распространения пресных вод (рис. 3) на шельфе соответствует системе течений, определяемой атмосферной ситуацией и показывает удовлетворительное согласие с данными наблюдений. Для дальнейшего развития отмечена необходимость детализации атмосферного форсинга, процессов формирования речного стока, использования данных наземного и спутникового измерений, учет шельфовых волн нелокального происхождения.

### **РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ УСВОЕНИЯ ДАННЫХ ОКЕАНОЛОГИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ**

Для лучшего понимания гидродинамических процессов в регионе необходимо опираться на данные реальные данные наземных и спутниковых измерений. В этой связи была сформулирована задача проведения численных экспериментов по усвоению данных климатического распределения температуры и солености в море Лаптевых и Восточно-Сибирском море на основе алгоритма усвоения, основанном на варианте ансамблевого фильтра Калмана с учетом специфики данных океанографических наблюдений, и системы вложенных моделей ИВМиМГ СО РАН.

Алгоритм фильтра Калмана является в настоящее время одним из самых популярных подходов к решению задачи усвоения данных наблюдений. Лидирующим направлением в работах, посвященных применению фильтра Калмана при усвоении данных, является ансамблевый подход [4-6], при котором матрицы ковариаций ошибок оценивания вычисляются для нелинейных прогностических моделей. Ансамблевый фильтр Калмана является вариантом обобщенного фильтра Калмана, в котором ковариации ошибок прогноза оцениваются с помощью ансамбля прогнозов. Наряду с приближенным описанием ковариаций ошибок оценивания с помощью ансамбля прогнозов, в отечественной литературе [6-8] предлагалось использовать субоптимальные алгоритмы, в которых теоретико-вероятностное осреднение заменяется на осреднение по времени. В данной работе используется алгоритм, основанный на этом подходе, для задачи усвоения данных океанических наблюдений.

Тестирование разработанного алгоритма показало его эффективность. Ряд численных экспериментов по усвоению данных был проведен с использованием данных международного полярного года (данные предоставлены ААНИИ Роскомгидромета) и спутниковых данные системы Pathfinder (рис. 4). Выделены районы А и Б, имеющие наибольшее покрытие спутниковой информацией. При тестировании алгоритма усвоения на основе модельных данных «истинное» значение моделировалось с помощью расчета в отсутствие возмущения внешних параметров. Результаты этого расчета были искусственно локализованы с помощью процедуры интерполяции в точки наблюдений, имеющие реальное пространственно-временное распределение (Рис. 5а). В качестве возмущающего внешнего параметра использовался нулевой расход реки Лена. В этом случае модель систематически завышает соленость вод, расположенных вблизи дельты реки (Рис. 5б). В районе А, расположенном по направлению движения речных вод, в отсутствие усвоения ошибка в определении солености на поверхности со временем вырастает до 3 промилле (Рис. 6а), в то время как с учетом данных ошибка остается в пределах 1-1.5 промилле. Результатом усвоения данных предварительного эксперимента с реальным расходом реки Лена, локализованных в точки реальных наблюдений является формирование области пресной воды вблизи дельты (рис. 5с).

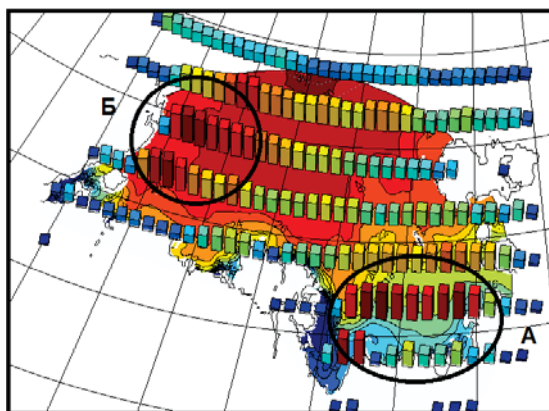


Рис. 4. Гистограмма количества спутниковых данных по регионам. Наиболее освещены районы А и Б. Изолинии соответствуют полю солёности на поверхности, полученному по результатам моделирования для 30 сентября 2008 г

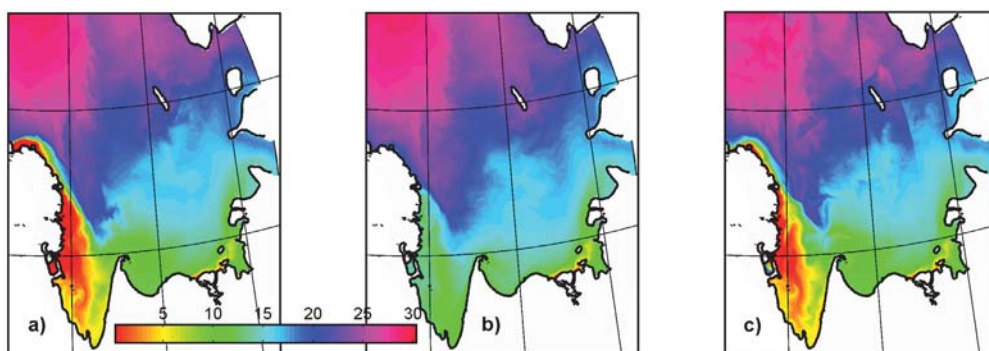


Рис. 5. Тестовый расчет по результатам работы блока усвоения данных. а) базовый расчет; б) расчет при нулевом расходе р. Лена; в) расчет с нулевым расходом и усвоением данных базового эксперимента

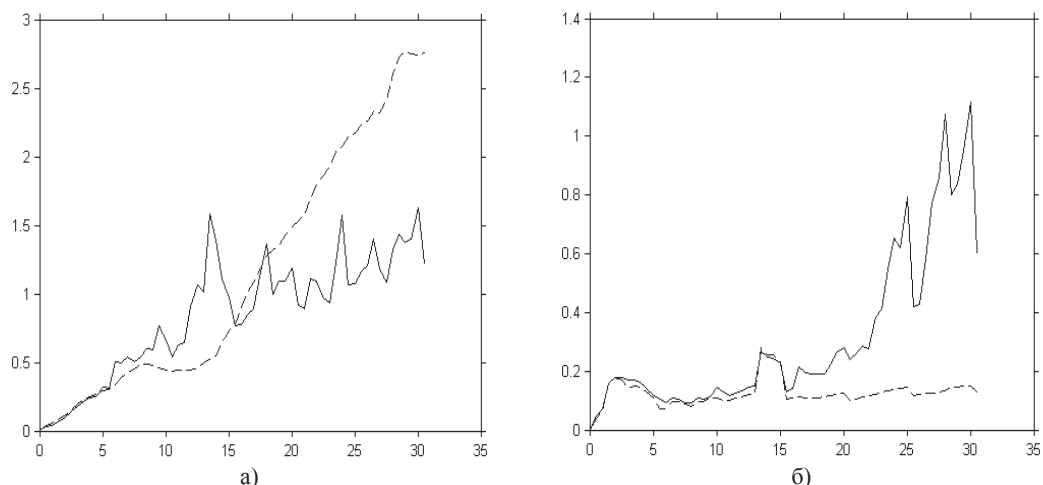


Рис. 6. Временной ход ошибки прогноза по областям а) А и б) Б для солёности поверхности по результатам моделирования с 1 по 31 сентября 2008 г. Пунктирная линия соответствует эксперименту без усвоения, сплошная с усвоением данных наблюдений.

В районе Б, расположенном вдалеке от дельты реки, ошибка в определении солёности незначительна (рис. 5б). Использование же усвоения приводит к возмущениям поля солёности и формирует ошибку того же порядка, что в районе А (около 1 промилле).

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ РЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

Включение речного стока в модели климатической системы в международных проектах проводится на основе использования климатических данных о расходах рек или как включение повышенной влажности. В результате использования таких подходов искажается процесс взаимодействия водных масс суши и моря. В проекте предлагается осуществить взаимодействие гидрологической модели речного стока и модели шельфовой зоны океана. Для качественного описания и численного моделирования гидрологических систем к настоящему времени разработан широкий спектр подходов и соответствующих математических моделей. Среди них: линейные модели стекания воды по речному руслу, динамические модели с сосредоточенными параметрами или распределёнными параметрами, динамико-стохастические модели. Рассмотренные в традиционных моделях подходы не имеют универсального характера и ориентированы на воспроизведение конкретных речных бассейнов или отдельных процессов, формирующих сток.

Одним из вариантов исследования климатической изменчивости речных систем является проведение расчетов на основе линейной резервуарной модели речного стока [9]. Сток в модели разделяется на три составляющих: поверхностный сток, речной сток, грунтовый сток. Поверхностный и грунтовый стоки представляют собой единичные ячейки, а речной сток представлен в виде каскадов ячеек. Количество каскадов вычисляется по размеру, наклону ячеек и величине коэффициента задержки. Используется параметризация многолетней мерзлоты бассейна р. Лена.

Проведен анализ данных по изменению климатических и гидрологических характеристик Восточной Сибири на основе данных реанализа MERRA (1980 - 2011 гг.) и ERA40 (1958 - 2001 гг.) с учетом картографических данных многолетней мерзлоты для бассейна реки Лены (<http://www.atlas-yakutia.ru>) и стокоформирующих комплексов в бассейне реки. По оценкам гидрологов водные запасы р. Лена пополняет, как и все ее притоки, в основном, дождевыми и тальными снеговыми водами, которые в среднем составляют 46% от всего количества воды, попадающей в бассейн (рис. 7).

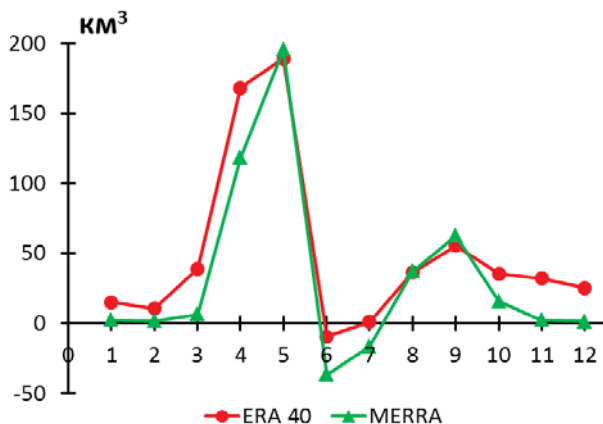


Рис. 7. Влагонаполнение (осадки-испарение+таяние снега) бассейна реки Лена, км<sup>3</sup>

На основе этих данных проведены численные расчеты по моделированию стока реки Лены. Среднеклиматический годовой гидрограф для данных реанализа атмосферы по амплитуде и фазе наступления весеннего паводка совпадает с данными гидрографа на створе Лена-Кюсюр. Разница в максимальной амплитуде составляет для ERA40 +6,7%, для MERRA +6,4%, для годового стока ERA40 +5,8%, MERRA +24,2%, что является улучшением результатов ERA40 за счет уточнения учета грунтового стока в присутствии многолетней мерзлоты (Рис. 8). Рассчитаны корреляции для годового стока между гидрологическими данными на створе Лена-Кюсюр и данными реанализов: для ERA40 - 0,39, для MERRA - 0,51. Корреляция между двумя расчетами составляет 0,93.

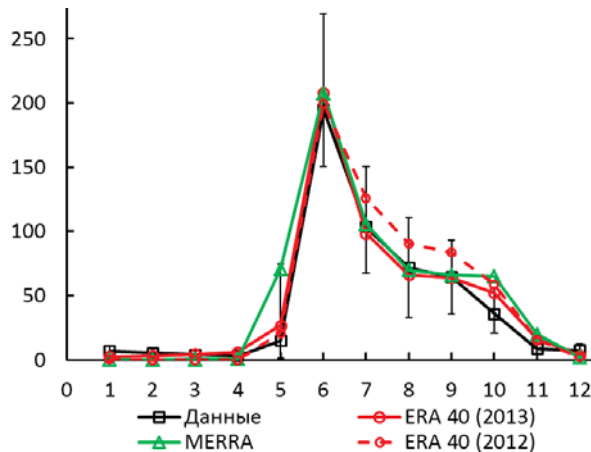


Рис. 8. Среднеклиматический сток реки Лена (Кюсюр), км³

Дополнением к линейной резервуарной модели может служить разработанная гидродинамическая модель дельты реки Лена, описывающая водный режим реки от с.Кюсюр в нижнем течении Лены до впадения речных вод в морскую акваторию [10]. Построение цифровой модели рельефа в плане проводилось путем векторизации береговых контуров с выделением основных протоков, имеющих выраженную гидравлическую и пространственную обособленность, и второстепенных, играющих подчиненную роль. Исходным материалом при оцифровке служили географические карты и спутниковые фотографии земной поверхности. При построении топологической схемы дельты каждый рукав с присущими ему индивидуальными гидрологическими характеристиками ассоциировался с направленным отрезком на плоскости, а совокупность таких отрезков образовывала связный граф. В целом геометрическая модель дельты содержала систему связанных между собой 82 русловых участков и 70 узлов сочленения (рис. 9).

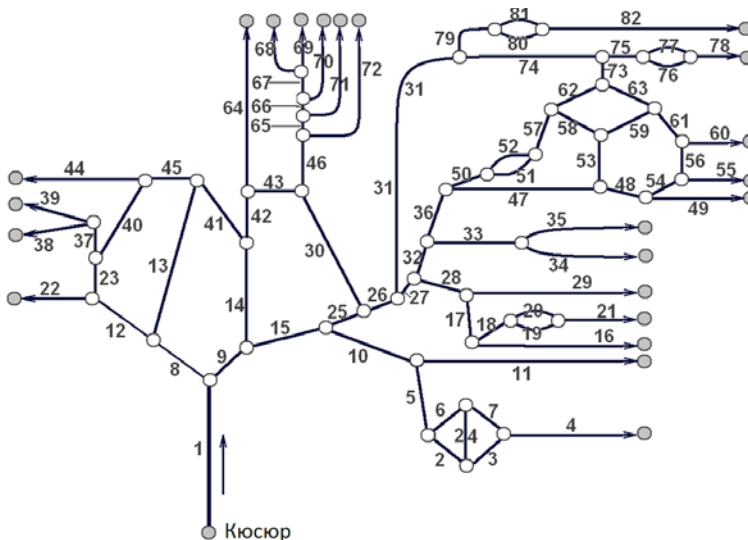


Рис. 9. Схематизация русловой сети дельты Лены в виде графа. Сплошные линии - речные участки, кружки - узлы деления потока и внешние границы

Для расчета объемов субстанции, выносимой в морскую акваторию, воспроизводится перераспределение вод по рукавам дельты. Описание расходно-уровенного режима системы русел проводится на основе гидродинамической модели с использованием уравнений Сен-Венана в

одномерном приближении. Для отдельного речного участка формулируются нестационарные уравнения движения и неразрывности. Граничные условия задаются как для русловой системы в целом, так и в узлах ветвления потока. На входной границе считается известным расход воды, поступающей с верховьев, на устьевом взморье предполагается совпадение уровней речных рукавов с уровнем моря. На внутренних узлах решения «сшиваются» - в качестве условий сопряжения ставятся требования баланса расходов и связь уровней смежных участков. Численное решение уравнений получено методом контрольного объема на основе применения неявной схемы с сохранением интеграла Бернулли. Привязка модели к морфометрическим характеристикам речной сети реализуется заданием донного рельефа для каждого русла и определением функциональной связи, отражающей зависимость площади живого сечения от распределения уровня внутри руслового участка.

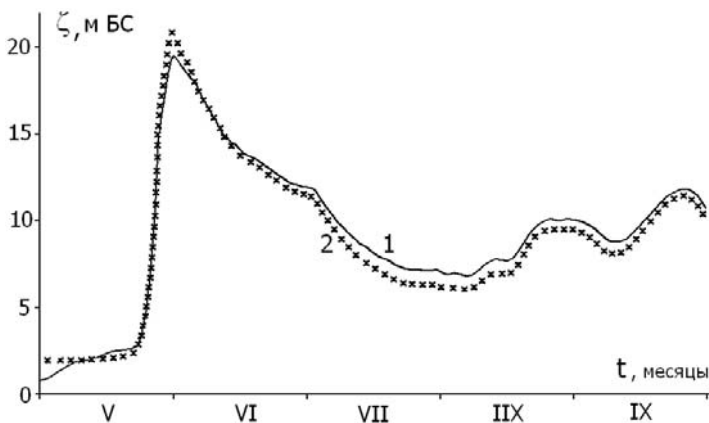


Рис. 10. Ход уровня свободной поверхности в створе с. Кююр в 2008 г: 1 - расчетный, 2 - фактический

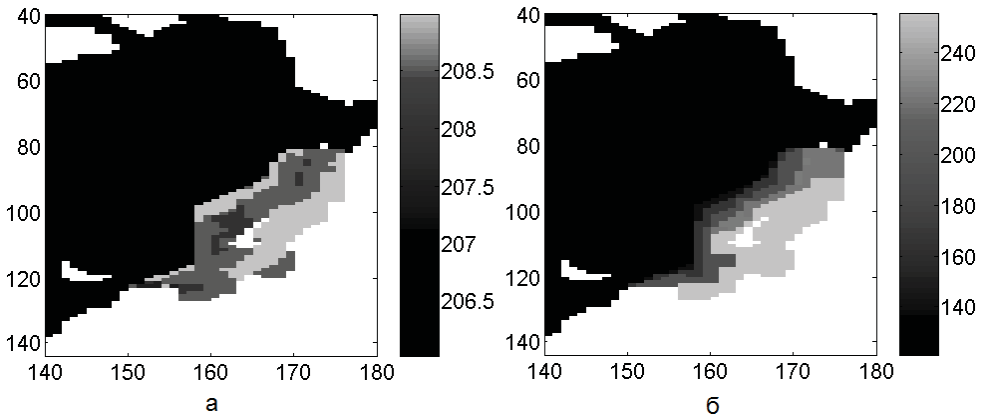
По численной модели с оптимизированными параметрами рассчитана динамика уровня в с. Кююр (рис. 10). Средняя абсолютная ошибка в определении уровня составила 0,6 м, что представляется допустимым в пределах принятой точности при аппроксимации русловой геометрии.

## РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ПОДВОДНОЙ МЕРЗЛОТЫ СИБИРСКОГО ШЕЛЬФА

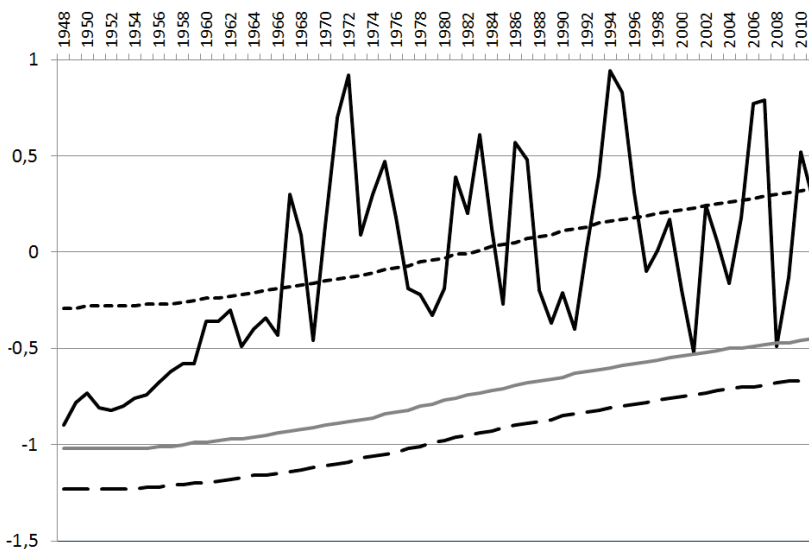
Для решения задачи численного моделирования глубины подводной мерзлоты в морях Восточно-Сибирского шельфа (ВСШ) в зависимости от геотермического потока тепла в осадочном слое и характеристик грунта, а также для получения оценки эмиссии метана в атмосферу в результате возможной дестабилизации поддонных газогидратов Арктического шельфа было проведено математическое моделирование динамики толщи субаквальных мерзлых пород и зоны стабильности гидратов метана в осадочном слое ВСШ. Для проведения численного эксперимента использовалась совместная региональная модель СЛО и СА ИВМиМГ СО РАН. Для расчетов теплового поля в осадочном слое и определения нижней границы криолитозоны на шельфе модель океан-лед была дополнена моделью теплопереноса в грунте ИФА РАН [11] и блоком по расчету термобарических условий существования газогидратов метана. Результаты численного моделирования показали возможность существования подводной мерзлоты на ВСШ, нижняя граница залегания которой находится на уровне 130-210 м под поверхностью дна при потоке тепла 60-70 мВт/м<sup>2</sup>, Рис. 11а. Зона стабильности газогидратов на шельфе может составить 200-600 м. При этом верхняя граница зоны распространения гидратов находится на уровне 150-280 м под дном (рис. 11б). Таким образом, эта зона изолирована слоем многолетнемерзлых отложений. Динамика оттаивания мерзлоты более чувствительна к величине геотермического потока тепла, чем к изменениям температуры придонного слоя воды (рис. 12). Заметное влияние оказывают физические свойства



грунта. Показана возможность существования несквозных таликов глубиной до 25 м в областях шельфа с положительной придонной температурой воды при заданном геотермическом потоке тепла 60-100 мВт/м<sup>2</sup> (рис. 13а). При потоке тепла 100 мВт/м<sup>2</sup> получены сквозные талики в южной части моря Лаптевых в районе дельты р. Лена (рис. 13б). Именно в этой области по фактическим данным были зарегистрированы устойчивые аномалии растворенного метана.



**Рис. 11.** Результаты расчета при заданном геотермическом потоке тепла 60 мВт/м<sup>2</sup>: (а) Глубина залегания нижней границы мерзлого грунта в метрах; (б) верхняя граница зоны возможного распространения гидратов метана в метрах



**Рис. 12.** Результаты моделирования для устьевой зоны р.Лена, придонная температура воды (сплошная черная линия), температура в грунте на глубине 50 м ниже дна при геотермическом потоке тепла 60 мВт/м<sup>2</sup> (длинный пунктир), то же при 70 мВт/м<sup>2</sup> (серая линия), то же при 100 мВт/м<sup>2</sup> (короткий пунктир)

Для оценки эмиссии метана в атмосферу на ВСШ проведены сценарные расчеты в предположении наличия диффузионного транспорта газа из донных отложений. Предполагалось увеличение газовой проницаемости многолетних мерзлых донных осадков и поступление растворенного метана по всей области шельфа при наличии мерзлых пород. В зонах сквозных таликов были заданы экстремально высокие потоки 1000 нмоль/(м<sup>2</sup>сек), характерные для случая разрушения поддонных газогидратов метана. По результатам расчетов диффузионный летний поток метана в атмосферу из фоновых областей составляет порядка 1-3 мг(СН<sub>4</sub>)/(м<sup>2</sup>сутки), а из областей таликов 11-50 мг(СН<sub>4</sub>)/(м<sup>2</sup>сутки) (рис. 14). Расчетные потоки количественно согласуются с данными

измерений. Суммарная эмиссия метана в атмосферу от рассмотренных источников составила до 100 килотонн в год за период открытой воды (рис. 15), что на порядок меньше максимальной оценки, приведенной в работе (Shakhova, 2010).

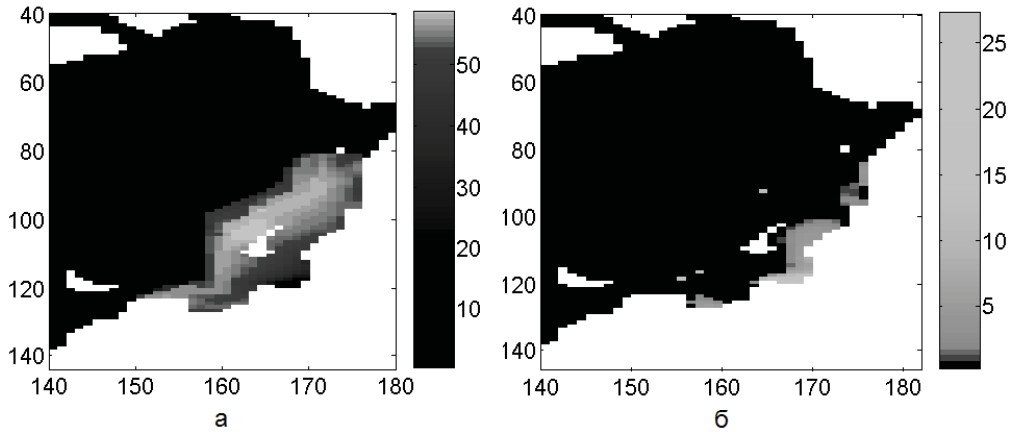


Рис. 13. (а) Нижняя граница залегания мерзлого грунта в метрах при  $Q_t = 100 \text{ мВт/м}^2$  ;  
(б) Глубина протаивания мерзлого грунта в метрах, при заданном  $Q_t = 60 \text{ мВт/м}^2$

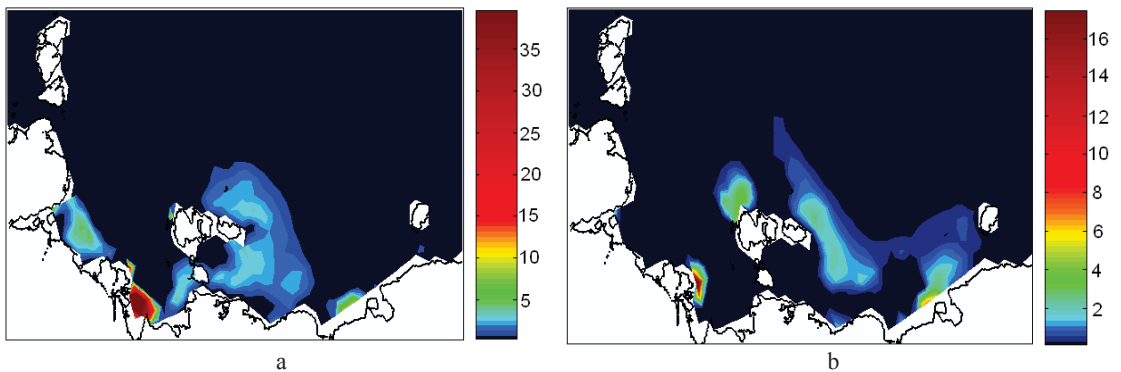


Рис. 14. Диффузионный поток метана в атмосферу (в  $\text{мг}(\text{CH}_4) \cdot \text{м}^2 \cdot \text{сутки}$ ), полученный в численных экспериментах:  
а- для сентября 2007 г., б- для сентября 2010 г.

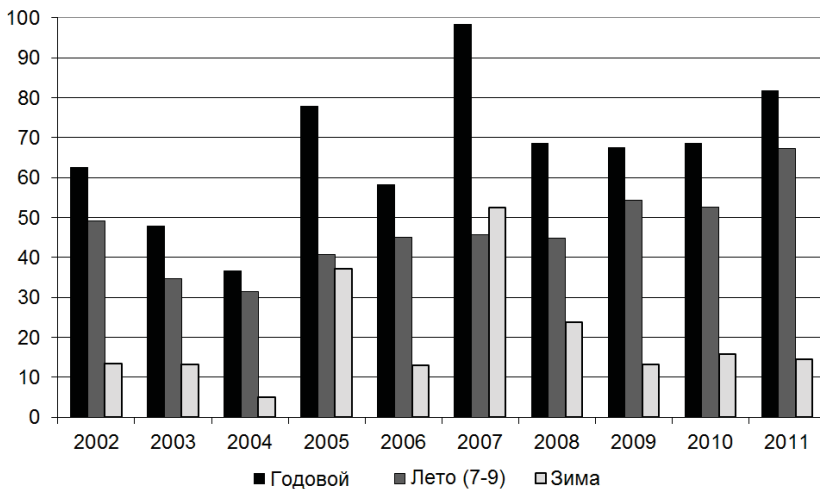


Рис. 15. Поток метана в атмосферу региона в килотоннах, полученный в численном эксперименте для всего безледового периода с учетом летних и зимних месяцев

## ВЫВОДЫ

- На основе системы вложенных моделей с учетом методики усвоения данных воспроизведена сезонная изменчивость состояния водных масс морей Восточно-Сибирского сектора Арктики.
- В численных экспериментах выявлено влияние речного стока на термохалинную структуру шельфовых вод.
- На основе линейной резервуарной модели с учетом данных атмосферного реанализа и картографических данных многолетней мерзлоты проведены численные расчеты по моделированию стока реки Лена.
- Разработана гидродинамическая модель дельты реки Лена
- Проведено численное моделирование динамики толщи субквальных мерзлых пород и зоны стабильности гидратов метана в осадочном слое Восточной - Сибирского шельфа в зависимости от геотермического потока тепла в осадочном слое и характеристик грунта. Получены оценки глубины залегания криолитозоны на шельфе. Показана возможность существования несквозных таликов глубиной до 25 м в областях шельфа с положительной придонной температурой воды. Сделаны оценки суммарной эмиссии метана в атмосферу региона.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Shakhova, I. Semiletov, A. Salyuk, V. Yusupov, D. Kosmach, Gustafsson O. Extensive methane venting to the atmosphere from sediments of the East Siberian Arctic Shelf. *Science*. 2010. № 327. P. 1246-1250.
- [2] Golubeva, E.N., Platov G.A. On improving the simulation of Atlantic Water circulation in the Arctic Ocean. *J.Geoph.Res.* - 2007. - Vol. 112. - C04S05
- [3] Голубева Е.Н. Численное моделирование динамики Атлантических вод в Арктическом бассейне с использованием схемы QUICKEST. *Вычислительные технологии*, 2008, т.13, №5, стр. 11-24.
- [4] Evensen G. *Data assimilation. The ensemble Kalman filter*. 2009. Springer-Verlag: Berlin Heidelberg 307 p.
- [5] Houtekamer P.L., Mitchell H.L. Ensemble Kalman Filtering. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*. 2005. 131: 1-23.
- [6] Klimova E. A suboptimal data assimilation algorithm based on the ensemble Kalman filter. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*. 2012. DOI:10.1002/qj.1941.
- [7] *Справочник по теории автоматического управления под ред. А.А. Красовского*, Москва, «Наука», 1987, 711 с.
- [8] Киланова Н.В., Климова Е.Г. Численные эксперименты по оценке систематической ошибки модели в задаче усвоения данных о концентрации пассивной примеси // *Вычислительные технологии*. 2006. №5. С. 32-40.
- [9] Кузин В.И., Лаптева Н.А. Математическое моделирование стока из бассейна реки Лена // *Сборник материалов 9-го Международного научного конгресса «Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2013»*. Т.2. Новосибирск: СГГА: С. 3-7.
- [10] Шлычков В.А., Крылова А.И. Численная модель плотностных течений в устьевых областях сибирских рек // 2014, СибЖВМ (в печати)
- [11] Денисов С.Н., Аржанов М.М., Елисеев А.В., Мохов И.И. Оценка отклика субквальных залежей метангидратов на возможные изменения климата в XXI веке. *Доклады Академии Наук*. 2011. Т. 441. № 5. С. 685-688.

## MATHEMATICAL MODELLING OF PROCESSES OF THE HEAT AND MASS TRANSFER IN THE CONDITIONS OF PHASE TRANSITIONS AND CHEMICAL REACTION AT IGNITION OF CONDENSED SUBSTANCES BY A LOCAL POWER SOURCES

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В УСЛОВИЯХ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ И ХИМИЧЕСКОГО РЕАГИРОВАНИЯ ПРИ ЗАЖИГАНИИ КОНДЕНСИРОВАННЫХ ВЕЩЕСТВ ЛОКАЛЬНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ ЭНЕРГИИ

---

*Numerical research of main physical and chemical processes and phase exchanges at the ignition of condensed substance (fuel) by local heating is performed. Conditions of interaction between near-surface layer of fuel and heated till high temperature metallic (steel, aluminum) and non-metallic (ceramic, carbon) particles from various origin are investigated. Values of main integral characteristic process - ignition delay time are determined. The dependences of the ignition delay time for a condensed matter on the initial temperature, rates and shape of a "hot" particle are determined.*

---

#### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время типичные твердые (древесина, нитроклетчатка, смесь бутилкаучука и перхлората аммония) и жидкие (бензин, керосин, мазут) топлива широко используются в специальных и энергетических установках. Однако считается [1], что применение нового вида топлива, например, гелеобразного достаточно перспективно для повышения эффективности выработки энергии. В отличие от традиционных топлив [2-6] условия инициирования процесса устойчивого горения источниками ограниченного теплосодержания для таких топлив в полной мере не изучены.

Проведение исследований интегральных характеристик и закономерностей тепломассопереноса при зажигании конденсированных веществ (КВ) по известным экспериментальным методам [7-9] не всегда возможно. Индукционный период включает стадии прогрева, реализации фазовых переходов (плавление и испарение горючего и окислителя, кристаллизация материала источника энергии) и ускорения химических реакций окисления. Математическое моделирование позволяет исключить ряд проблем, связанных, например, с фиксированием параметров быстроразвивающегося реального физического процесса, а также более детально исследовать последовательные этапы от начального момента прогрева КВ до его зажигания.

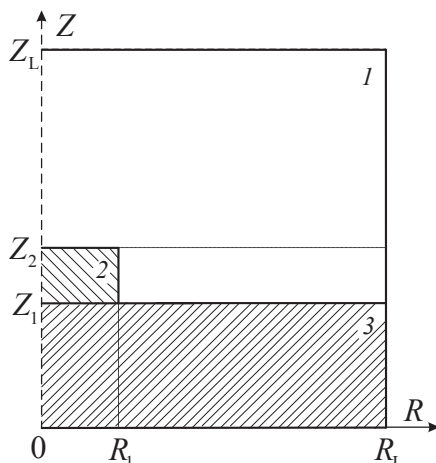
#### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При численном исследовании процессов тепломассопереноса считалось, что разогретая до высоких температур стальная частица в форме цилиндрического диска с характерными размерами  $R_p$  и  $Z_p$  инерционно осаждается на поверхность гелеобразного топлива (рис. 1), температура которого близка к криогенной. Топливо содержит окислитель и горючее (сжиженный кислород и гидразин соответственно). Топливная композиция сгущена добавками солей и гидратов для придания желеобразного агрегатного состояния. Объемные доли горючего ( $\varphi$ ) и окислителя ( $1-\varphi$ ) в конденсированном веществе известны. Предполагалось, что за счет энергии частицы приповерхностный слой топлива прогревается. Ускоряются процессы плавления топлива, находящегося в начальный момент времени при криогенных температурах в твердом агрегатном состоянии. При достижении условий парообразования происходит испарение гелеобразной

---

<sup>1</sup> National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russia

структуры „горючее - окислитель”. Пары горючего и окислителя поступают в область, заполненную инертным газом. В малой окрестности частицы формируется парогазовая смесь. При достижении достаточных для воспламенения температур и концентраций компонентов смеси происходит зажигание.



**Рис. 1.** Схема области решения задачи:  
1 - парогазовая смесь, 2 - разогретая частица, 3 - гелеобразное топливо

При постановке задачи приняты допущения:

1. В результате испарения горючего и окислителя образуются вещества с известными теплофизическими и термокинетическими характеристиками.
2. Не учитываются процессы внедрения источника нагрева в приповерхностный слой.
3. Теплофизические характеристики (плотность, теплопроводность, теплоемкость) солей и гидратов, используемых для сгущения топливной композиции (придания желеобразного агрегатного состояния), принимались сопоставимыми с аналогичными параметрами горючего и окислителя.
4. Теплофизические характеристики взаимодействующих веществ не зависят от температуры. Критерии зажигания принимались согласно представлениям современной теории зажигания конденсированных веществ [10]:
  1. Энергия, выделяемая в результате химической реакции окисления горючего, больше теплоты, передаваемой от разогретой частицы топливу и формирующейся парогазовой смеси.
  2. Температура смеси газообразных компонентов окислителя и горючего в зоне реакции окисления превышает начальную температуру источника нагрева.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Для описания комплекса взаимосвязанных процессов тепломассопереноса в условиях химического реагирования, экзотермических и эндотермических фазовых переходов в безразмерных переменных при  $0 < \tau < \tau_d$  использовалась следующая система нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений математической физики [11-13]:

$$R_1 < R < R_L, Z_1 < Z < Z_2; 0 < R < R_L, Z_2 < Z < Z_L$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} = -R\Omega, \quad (1)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial R} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Z} - U \frac{\Omega}{R} = \frac{1}{\text{Re}_1} \left[ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Omega}{\partial R} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Z^2} - \frac{\Omega}{R^2} \right] + \frac{\partial \Theta_1}{\partial R}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{Sh} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta_1}{\partial R} + V \frac{\partial \Theta_1}{\partial Z} = \frac{1}{\text{Re}_1 \text{Pr}_1} \left[ \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Theta_1}{\partial R} + \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial Z^2} \right] + Sr_1, \quad (3)$$

$$\frac{1}{Sh} \frac{\partial C_f}{\partial \tau} + U \frac{\partial C_f}{\partial R} + V \frac{\partial C_f}{\partial Z} = \frac{1}{\text{Re}_{12} Sc_{12}} \left[ \frac{\partial^2 C_f}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial C_f}{\partial R} + \frac{\partial^2 C_f}{\partial Z^2} \right] - Sr_2, \quad (4)$$

$$\frac{1}{Sh} \frac{\partial C_o}{\partial \tau} + U \frac{\partial C_o}{\partial R} + V \frac{\partial C_o}{\partial Z} = \frac{1}{\text{Re}_{13} Sc_{13}} \left[ \frac{\partial^2 C_o}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial C_o}{\partial R} + \frac{\partial^2 C_o}{\partial Z^2} \right] - Sr_2, \quad (5)$$

$$C_f + C_o + C_g = 1; \quad (6)$$

$$0 < R < R_1, Z_1 < Z < Z_2$$

$$\frac{1}{Fo_2} \frac{\partial \Theta_2}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Theta_2}{\partial R} + \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial Z^2} + Sr_3; \quad (7)$$

$$0 < R < R_1, 0 < Z < Z_1$$

$$\frac{1}{Fo_3} \frac{\partial \Theta_3}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta_3}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Theta_3}{\partial R} + \frac{\partial^2 \Theta_3}{\partial Z^2} - Sr_4. \quad (8)$$

Числа подобия и безразмерные комплексы имеют вид:

$$Sh = \frac{V_m t_m}{z_L}, \text{Re} = \frac{V_m z_L}{\nu}, \text{Pr} = \frac{\nu C \rho}{\lambda}, Sc = \frac{\nu}{D}, Fo = \frac{\lambda t_m}{\rho C z_L}, Sr_1 = \frac{Q_o W_o z_L}{C_1 \rho_1 \Delta T V_m}, Sr_2 = \frac{z_L W_o}{\rho_{12} V_m},$$

$$Sr_3 = \frac{Q_c W_c z_L}{z_p \Delta T \lambda_2}, Sr_4 = \frac{Q_m W_m z_L}{z_p \Delta T \lambda_3}.$$

Здесь  $\tau$  - безразмерное время ( $\tau = t/t_m$ );  $t$  - время, с;  $t_m$  - масштаб времени, с;  $R, Z, R_L, Z_L$  - безразмерные аналоги  $r, z, r_L, z_L$ ;  $r, z$  - координаты цилиндрической системы, м;  $r_L, z_L$  - размеры области решения, м;  $\Psi$  - безразмерный аналог функции тока;  $\Omega$  - безразмерный аналог вектора вихря скорости;  $U, V$  - безразмерные составляющие скорости паров горючего в проекции на оси  $R, Z$ ;  $\Theta$  - безразмерная температура;  $C_f$  - безразмерная концентрация горючего в парогазовой смеси;  $C_o$  - безразмерная концентрация окислителя в парогазовой смеси;  $C_g$  - безразмерная концентрация инертного газа в парогазовой смеси;  $Sh$  - число Струхала;  $Re$  - число Рейнольдса;  $Pr$  - число Прандтля;  $Sc$  - число Шмидта;  $Fo$  - число Фурье;  $V_m$  - масштаб скорости паров горючего, м/с;  $\nu$  - коэффициент кинематической вязкости, м<sup>2</sup>/с;  $C$  - удельная теплоёмкость, Дж/(кг·К);  $\rho$  - плотность, кг/м<sup>3</sup>;  $\lambda$  - теплопроводность, Вт/(м·К);  $D$  - коэффициент диффузии, м<sup>2</sup>/с;  $Q_o$  - тепловой эффект реакции окисления паров горючего, Дж/кг;  $W_o$  - массовая скорость окисления паров горючего в воздухе, кг/(м<sup>3</sup>·с);  $\Delta T$  - разность температур ( $\Delta T = T_m - T_0$ ), К;  $T_m$  - масштаб температуры, К;  $T_0$  - начальная температура, К;  $Q_c$  - тепловой эффект кристаллизации материала металлической частицы, Дж/кг;  $W_c$  - массовая скорость кристаллизации материала частицы, кг/(м<sup>2</sup>·с);  $r_p, z_p$  - размеры частицы, м; индексы: 1 - парогазовая смесь; 2 - частица; 3 - топливо; 12 - пары горючего; 13 - пары окислителя. Начальные условия ( $\tau=0$ ):  $\Theta = \Theta_0$  при  $0 < R < R_L, 0 < Z < Z_1$ ;  $\Theta = \Theta_p$  при  $0 < R < R_1, Z_1 < Z < Z_2$ ;  $\Theta = \Theta_0, C_f = 0, C_o = 0, \Psi = 0, \Omega = 0$  при  $R_1 < R < R_L, Z_1 < Z < Z_2$ ;  $0 < R < R_L, Z_2 < Z < Z_L$ .

Граничные условия ( $0 < \tau < \tau_0$ ): на границе «парогазовая смесь - конденсированное вещество» ( $Z = Z_1, R_1 < R < R_L$ ) принимались граничные условия IV рода для уравнений энергии и теплопроводности с учетом паробразования, для уравнения неразрывности, движения и диффузии задавались граничные условия II рода с учетом вдува паров; на всех гранях частицы задавались граничные условия IV рода для уравнений энергии и теплопроводности с учетом радиационного теплоотво-

да; на границах ( $R=0, R=R_L, 0<Z<Z_L; Z=0, Z=Z_L, 0<R<R_L$ ) для уравнений (1)-(8) принималось условие равенства нулю градиентов соответствующих функций.

В качестве масштабных величин при переходе к безразмерным переменным использовались:  $z_L$  - характерный размер области решения ( $z_L=0.02$  м);  $V_m$  - масштаб скорости паров горючего вблизи поверхности испарения топлива, м/с;  $t_m$  - масштаб времени ( $t_m=1$  с);  $T_m$  - масштаб температуры ( $T_m=1000$  К).

Для решения системы нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений (1)-(8) с соответствующими начальными и граничными условиями использовался метод конечных разностей (МКР) [14, 15]. Разностные аналоги дифференциальных уравнений энергии и диффузии решались локально-одномерным методом [14]. При решении уравнений эллиптического вида (уравнения неразрывности и движения в переменных «функция тока - вектор вихря скорости») использовался метод переменных направлений [14]. Для решения нелинейных уравнений применялся метод простых итераций [16].

Согласно МКР от системы нелинейных двумерных дифференциальных уравнений осуществлен переход к системе одномерных разностных уравнений, которая решена методом прогонки с использованием неявной четырехточечной разностной схемы [14]. Применение такой схемы обусловлено хорошей сходимостью для рассматриваемых условий протекания физико-химических процессов [4-9].

Для повышения точности решения устанавливалось не менее 200 узлов разностной сетки по каждой из координат и использовался неравномерный шаг по времени (в размерных переменных  $10^{-4}$ – $10^{-6}$  с). Вычисления проводились сквозной прогонкой через выделенную область решения.

Алгоритм численного решения включал следующие этапы:

1. На первом шаге по времени строился итерационный цикл для определения температурного поля в рассматриваемой системе (рис. 1). В качестве начального приближения задавалось значение сеточной функции на предшествующем временном слое. Итерационный цикл заканчивался при условии:

$$\max |\Theta^{(s)} - \Theta^{(s-1)}| \leq \delta, \quad (9)$$

где  $\delta$  - заданное малое число,  $s$  - номер итерации.

Если в результате итерационного цикла требуемая точность вычислений не достигалась, то полученное приближение  $\Theta^{(s)}$  задавалось в качестве начального в системе разностных аналогов уравнений энергии и теплопроводности для определения очередного приближения  $\Theta^{(s+1)}$ . При достижении заданной точности вычислений выполнялся переход к следующему временному слою.

Для достижения сходимости итерационного цикла в условиях высоких скоростей тепломассопереноса при наличии фазовых переходов и химических реакций схема итерационного алгоритма дополнялась процедурой «усреднения итераций». Вводился итерационный коэффициент последовательного усреднения  $\gamma$ . В этом случае значение искомой функции  $\Theta_*^{(s+1)}$ , вводимое на каждой итерации в качестве последнего приближения в соответствующие разностные операторы, отличалось от фактически вычисленного на последней итерации значения  $\Theta^{(s+1)}$  и определялось для каждого узла итерационной сетки по следующей формуле:

$$\Theta_*^{(s+1)} = \Theta^{(s)} + \gamma (\Theta^{(s+1)} - \Theta^{(s)}), 0 < \gamma < 1.$$

Введение такой процедуры приводило к существенному снижению скорости сходимости итераций, но обеспечивало сходимость.

В выполняемых расчетах точность вычислений температуры принималась как  $\delta=0.0005$  ввиду минимально возможной в такой постановке температуры  $\Theta_0=0.09$ . Решение проводилось на каждом шаге итерации, пока не выполнялось условие вида (9).

2. Поля концентраций горючего и окислителя определялись аналогично температурному полю. На каждом шаге итерации, пока не выполнялось условие вида (9) для концентраций горючего и окислителя.
3. При известных значениях концентрации горючего, окислителя и температуры в каждом узле пространственной сетки вычислялось значение функции тока  $\Psi$ .
4. По найденным значениям функции тока  $\Psi$  и температуры в каждом узле сетки итерационным путем определялись значения вектора вихря скорости  $\Omega$ . Решение уравнения для вектора вихря скорости проводилось на каждом шаге итерации, пока не выполнялось условие вида (9) для вектора вихря скорости.
5. По значениям вектора вихря скорости  $\Omega$  и функции тока  $\Psi$  вычислялись компоненты скорости конвекции паров горючего  $U$  и  $V$ .
6. Затем проверялись условия окончания вычислений по превышению температуры парогазовой смеси начальной температуры частицы ( $\Theta_1 > \Theta_p$ ) и превышению тепла, выделяемого в результате химической реакции паров горючего с окислителем, энергии источника зажигания, передаваемой КВ и смеси. В случае невыполнения условий окончания вычислений выполнялся переход на следующий временной слой и определялись поля температуры, концентрации горючего, функции тока, вектора вихря скорости, проверялась достоверность полученных результатов и условий окончания вычислений по п. 1-6 данного алгоритма.

В случае выполнения условий окончания вычислений определялась длительность исследуемого процесса, которая характеризует время задержки зажигания  $\tau_d$  (время от начала взаимодействия источника нагрева с гелеобразным топливом до ускорения химической реакции, сопровождающегося резким увеличением температуры парогазовой смеси).

Верификация сформулированной математической модели и оценка достоверности результатов численного исследования выполнена путем проверки консервативности используемых разностных схем (вычислялась точность выполнения закона сохранения энергии в области решения задачи). Также проведено тестирование примененных численных методов и разработанного алгоритма решения системы нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими начальными и граничными условиями на примере группы менее сложных задач теплопроводности и конвективного теплопереноса.

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

При численном моделировании исследуемого процесса установлены зависимости точности выполнения баланса энергии от значений шагов по времени  $\Delta t$  и координатам  $h_r = h_z$  (табл. 1, 2).

**Таблица 1.** Зависимость погрешности выполнения баланса энергии от шага по времени при  $h_r = h_z = 2.5 \cdot 10^{-3}$

$\Delta t \cdot 10^{-6}$	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.05	0.1	1	10
$\varepsilon, \%$	1.986	2.003	2.264	3.012	4.237	5.768	7.321	9.436

**Таблица 2.** Зависимость погрешности выполнения баланса энергии от шага по пространственной координате при  $\Delta t = 10^{-6}$

$h_r = h_z$	0.01	0.005	0.0025	0.002	0.0015	0.001
$N_x = M_y$	100	200	400	500	600	1000
$\varepsilon, \%$	2.184	2.014	2.003	1.982	1.973	1.965

Таблица 1 показывает, что при уменьшении шага по времени  $\Delta t$  значительно снижается погрешность по балансу энергии в рассматриваемой системе. Следует отметить, что при  $\Delta t < 10^{-6}$  наблюдается значительное увеличение вычислительных затрат и незначительное уменьшение  $\varepsilon$ . Поэтому для получения достаточно высокой точности вычислений и относительно небольших затрат времени при решении задачи следует использовать шаг по времени порядка  $10^{-6}$ . Этот результат



еще раз подтверждает трудность экспериментального исследования процессов теплопереноса, характеризующихся высокой скоростью протекания реакций, большими градиентами температур и концентраций компонентов взаимодействующих веществ.

Из таблицы 2 видно, что погрешность по балансу энергии уменьшается с увеличением числа узлов пространственной сетки  $N_x$  и  $M_y$ . Численный анализ позволил установить, что при  $\Delta t=10^{-6}$  для области решения задачи размерами  $R_L=Z_L=1$  сетка  $400 \times 400$  дает приемлемый результат. Дальнейшее измельчение сетки не влечет за собой существенного отклонения в результатах вычислений. Следует отметить, что определяющую роль при выборе расчетной сетки играет шаг по времени  $\Delta t$ , а не шаг по координате, как можно было предположить.

На рис. 2 приведены зависимости  $\tau_d=f(\Theta_p)$ , иллюстрирующие масштабы влияния температуры источника нагрева  $\Theta_p$  на основную интегральную характеристику процесса - время задержки зажигания  $\tau_d$ . Можно отметить существенно меньшие значения времен задержки зажигания гелеобразной топливной композиции «гидразин - сжиженный кислород» по сравнению с типичными твердыми и жидкими топливами [2-9]. Однако при этом минимальные температуры частиц ( $\Theta_p \approx 1.1$ ), при которых реализуются условия зажигания, выше, чем приведены в [2-9]. Установлено [2-9], что зажигание твердых и жидких топлив происходит и при  $\Theta_p < 1$ . Полученные пороговые значения начальных температур  $\Theta_p \approx 1.1$  можно объяснить существенным влиянием эндотермических фазовых переходов (плавление и испарение) на условия теплоотвода от источника нагрева в рассматриваемой системе (рис. 1).

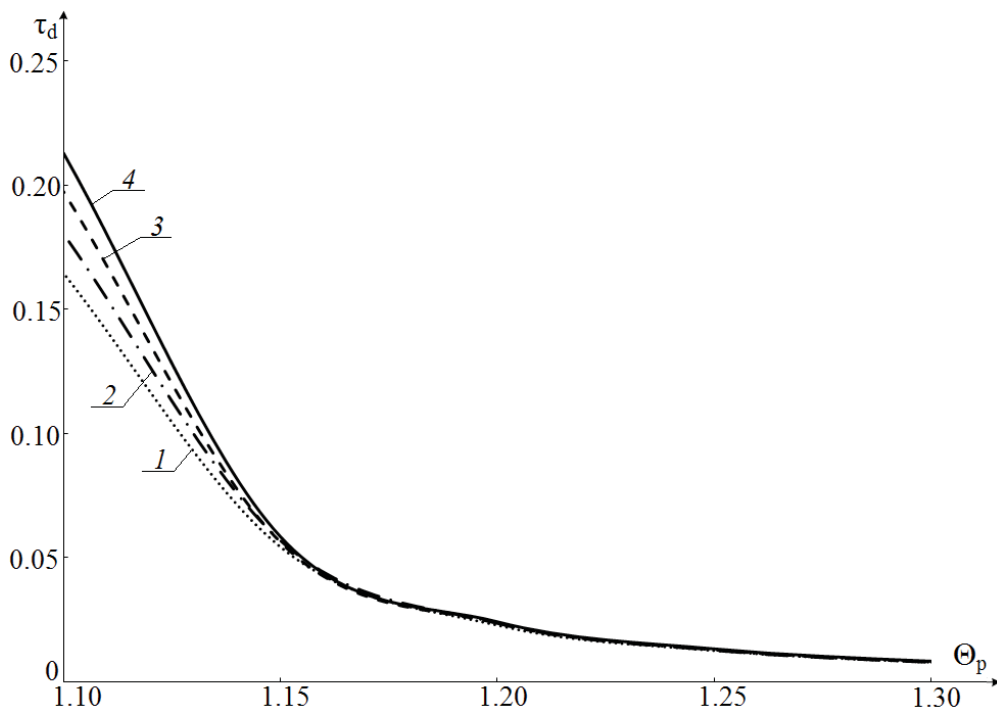


Рис. 2. Зависимость времени задержки зажигания гелеобразной топливной композиции от температуры одиночных разогретых частиц из различного материала при  $R_d=Z_d=0.15$ : 1 - сталь, 2 - алюминий, 3 - керамика, 4 - углерод

Установленные отклонения времен  $\tau_d$  для системы «гидразин - сжиженный кислород» при нагревании металлическими (сталь, алюминий) и неметаллическими (керамика, углерод) частицами малых размеров (рис. 2) показывают, что с понижением температуры локального источника энергии влияние его теплосодержания усиливается. При равных размерах и начальных температурах теплосодержание стальных, алюминиевых, керамических и углеродистых частиц суще-

ственно отличается. При  $\Theta_p=1.1$  и  $R_d=Z_d=0.15$ :  $Q_p=0.315$  кДж - сталь;  $Q_p=0.208$  кДж - алюминий;  $Q_p=0.302$  кДж - керамика;  $Q_p=0.161$  кДж - углерод.

Рис. 2 показывает, что имеется некоторое предельное значение  $Q_p$ , при превышении которого материал источника нагрева из рассматриваемых комбинаций несущественно влияет на инерционность зажигания. Так, например, можно выделить значение  $Q_p \approx 0.35$  кДж при  $\Theta_p=1.2$ .

Максимальным значением теплоты  $Q_p$ , аккумулированной стальной частицей, можно объяснить минимальные времена задержки зажигания топлива  $\tau_d$  (рис. 2). Наибольшие времена  $\tau_d$  характерны углеродистой частице с минимальным значением  $Q_p$ . Несмотря на большее теплоемкость керамической частицы по сравнению с алюминиевой времена задержки зажигания для последней меньше. Это можно объяснить существенным превышением теплопроводности алюминия по сравнению с керамическими материалами (алюминий -  $\lambda=98$  Вт/(мК), керамика -  $\lambda=20$  Вт/(мК)), а также поступлением в зону реакции дополнительной энергии в результате экзотермического перехода при кристаллизации расплава металла. Приповерхностный слой топлива прогревается быстрее при нагревании алюминиевой частицей, которая вследствие больших значений  $\lambda$  интенсивно остывает. Температура керамической частицы изменяется несущественно (в пределах 3 %) относительно начальной  $\Theta_p$  даже при относительно больших временах задержки зажигания ( $\tau_d \approx 0.2$ ). Температура алюминиевой частицы на границе контакта с топливом при  $\tau_d \approx 0.2$  уменьшается относительно начальной на 7 %.

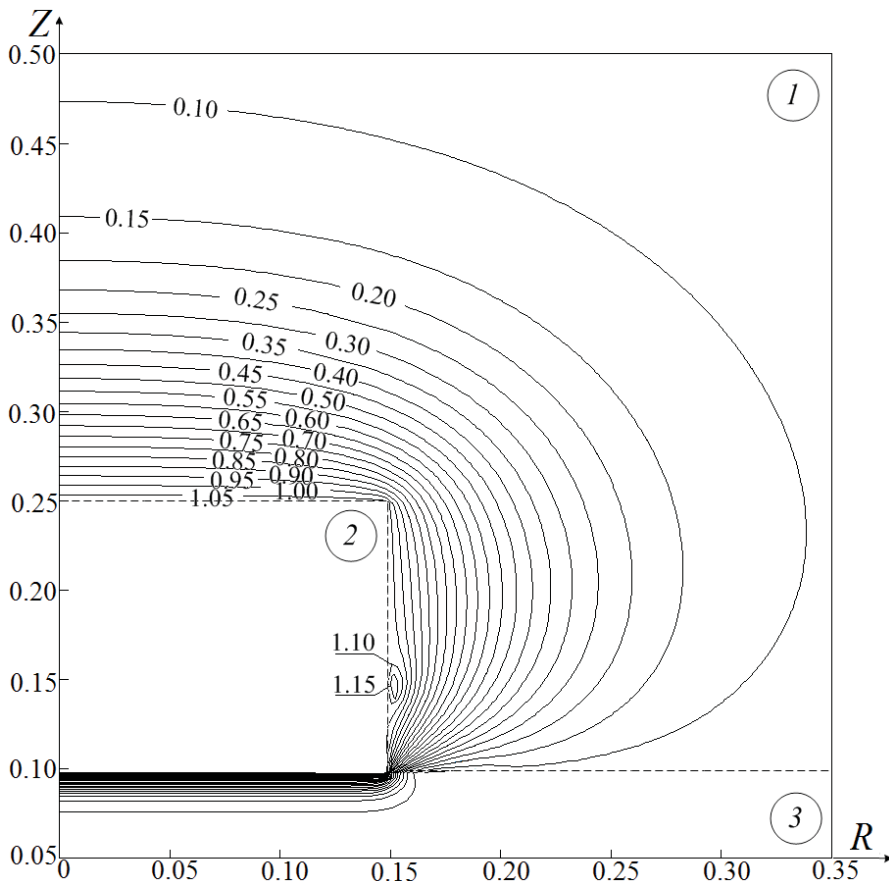


Рис. 3. Изотермы  $\Theta$  системы «гидразин - сжиженный кислород - керамическая частица» в момент воспламенения при  $\tau_d=0.18$ ,  $\Theta_p=1.1$ ,  $R_p=Z_p=0.15$ ,  $Z_c=0.1$

На рис. 3 показаны изотермы в момент воспламенения при  $\Theta_p=1.1$  и  $R_p=Z_p=0.15$ . Следует отметить,

что инертный газ, заполняющий в начальный момент времени область над частицей, прогревается существенно быстрее, чем поступающие с поверхности топлива (из зоны эндотермических фазовых переходов) компоненты горючего и окислителя. Между зонами интенсивной реакции окисления ( $Z \rightarrow Z_1$ ) и прогретого газа ( $Z \rightarrow Z_2$ ) имеются участки ( $Z_1 < Z < Z_2$ ) пониженной температуры (рис. 3). Формирование таких областей можно объяснить тем, что при остывании частицы снижается интенсивность прогрева смеси инертного газа с продуктами парообразования. Рост температуры парогазовой смеси вблизи боковой грани частицы при  $t \rightarrow \tau_d$  (рис. 3) объясняется тепловыделением при ускорении реакции окисления. При временах  $t > \tau_d$  направления тепловых потоков меняются на противоположные - несколько остывшая частица нагревается за счет тепла воспламенившейся парогазовой смеси.

Выполненные численные исследования показали, что, несмотря на значительные тепловые эффекты эндотермических фазовых переходов, характерные гелеобразным топливным композициям, и криогенные температуры хранения, для их энергоэффективного (с минимальным расходом энергетических и временных ресурсов) зажигания можно использовать разогретые до высоких температур металлические и неметаллические частицы малых размеров. При этом для увеличения времени сохранения аккумулированного тепла в локальных источниках энергии можно рекомендовать применение керамических частиц, характеризующихся средними значениями основных интегральных характеристик зажигания - времен  $\tau_d$  относительно рассмотренных стальных, алюминиевых и углеродистых частиц.

Установлено, что минимальные (пороговые) значения температур металлических и неметаллических частиц  $\Theta_p$ , достаточные для зажигания гелеобразной топливной композиции превышают аналогичные параметры, вычисленные ранее для типичных твердых и жидких топлив [2-9]. Также выделены температуры  $\Theta_p \approx 1.2$ , при превышении которых отклонения основных интегральных характеристик зажигания гелеобразного топлива - времен  $\tau_d$  металлическими и неметаллическими частицами минимальны (менее 3 %).

Сформулированную математическую модель можно использовать в качестве прогностической для численной оценки интегральных характеристик зажигания типичных гелеобразных топливных композиций широко распространенными локальными источниками нагрева малых размеров, а также анализа пожарной опасности неконтролируемого локального нагревания гелеобразных конденсированных веществ.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 12-08-33002).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ваулина О.С., Адамович К.Г., Петров О.Ф., Фортон В.Е. Анализ процессов массопереноса в неидеальных диссипативных системах (эксперименты в пылевой плазме). Журнал экспериментальной и теоретической физики. Т.139, №3. 2011. С. 554-567.
- [2] Кузнецов Г.В., Мамонтов Г.Я., Таратушкина Г.В. Зажигание конденсированного вещества частицей. Химическая физика. Т.23, №3. 2004. С. 67-72.
- [3] Буркина Р.С., Микова Е.А. Высокотемпературное зажигание реакционноспособного вещества горячей инертной частицей с конечным запасом тепла. Физика горения и взрыва. Т.45, №2. 2009. С. 40-47.
- [4] Kuznetsov G.V., Strizhak P.A. Transient heat and mass transfer at the ignition of vapor and gas mixture by a moving hot particle. International Journal of Heat and Mass Transfer. Vol.53, №5-6. 2010. P. 923-930.
- [5] Глушков Д.О., Кузнецов Г.В., Стрижак П.А. Численное моделирование твердофазного зажигания металлизированного конденсированного вещества нагретой до высоких температур частицей. Химическая физика. Т.30, №12. 2011. С. 35-41.
- [6] Кузнецов Г.В., Барановский Н.В. Математическое моделирование зажигания дерева хвойной породы наземным грозовым разрядом. Пожаровзрывобезопасность. Т.17, №3. 2008. С. 41-45.
- [7] Захаревич А.В., Кузнецов Г.В., Максимов В.И. Зажигание модельных смесевых топливных композиций одиночной,

нагретой до высоких температур частицей. Физика горения и взрыва. Т.44, №5. 2008. С. 54-57.

- [8] Кузнецов Г.В., Захаревич А.В., Максимов В.И. О механизме зажигания бензина одиночной нагретой до высоких температур металлической частицей. Пожаровзрывобезопасность. Т.17, №5. 2008. С. 39-42.
- [9] Захаревич А.В., Барановский Н.В., Стрижак П.А. Экспериментальное исследование процессов зажигания нагретой частицей биологически трансформированного опада листовых пород. Бутлеровские сообщения. Т.32, №13. 2012. С. 95-99.
- [10] Vilyunov V.N., Zarko V.E. Ignition of solids. Amsterdam: Elsevier Science Publishers. 1989.
- [11] Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло - и массообмена. М.: Наука. 1984.
- [12] Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука. 1987.
- [13] Роч П.Дж. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир. 1980.
- [14] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука. 1983.
- [15] Вержбицкий В.М. Основы численных методов. М.: Высшая школа. 2002.
- [16] Коздоба Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. М.: Наука. 1975.

# APPLICATION OF COLLOCATIONS AND LEAST RESIDUALS METHOD TO PROBLEMS OF MECHANICS OF ISOTROPIC AND ANISOTROPIC PLATES

---

*A variant of collocations and least residuals method was proposed and implemented for numerical solution of solid mechanics problems, in particular, for calculating stress-strain state of isotropic and anisotropic plates under various transverse loads.*

---

## INTRODUCTION

Rectangular plates are widely used in various industries from civil engineering to high-tech aero-space industry. To the plates in difficult operating condition, increased requirements on reliability and load-carrying capacity are shown. Research of strength, stiffness and load bearing capacity of plates requires knowledge of its stress-strain state (SSS).

Small plate thickness compared to its sizes in plane, when constructing mathematical models of three-dimensional bodies, allows us to apply special hypothesis and to consider plates as two-dimensional objects. Assumptions about specific form of strain distribution through plate's thickness allows us to eliminate the dependence of displacement from one of the coordinates. The classical plate theory describes well the behavior of thin isotropic plates, but unsuitable for analyzing the behavior of laminated anisotropic constructions. Transition from classical theory to one or another specified theories is accompanied by increase in governing equations order and qualitative changes in solution's structure. Traditional schemes and numerical integrating algorithms for such classes of stiff boundary value problems are of little use, therefore development of new effective numerical methods is an actual problem. The method of collocations and least residuals previously successfully used in mathematical physics, in present work is adapted to solid mechanics problems.

## GENERAL FORMULATION AND SOLVING METHOD

It is necessary to calculate SSS of anisotropic rectangular plate of variable thickness, fixed on the edges and under the action of various transverse loads (fig. 1). Here  $h(x_1, x_2)$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  - plate's thickness and dimensions in directions  $x_1$ ,  $x_2$  respectively,  $q(x_1, x_2)$  - transverse load.

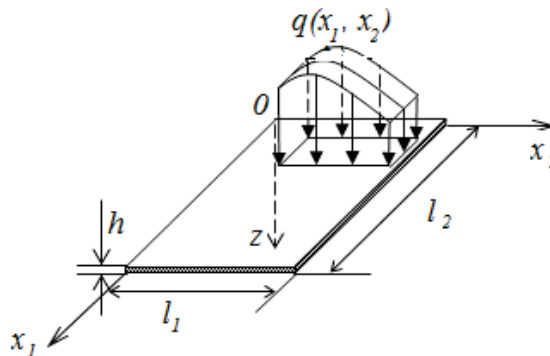


Fig. 1. Rectangular plate under transverse load

---

1 Design Technological Institute of Digital Techniques SB RAS, Novosibirsk, Russia

2 Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russia

Boundary conditions on the edges may have the following form:

- clamped edge  $w(x_1, x_2) = 0, \quad \frac{\partial w(x_1, x_2)}{\partial n} = 0;$
- simple support  $w(x_1, x_2) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(x_1, x_2)}{\partial n^2} = 0;$
- free edge  $\frac{\partial^2 w(x_1, x_2)}{\partial n^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w(x_1, x_2)}{\partial n^3} = 0,$

where  $w(x_1, x_2)$  - plate deflection,  $n$  - outward normal to the boundary.

For a number of special cases of loading and supports analytical solutions are available. It makes this problem convenient for numerical method approximation.

A detailed description of CLR method can be found in [1], here is the brief description of the method. We cover computational domain by rectangular grid that has uniform partition in both directions. In the CLR method, a solution in each grid cell is sought as a linear combination of a linearly independent functions. To find a solution over the entire domain we use domain decomposition method - Schwartz alternating method where the cell appears a subdomain. To determine the unknown coefficients in each cell we form local linear system consisting of collocation equations (which requires that the desired solution satisfy the equations of the problem at certain points), boundary conditions satisfied at certain points of the boundary of the computational domain, and matching conditions on the boundaries between neighboring cells.

In CLR method local linear system is overdetermined. Solution is understood in the sense of least squares and QR factorization is used to solve it.

### ISOTROPIC RECTANGULAR PLATE

Mechanical properties of isotropic elastic material are determined by two characteristics: Young's modulus and Poisson's ratio. For plate of constant thickness governing equations are

$$\frac{\partial^4 w(x_1, x_2)}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x_1, x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w(x_1, x_2)}{\partial x_2^4} = \frac{q(x_1, x_2)}{D},$$

where  $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$ .

For simply supported plate under the action of transverse load  $q = 10^5 \sin(\pi x_1 / l_1) \sin(\pi x_2 / l_2)$  the problem has analytical solution [2]

$$w = \frac{q l_1^4 l_2^4}{\pi^4 D (l_1^2 + l_2^2)^2}.$$

Numerical results obtained by CLR method are presented below. Numerical experiments were carry out on a sequence of grid with decreasing grid spacing twice. For error calculating in each cell 100 point were distributed uniformly in both directions. Error of numerical solution in domain was determined by formula

$$E_{N_1, N_2} = \frac{\max_{x_1, x_2} |w(x_1, x_2) - w^h(x_1, x_2)|}{\max_{x_1, x_2} |w(x_1, x_2)|},$$

where  $N_1, N_2$  - grid sizes,  $w^h(x_1, x_2)$  - numerical solution. In the calculations the following parameter values we used:  $l_1 = l_2 = 10$  m,  $h = 0.1$  m,  $E = 200$  GPa,  $\nu = 0.28$ .

The Tab. 1 shows that good accuracy of the numerical solution takes place even on coarse grids, and while reducing the grid spacing very high accuracy is obtained within a reasonable time.

Consider a more general case when the rectangular plate is loaded by distributed pressure  $q = const$

and two opposite edges are clamped and the other two are free. We apply the CLS method for the numerical solution of this problem.

**Table 1.** Results of SSS calculation for rectangular isotropic plate of constant thickness

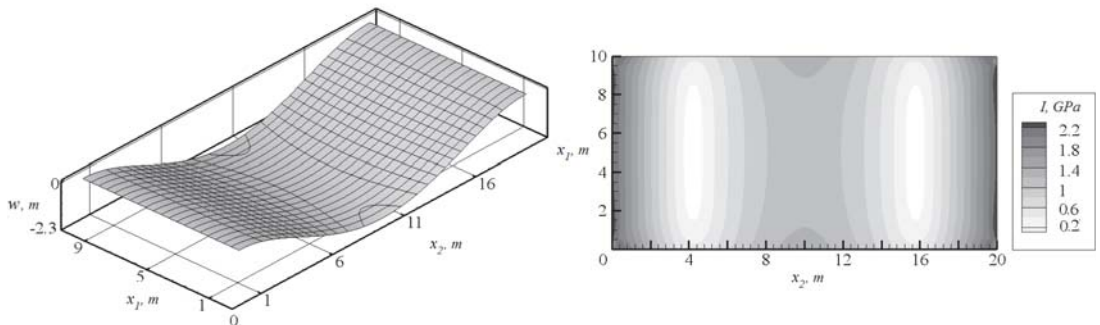
$N_1 \times N_2$	$\max_{x_1, x_2}  w^h(x_1, x_2) , \text{ m}$	$\max_{x_1, x_2}  w(x_1, x_2) , \text{ m}$	$E_{N_1, N_2}$	Time calculation, s
10×10	0.144499	0.141916	1.82-02	0.6
20×20	0.142318	0.141916	2.83-03	4.3
40×40	0.141981	0.141916	4.56-04	46
80×80	0.141927	0.141916	7.57-05	419
160×160	0.141918	0.141916	1.32-05	5487

Fig. 2 shows the numerical values of the deflection  $w(x_1, x_2)$  and the stress intensity  $I(x_1, x_2)$

$$I = \sqrt{\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + 6\sigma_{xy}^2}{2}},$$

$$\sigma_{xx} = 2 \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right), \quad \sigma_{yy} = -\frac{E}{1-\nu^2} \left( \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right), \quad \sigma_{xy} = -\frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right).$$

In the calculations the following parameter values we used:  $l_1 = 2l_2 = 20 \text{ m}$ ,  $h = 0.1 \text{ m}$ ,  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.28$ ,  $q = 0.1 \text{ MPa}$ .



**Fig. 2.** Deflection and the stress intensity of rectangular isotropic plate whose two opposite edges are clamped and two are free

As one would expect, the maximum stresses occur in the vicinity of plate's fixed edges.

### ISOTROPIC RECTANGULAR PLATE OF VARIABLE THICKNESS

Consider the clamped isotropic rectangular plate of variable thickness that changes in a direction  $x_2$  linearly:  $h(x_1, x_2) = 0.005(1 + 0.5x_2)$ . Governing equation in this case takes the form:

$$\begin{aligned} & (\nu h^{12}) \frac{\partial^2 w(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + (\nu h^{12}) \frac{\partial^2 w(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + (\nu h^{12}) + hh' \frac{\partial^3 w(x_1, x_2)}{\partial x_1^2 x_2} + hh' \frac{\partial^3 w(x_1, x_2)}{\partial x_2^3} + \\ & + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^4 w(x_1, x_2)}{\partial x_1^4} + \frac{h^2}{3} \frac{\partial^4 w(x_1, x_2)}{\partial x_1^2 x_2^2} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^4 w(x_1, x_2)}{\partial x_2^4} = \frac{2(1-\nu^2)}{Eh} q(x_1, x_2). \end{aligned}$$

We assume that the plate is subjected to a constant pressure  $q = 10 \text{ kPa}$  in the band  $0.4 < x_2 < 0.6$ . In the calculations the following parameter values we used:  $2l_1 = l_2 = 1 \text{ m}$ ,  $h = 0.05 \text{ m}$ ,  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.28$ .

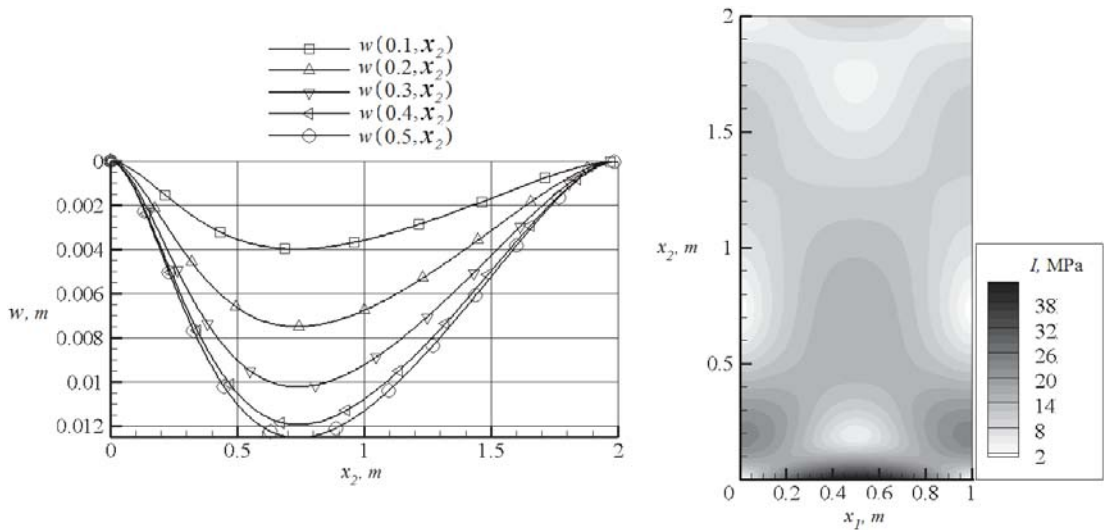


Fig. 3. Deflection and the stress intensity of rectangular isotropic plate of variable thickness

Fig. 3 shows the values of the stress intensity and the plate deflection at fixed values of  $x_1$ . Greater deflection has a thin portion of the plate and neighbor edge is the most intensified one.

### ORTHOTROPIC RECTANGULAR PLATE

Governing equation for the deflection of an orthotropic rectangular plate in the case of plane stress has the form:

$$D_1 \frac{\partial^4 w(x_1, x_2)}{\partial x_1^4} + 2(D_1 \nu_2 + 2D_k) \frac{\partial^4 w(x_1, x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_2 \frac{\partial^4 w(x_1, x_2)}{\partial x_2^4} = q(x_1, x_2),$$

where

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \quad D_k = \frac{G_{12} h^3}{12} \text{ и } \nu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \nu_{12}.$$

Here  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$ ,  $\nu_{12}$  - modulus of elasticity, shear modulus and Poisson's ratio of an orthotropic material.

When the plate is simply supported is under action of uniform transverse load  $q = const$ , then it is possible to write down analytic solution as a series [3]

$$w = \frac{16q}{\pi^6} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x_1}{l_1} \sin \frac{n\pi x_2}{l_2}}{mn \left( \frac{m^4}{l_1^4} D_1 + \frac{2m^2 n^2}{l_1^2 l_2^2} (D_1 \nu_2 + 2D_k) + \frac{n^4}{l_2^4} D_2 \right)}.$$

Application of the CLR method allowed us to obtain a numerical solution with good accuracy. In the calculations the following parameter values we used:  $E_1 = 140$  GPa,  $E_2 = 12$  GPa,  $G_{12} = 12$  GPa и  $\nu_{12} = 0.46$ ,  $q = 10$  kPa,  $l_1 = 2l_2 = 1$  m,  $h = 0.05$  m.

Table 2. Results of SSS calculation for orthotropic rectangular plate

$N_1 \times N_2$	$\max_{x_1, x_2}  w^h(x_1, x_2) , \text{ m}$	$\max_{x_1, x_2}  w(x_1, x_2) , \text{ m}$	$E_{N_1, N_2}$	Time calculation, s
20×10	2.7688-02	2.7562-02	4.6-03	10
40×20	2.7597-02	2.7562-02	1.2-03	150
80×40	2.7570-02	2.7562-02	3.1-04	1400



## LAMINATED PLATE STRIP

Consider the cylindrical bending of laminated plate strip (infinite in  $x_2$  direction). Each layer is orthotropic and has a constant thickness. When applied to the plate transverse load depends only on  $x_1$ , all displacements also depend only on  $x_1$ .

To calculate the stiffness of the whole package of layers it is necessary to know the characteristics of each individual layer. Let us write the stress-strain dependency in a layer for the plane stress case

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{pmatrix},$$

where

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta, \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta), \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta, \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta, \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta, \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta), \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^2 \theta + Q_{55} \sin^2 \theta, \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \cos \theta \sin \theta, \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{44} \sin^2 \theta + Q_{55} \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

Here  $\theta$  - counterclockwise angle between the axes of orthotropic material in the layer and underlying coordinate system. For orthotropic material we have the following values for  $Q_{ij}$ :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}, \quad Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13}.$$

Figure 4 shows a cross-section of the plate. The layers numbering starts from the upper layer and reference surface is chosen as midplane. In this case, the thickness of  $k$ -th layer is defined by  $h_k = z_{k+1} - z_k$ .

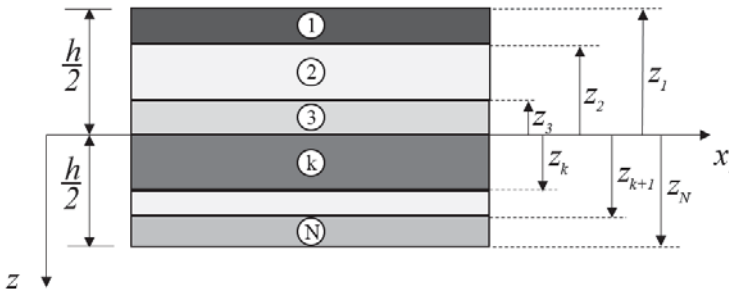


Fig. 4. The location of layers in a laminated strip

Integral characteristics of rigidity of the whole package are determined by formulas

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_{k+1} - z_k), \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_{k+1}^2 - z_k^2), \quad D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_{k+1}^3 - z_k^3),$$

where  $\bar{Q}_{ij}^k$  refer to  $k$ -th layer.

Governing equation for laminated strip deflection for classical the theory:

$$\frac{d^4 w(x_1)}{dx_1^4} = \frac{q(x_1)}{D},$$

where

$$D = D_{11} - B_{11} \frac{B}{A} - B_{16} \frac{C}{A}, \quad A = A_{11} A_{66} - A_{16} A_{61}, \quad B = B_{11} A_{66} - B_{16} A_{61}, \quad C = A_{11} B_{16} - A_{16} B_{11}.$$

Governing equations for the same strip using the Timoshenko theory will have a different look:

$$\frac{d^2 w(x_1)}{dx_1^2} + \frac{d\phi_1(x_1)}{dx_1} = -\frac{1}{A_{55}K} q(x_1),$$

$$\frac{D}{A_{55}K} \frac{d^2 \phi_1(x_1)}{dx_1^2} - \frac{dw(x_1)}{dx_1} - \phi_1(x_1) = 0.$$

Here  $\phi_1(x_1)$  - rotations of transverse normal about midplane,  $K$  - shear correction coefficient.

Consider a six-layer clamped strip, under the action of uniform load with the following characteristics of layers of equal thickness

**Table 3.** Mechanical characteristics of the layers

Layer	$E_1$ , GPa	$E_2$ , GPa	$G_{12}$ , GPa	$G_{13}$ , GPa	$G_{23}$ , GPa	$\nu_{12}$	$\theta$
1	206	206	77	77	77	0.29	-
2	138	9	7	7	6	0.30	$-\pi/4$
3	38	8	4	4	3	0.26	$\pi/4$
4	38	8	4	4	3	0.26	$\pi/4$
5	138	9	7	7	6	0.30	$-\pi/4$
6	206	206	77	77	77	0.29	-

This problem has an analytical solution [4]. For the classical theory

$$w = \frac{qa^4}{24D} \left( \left( \frac{x}{a} \right)^2 - \frac{x}{a} \right)^2$$

and for the Timoshenko theory

$$w = \frac{qa^4}{24D} \left( \left( \frac{x}{a} \right)^2 - \frac{x}{a} \right)^2 + \frac{qa^2}{2KA_{55}} \left( \frac{x}{a} - \left( \frac{x}{a} \right)^2 \right),$$

$$\phi_1 = -\frac{qa^3}{12D} \left( 2 \left( \frac{x}{a} \right)^3 - 3 \left( \frac{x}{a} \right)^2 + \frac{x}{a} \right).$$

Numerical solution of this problem is presented in Table. 4 and in Fig. 5, 6.

In the calculations the following parameter values were used:  $l_1 = 1$  m,  $l_2 = 0.1$  m,  $h = 0.05$  m,  $q = 10$  MPa,  $K = 5/4$ . Grid size  $N_1 = 20$ .

**Table 4.** Results of SSS calculation for laminated strip

$x_1$ , m	Classical theory		Timoshenko theory			
	$w^h$ , m	$w$ , m	$w^h$ , m	$w$ , m	$\phi_1^h$	$\phi_1$
0.1	<b>2.78997</b> -03	2.78997-03	<b>3.15906</b> -03	3.15510-03	<b>-4.96617</b> -02	-4.95995-02
0.2	<b>8.81769</b> -03	8.81769-03	<b>9.47868</b> -03	9.46680-03	<b>-6.62156</b> -02	-6.61326-02
0.3	<b>1.51898</b> -02	1.51898-02	<b>1.60619</b> -02	1.60418-02	<b>-5.79387</b> -02	-5.78661-02
0.4	<b>1.98398</b> -02	1.98398-02	<b>2.08396</b> -02	2.08135-02	<b>-3.31078</b> -02	-3.30663-02
0.5	<b>2.15276</b> -02	2.15276-02	<b>2.25701</b> -02	2.25418-02	0	0

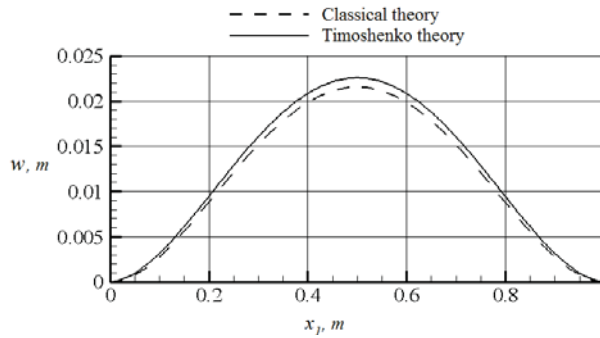


Fig. 5. Deflection of a laminated strip using various theories

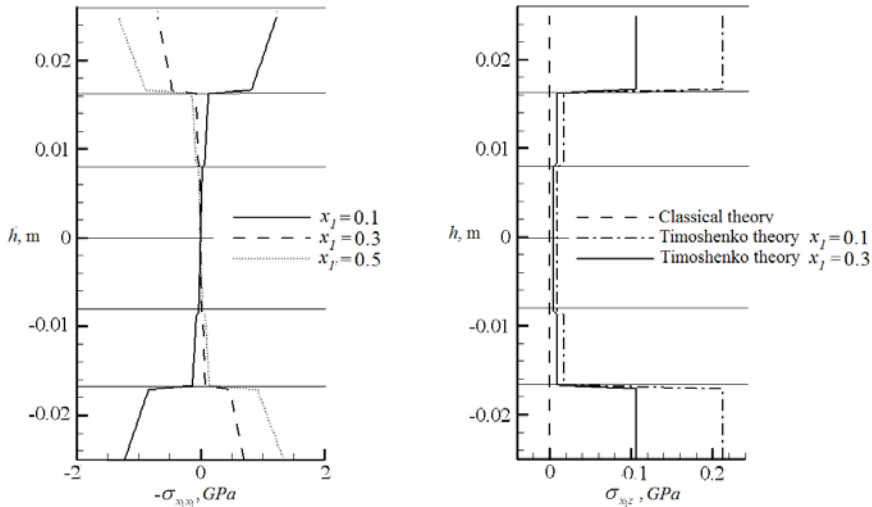


Fig. 6. Stress distribution over the thickness of the laminated strip

## CONCLUSION

In this paper a variant of collocations and least residuals method was proposed and implemented for calculating the stress-strain state of isotropic and anisotropic plates under various transverse loads. A series of numerical experiments for plates with various relative geometrical sizes, loads and supports was carried out. It is shown that the numerical solutions obtained by CLR converge with higher order and coincide with the known analytical solutions.

## ACKNOWLEDGEMENTS

The work is supported by RFBR (grant № 13-01-12032-офи\_м) and RAS Presidium Program N 15.4.

## REFERENCES

- [1] Golushko S.K., Idimeshev S.V., Shapeev V.P. Application of collocations and least residuals method to problems of isotropic plates theory // Computational Technologies 2013. Vol. 18, N 6. P. 31-43.
- [2] Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S. "Theory of plates and shells". McGraw-Hill New York, 1959
- [3] Lekhnitskii S.G. Anisotropic plates. M., Gostekhizdat. 1957
- [4] J. N. Reddy, Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis, 2nd ed., CRC Press. 2004.

## ON THE VARIOUS APPROACHES TO MODELING AND ANALYSIS OF DEFORMATION OF ANISOGRID STRUCTURES

---

*We consider a class of anisogrid structures that are grid shells made of unidirectional carbon. A brief analysis of existing approaches to modeling of deformation of grid structures is performed. A model of anisogrid structure based on the continuum approach was studied. This model is a set of non-stationary PDE's with small parameters describing a three-dimensional stress-strain state of continuum analog of grid structure. We posed for it the initial boundary value problem specifying stresses on the boundary of structure. For solving this problem an algorithm based on approximation without saturation was built.*

---

### INTRODUCTION

Progress in aviation, space-rocket ship- and machine-building industries is largely associated with the development and application of new composite materials with improved physical and mechanical characteristics. One of promising solutions might be the use of hybrid and anisogrid structures that are grid shells made of unidirectional carbon by the way of automatic continuous winding [1]. With the help of these structures, a complex of properties can be implemented. It provides a significant increase in strength and stiffness of aircraft and deep-diving vehicles, reducing their weight and cost.

When designing and manufacturing anisogrid structures a number of problems associated with the modeling of their behavior and the calculation of the stress-strain state arise. These problems also include the calculation of critical loads and buckling mode definition, the optimization of stiffness and strength, mass and cost parameters of structure. It is important to note that the correct mathematical description of anisogrid structure inevitably leads to a system of differential equations with small parameters. These parameters can be conditioned, for example, by the aspect ratio of the body or by the ratio of characteristics of the matrix and fibers in carbon. Often these equations due to high stiffness and complexity cannot be solved by conventional methods (like finite element method).

### ON THE MODELING OF BEHAVIOR OF GRID STRUCTURES

Formally elastic grid structure can be considered as a single elastic body. From the standpoint of continuum mechanics the behavior of such a body can be described by the equations of motion (equilibrium) of the body, kinematic and physical relations. However, consideration of the grid structure as a single body is not convenient because this body is multiply connected and has a large number of small geometrical parameters. In this regard, for simulation of grid structures it is acceptable to use one of two basic approaches: discrete or continuum [2] (discrete approach can also be referred to as a discrete-continuum).

**Discrete approach.** In the context of this approach the structure is represented as a set of cane, beam or flat elements. To describe the interaction of these elements the classical method of forces, the displacement method or the mixed method of structural mechanics are often used [3].

Other discrete models focused on the modeling of regular structures, use the method of "splicing". The matter of this method consists in partitioning the structure on isolated elements, analyzing the behavior of each element separately and accounting for the geometric conditions that enable one to conjugate all the elements in a construction. In the context of the method of "splicing" the idea of micro approach can be identified. It is based on the partitioning the structure on the elements of a minimum length, i.e. edges and nodes of their connections [4-5]. Another one is the idea of macro approach,

---

1 Design Technological Institute of Digital Techniques, SB RAS, Novosibirsk, Russia

2Institute of Computational Technologies, SB RAS, Novosibirsk, Russia

which is applicable in the presence of elements extending to the entire structure [6]. Automatic winding method assumes that the construction will be composed exactly of such “macro elements”. Therefore, this idea can be naturally used for modeling of anisogrid structure behavior.

The ideas of discrete approach can be applied to calculate the behavior of grid structure on a computer. In this sense, a very attractive is the use of finite element method [7]. In this case, within each rib of structure the independent approximation of the unknown functions by polynomials of small degree should be performed and a corresponding system of linear algebraic equations should be written.

**Continuum approach.** The main idea of this approach is to replace the real grid structure by equivalent anisotropic solid body. Note that this replacement is ambiguous both in terms of the choice of the continuum equivalent and the way of switching to it. The reason for the ambiguity lies in the fact that the mechanical behavior of the grid structure is more complex (in general) than behavior of continuum body in the classical theory of elasticity, i.e. in the loss of some deformation properties of the structure.

Methods of the mathematical continualization are based on the analysis of resolving equations, which can be obtained, for example, within a discrete approach. The matter of these methods is to move in resolving equations from discrete to continuous operations (for example, from the finite-differences to derivatives). Let us separate out two groups of models based on the idea of mathematical continualization. The first group is the micropolar continuum models representing the structure as a set of cells. For each cell the equations of mechanics should be written. These equations link the characteristics of neighboring cells together and are analogous to the finite-difference relations defined on the whole structure. They served for restoring of differential problem with continuous characteristics [8-9]. The second group includes models of averaging the behavior of periodic structures. It is based on the expansion of solutions in series by a small parameter. Usually the small parameter is a size of cell many times repeating in structure. Such models enable one to obtain the asymptotically averaged behavior of the system by using the exact periodic solutions [10-11]. Despite a high rigor and validity of the mathematical continualization it can hardly be used to solve any applied problem. Mathematical apparatus of such methods is effective, as a rule, only in cases of simple model problems, when the material has a simple structure and properties, and an ordinary loading is considered.

Methods of physical continualization use the idea of connection between the discrete strain and internal forces of the structure with the corresponding strain and forces in its continuous analogue. Essentially, the problem of physical continualization consists in the derivation of physical relations for the continuous analog of grid structure, using the structural parameters and material properties. The relations obtained should provide a maximum compliance of behavior of structure and its analogue. The derivation of physical relations can be done using energy principles [12] or by averaging of characteristics of grid structure over its volume. In the latter case we mean the so-called concept of “smearing”. According to it, each family of unidirectional edges of structure should be replaced by the elastic layer with specific properties [13]. Physical relations can be defined using the condition of equivalence of the internal forces in the family of edges and the elastic layer. Note that the idea of averaging of material characteristics over its volume has been tested while construction of structural models for the mechanics of composites with different types of reinforcement [14-15].

In this paper we consider a continuum model of anisogrid structure based on the concept of “smearing”. This approach enables one to construct efficiently the models of grid structures and to find the approximate solutions of the corresponding problems.

## ONE CONTINUUM MODEL OF ANISOGRID STRUCTURE

In the framework of the considered model, we assume that carbon behaves as a homogeneous orthotropic material with the following physical relations

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \varepsilon_j, i = 1, \dots, 3; \tau_{12} = G \gamma_{12}, \tau_{13} = G \gamma_{13}, \tau_{23} = G_t \gamma_{23}, \quad (1)$$

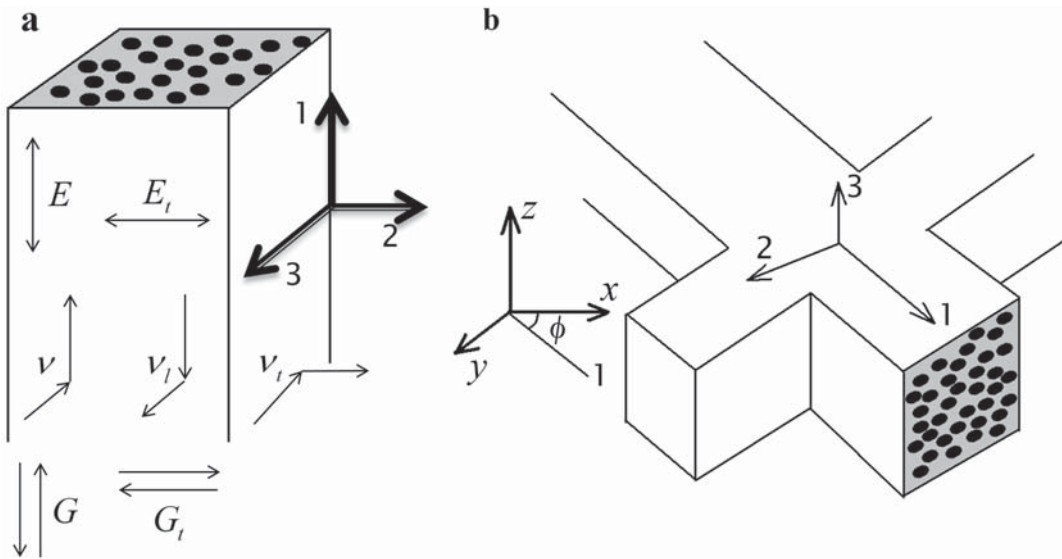
connecting stresses  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$  and strains  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$ . Here the coefficients  $a_{ij}$  can be expressed by formulae

$$\begin{aligned} a_{11} &= (1-\nu_t)E/\mu, & a_{12} &= a_{13} = \nu E/\mu, & a_{21} &= a_{31} = \nu_t E_t/\mu, \\ a_{22} &= a_{33} = \frac{(1-\nu\nu_t)E_t}{\mu(1+\nu_t)}, & a_{23} &= a_{32} = \frac{(\nu_t + \nu\nu_t)E_t}{\mu(1+\nu_t)}, & \mu &= 1 - 2\nu\nu_t - \nu_t > 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Here  $E, E_t$  are elasticity modules along and across fiber direction,  $\nu, \nu_t, \nu_t$  are Poisson coefficients,  $G, G_t$  are share modules along and across fibers (fig 1a);

Equations (1) are written in the coordinate system (1,2,3) associated with a rib of structure (fig. 1a). In order to obtain the physical relations for the continuous analog of the grid structure a system of coordinates  $(x,y,z)$ , associated with the structure (fig. 1b) should be introduced. Let us move from (1,2,3) to  $(x,y,z)$  using operation of rotation by an angle  $\phi$ . Assume  $s = \sin \phi$ ,  $c = \cos \phi$ , then the stresses and strains can be transformed by the formulas

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_1 c^2 + \sigma_2 s^2 - 2\tau_{12} cs, & \varepsilon_x &= \varepsilon_1 c^2 + \varepsilon_2 s^2 - \gamma_{12} cs, \\ \sigma_y &= \sigma_1 s^2 + \sigma_2 c^2 + 2\tau_{12} cs, & \varepsilon_y &= \varepsilon_1 s^2 + \varepsilon_2 c^2 + \gamma_{12} cs, & \varepsilon_z &= \varepsilon_3, \\ \tau_{xy} &= -(\sigma_1 - \sigma_2)cs + \tau_{12}(c^2 - s^2), & \gamma_{xy} &= 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)cs + \gamma_{12}(c^2 - s^2), \\ \tau_{xz} &= \tau_{13}c - \tau_{23}s, & \tau_{yz} &= \tau_{13}s + \tau_{23}c & \gamma_{yz} &= \gamma_{13}s + \gamma_{23}c \end{aligned} \quad (3)$$



**Fig. 1.** The orthotropic carbon layer: a) in the coordinate system (1,2,3) associated with rib; b) in the coordinate system  $(x,y,z)$  associated with structure.

Using (1)-(3) the physical equations can be written in the system  $(x,y,z)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= A_{11}\varepsilon_x + A_{12}\varepsilon_y + A_{13}\varepsilon_z + A_{14}\gamma_{xy}, & \tau_{xy} &= A_{41}\varepsilon_x + A_{42}\varepsilon_y + A_{43}\varepsilon_z + A_{44}\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= A_{21}\varepsilon_x + A_{22}\varepsilon_y + A_{23}\varepsilon_z + A_{24}\gamma_{xy}, & \tau_{xz} &= A_{55}\gamma_{xz} + A_{56}\gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= A_{31}\varepsilon_x + A_{32}\varepsilon_y + A_{33}\varepsilon_z + A_{34}\gamma_{xy}, & \tau_{yz} &= A_{65}\gamma_{xz} + A_{66}\gamma_{yz}. \end{aligned} \quad (4)$$

The coefficients  $A_{kl}$  have the following form:

$$\begin{aligned} A_{11} &= a_{11}c^4 + (a_{21} + a_{12})s^2c^2 + a_{22}s^4 + 4G_{12}c^2s^2, \\ A_{12} &= (a_{11} + a_{22})s^2c^2 + a_{21}s^4 + a_{12}c^4 - 4G_{12}c^2s^2, \end{aligned} \quad (1,2); \quad (5)$$

$$\begin{aligned} A_{14} &= a_{11}c^3s + a_{21}cs^3 - a_{12}c^3s - a_{22}cs^3 - 2G_{12}(c^2 - s^2)cs, \\ A_{24} &= a_{11}cs^3 + a_{21}c^3s - a_{12}cs^3 - a_{22}c^3s + 2G_{12}(c^2 - s^2)cs, \end{aligned} \quad (12, 21), (14, 41), (24, 42); \quad (6)$$

$$A_{13} = a_{13}c^2 + a_{23}s^2, \quad A_{23} = a_{13}s^2 + a_{23}c^2, \quad A_{43} = cs(a_{13} - a_{23}), \quad (13, 31), (23, 32), (43, 34); \quad (7)$$

$$A_{33} = a_{33}, \quad A_{44} = (a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22})c^2s^2 + G_{12}(c^2 - s^2)^2; \quad (8)$$

$$A_{65} = A_{56} = (G_{13} - G_{23})cs, \quad A_{55} = G_{13}c^2 + G_{23}s^2 \quad (13, 23), (55, 66). \quad (9)$$

Here numbers in the brackets mean the cycle permutations of indices: for example «(1, 2)» means that if we change the indices 1 on 2, 2 on 1 in the corresponding equations the true equality will hold.

Grid structure consists of families of ribs. Each rib has a number  $j$  ( $j=1, \dots, M$ ) and can be defined by the slope angle of the axis 1 of the rib to the axis  $x$  (fig. 2)  $\phi_j$ , the thickness of the ribs  $\delta_j$  and the distance between the ribs  $a_j$ . In accordance with the concept of "smearing" let us replace each family of ribs by a continuum surface with the physical relations of the form (4). Instead of the coefficients  $A_{kl}$  in the physical relations of  $j$ th family let us take  $A_{kl}^j$ . To write a formula for  $A_{kl}^j$  denote by symbols  $E^j, E_t^j, \nu^j, \nu_t^j, G^j, G_t^j, s_j = \sin \phi_j, c_j = \cos \phi_j$  the corresponding characteristics of ribs of  $j$ th family. Relations (5)-(9) after introduction of the index  $j$  do not change. The coefficients  $A_{kl}^j$  in these relations are calculated using formulas similar to (2) in which the characteristics of the material of ribs are averaged over the structure surface, i.e. have the form

$$\tilde{E}^j = k^j E^j, \quad \tilde{E}_t^j = k^j E_t^j, \quad \tilde{\nu}^j = k^j \nu^j, \quad \tilde{\nu}_t^j = k^j \nu_t^j, \quad \tilde{G}^j = k^j G^j, \quad \tilde{G}_t^j = k^j G_t^j, \quad k^j = \frac{\delta_j}{a_j}.$$

In this case, equal mass forces acting in the family of ribs and in the corresponding continuum surface, will lead to an equivalent strains. In this sense, the method of calculating of coefficients  $A_{kl}^j$  is correct for each family of ribs. The desired relations between stresses  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  and strains  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  in the continuum equivalent of anisogrid structure has the form (4), where

$$A_{kl} = \sum_{j=1}^N A_{kl}^j. \quad (10)$$

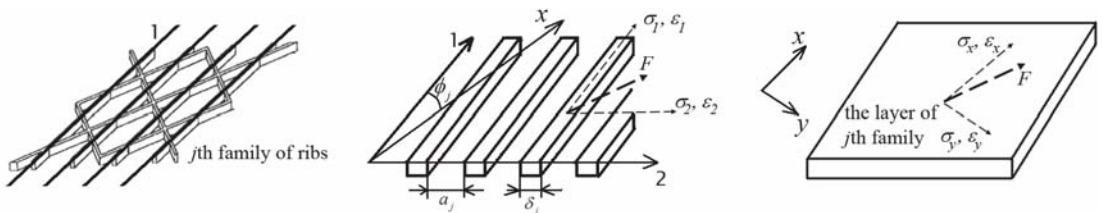


Fig. 2. The replacement of ribs of  $j$ th family by the equivalent continuum layer

Since the designed continuum analog of anisogrid structure, i. e. the body  $\Omega$  (fig. 3), has equivalent deformation properties then the further arguments will be performed for the parallelepiped  $\Omega$ . Without loss of generality let us assume that  $\Omega$  has the size  $\pi \times \pi \times h$  (see fig 3).

## THE STATEMENT OF PROBLEM OF DEFORMATION FOR ANISOGRID STRUCTURE

In order to verify the above model we consider a test boundary value problem for body  $\Omega$ . We shall proceed from the following basic assumptions. First, we use three-dimensional theory of elasticity.

Second, we apply the linear kinematic and physical equations that adequately describe the behavior of the body only in the case of sufficiently small loads and displacements and, thirdly, we consider the case of a flat structure.

Let us write for body  $\Omega$  the kinematic relations (11) and equations of motion (12)

$$\varepsilon_x \approx \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y \approx \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z \approx \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} \approx \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} \approx \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} \approx \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + F_y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + F_z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

where  $u(t, x, y, z), v(t, x, y, z), w(t, x, y, z)$  are displacements of points of the body,  $t$  is time,  $\rho$  is density (calculated by averaging the density of material of construction by volume)  $F_x, F_y, F_z$  are internal forces. Let us make the stretching along  $z$  axis  $z \rightarrow \tilde{z} = \pi z / h$ ,  $0 < \tilde{z} < \pi$  and the corresponding change of variable in (11) and (12) (hereinafter the wave over the variable  $z$  is omitted). Substituting (11) into (4), (4) into (12) and assuming  $F_x = F_y = F_z = 0$  we get the equations for displacements of points of  $\Omega$ :

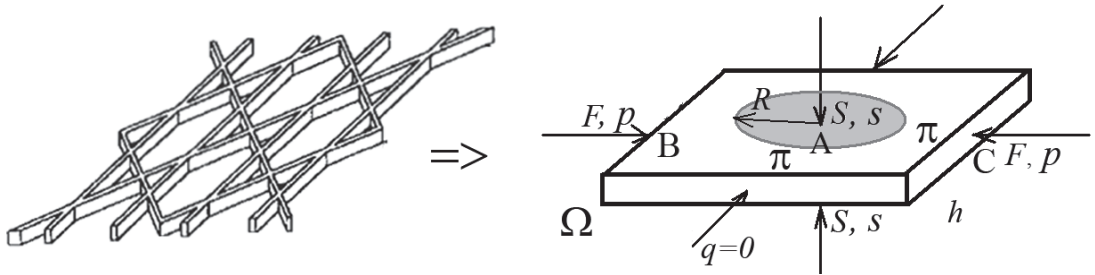


Fig. 3. The replacement of grid structure by anisotropic body  $\Omega$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\rho}{A_{11}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{A_{44}}{A_{11}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{A_{55} \pi^2}{A_{11} h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{A_{21} + A_{44}}{A_{11}} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{(A_{13} + A_{55}) \pi}{A_{11} h} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \\ + \frac{A_{14} + A_{41}}{A_{11}} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{A_{14}}{A_{11}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{A_{42}}{A_{11}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{A_{56} \pi^2}{A_{11} h^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{(A_{43} + A_{56}) \pi}{A_{11} h} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\rho}{A_{22}} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{A_{44}}{A_{22}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{A_{66} \pi^2}{A_{22} h^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= \frac{A_{21} + A_{44}}{A_{22}} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{(A_{23} + A_{66}) \pi}{A_{22} h} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \\ + \frac{A_{24} + A_{42}}{A_{22}} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{A_{24}}{A_{22}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{A_{41}}{A_{22}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{A_{65} \pi^2}{A_{22} h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{(A_{43} + A_{65}) \pi}{A_{22} h} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\rho}{A_{33}} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\pi^2}{h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{A_{55}}{A_{33}} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{A_{66}}{A_{33}} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{\pi}{h} \left( \frac{A_{31} + A_{55}}{A_{33}} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{A_{32} + A_{66}}{A_{33}} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right. \\ \left. + \frac{A_{34} + A_{65}}{A_{33}} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{A_{34} + A_{56}}{A_{33}} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \right) + \frac{A_{56} + A_{65}}{A_{33}} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right. \quad (13)$$

Here the coefficients  $A_{kl}$  can be found by formula (10).

Let us pose for (13) the problem of deformation of body  $\Omega$  under compressing pressures  $q, p, s$ . The forces  $F, S$  correspond to the pressures  $p, s$  (see fig. 13). Let us write boundary conditions for displacements on the plains  $x = 0, \pi$ . To this end we use (4), (11) and obtain



$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x|_{x=0,\pi} = p_x \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{p_x}{A_{11}} - \frac{A_{12}}{A_{11}} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{A_{13}\pi}{A_{11}h} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{A_{14}}{A_{11}} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \tau_{xy}|_{x=0,\pi} = p_y \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{p_y}{A_{44}} - \frac{A_{41}}{A_{44}} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{A_{42}}{A_{44}} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{A_{43}\pi}{A_{44}h} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{A_{14}}{A_{11}} \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \tau_{xz}|_{x=0,\pi} = p_z \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{p_z}{A_{44}} - \frac{A_{56}}{A_{55}} \left( \frac{\pi}{h} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\pi}{h} \frac{\partial u}{\partial z}. \end{array} \right. \quad (14)$$

The derivatives  $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y}$  on  $y = 0, \pi$  and  $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial z}$  on  $z = 0, \pi$  can be specified in the similar way.

## NUMERICAL MODELING OF DEFORMATION OF ANISOGRID STRUCTURE

The system of partial differential equations (13) contains small parameters. They are the geometric quantities  $(h/\pi)^2, \delta_j/a_j$  and the mechanical characteristics of stiffness of carbon entering the coefficients of system. For real structures the boundary value problems for (13) are stiff and can include small parameters of order  $10^{-6} - 10^{-8}$ . Obviously, for solving such problems it is necessary to use a numerical method accounting for this stiffness and enabling one to construct stable algorithms and find 3D distribution of  $u, v, w$  with sufficient accuracy within a reasonable time.

To construct such algorithms we use the ideas of K. I. Babenko of approximations without saturation [16]. We proceed from the algorithm for solving 2D boundary value problems for the Poisson equation proposed in [17]. For organizing the computations, this algorithm uses an iterative stabilization method and a set of non-stationary regularizations that makes it very effective in solving both linear and non-linear stiff problems. An important part of this algorithm in the context of the problems under consideration is the use of unsaturated approximation by interpolation polynomials with Chebyshev's nodes:

$$p_M(t, f) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{m-1} \frac{f(t_m) \sqrt{1-t_m^2}}{t-t_m} \cos(M \arccos t), \quad t_m = \cos \frac{(2j-1)\pi}{2M}, \quad m = 1, \dots, M. \quad (15)$$

Here  $f(t)$  is approximated unknown function,  $t \in [-1, 1]$ ,  $t_m$  are interpolation nodes,  $M$  is a number of nodes. In the calculations we use the trigonometric analogue of (15) obtained performing the change of variable  $t = \cos x$ , and extend this approach to 3D case. These polynomials enable one to obtain for smooth functions the estimation of accuracy with the asymptotic behavior of best approximations [16]:

$$\|f - p_M\|_{\infty} \leq DC_{\alpha} M^{-\alpha},$$

where  $\alpha$  is a degree of smoothness of  $f$ ,  $D$  is a constant bounding the values of derivatives of  $f$ ,  $C_{\alpha}$  depends only on  $\alpha$ . The approximations (15) essentially decreases the computational errors enabling to overcome the problem of small parameters.

Consider a structure containing three families of ribs  $\phi_1 = 26.6^\circ, \phi_2 = -26.6^\circ, \phi_3 = 0$  with the parameters  $E^j = 140$  GPa,  $E_t^j = 11$  GPa,  $G^j = 5.5$  GPa,  $G_t^j = 5.386$  GPa,  $\nu^j = \nu_t^j = 0.0212, \nu_i^j = 0.27, \delta_1 = \delta_2 = 0.0056$  m,  $\delta_3 = 0.0031$  m,  $a_1 = a_2 = 0.07$  m,  $a_3 = 0.078$  m, the average density is  $\rho = 372.3$  kg/m<sup>3</sup>. Let us solve the problem of the form (13), (14) for the structure with the specified parameters. We consider further two types of load and perform the corresponding numerical experiments.

In the first experiment, we consider the non-stationary problem for (13), set  $q = s = 0, h = 10$  mm and grip conditions at the point A (see fig. 3). Let us increase the force  $F(t)$  according to the law  $F(t) = 314H \times t, 0 < t < 160$  s and observe the dynamics of the maximum stress equivalent to those acting in ribs of the family  $j=1 - \sigma_{\max}^1(t) = 0.5 \cos(\phi_1) \max_{x,y,z} \sigma_x(t, x, y, z) a_1 / \delta_1$ , the dynamics of maximum stress intensity in a continuous analogue of the structure under consideration

$\sigma_{\text{int}}(t) = \max_{x,y,z} ((\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2))^{0.5} / \sqrt{2}$ , as well as the maximum deformation along z direction -  $\varepsilon_{\text{max}}(t) = \max_{x,y,z} \varepsilon_z(t, x, y, z)$ . Numerical experiments have shown that the considered time dependences are linear and have form

$$\sigma_{\text{max}}(t) = 5.56 * t \text{ MPa}, \sigma_{\text{int}}(t) = 0.988 * t \text{ MPa}, \varepsilon_{\text{max}}(t) = 0.0009 * t \% , 0 < t < 160 \text{ s.} \quad (16)$$

In the second experiment a stationary solution of the problem of form (13), (14) was found when  $S=0.387 \text{ MN}, F=0, h=10 \text{ mm}$  and grip conditions at the points  $B, C$  are specified (see fig. 3). Here the force  $S$  acts along  $z$  axis on a circle of radius  $R = \pi / 4 \text{ m}$ . Fig. 4 shows the distribution of deflection  $w(x, y, h)$ , deformation along  $z$  axis  $\varepsilon_z(x, y, h)$  and stress  $\sigma_x(\pi/2, y, z)$  in the cross section by plane  $x = \pi/2$ .

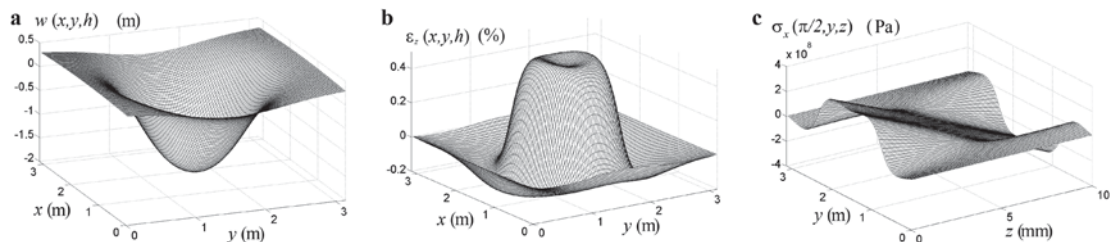


Fig. 4. Results of solving the stationary problem: a) value of the deflection; b) value of deformation along z axis, c) stress  $\sigma_x(\pi/2, y, z)$ .

Thus, proceeding from the classical equations of mechanics of rigid body and the concept of “smearing” we have described a model of anisogrid structure accounting for 3D distribution of displacements, strains and stresses. The numerical results allow us to conclude that the considered model and the used method describe correctly the deformation process of anisogrid structure on a qualitative level.

#### ACKNOWLEDGEMENTS

This work is performed under the project No. 15.4 of program of RAS Presidium and is supported by RFBR (grant No. 13-01-12032-ofi\_m)

#### REFERENCES

- [1] Vasiliev V. V, Barynin V.A., Razin A. F. Petrokovsky S. A., Halimanovich V. I. Anisogrid composite grid structures - development and application in space technology // Composites and nanostructures . 2009. No. 3. P. 38-50 (in Russian).
- [2] Obraztsov J. F., Rybakov L. S., Mishustin I. V. Deformation-analysis methods for elastic spaceframe systems of regular structure. J. on composite mechanics and design. Vol. 2. No.2. 1996. P. 3-14.
- [3] Shulkin Ju. B. Theory of elastic framed structures. M: Nauka. 1984. 272 p (in Russian).
- [4] Levin A. Some problems on regular bar systems. Proceedings of the universities. Construction and architecture. No. 9, 1965. P. 41-48 (in Russian).
- [5] Rybakov L. S. On the theory of a plane regular elastic structure of framework type. Mechanics of Solids. No. 5. 1995. P. 171-179.
- [6] Dean D. L., GangaRao H. V. S. Macro approach to discrete field analysis. J. Eng. Mech. Div., ASCE. Vol. 96. No. EM4. 1970. P. 377-394.
- [7] Azarov A. V. Continuum and discrete models of lattice composite cylindrical shells. J. on composite mechanics and design. Vol. 18. No. 1. 2012. P. 121-130.
- [8] Bazant Z. P., Christensen M. Analogy between micropolar continuum and grid frameworks under initial stress. Int. J. Solids and Struct. Vol. 8. No. 3. 1972. P. 327-346.
- [9] Bunakov V. A., Protasov V. D. Cylindrical reticular composite shells Mechanics of composite materials. No. 6. 1989. P. 1046-1053.
- [10] Bahvalov N. S., Panasenko G. P. Averaging processes in periodic media. Mathematical problems of the mechanics of composite materials. M: Nauka. 1984. 352p (in Russian).
- [11] Vlasov A. N. Averaging of mechanical properties of structurally inhomogeneous media. J. on composite mechanics and design. Vol. 10. No. 3. 2004. P. 424-441.

- [12] Altufov N. A., Popov B. G. Continuous models of regular trusses. *Mechanics of Solids*. No. 6. 1994. P. 146-154.
- [13] Vasiliev V.V., Morozov E.V. *Advanced Mechanics of Composite Materials*. Elsevier. 2007. 491 p.
- [14] Mityushov E. A. The theory of reinforcement. *J. on composite mechanics and design*. V.6. No. 2. 2000. P. 151-161.
- [15] Svistkov A. L., Evlampieva S. E. Using a smoothing averaging operator to evaluate macroscopic parameters in structurally inhomogeneous materials. *J. Applied Mechanics and Technical Physics*. Vol. 44. No. 5. 2003. P. 151-161.
- [16] Babenko K.I. *Fundamentals of numerical analysis*. Moscow-Izhevsk, Regular and chaotic dynamics 2002 (in Russian).
- [17] Blokhin A. M., Ibragimova A. S., Semisalov B. V. Design of numerical algorithm for the system of moment equations describing the process of charge transport in semiconductors. *Math. mod.* Vol. 21. No. 4. 2009. P. 15-34 (in Russian).

# THE ELIMINATION TECHNIQUES TO SOLVE COMPUTATIONAL PROBLEMS OF MODEL ORDER REDUCTION FOR LARGE MULTITERMINAL CIRCUITS

## АЛГОРИТМЫ РЕДУКЦИИ МОДЕЛЕЙ БОЛЬШИХ МНОГОПОРТОВЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ НА БАЗЕ МЕТОДОВ ИСКЛЮЧЕНИЯ

---

*The model order reduction (MOR) approach based on the elimination of internal nodal variables is discussed. The connection of the developed before numerical MOR procedure on the base of perturbation technique and widely used elimination techniques is shown. To take into account inductances the special procedure was suggested and the elimination approach was extended to MOR of RLC networks. The approach provides the first order of accuracy. The passivity criterion was obtained that can be easily verified.*

---

### ВВЕДЕНИЕ

Проектные процедуры для современных САПР субмикронных СБИС и схем наноэлектроники с необходимостью должны включать учёт доминирующего влияния аналоговых эффектов и, в первую очередь, учитывать влияние межсоединений. Требование в высокоточном моделировании аналоговых эффектов вступает в конфликт с резким ростом размерности моделируемых задач. Способом разрешения такого конфликта является корректное понижение размерности моделируемых фрагментов методами редуцирования исходных моделей. Основные направления исследований в области редукиции линейных моделей условно можно разделить [1] на группы проекционных методов на базе методов Крыловских подпространств [2], методов балансной реализации [3], методов исключения узловых переменных [4,5]. Каждая из названных групп методов имеет свои преимущества и ограничения.

Важной задачей практического моделирования СБИС является редукиция многопортовых линейных цепей. Выбор методов редукиции высокоразмерных моделей для цепей со многими входами и выходами является актуальной проблемой этого исследовательского направления [1]. Следует отметить, что применение наиболее распространённых алгоритмов редукиции на базе метода Крыловских подпространств, например, PRIMA [2], сталкивается в этом случае с существенными ограничениями. Эти методы разработаны и детально исследованы для редукиции моделей с одним входом и одним выходом. При их применении к многопортовым цепям число новых векторов на каждом итерационном шаге определяется количеством входов и выходов. Поэтому размерность Крыловских подпространств очень быстро растёт, что делает бесперспективным их применение к многопортовым задачам.

По указанной причине внимание исследователей обращено к развитию альтернативных подходов, в первую очередь, алгоритмов редукиции на базе методов узлового исключения. Эти методы теоретически менее обоснованы в сравнении с методами на базе методов Крыловских подпространств. Однако они имеют высокое быстродействие и могут быть успешно применены для редукиции многопортовых цепей. Особенностью этой группы методов является тесная связь с характером выбранного базиса моделей схем. Благодаря простоте применения и эффективному решению многих практических задач редукиции широкое распространение получили селективные методы типа TICER (Time Constant Equilibration Reduction) [4,5]. Последовательным исключением узлов схемы в этом случае обеспечивается быстрое редуцирование ёмкостно-резистивных межсоединений. Требуемая точность достигается благодаря оценке степени малости постоянных

---

<sup>1</sup> Institute for Design Problems in Microelectronics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

времени и её использовании в качестве критерия исключения узловых переменных.

Основными вопросами, требующими решения для дальнейшего развития методов узлового исключения, являются проблема сохранения пассивности редуцируемых моделей и задача расширения методов исключения на цепи, включающие индуктивные элементы.

В настоящей статье показано, что базовые формулы исключения алгоритма TICER могут быть получены из разработанного ранее подхода для упрощения моделей на базе метода возмущений [6,7]. Исходный алгоритм синтеза упрощенных моделей был ориентирован на формирование низкочастотных нелинейных моделей. Результатом анализа является граница частотного применения алгоритма TICER. Приводится алгоритм редукции на основе метода исключения для схем с малыми индуктивностями, обеспечивающих первый порядок точности. Показана возможность проверки пассивности редуцированных моделей по критерию положительной определенности матрицы емкостей.

## МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ В РЕДУКЦИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

### А. Постановка задачи редукции моделей

Пусть полная математическая модель фрагмента схемы задается системой алгебро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} f(x, \dot{x}, y, \dot{y}, par) &= 0, \\ I_{пол} &= h(x, \dot{x}, y, \dot{y}, par) \end{aligned} \quad (1)$$

где:  $x(t)$  - вектор-функция внутренних переменных  $x(t) \in R^n, t \in [0, \infty]$ ,  $y(t)$  - вектор-функция внешних (полюсных) переменных ( $y(t) \in R^l$ ),  $par$  - вектор параметров,  $I_{пол}$  - вектор функция выходных характеристик. При формировании (1) методом узловых потенциалов  $x$  и  $y$  - вектора потенциалов внутренних и внешних узлов, соответственно, а  $I_{пол}$  - вектор полюсных токов подсхемы.

Задача редукции модели заключается в понижении порядка системы (1), т.е. формировании упрощенной системы:

$$\begin{aligned} r(z, \dot{z}, y, \dot{y}, q) &= 0 \\ I_{ред} &= g(z, \dot{z}, y, \dot{y}, q) \end{aligned} \quad (2)$$

где  $I_{ред}$  - вектор полюсных токов,  $z(t)$  - вектор внутренних переменных ( $z(t) \in R^m$ )  $m < n$ ,  $q$  - вектор параметров редуцированной модели. Частным случаем (2) является отсутствие вектора  $z$ , т.е.  $m=0$ :

$$I_{ред} = g(y, \dot{y}, q) \quad (3)$$

Величина  $E_r$ :

$$E_r = \left\| I_{ред}(z, \dot{z}, y, \dot{y}, q) - I_{пол}(x, \dot{x}, y, \dot{y}, par) \right\| \quad (4)$$

определяет количественную оценку погрешности редуцированной модели. Чем в более широких пределах частотного диапазона, полюсных напряжений и значений параметров требуется выполнение условия (4), тем более трудоёмкой при использовании становится редуцированная модель (увеличивается  $m$ ). Расширение диапазона рабочих частот приводит к увеличению размерности упрощенной системы и, соответственно, её вычислительной сложности.

### Б. Формирование упрощенных моделей

Будем формировать упрощенную модель в виде

$$I_{ред} = g_{ст} + C_{экс} \dot{y}, \quad (5)$$

где первое слагаемое  $g_{cm}(y)$  представляет собой статическую модель, определение которой не вызывает принципиальных затруднений. Основная проблема заключается в определении динамической модели, т.е. в формировании матрицы реактивностей  $C_{экр}(y)$ . Для этих целей может быть использована теория возмущения операторов [8,9] при синтезе низкочастотной аппроксимации исходной динамической модели.

Рассмотрим далее генерацию динамических моделей для линейных схем, т.е. для линеаризованных в окрестности произвольной точки внешних переменных  $y_0$ . Исходная математическая модель (1) в этом случае имеет вид:

$$F_{\dot{x}}\dot{x} + F_x x + F_{\dot{y}}\dot{y} + F_y y = 0 \quad (6)$$

$$I_{pед} = H_{\dot{x}}\dot{x} + H_x x + H_{\dot{y}}\dot{y} + H_y y \quad (7)$$

Здесь  $F_{\dot{x}} = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}, F_{\dot{y}} = \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}, H_{\dot{x}} = \frac{\partial h}{\partial \dot{x}}, H_{\dot{y}} = \frac{\partial h}{\partial \dot{y}}$ .

Рассмотрим формирование упрощенной модели для частотного анализа - наиболее распространенного вида анализа линейных цепей. Перейдем к комплексной форме уравнений (6), (7)  $[x(t) \div X(p), y(t) \div Y(p)]$ . Так как по условию рассматривается линейная система с исходными постоянными матрицами коэффициентов, окончательное выражение не зависит от выбранной точки линеаризации ( $x_0, y_0$ ) для уравнений (1). В дальнейшем для сокращения записи положим  $x_0=0, y_0=0$ .

$$(pF_{\dot{x}} + F_x)X(p) + (pF_{\dot{y}} + F_y)Y(p) = 0, \quad (8)$$

$$I_{pед}(p) = (pH_{\dot{x}} + H_x)X(p) + (pH_{\dot{y}} + H_y)Y(p). \quad (9)$$

Суммы в скобках представляют собой комплексные проводимости.

Наиболее удобным для дальнейших расчетов является представление макромодели в виде комплексной матрицы  $G_y(p)$  размерностью  $[I * I]$ , в которой действительная и мнимая часть каждого элемента аппроксимируются полиномами. В результате исключения внутренних переменных методом подсхем имеем следующий вид матрицы:

$$G_y(p) = [H_y + pH_{\dot{y}}] - [H_x + pH_{\dot{x}}][F_x + pF_{\dot{x}}]^{-1}[F_y + pF_{\dot{y}}]. \quad (10)$$

При  $p=0$  имеем статический случай.

Рассмотрим далее низкочастотное приближение ( $|p| \rightarrow 0$ ) и поставим цель определить линейное приближение полиномов, аппроксимирующих элементы матрицы  $G_y(p)$ , т.е. вычислить коэффициент матрицы вида  $G_y(p) = B + pC_{экр}$ . Для этого, учитывая малость  $|p| \rightarrow 0$ , используем, согласно лемме Неймана [8,9], разложение в ряд с точностью до линейных членов обратной матрицы:

$$[F_x + pF_{\dot{x}}]^{-1} \approx [E - pF_x^{-1}F_{\dot{x}}]F_x^{-1} + \dots \quad (11)$$

где  $E$  - единичная матрица. Подставляя результат разложения в исходную формулу (10), получим

$$\hat{G}_y(p) = [H_y + pH_{\dot{y}}] - [H_x + pH_{\dot{x}}][E - pF_x^{-1}F_{\dot{x}}]F_x^{-1}[F_y + pF_{\dot{y}}]. \quad (12)$$

Выделяя далее в (12) свободные члены и коэффициенты при первой степени  $p$ , получим искомые выражения для матриц  $B$  и  $C_{экр}$ :

$$B = H_y - H_x F_x^{-1} F_y, \quad (13)$$

$$C_{экр} = H_{\dot{y}} - H_{\dot{x}} F_x^{-1} F_y - H_x F_x^{-1} [F_{\dot{y}} - F_{\dot{x}} F_x^{-1} F_y]. \quad (14)$$

Матрица  $B$  отражает активную составляющую проводимостей  $G_y$ . Матрица  $C_{экр}$  характеризует реактивную составляющую  $G_y$ . Выражения (13) и (14) определяют формулы пересчета при переходе

от полной модели многополюсной подсхемы к макромоделю, т.е. внешним (полюсным) характеристикам.

Условие, при котором справедливо соотношение (11):

$$\left\| pF_x^{-1}F_{\dot{x}} \right\| < 1 \quad (15)$$

дает ограничение частотного диапазона редуцированных моделей, получаемых рассматриваемым методом. В простейшем одномерном случае (например, исходная схема представляет собой RC - цепь) неравенство (15) приобретает вид  $\omega RC < 1$  (где  $\omega$  - круговая частота). Иначе говоря, в этом случае граница применения макромоделей совпадает с верхней граничной частотой полосы пропускания таких цепей ( $\omega_b = 1/\tau = 1/RC$ ).

### В. Оценка погрешности формирования редуцированных моделей

Следует отметить, что, используя старшие члены разложения (11) и соответствующие сомножители (10), легко вычислить матричные коэффициенты при старших степенях  $p$  для функции  $G_y(p)$ . Следовательно, такой подход позволяет формировать упрощенную модель подсхем в соответствии с рабочим частотным диапазоном ее применения или, например, по заданной погрешности моделирования в заданном частотном диапазоне.

Ошибка рассматриваемого метода определяется степенью отличия динамических характеристик редуцированной модели от полной модели. Для её качественной оценки следует найти исходную погрешность аппроксимации обратной матрицы  $[F_x + pF_{\dot{x}}]^{-1}$  степенным рядом  $p$ . Такая погрешность имеет порядок  $O(p^{n+1})$  и определяется остаточным членом  $R_{n+1}$  ряда:

$$\|R_{n+1}\| = \frac{|p|^{n+1} \|F_x^{-1}F_{\dot{x}}\|^{n+1} \|F_x^{-1}\|}{1 - |p| \|F_x^{-1}F_{\dot{x}}\|}$$

Использование формулы (14), полученной аппроксимацией полюсной матрицы реактивностей полиномом только первой степени имеет погрешность порядка  $O(p^2)$ , и включает ошибку, связанную с пренебрежением старших членов  $p^2 H_{\dot{y}} F_x^{-1} F_{\dot{y}}$  при исключении переменных, и дополнительную динамическую погрешность модели  $E_{trunc}$  в связи с усечением степенного ряда:

$$E_{trunc} = \frac{\|H_x\| \|F_x^{-1}F_{\dot{x}}\|^2 \|F_y\| p^2}{1 - |p| \|F_x^{-1}F_{\dot{x}}\|} \quad (16)$$

Увеличение точности может при необходимости быть достигнуто включением старших членов разложения (11).

### Г. Пример использования алгоритма для вычисления матрицы полюсных емкостей.

Рассмотрим применение формулы (14) для вычисления матрицы полюсных емкостей на примере простейшей RC - цепи (рис. 1,а). Структурно исходные матрицы емкостей  $C$  и проводимостей  $G$  в соответствии со введенными обозначениями имеют следующий вид:

$$G = \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ H_x & H_y \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} F_{\dot{x}} & F_{\dot{y}} \\ H_{\dot{x}} & H_{\dot{y}} \end{bmatrix}.$$

Пусть для простоты ёмкости и проводимости схемы имеют единичные значения. Тогда элементы приведенных матриц имеют следующие численные значения:

$F_x$	$F_y$	$F_{\dot{x}}$	$F_{\dot{y}}$																														
<table border="1"><tr><td>2</td><td>-1</td></tr><tr><td>-1</td><td>2</td></tr></table>	2	-1	-1	2	<table border="1"><tr><td>-1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>-1</td><td>0</td></tr></table>	-1	0	0	0	-1	0	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	0	0	1	<table border="1"><tr><td>0</td><td>0</td><td>-1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>-1</td></tr></table>	0	0	-1	0	0	-1										
2	-1																																
-1	2																																
-1	0	0																															
0	-1	0																															
1	0																																
0	1																																
0	0	-1																															
0	0	-1																															
<table border="1"><tr><td>-1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>-1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr></table>	-1	0	0	-1	0	0	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	1	0	0	0	1	0	0	0	0	<table border="1"><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>-1</td><td>-1</td></tr></table>	0	0	0	0	-1	-1	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>-1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>-1</td></tr><tr><td>-1</td><td>-1</td><td>4</td></tr></table>	1	0	-1	0	1	-1	-1	-1	4
-1	0																																
0	-1																																
0	0																																
1	0	0																															
0	1	0																															
0	0	0																															
0	0																																
0	0																																
-1	-1																																
1	0	-1																															
0	1	-1																															
-1	-1	4																															
$H_x$	$H_y$	$H_{\dot{x}}$	$H_{\dot{y}}$																														

Матрица коэффициентов влияния  $\frac{\partial x}{\partial y} = -F_x^{-1}F_y$  и обратная матрица проводимостей  $F_x^{-1}$

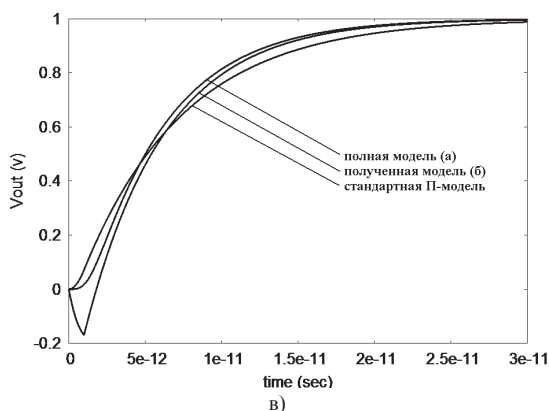
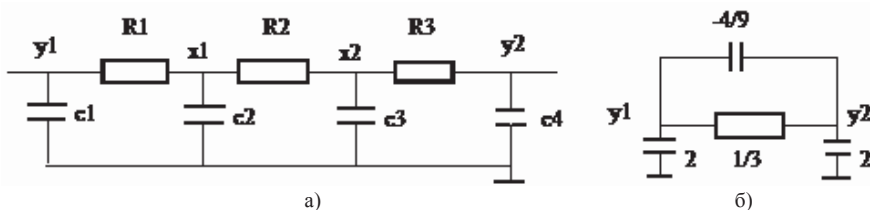
имеют следующие значения:  $\frac{\partial x}{\partial y} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $F_{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ . Согласно формуле (14)

для определения матрицы полюсных емкостей выполняются следующие вычисления:

$$C_{\text{экв}}(y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \times$$

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 14/9 & 4/9 & -2 \\ 4/9 & 14/9 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

На рисунке 1,б приведена эквивалентная схема, соответствующая вычисленным значениям полюсной матрицы. Наличие отрицательной ёмкости позволяет повысить точность моделирования в сравнении с традиционной  $\pi$ -образной эквивалентной схемой в частотном диапазоне применимости редуцированной модели. Это свойство иллюстрируется сравнительными результатами расчёта переходного процесса по полной модели и упрощенным моделям (рис. 1,в).



**Рис. 1.** а) RC-цепь, б) упрощенная эквивалентная схема для нее и вычисленные значения полюсных емкостей, в) переходные процессы, рассчитанные по полной модели, стандартной  $\pi$ -образной модели и полученной редуцированной модели.



## СВЯЗЬ С СЕЛЕКТИВНЫМ АЛГОРИТМОМ ИСКЛЮЧЕНИЯ

Покажем, что приведённые соотношения (13) и (14) в частном случае исключения одной переменной соответствуют применяемой технике редуцирования TICER [4,5]. Фактически TICER техника реализует алгоритм исключения Гаусса или, с точки зрения теории цепей, преобразование звезды в треугольник.

В этом случае матрицы  $F_x$  и  $F_x^{-1}$  являются скалярными величинами, и шаг редукции уменьшает размерность системы на единицу. В связи с симметричностью исходных матриц подматрицы взаимных проводимостей и емкостей являются сопряжёнными и имеют ранг 1. С учётом вышесказанного, используем далее обозначения [4]. Имеем  $\gamma = F_x$ ;  $\chi = F_x^{-1}$ . Далее пусть элементы (i,1) подматриц  $H_x$  и  $H_x^{-1}$  обозначены  $g_{i,1}$  и  $c_{i,1}$ , а элементы (1,j) подматриц  $F_y$  и  $F_y^{-1}$ , соответственно,  $g_{1,j}$  и  $c_{1,j}$ . Тогда элементы (i,j) подматриц  $H_x F_x^{-1} F_y$  и  $H_x F_x^{-1} F_y - H_x F_x^{-1} [F_y - F_x F_x^{-1} F_y]$ , соответствующих в (13) и (14) добавкам в редуцированные матрицы проводимостей и реактивностей, имеют, соответственно, вид:

$$E_G = \frac{g_{i1} g_{1j}}{\gamma}, \quad (17)$$

$$E_C = \frac{g_{i1} c_{1j} + g_{1j} c_{i1}}{\gamma} - \frac{g_{i1} g_{1j} \chi}{\gamma^2} \quad (18)$$

Эти значения соответствуют соотношениям редукции TICER, приведённым в [4] (формула 3.1).

Таким образом, алгоритм редукции TICER следует из изложенного подхода как частный случай. Условие потенциально исключаемого узла  $p\chi < \gamma$  повторяет условие (15) для одной переменной. Это условие, фактически, определяет границу низкочастотной области применения алгоритма редукции TICER.

Метод [4,5] использует (18) без последнего члена в выражении для емкости, и в этом случае все емкости редуцированной схемы положительны, что обеспечивает пассивность схемы. Однако, как было доказано в [10], несмотря на появление отрицательных емкостей использование полного выражения (18) не приводит к потере пассивности схемы. Следовательно, точное выражение (18) может быть использовано при исключении узла, что обеспечивает снижение ошибки в рассматриваемом частотном диапазоне.

## АЛГОРИТМЫ РЕДУКЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ С ИНДУКТИВНОСТЯМИ НА БАЗЕ СЕЛЕКТИВНЫХ МЕТОДОВ ИСКЛЮЧЕНИЯ

Селективные методы редукции исходно ориентированы на исключение узловых переменных. Их первоначальная разработка не предполагала применение к узлам с подключенными индуктивностями. Этому соответствовало предположение, что индуктивностями в межсоединениях можно пренебречь, и такое ограничение рассматривалось как несущественное для задачи редуцирования межсоединений. Но рост рабочих частот и мощностей современных СБИС увеличивает вклад индуктивностей в импеданс межсоединений, что приводит к заметной ошибке при их пренебрежении. Поэтому важной задачей является распространение селективных методов узлового исключения на схемы с малыми индуктивностями в рамках наиболее распространённого метода формирования модели Модифицированного Узлового Анализа (MNA).

Можно показать, что для узла с подсоединенной индуктивностью гауссово исключение узлового напряжения и последующее пренебрежение членами высокого порядка приводит к эквивалентной схеме с асимметричной матрицей емкостей. Такая схема не обеспечивает пассивность, и поэтому не может использоваться при моделировании ИС. Поэтому предлагаемый метод основан на одновременном исключении двух схемных переменных - узлового напряжения и тока

индуктивности.

Ниже рассматривается случай одной индуктивности, подключенной к RC-узлу (Рис. 2). Для получения редуцированной схемы исключаются две схемные переменные: узловое напряжение и ток индуктивности.

Используем далее следующие обозначения. Пусть  $y_i = g_i + s c_i$ ,  $Y_n = \sum_{j \in S_n} y_j = G_n + s C_n$  являются проводимостями ветви и узла, соответственно,  $S_n$  - множество индексов внешних узлов ветвей, подсоединенных к узлу  $n$ .

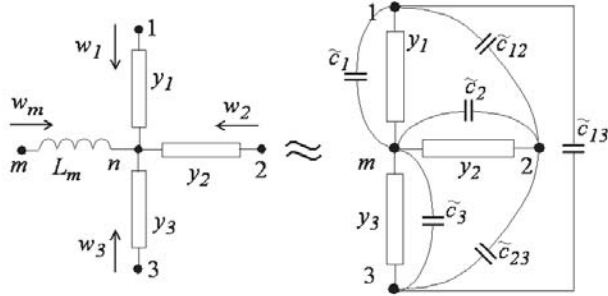


Рис. 2. Преобразование схемы при исключении RC-узла с индуктивностью.

Пусть  $w_i$  - ток  $i$ -й ветви, подсоединенной к узлу  $n$ . Учитывая, что:

$$w_i = y_i (v_i - v_n) \quad i \in S_n \quad (19)$$

получим из уравнения Кирхгофа для узла  $n$  ток индуктивности в виде:

$$w_m = - \sum_{j \in S_n} w_j = - \sum_{j \in S_n} y_j (v_j - v_n). \quad (20)$$

Напряжение на индуктивности определяется как

$$v_n - v_m = s L_m w_m \quad (21)$$

Подставив (20) в (21), получим

$$v_n (1 + s L_m Y_n) = v_m - s L_m \sum_{j \in S_n} y_j v_j. \quad (22)$$

Узловое напряжение, полученное из (22) отбрасыванием членов высших порядков, имеет вид:

$$v_n = v_m (1 + s L_m G_n) - s L_m \sum_{j \in S_n} g_j v_j. \quad (23)$$

После подстановки (23) в (19) и пренебрежения членами высших порядков с приведением подобных членов в соответствии с узловыми напряжениями получаем

$$w_i = y_i (v_i - v_m) + s \tilde{c}_i (v_i - v_m) - s \sum_{j \in S_n^i} \tilde{c}_{ij} (v_i - v_j), \quad (24)$$

где  $S_n^i$  - это множество  $S_n$  без индекса  $i$  и

$$\tilde{c}_i = -s L_m g_i G_n, \quad \tilde{c}_{ij} = s L_m g_i g_j. \quad (25)$$

Выражение для тока, втекающего в  $i$ -й узел (24), соответствует следующей схеме (рис. 2):

- исключается узел  $n$  и удаляется (закорачивается) индуктивность;
- старые RC-ветви сохраняются в соответствии с первым членом в (24);
- к каждой RC-ветви подсоединяются новые емкости  $\tilde{c}_i$  (25), ток через которые соответствует второму члену в выражении (24);
- новые емкости  $\tilde{c}_{ij}$  (25) включаются между внешними узлами RC-ветвей, определяя тем самым токи, соответствующие третьему члену (24).

В отличие от случая исключения RC-узла пассивность схемы после исключения индуктивности не

гарантирована. Поэтому прежде, чем принять исключение, необходимо проверить пассивность полученной схемы по какому-либо критерию. Известно, что схема пассивна, если ее матрицы проводимостей и емкостей неотрицательно определенные, а матрица емкости еще и симметрична. В нашем случае матрица проводимостей не меняется, а матрица емкостей симметрична по построению. Таким образом, необходимо контролировать только условие неотрицательной определенности матрицы емкостей. Применим следующий критерий неотрицательной определенности симметричной матрицы:  $C_{ii} \geq 0, |c_{ij}| \leq \sqrt{C_{ii}C_{jj}}$ . Это эквивалентно следующим условиям на величины узловых емкостей и емкостей ветвей:

$$C_i^{NEW} \geq 0, |c_{ij}^{NEW}| \leq \sqrt{C_i^{NEW}C_j^{NEW}}, \quad (26)$$

где  $c_{ij}^{NEW} = c_{ij} + \tilde{c}_{ij}$ . Если для редуцированной схемы условие (26) не выполняется, то исключение должно быть отвергнуто.

Аналогичные выражения для редуцированной схемы могут быть получены для случая взаимных индуктивностей.

Простой пример исключения индуктивности представлен на Рис. 3. Условия (26) для редуцированной схемы сводятся к  $c \geq 2L/r^2$ . Это неравенство соответствует условию неколебательного характера переходного процесса в исходной RLC секции.

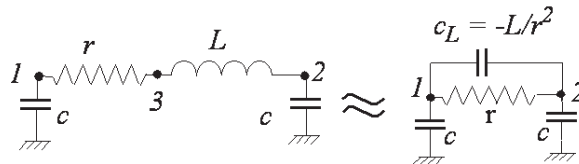


Рис. 3. Редуцирование RLC секции

### ПРИМЕР РЕДУКЦИИ RLC ЦЕПИ

Ниже применение предлагаемого алгоритма исключения индуктивностей иллюстрируется на примере RLC цепи, содержащей 10 идентичных секций с взаимосвязанными индуктивностями и следующими параметрами:  $r = 1\Omega, L = 0.4\text{pH}, C = 1\text{pF}$ . Отметим, что величина индуктивности немного меньше, чем максимально-допустимая величина, обеспечивающая условие пассивности ( $L_{max} = 0.4\text{pH}$ ). После схемного моделирования получен частотный и временной отклики исходной RLC линии (Рис. 4) и дано сравнение их с откликами двух редуцированных схем:

- RC-цепь, полученная исключением индуктивностей предложенным методом;
- RC-цепь, полученная пренебрежением всеми индуктивностями.

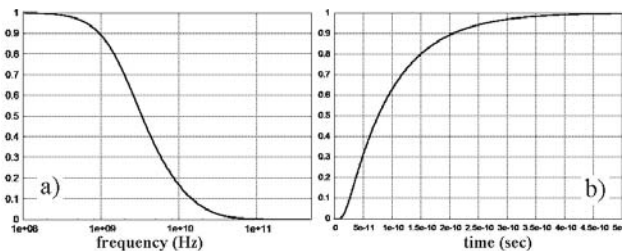


Рис. 4. Частотный и временной отклики RLC линии

Из рис. 5 видно, что ошибка алгоритма исключения в частотной и во временной областях примерно на порядок меньше, чем ошибка простого отбрасывания индуктивностей. Моделирование во временной области при получении графиков выполнялось для единичного переключения с фронтом  $t_{rise} = 3\text{psec}$ .

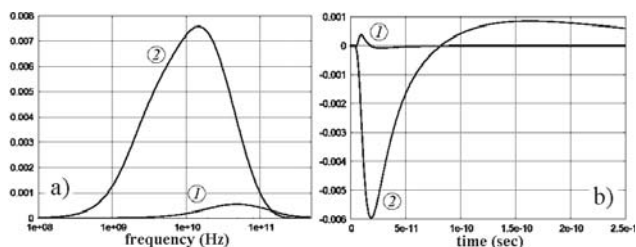


Рис. 5. Ошибки откликов редуцированной RLC-цепи при исключении индуктивностей (1) и пренебрежении (2) индуктивностями

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показана связь методов возмущений и методов исключения для редукции моделей, в частности, связь с селективными методами узлового исключения. Показано сохранение пассивности при появлении формальных отрицательных емкостей в результате матричных операций. Предложен способ расширения селективных методов узлового исключения на цепи с индуктивностями. Предложенные алгоритмы обеспечивают редукцию *RLCK* схем, сохраняя первый порядок точности передаточных характеристик схемы. Получено условие пассивности редуцированной схемы, которое легко контролируется на каждом шаге процесса исключения.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Schilders W.H.A. The Need for Novel Model Order Reduction Techniques in the Electronics Industry // In "Model Reduction for Circuit Simulation", Series: Lecture Notes in Electrical Engineering (LNEE). Springer. 2011. Vol. 74. P. 3-23.
- [2] Moore B.C. Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability and model reduction. IEEE Trans. Autom. Control. Vol. AC-26. No. 1. 1981. P. 17-32.
- [3] Odabasioglu A., Celik M., Pileggi L.T. PRIMA: passive reduced-order interconnect macromodeling algorithm // Proc. of IEEE/ACM Int. Conf. on Computer-Aided Design. 1997. P. 58-65.
- [4] Sheehan B.N., TICER: Realizable Reduction of Extracted RC Circuits // Proc. of IEEE/ACM Int. Conf. on Computer-Aided Design. 1999. P. 200-203.
- [5] Sheehan B.N. Realizable reduction of RC networks. IEEE Trans. Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. 2007. V. 26. № 8. P. 1393-1407.
- [6] Гурарий М.М., Русаков С.Г. Синтез макромоделей фрагментов БИС методом возмущений. Микроэлектроника. 1977. № 5. С. 406-409.
- [7] Баталов Б.В., Егоров Ю.Б., Русаков С.Г. Основы математического моделирования больших интегральных схем на ЭВМ. - М: Радио и связь, 1982.-167 с.
- [8] Ланкастер П. Теория матриц. - М.: Мир, 1978. - 280 с.
- [9] Воеводин В. В. Линейная алгебра. - М.: Наука, 1980.
- [10] Zuochang Ye, Vasilyev D., Zhenhai Zhu, Phillips J. R. Sparse Implicit Projection (SIP) for reduction of general many-terminal networks // Proc. Int. Conf. Computer-Aided Design. San Jose, 2008. P. 736-743.

## THE CONCEPT OF REDUNDANCY FOR TECHNIQUES OF MODEL ORDER REDUCTION IN CIRCUIT SIMULATION

---

*The problem of decreasing the redundancy of model order reduction (MOR) techniques in circuit simulation is discussed. A new approach to construct multipoint projection-based reducing algorithms is proposed that allows to decrease the redundancy of generated low-order models. Some experimental results are presented.*

---

### INTRODUCTION

Model order reduction techniques (MOR) are widely used in practical design of integrated circuits [1-5]. The projection methods of MOR are based as a rule on Krylov subspace methods (see for instance [1-9]). However the redundancy is peculiar to the reduced models obtained by this way [9]. The redundancy of the size of projection matrix means that the order of the reduced model is often much larger than it is required to provide desired accuracy.

The problem of the redundancy becomes stronger for multipoint applications [8-10]. The existing projection based methods lead to larger reduced models than necessary when number of ports is larger [5]. As mentioned in [5] "Krylov subspace projection methods will be extremely inefficient" for reducing the models with many ports. The extension of Krylov subspace methods by applying block-Krylov techniques (see for instance [9, 12]) requires deflation of redundant columns.

Multipoint projection methods [10, 11] produce more compact reduced models [14, 15]. But these methods have some practical limitations, in particular the problem of error control in reducing process is open [10, 14].

The important improvement in multipoint projection development was achieved in works [14, 15]. The suggested method PMTBR allowed to connect multipoint techniques with truncated balance (TBR) algorithms [13] and provided the theoretical basis for further development of multipoint direction in MOR techniques.

In this paper we present an approach to generate reduced basis in multipoint projection under error control. The purpose is to decrease the redundancy of MOR techniques.

In Section II the problem of redundancy of MOR techniques for circuit simulation is shortly discussed. Section III presents basic expressions needed for further investigations. In Section IV the proposed algorithm is presented. Results of numerical experiments are presented in Section V.

### REDUNDANCY IN CIRCUIT SIMULATION MOR PROBLEMS

Krylov subspace methods are widely used for MOR of different kinds of problems due to simplicity and low computational cost. The successfully exploited PRIMA algorithm [7] is a typical implementation of Krylov subspace methods.

But the approximations generated by Krylov subspace methods are redundant as a rule [9, 16]. This is the reason of introducing the concept of redundancy into MOR problems in circuit simulation. The decreasing the redundancy means the decreasing the order of reduced models in comparison with MOR results obtained by Krylov subspace based methods. To avoid the redundancy of reduced models is the one of the main goal of improvement of the MOR techniques.

The source of the redundancy can be explained by the following way. The traditional projection algorithms are based on scanning of the system state vectors and their moments corresponding to prede-

---

<sup>1</sup> Institute for Design Problems in Microelectronics (IPPM), Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

finer sequence of different inputs and sample points. Often such sequence contains highly correlated vectors [14, 15] and the basis obtained by short sequence can poorly approximate the original system. The need to increase the length of the sequence leads to the redundancy.

The several numerical proposals and procedures have been investigated with the purpose to decrease the redundancy. Among them involving second MOR step after stage with Krylov subspace MOR techniques [9, 16], removal redundant columns [9, 16] are considered.

The new numerical procedure in frames of multipoint strategy is discussed below.

The main idea is to generate projective matrices using a criterion of linear dependence while subsequent selection of state vectors. The process of basis generation is performed by an adaptive procedure using worst-case analysis to determine frequency point corresponding to the maximal current error norm of approximation by the reduced model. This error norm is used as the stopping criterion in accordance with user-defined error metric.

## BACKGROUND

The behavior of a linear time invariant (LTI) system with  $N$  internal states,  $N_{inp}$  input ports and  $N_{out}$  output ports is described by the Laplace linear system in the matrix form:

$$(G + sC)X = B, \quad (1)$$

$$Y = D^T X. \quad (2)$$

Here  $N \times N_{inp}$  matrix  $X$  represents the internal states of the system. Each entry  $Y_{ij}$  of  $N_{out} \times N_{inp}$  matrix  $Y$  defines the transfer function (TF) from  $j$ -th input port to  $i$ -th output port. The "electrical" notation is used below for  $N \times N$  matrices:  $G$  - conductance and  $C$  - capacitance matrices. Moreover we have  $N \times N_{inp}$  input matrix  $B$  and  $N \times N_{out}$  output matrix  $D$ .

The solution of (1) in the frequency point  $s$  is obtained as

$$X(s) = A(s)^{-1} B, \quad (A(s) = G + sC) \quad (3)$$

The moments of  $X(s)$  are defined as:

$$X^{[0]}(s) = X(s),$$

$$X^{[k]}(s) = \frac{1}{k!} \frac{d^k X(s)}{ds^k} = -A(s)^{-1} C \cdot X^{[k-1]}(s) \quad (4)$$

Projection methods transform the original system (1, 2) of order  $N$  into the reduced system of order  $\hat{N} < N$

$$(\hat{G} + s\hat{C})\hat{X} = \hat{B}, \quad (5)$$

$$\hat{Y} = \hat{D}^T \hat{X}. \quad (6)$$

The transform can be presented as the multiplication of original matrices by  $N \times \hat{N}$  right ( $V$ ) and left ( $W$ ) reduction matrices [5, 17]:

$$\hat{G} = W^T G V, \hat{C} = W^T C V, \hat{B} = W^T B, \hat{D} = V^T D \quad (7)$$

The system (5, 6) with matrices (7) is resulted from applying Petrov-Galerkin method [17] to the system (1, 2). The application includes the following items:

1. The solution of system (1) at any  $s$  is approximately presented as a linear combination of columns of the matrix  $V$

$$X(s) \approx \tilde{X}(s) = V \cdot \hat{X}(s), \quad (8)$$

where  $\hat{X}(s)$  represents unknown coefficients, and  $\tilde{X}(s)$  is the approximation of the solution of (1).

2. After substituting (8) into (1) the expression for approximated residual of (1) can be presented as

$$\tilde{R}(s) = (G + sC)\tilde{X}(s) - B = (G + sC)V\hat{X}(s) - B \quad (9)$$

In accordance with Petrov-Galerkin projection the residual of the reduced system is obtained by orthogonalizing the approximated residual  $\tilde{R}(s)$  (9) to all columns of left projection matrix  $W$ :

$$\hat{R}(s) = W^T \tilde{R}(s) = W^T (G + sC)V\hat{X}(s) - W^T B = 0. \quad (10)$$

Taking into account that (9) can be rewritten as  $\tilde{R}(s) = A(s) \cdot \tilde{X}(s) - B$  and substituting  $B = A(s)X(s)$  into (10) the following useful form of (10) can be also considered:

$$W^T A(s) \cdot \Delta X(s) = 0, \quad (11)$$

where  $\Delta X(s) = X(s) - \tilde{X}(s)$  is the deviation of the solution of (1) from its approximation  $\tilde{X}(s)$ .

3. The output matrix (6) is obtained by substituting (8) into (2):

$$\hat{Y}(s) = D^T \tilde{X}(s) = D^T V\hat{X}(s). \quad (12)$$

The expressions (10, 11) are easily transformed to (5-7).

There are two main approaches to define left projection matrix  $W$ . The first one generates  $W$  as the basis of moments of the conjugate system. It provides Padé approximation of TF. Another approach applies transform with Galerkin projection  $W=V$  [17].

Taking into account the different magnitudes of the excitations in the case of multiport networks the original, approximated and reduced state vectors are connected with TF state vectors by the following way:

$$\begin{aligned} \hat{x}_u(s, u) &= X(s) \cdot u(s), & \tilde{x}_u(s, u) &= \tilde{X}(s) \cdot u(s), \\ \hat{x}_u(s, u) &= \hat{X}(s) \cdot u(s) \end{aligned} \quad (13)$$

Relations that are similar to (8) can be presented in the form:

$$x_u \approx \tilde{x}_u = V \cdot \hat{x}_u = \sum_{k=1}^{\hat{N}} \hat{x}_{uk} v^{(k)}, \quad (14)$$

where  $v^{(k)}$  -  $k$ -th column of projective matrix  $V$ .

The following statement can be easily indicated using (8, 9, 12) and (14):

**Statement 1:** If the reduced system obtained with right projection matrix  $V$  is nonsingular and the state vector of the original system  $x_u(s, u)$  is linearly dependent on columns of matrix  $V$  then for the given  $s, u$  the output vector of the reduced system coincides with the original output vector

$$\hat{y}_u(s, u) = y_u(s, u) \quad (15)$$

This statement is exploited in constructing the presented below algorithm.

## MULTIPOINT REDUCING ALGORITHM BASED ON SELECTION OF VECTORS WITH MINIMAL LINEAR DEPENDENCE

The main idea of the development new numerical algorithms to generate projective matrices is based on the subsequent selection of vectors with minimal linear dependence on the previously defined basis. The purpose is to decrease the redundancy by this way. The realization of such approach requires a criterion of linear dependence. The criterion can be based on Statement 1. It can be concluded from (15) that zero error norm of the current reduced system ( $\|y_u(s, u) - \hat{y}_u(s, u)\| = 0$ ) for the given  $s$  means linear dependence of corresponding state vectors. Thus maximal linear independence can be expected for the state vector corresponding to the maximal error norm or in other words for the worst-case state vector. In this case the introduced user-defined error norm provides additionally the effective error control that is problematically for projection methods as a rule.

Below the generation of projective matrices is shown for two-port problem to illustrate the basic principles of constructing the reducing algorithms with estimation of the maximal linear independence of state vectors. The extension of this approach for multi-port problems is presented in [18].

For SISO system the matrices  $B, D$  are replaced by vectors  $b, d$ . The state vector  $x(s_m)$  and TF scalar value  $y(s_m)$  are determined in each  $s_m$ . The TF deviation from the original value defines the error as follows

$$e^{\max}(s_M) = \max_m |y(s_m) - \hat{y}^{(n-1)}(s_m)|. \quad (16)$$

The relative error of reduced TF then the error is estimated as

$$e^{\max}(s_M) = \max_m |y(s_m) - \hat{y}^{(n-1)}(s_m)| / |y(s_m)|. \quad (17)$$

The proposed algorithm with the explicit computation of the projective matrix can be outlined in this case as follows.

*Preliminary step.* Solve the original system (1, 3) for the given set of Laplace points  $s \in S = \{s_1, s_2, \dots, s_m, \dots, s_Q\}$ ; save the state vector  $x(s_m)$  and output vector  $y(s_m)$  for each point  $s_m$ .

*Numerical cycle.* Let  $n-1$  basis vectors (columns of the current projection matrix  $V^{(n-1)}$ ) be already obtained, the matrices of the current reduced system of  $(n-1)$ -th order have been evaluated by (7). Then the new basis vector is determined by the following steps.

- 1) Solve the current reduced system at all given Laplace points

$$\hat{x}^{(n-1)}(s_m) = \hat{A}^{(n-1)}(s_m)^{-1} \cdot b^{(n-1)},$$

$$\hat{y}^{(n-1)}(s_m) = d^{(n-1)} \cdot \hat{x}^{(n-1)}(s_m).$$

- 2) Evaluate the maximal error at each sample point.

- 3) Select the worst-case sample point  $s_M$  with the maximal error norm (16).

- 4) If  $e^{\max} < E$  then the reducing cycle is finished. Here  $E$  is the specified upper bound of the error.

- 5) Determine the worst-case state vector  $x^* = x(s_M)$ .

- 6) Define a new basis vector by orthogonalization of state vector with respect to previous basis vectors

$$v^{(n)} = x^* \perp V^{(n-1)}, \quad V^{(n)} = [V^{(n-1)}, v^{(n)}]. \quad (18)$$

- 7) Compute matrices of the reduced system of current order  $n$  by (7).

- 8) Go to step 1 with  $n=n+1$ .

At the first step no reduced system exists, so the reduced TF can be assumed to be zero ( $\hat{y}^{(0)}(s) \equiv 0$ ).

## NUMERICAL EXPERIMENTS

1. The comparison of the proposed algorithm with widely used typical Krylov subspace MOR method PRIMA [7] is illustrated below by results of reducing RLCK circuit model of 993-th order. This circuit example (<http://www.ee.ucla.edu/~hy255/>) includes 32 coupled buses. Each bus contains 10 RLC sections and any pair of 320 circuit sections has also capacitance and inductance couplings.

Fig. 1 shows the cross-talk transfer function (TF) obtained for original circuit of 993-th order, for reduced model of 40-th order generated by PRIMA and for reduced model of 15th order generated by suggested technique. As it can be seen all the three TF practically coincide at  $f < 0.5\text{GHz}$ . At  $f > 0.5\text{GHz}$ , the model of 15th order produced by new technique provides the similar accuracy as PRIMA model of 40-th order. By this way the new technique generates more compact models in the comparison with PRIMA method or in other words allows to decrease the redundancy peculiar to Krylov subspace MOR methods.

2. Fig. 2 shows the monotonic dependence of obtained order for the reduced RLCK model under variation of user defined error tolerance.

3. Fig. 3 and Fig. 4 illustrate the results of comparison of suggested technique with multipoint reducing algorithm UiMOR [19, 20]. The algorithm UiMOR is the modern sampling based MOR algorithm. It combines many advanced reduction techniques, includes particularly the adaptive sampling method to minimize the number of frequency points in reducing process. The order of the reduced system is determined by UiMOR automatically [20]. Its application for different MOR problems confirmed efficiency



due to providing the successful balance between accuracy and speed.

As a circuit example for comparison the model of RLC network with quite complex frequency transfer function (Fig. 3) was selected. The original model order is 2982. The generation of the reduced models was performed by UIMOR algorithm and by the suggested algorithm with practically the same accuracy. The resulting absolute error deviations from the original model are shown in Fig. 4 for two discussed techniques. As we can see the error tolerance is limited by value  $1.0E-4$ .

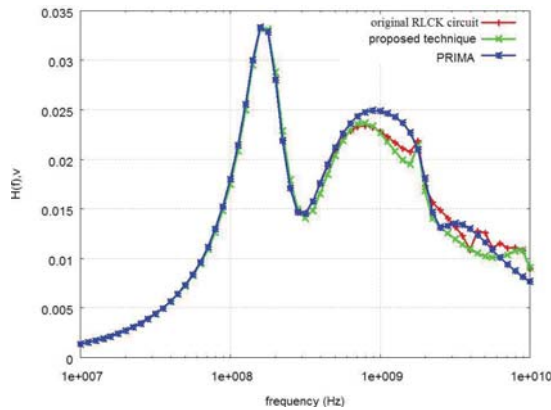


Fig. 1. Cross-talk TF for original RLCK circuit, for the model of 15-th order reduced by new technique and for the model of 40-th order reduced by PRIMA method.

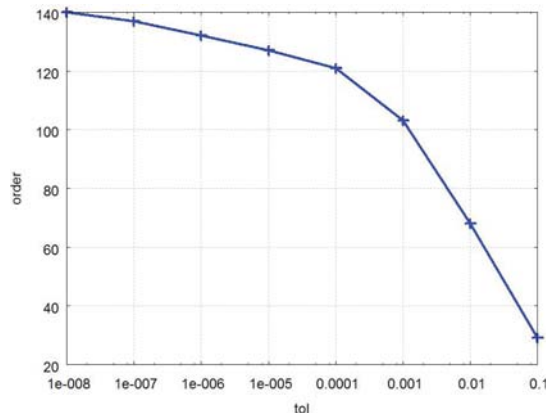


Fig. 2. The change of order for reduced RLCK model under variation of user defined error tolerance.

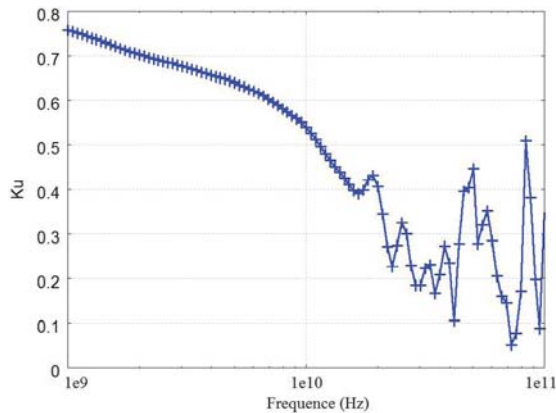


Fig. 3. The transfer function of original RLC model circuit.

The mentioned above accuracy is achieved by UiMOR algorithm with the obtained model order - 322 while the same accuracy is achieved by the suggested algorithm with order 153. It can be noticed also that Krylov subspace technique requires the order of the reduced model 394 for the same conditions. These numerical results demonstrate good capabilities of the suggested MOR approach for decreasing the redundancy of reduced models.

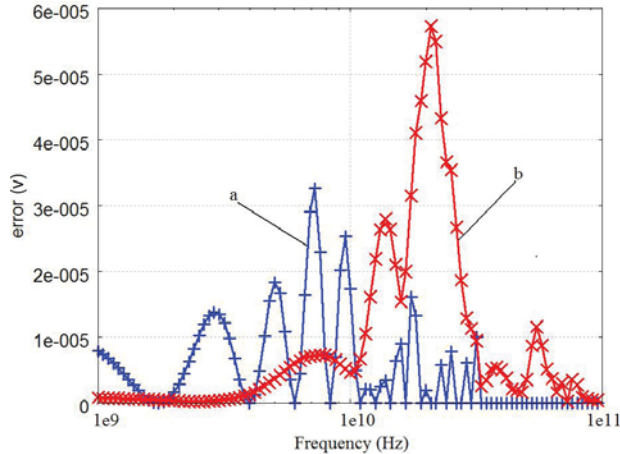


Fig. 4. The resulting error of the reduced RLC model obtained by the suggested algorithm (a) and UiMOR algorithm (b).

## CONCLUSION

The new strategy of multipoint projection MOR is proposed that is directed to decrease the redundancy of the reduced models. The developed MOR algorithm allows to take into account the mechanism of possible occurrence of redundancy at the stage of basis generation for projective matrix. The numerical procedure is based on the estimation of maximal linear independence while subsequent selection of state vectors for basis generation. The compact low-order models are obtained by the developed adaptive procedure to determine frequency points for basic vectors under current error control.

## REFERENCES

- [1] Silva, J. M. S., Villena, J. F., Flores, P., and Silveira, L. M. Outstanding Issues in Model Order Reduction. Scientific Computing in Electrical Engineering. Berlin Heidelberg: Springer. 2007, P. 139-152.
- [2] Schilders W. H.A. The Need for Novel Model Order Reduction Techniques in the Electronics Industry // In Model Reduction for Circuit Simulation, Series: Lecture Notes in Electrical Engineering. Springer. 2011. Vol. 74. P. 3-23.
- [3] Schilders, W.H.A., van der Vorst, H.A., Rommes, J. (eds.): Model order reduction: theory, research aspects and applications. Mathematics in Industry. Vol. 13. Berlin Heidelberg:Springer. 2008.
- [4] Benner P., Hinze M., E. ter Maten J. W. (Editors). Model Reduction for Circuit Simulation, Series: Lecture Notes in Electrical Engineering (LNEE). Vol. 74. Berlin Heidelberg:Springer. 2011.
- [5] Tan S. X.-D., Qi Z., Li H. Advanced Model Order Reduction Techniques in VLSI Design, Cambridge University Press, UK, 2007.
- [6] Feldmann P., Freund R. W. Efficient linear circuit analysis by Pade approximation via the Lanczos process. IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. Vol. 14. 1995. P. 639-649.
- [7] Odabasioglu A., Celik M., Pileggi L.T.: PRIMA: passive reduced-order interconnect macromodeling algorithm. IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. Vol. 17. 1998. P. 645-654.
- [8] Grimme E. Krylov Projection Methods for Model Reduction. PhD thesis. Coordinated-Science Laboratory. University of Illinois at Urbana-Champaign. Urbana-Champaign. IL. 1997.
- [9] Heres P.J. Robust and efficient Krylov subspace methods for Model Order Reduction. PhD Thesis, TU Eindhoven. The Netherlands. 2005.
- [10] Elfadel I.M., Ling D. L. A block rational Arnoldi algorithm for multipoint passive model-order reduction of multiport RLC networks. in Proc. Int. Conf. Comput.-Aided Des. Nov. 1997. P. 66-71.

- [11] Marques N., Kamon M., White J., Silveira L. M., A mixed nodal-mesh formulation for efficient extraction and passive reduced-order modeling of 3D interconnects. Proceedings of the 35th Design Automation Conf. San Francisco. June 1998. P. 297-302.
- [12] Feldmann P., Freund R.W. Reduced-order modeling of large linear subcircuits via a block Lanczos algorithm. Proc. of the 32nd ACM/IEEE Design Automation Conf. June 1995. P. 474-479.
- [13] Moore B.C. Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability and model reduction. IEEE Trans. Autom. Control. Vol. AC-26. No. 1. 1981. pp. 17-32.
- [14] Phillips J. R., Silveira L. M. Poor Man's TBR: A simple model reduction scheme. IEEE Trans. Computer-Aided Design. Vol. 24. No. 1. 2005. P. 43-55.
- [15] Phillips J. R., Zhu Z., Silveira L. M. PMTBR: A Family of Approximate Principal-components-like Reduction Algorithms // In Model Reduction for Circuit Simulation, Series: Lecture Notes in Electrical Engineering (LNEE). Berlin Heidelberg:Springer. Vol. 74. 2011. P. 111-132.
- [16] Heres P.J., Schilders W.H.A. Orthogonalisation in Krylov subspace methods for model order reduction. In A. Anile, G. Ali and G. Mascali, editors. Scientific Computing in Electrical Engineering.Vol. 9. Berlin Heidelberg:Springer. 2006.
- [17] Benner P. Numerical Linear Algebra for Model Reduction in Control and Simulation, GAMM Mitteilungen. Vol. 29. No. 2. 2006. P. 275-296.
- [18] Gourary M. M., Zharov M. M., Ulyanov S.L. Model Order Reduction by State Vector Selection (SVS) Approach. European Conf. on Circuit Theory and Design, Dresden, September 2013, paper 79.
- [19] Wang H., Tan S. X.-D., Chen G. Wideband reduced modeling of interconnect circuits by adaptive complex-valued sampling method. in Proc. Asia South Pacific Design Automation Conf. (ASPDAC), Taipei. Jan. 2010. P. 31-36
- [20] Tan S. X.-D., Wang H., Yan B. UiMOR - UC Riverside model order reduction tool for post-layout wideband interconnect modeling. in Proc. 10th IEEE Int. Conf. Solid-State and Integr. Circuit Technology (ICSICT). Shanghai. Nov. 2010. P. 1769 - 1773.

## MOTION OF VISCOUS INHOMOGENEOUS INCOMPRESSIBLE FLUID OF VARIABLE VISCOSITY

### ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕОДНОРОДНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

---

*To solve some practical problems of incompressible flow it is necessary to use the Navier-Stokes equations taking into account the heterogeneity of the medium and the viscosity dependence of the density. These tasks may include distribution of suspensions in liquid, secretion from the walls and distribution of gas in underground coal mines; influence of inhomogeneous fluid flow on friction at border. In this paper we study the diffusion-type mathematical model of two-component incompressible medium with variable viscosity, depending of mixture components concentration. To solve the boundary value problems we apply the method of nets using splitting into physical processes. Numerical solution results of two- and three-dimensional problems are shown.*

---

#### ВВЕДЕНИЕ

В последние годы значительно возрос интерес к моделированию и исследованию задач о движении смесей различных сред. Центральным местом формирования модели для таких процессов является выбор реологического уравнения состояния.

В работах [1,2,3] были предложены реологические соотношения для суспензий и бингамовских сред [4]. Более сложные соотношения для вязкости в случае многокомпонентных сред были рассмотрены в [5]. В [6] была построена математическая модель промышленного процесса повышения жирности молока методом ультрафильтрации через пористую стенку керамического фильтра. Так как вязкость молока зависит от его жирности, то использование переменной вязкости позволило построить в цилиндрическом канале точное стационарное решение системы уравнений вязкой неоднородной жидкости с переменной вязкостью и численно исследовать процесс образование геля жирности вблизи стенок мембраны. В работах [7, 8] переменная вязкость применялась для ускорения сходимости итерационных схем решения задач о течении вязкой несжимаемой жидкости.

В данной работе изучается математическая модель диффузионного типа для двухкомпонентной несжимаемой среды с переменным коэффициентом вязкости, зависящим от концентрации компонентов смеси, приводятся примеры расчетов различных задач.

#### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим в области  $\Omega$  (рис. 1) следующую двумерную краевую задачу:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla)C = \text{div}(k \nabla C), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$\rho = C(\rho_2 - \rho_1) + \rho_1, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} \right) + \nabla p = \rho (\text{div}(T) + \bar{f}), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (3)$$

$$\text{div } \bar{V} = 0, \quad (x, t) \in Q_T,$$

$$\bar{V}(x, 0) = \bar{V}_0(x), \quad x \in \Omega,$$

---

<sup>1</sup> Kemerovo state university, Kemerovo, Russia

<sup>2</sup> Faculty of Science and Mathematics, Kosovska Mitrovica, Serbia

$$\begin{aligned} \bar{V}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in S_1, \quad p(x,t) = p_0(x,t), \quad (x,t) \in S_2, \\ C(x,t) = 0, \quad (x,t) \in S_1, \quad \frac{\partial C}{\partial n}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in S_2, \\ \bar{V} \cdot \bar{\tau} = 0, \quad (x,t) \in S_2 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\bar{V}(x,t) = \bar{V}_1(x,t), \quad (x,t) \in S_3, \quad C(x,t) = C_1(x,t), \quad (x,t) \in S_3, \quad (5)$$

где  $T = (t_{ij}), t_{ij} = \mu[\partial V_i / \partial x_j + \partial V_j / \partial x_i], \bar{V} = (V_1(x_1, x_2, t), V_2(x_1, x_2, t))$  - вектор скорости,  $p = p(x_1, x_2, t)$  - давление,  $C = C(x_1, x_2, t)$  - концентрация примеси,  $\bar{f} = (0, f_2), \rho = \rho(x_1, x_2, t)$  - плотность смеси,  $\rho_1, \rho_2$  - плотности составляющих смесь веществ,  $\mu$  - коэффициент вязкости, зависящий от плотности,  $k > 0$  - коэффициент диффузии,  $x = (x_1, x_2), t \in [0, \tilde{T}]$  - время,  $Q_T = \Omega \times [0, \tilde{T}], S_1 = \gamma_1 \times [0, \tilde{T}], S_2 = \gamma_2 \times [0, \tilde{T}], S_3 = \gamma_3 \times [0, \tilde{T}], \gamma_1$  - непроницаемые твердые стенки,  $\gamma_2$  - участки протекания,  $\gamma_3$  - пористые стенки,  $\bar{\tau}$  - касательный вектор к границе  $\gamma_2, \bar{n}$  - вектор внешней нормали. На входных и выходных границах, как видно из формул (4), задается давление. Также была рассмотрена постановка задачи, когда на участках протекания задавался вектор скорости. На твердых стенках задано условие прилипания.

Особенностью данной постановки краевой задачи для уравнений (3) является отсутствие задания одной компоненты вектора скорости на участках втекания-вытекания. И, как показано в [9], [10] такая постановка является корректной. Но при численной реализации эту компоненту необходимо каким-либо способом определять и это является одной из проблем при численном решении такого типа задач.

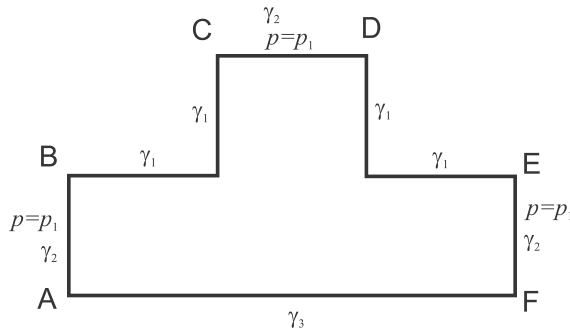


Рис. 1. Область течения  $\Omega$

Более подробно о задании краевых условий будет сказано в пункте 4 при рассмотрении конкретных задач.

## ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ

Для упрощения изложения численного алгоритма мы опишем случай  $\mu = const$  и обозначим  $u = V_1, v = V_2$ , тогда система (3) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} \right) + \nabla p - \mu \Delta \bar{V} = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \\ div \bar{V} = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \end{aligned}$$

где  $\bar{V} = (u, v)$ .

Для численного решения системы (1-3) с краевыми условиями (4-5) построим в области  $\Omega$  раз-

несенную [10,11] прямоугольную и в общем случае неравномерную сетку  $\Omega_h$  с шагами  $h_{xi}$  и  $h_{yj}$ , согласованную с границей  $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ .

Сначала решается уравнение для концентрации (1). Для этого используется схема стабилизирующей поправки с использованием аппроксимации конвективных слагаемых против потока [12].

Зная текущее значение концентрации, вычисляется плотность среды, используя определение плотности через концентрацию (2).

Скорость и давление будем находить с помощью трехэтапной схемы расщепления [13]:

$$\rho \frac{\tilde{V} - V^n}{\tau} = -\rho(\tilde{V}\nabla)\tilde{V} + \mu\Delta V; \quad (6)$$

$$-\rho\Delta p + \rho_x p_x + \rho_y p_y = -\rho^2 \frac{\text{div } \tilde{V}}{\tau}; \quad (7)$$

$$\rho \frac{V^{n+1} - \tilde{V}}{\tau} = -\nabla p, \quad (8)$$

где  $\tau$  - шаг по времени.

На  $\Omega_h$  методом контрольного объема аппроксимируем уравнение (6) разностной схемой второго порядка по пространству и реализуем схемой стабилизирующей поправки.

Как упоминалось выше, для решения построенной разностной схемы необходимо задать одну из компонент скорости на входах и выходах области протекания. Поэтому для замыкания системы аппроксимируем уравнение (6) на границах протекания внутрь области решения, заменяя производные односторонними разностями первого порядка аппроксимации. Например, на входной границе АВ мы имеем следующий разностный аналог ( $i=0$ ):

$$\begin{aligned} & \rho_{0j}^{n+1} \left( \frac{u_{0j}^{n+1/2} - u_{0j}^n}{\tau} + u_{0j}^n \frac{u_{1j}^{n+1/2} - u_{0j}^{n+1/2}}{h_{x0}} + v_{0j}^n \frac{u_{0j+1}^n - u_{0j-1}^n}{(h_{yj-1} + h_{yj})/2} \right) = \\ & = \mu \left( \frac{(u_{2j}^{n+1/2} - u_{1j}^{n+1/2})/h_{xi+1} - (u_{1j}^{n+1/2} - u_{0j}^{n+1/2})/h_{x0}}{(h_{x0} + h_{x1})/2} + \frac{(u_{0j+1}^n - u_{0j}^n)/h_{yj} - (u_{0j}^n - u_{0j-1}^n)/h_{yj-1}}{(h_{yj-1} + h_{yj})/2} \right). \end{aligned}$$

Аналогично на выходной границе EF будем иметь ( $i=N$ ):

$$\begin{aligned} & \rho_{Nj}^{n+1} \left( \frac{u_{Nj}^{n+1/2} - u_{Nj}^n}{\tau} + u_{Nj}^n \frac{u_{Nj}^{n+1/2} - u_{N-1j}^{n+1/2}}{h_{xN-1}} + v_{Nj}^n \frac{u_{Nj+1}^n - u_{Nj-1}^n}{(h_{yj-1} + h_{yj})/2} \right) = \\ & = \mu \left( \frac{(u_{Nj}^{n+1/2} - u_{N-1j}^{n+1/2})/h_{xN-1} - (u_{N-1j}^{n+1/2} - u_{N-2j}^{n+1/2})/h_{xN-2}}{(h_{xN-2} + h_{xN-1})/2} + \frac{(u_{Nj+1}^n - u_{Nj}^n)/h_{yj} - (u_{Nj}^n - u_{Nj-1}^n)/h_{yj-1}}{(h_{yj-1} + h_{yj})/2} \right), \end{aligned}$$

В итоге матрица коэффициентов системы для прогонки в перпендикулярном границе  $\gamma_2$  направлении будет иметь следующую структуру

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & & & & \vdots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & a_{43} & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & & & \ddots & a_{N-3N-2} & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & a_{N-2N-2} & a_{N-2N-1} & 0 \\ \vdots & & & & 0 & a_{N-1N-2} & a_{N-1N-1} & a_{N-1N} \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & a_{NN-2} & a_{NN-1} & a_{NN} \end{pmatrix}$$

где  $a_{ij}$  - некоторые ненулевые коэффициенты.

В первой и последней строках стоят три ненулевых элемента, что не позволяет использовать для её обращения обычную трёхдиагональную прогонку. Исключая  $a_{13}$  и  $a_{NN-2}$  с помощью преобразований Гаусса, мы получим систему с трёхдиагональной матрицей и тогда уже можем применять обычную скалярную прогонку.

Для решения уравнения (7) с учетом задания давления на входах-выходах канала мы будем использовать разностную схему:

$$\begin{aligned}
 & -\rho_{ij}^{n+1} \left( \frac{(p_{i+1j} - p_{ij})/h_{xi} - (p_{ij} - p_{i-1j})/h_{xi-1}}{(h_{xi-1} + h_{xi})/2} + \frac{(p_{ij+1} - p_{ij})/h_{yj} - (p_{ij} - p_{ij-1})/h_{yj-1}}{(h_{yj-1} + h_{yj})/2} \right) + \\
 & + \left( \frac{\rho_{i+1j}^{n+1} - \rho_{i-1j}^{n+1}}{(h_{xi-1} + h_{xi})/2} \right) \left( \frac{p_{i+1j} - p_{i-1j}}{(h_{xi-1} + h_{xi})/2} \right) + \left( \frac{\rho_{ij+1}^{n+1} - \rho_{ij-1}^{n+1}}{(h_{yj-1} + h_{yj})/2} \right) \left( \frac{p_{ij+1} - p_{ij-1}}{(h_{yj-1} + h_{yj})/2} \right) = \\
 & = -\frac{(\rho_{ij}^{n+1})^2}{\tau} \left( \frac{u_{ij}^{n+1} - u_{i-1j}^{n+1}}{h_{xi-1}/2 + h_{xi}/2} + \frac{v_{ij+1}^{n+1} - v_{ij}^{n+1}}{h_{yj-1}/2 + h_{yj}/2} \right), \\
 & \quad i, j \in I, J,
 \end{aligned} \tag{9}$$

где  $I, J$  - набор индексов внутренних точек области решения.

Давление задано на входах-выходах

$$p_{AB} = p_1; p_{EF} = p_2; p_{CD} = p_3. \tag{10}$$

Полученная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (9), (10) не является замкнутой, т.к. давление не определено на твердых стенках. Из равенства (8) и условия прилипания следует, что на стенках должно выполняться условие Неймана  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ , которое аппроксимируется односторонней разделенной разностью первого порядка аппроксимации.

В итоге для определения давления мы получили систему линейных алгебраических уравнений  $Ap = F$ , где матрица  $A$  заведомо является несамосопряженной и в зависимости от величины плотности может быть и незнакоопределенной,  $p$  - искомый вектор, у которого известны только компоненты, соответствующие точкам сетки на границах протекания.

Для решения полученной разностной задачи мы будем использовать двухшаговый градиентный итерационный метод минимальных невязок неполной аппроксимации [14]:

$$\begin{aligned}
 p^{k+1/2} &= p^k - \tau_{k+1} r^k; \\
 p^{k+1} &= p^{k+1/2} + \alpha_{k+1} z^k, \\
 k &= 0, 1, \dots
 \end{aligned} \tag{11}$$

где  $r^k = Ap^k - F$  - вектор невязки,  $p^0$  - произвольный начальный вектор (в расчетах использовалось значение с предыдущего временного слоя),  $\tau_{k+1} = \frac{(r^k, Ar^k)}{(Ar^k, Ar^k)}$  - числовой итерационный параметр, получаемый из условия минимизации функционала невязки для дробного шага  $r^{k+1/2}$ ,  $z^k$  - единичный вектор,  $\alpha_{k+1}$  - диагональная матрица, элементы которой также вычисляются по явным формулам из условия последовательной минимизации нормы невязки при изменении компоненты вектора  $r^{k+1}$ . Как показано в [14], итерационная схема (11) является сходящейся в норме скалярного произведения, в частности, в случае несамосопряженной и незнакоопределенной матрицы системы.

## РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В этом пункте приведены примеры решений следующих трех задач:

**Задача 1.** Течение жидкости в разветвлённом канале с диффузией жидкости из стенок,  $\mu = const$ .

**Задача 2.** Двумерное течение жидкости с вдувом жидкости другой плотности через стенку,  $\mu = const$ . Пористая вставка, через которую осуществлялся вдув второго вещества, располагалась на интервале (1; 1,5). Аналогичная задача, только с вдувом однородной жидкости, рассматривалась в [15].

**Задача 3.** Распространение примеси в канале в случае, когда вязкость жидкости  $\mu = \mu(C)$  зависит от плотности.

Задание краевых условий приведено на рис. 2.

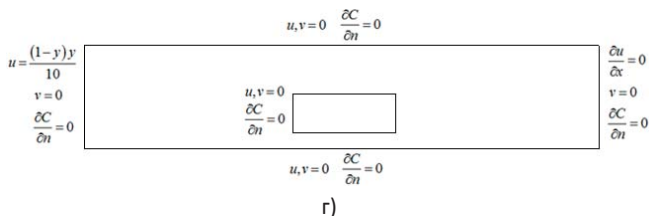
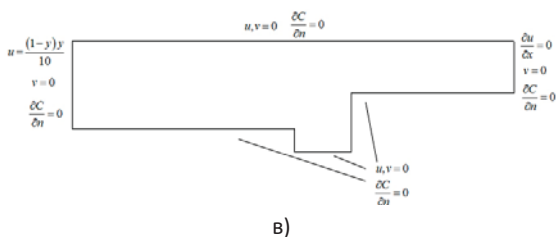
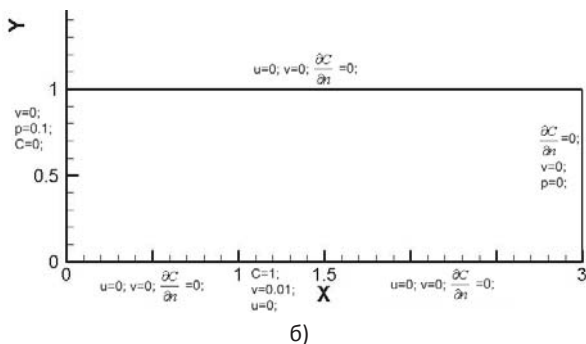
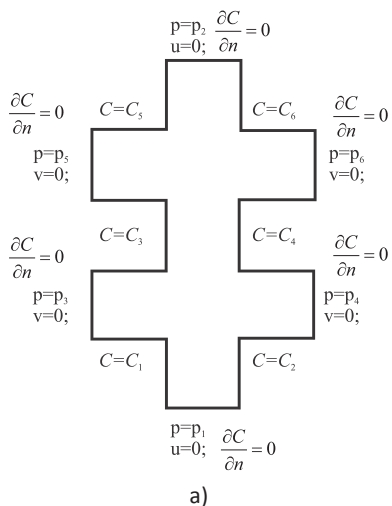


Рис. 2 . области решения и краевые условия задач 1 - 3:

- а) задача 1;
- б) задача 2;
- в, г) задача 3

На рис. 3 показано решение Задачи 1, когда на границах протекания задано стационарное давление  $p_1 = 0.1, p_2 = 0, p_3 = 0.09845, p_4 = 0.1, p_5 = 0.1, p_6 = 0.1$ , а концентрации на стенках имеют следующие значения:  $C_1 = 0.1, C_2 = 0.1, C_3 = 0, C_4 = 0, C_5 = 0, C_6 = 0$ . Как видно из рис. 3, поступающее в канал второе вещество размывается в направлении течения.

Для **Задачи 2** на рис. 4 приведены характерные этапы распространения вдуваемого в канал (скорость вдува  $v=0.01$ ) вещества при  $\rho_1=1, \rho_2=1.5$ . На рис. 5 показано влияние плотности (рис. 5а) и скорости вдуваемого вещества (рис. 5б) на коэффициент напряжения на нижней границе канала

$$c_f = 2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=0} .$$



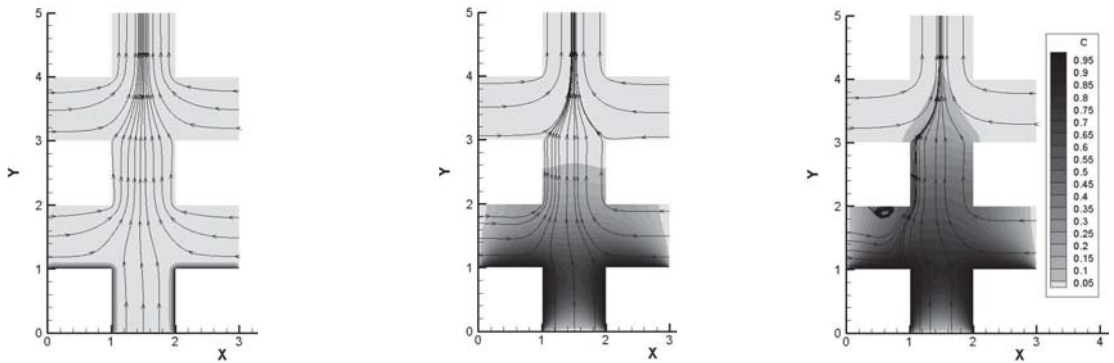


Рис. 3. Течение в разветвленном канале на моменты времени  $t=0.111$ ;  $22.222$  и установившееся течение,  $\mu=0.01$ ,  $\kappa=0.01$

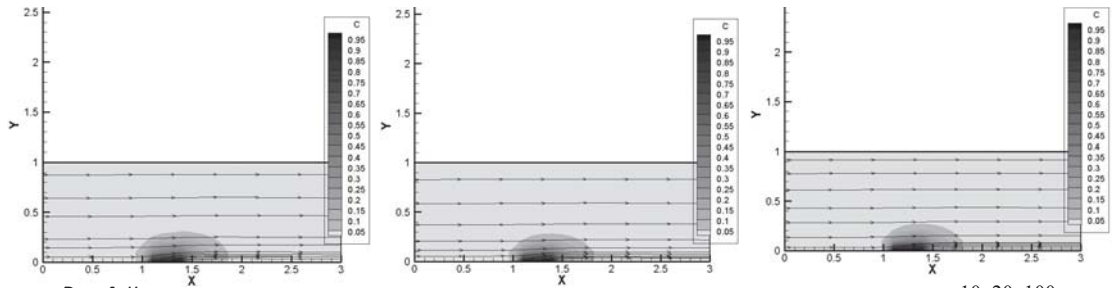


Рис. 4. Краевые условия: линии тока и концентрация вдуваемого вещества в моменты времени  $t=10$ ;  $20$ ;  $100$

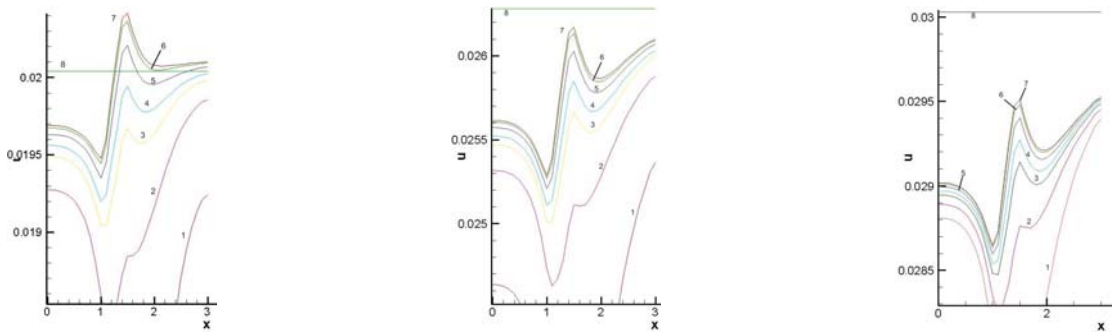


Рис. 5а. Графики коэффициента поверхностного напряжения  $C_f$  на нижней стенке канала при различной плотности вдуваемого вещества на моменты времени  $t=10$ ;  $20$ ;  $100$ . Цифрами обозначены значения коэффициента  $C_f$  для различных плотностей: 1 -  $\rho_2 = 10$ ; 2 -  $\rho_2 = 3$ ; 3 -  $\rho_2 = 1.5$ ; 4 -  $\rho_2 = 1$ ; 5 -  $\rho_2 = 0.5$ ; 6 -  $\rho_2 = 0.2$ ; 7 -  $\rho_2 = 0.1$ ; 8 - без вдува (прямая линия); скорость вдува  $v=0.01$ ;  $\rho_1 = 1$ ;

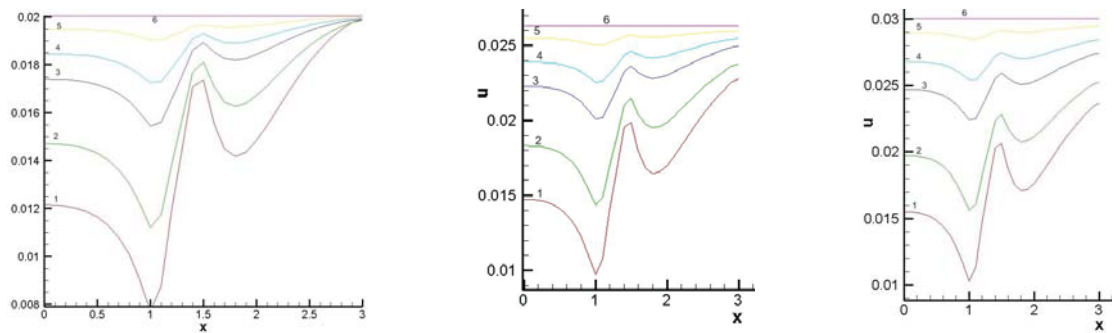


Рис. 5б. Графики коэффициента поверхностного напряжения на нижней стенке канала при различной скорости вдуваемого вещества: 1 -  $v = 0.15$ ; 2 -  $v = 0.1$ ; 3 -  $v = 0.05$ ; 4 -  $v = 0.03$ ; 5 -  $v = 0.01$ ; 6 - без вдува (прямая линия); плотности  $\rho_1 = 1$ ;  $\rho_2 = 1.5$ ; на моменты времени  $t=10$ ;  $20$ ;  $100$

Из приведённых результатов следует, что, изменяя параметры вдува, можно значительно снизить поверхностное напряжение на участке поверхности, расположенном непосредственно за пористой вставкой, и, с учетом диффузии вдуваемого вещества, на участке перед вставкой.

**Задача 3** посвящена изучению влияния переменной вязкости на движение несущей жидкости и находящейся в ней примеси с существенно большей плотностью. Здесь решалась исходная система (3), вязкость и плотность задавались следующими формулами:

$$\mu = C(\mu_2 - \mu_1) + \mu_1,$$

$$\rho = C(\rho_2 - \rho_1) + \rho_1,$$

где  $\mu_1$  - вязкость жидкости,  $\mu_2$  - вязкость примеси,  $\rho_1$  - плотность жидкости,  $\rho_2$  - плотность примеси. Во всех расчетах вектор правой части имел вид  $f = (0, -0.1)$ .

На рис. 6, 7 показаны варианты динамики распространения пятна примеси при различных плотностях и вязкости.

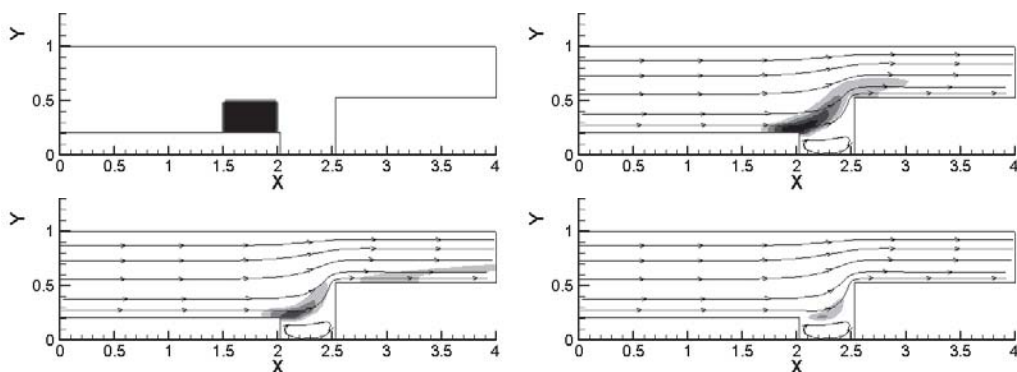


Рис. 6. Размытие пассивной примеси при условиях  $\mu_1 = 0.01$ ,  $\mu_2 = 0.01$ ,  $\rho_1 = 1.0$ ,  $\rho_2 = 1.0$  на различные моменты времени

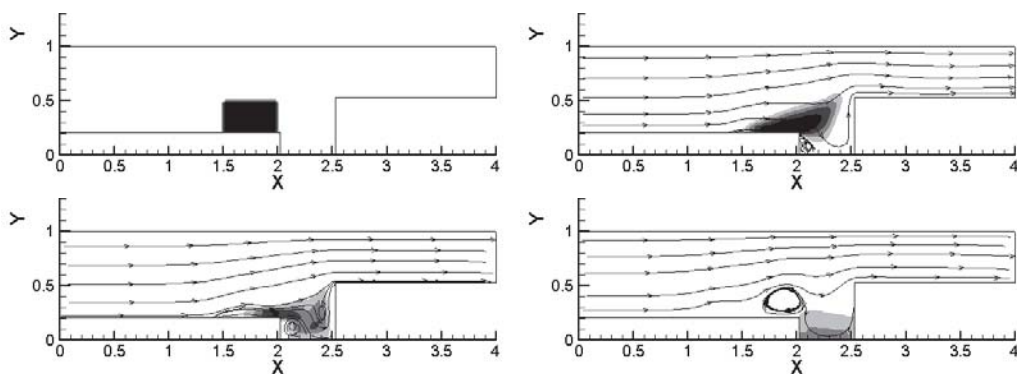


Рис. 7. Размытие примеси при условиях  $\mu_1 = 0.01$ ,  $\mu_2 = 1.0$ ,  $\rho_1 = 1.0$ ,  $\rho_2 = 100.0$  на различные моменты времени

Видно, что примесь за счет эффекта силы тяжести сползает в яму, когда имеет большую, чем у жидкости плотность и вязкость, после чего размыв происходит в большей степени благодаря диффузионной, нежели конвективной составляющей процесса распространения. Напротив, при равенстве гидродинамических параметров примесь фактически не задерживается в области.

На Рис. 8 представлена картина распространения достаточно плотной и вязкой примеси под неподвижным препятствием.

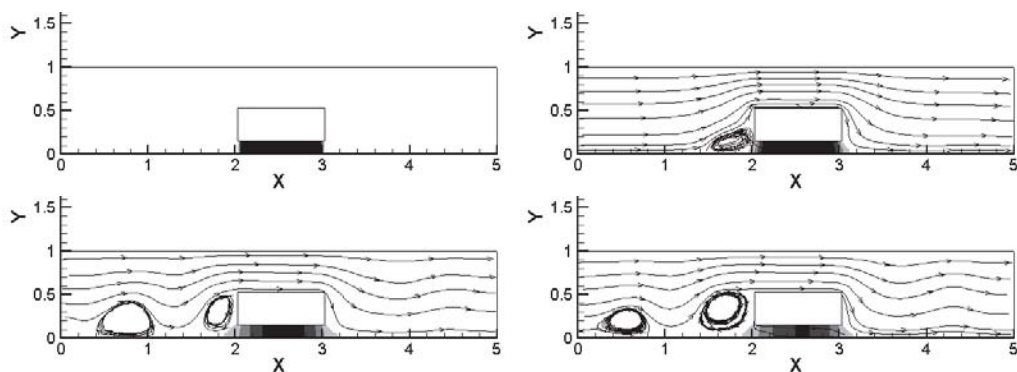


Рис. 8. Размытие примеси при условиях  $\mu_1 = 0.01$ ,  $\mu_2 = 1.0$ ,  $\rho_1 = 1.0$ ,  $\rho_2 = 100.0$  на различные моменты времени  $t=1; 3500; 50000; 100000$ .

Видно, что основная часть потока огибает препятствие сверху. При этом характерное значение горизонтальной составляющей скорости верхней части потока на несколько порядков больше аналогичного значения скорости в примеси под препятствием.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Einstein, Ann. Phys (Leipzig).19. 289-306, 1906.
- [2] Лойцянский Л.Г., Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. - Москва: Наука, 1987. - 840с.
- [3] Бэтчелор Дж., Введение в динамику жидкости / Дж. Бэтчелор. - Москва: Мир, 1973. - с.313-321
- [4] Joseph A. Schetz, Allen E. Fuhs (Eds.) - Handbook of Fluid Dynamics and Fluid Machinery. Vol 1\_ Fundamentals of Fluid Dynamics - John Wiley & Sons, Inc. (1996)
- [5] Donald A. Drew, Stephen L. Passman, Theory of Multicomponent Fluids, Applied Mathematical Sciences, 135, 1998
- [6] Захаров Ю.Н. Математическое моделирование нестационарных мембранных процессов / Ю.Н. Захаров, Р.Б. Лобасенко, В.В. Рагулин // Хранение и переработка сельхозсырья. - 2004. - № 10. - С. 16-18.
- [7] Яненко Н.Н., Окунцов В.В., Захаров Ю.Н., Шокин Ю.И., Паничкин А.В. О двух итерационных схемах для решения стационарной системы уравнений Навье-Стокса. В кн. «Комплексный анализ и его приложения» - Москва: Наука, 1978. - с.638-652
- [8] Janenko N.N, Shokin Ju.I, Zaharov Ju.N. On the nonlinear acceleration of iterative schemes. // Quatrieme Colloque International sur les Methodes de Calcul Scientifique et Technique. France, (Versaille, 1979), - Paris, 1979, 20p.
- [9] Рагулин, В.В. К задаче о протекании вязкой жидкости сквозь ограниченную область при заданном перепаде давления или напора / В.В. Рагулин // Динамика сплошной среды: сб. научн. тр. - Новосибирск, 1976. - Вып. 27. - с.78-92.
- [10] Рагулин В.В. О краевой задаче для уравнений нелинейно-вязкой жидкости со смешанными граничными условиями [Текст]. // Материалы к VI международной конференции. - Белово, 2006 - С. 527-531.
- [11] Патанкар, С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. Патанкар. - Москва: Энергоатомиздат, 1984. - 124с.
- [12] Роуч, П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. - Москва: Мир, 1980. - 612с.
- [13] Яненко, Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Н.Н. Яненко. - Новосибирск: Наука, 1967. - 197с.
- [14] Белоцерковский, О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред / О.М. Белоцерковский. - Москва: Наука, 1984. - 520с.
- [15] Захаров Ю.Н. Градиентные итерационные методы решения задач гидродинамики / Новосибирск: Наука, 2005. - 239с.
- [16] Базовкин А. В., Ковеня В. М., Лебедев А. С. Численное моделирование течения газа около пластины с микровдупом. // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17, № 2. С. 20-31.

## SIMULATION OF DISPERSIVE WAVES GENERATED BY UNDERWATER LANDSLIDE IN A LIMITED RESERVOIR

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИСПЕРСИОННЫХ ВОЛН, ГЕНЕРИРУЕМЫХ ПОДВОДНЫМ ОПОЛЗНЕМ В ОГРАНИЧЕННОМ ВОДОХРАНИЛИЩЕ

---

*The influence of the dispersion on the surface wave pattern generated by an underwater landslide in a limited reservoir is investigated. The description of surface waves is done by the full nonlinear dispersive shallow water model as well as by the new approximation models of the Boussinesq type for waves generated by landslides of small heights or slow moving landslides. The approach, which is consistent for all models, is applied to the construction of numerical algorithms. It is based on the approximation of the extended system of equations consisting of the system of hyperbolic equations and the equations of elliptic type for the dispersive component of the pressure. The comparison of the numerical results obtained in the framework of the dispersionless shallow water model, nonlinear dispersive models and the model of potential flows with free boundary is done. The comparison with the known laboratory data on the waves generated by the movement of solid bodies on flat underwater slope is also performed.*

---

Сход оползневых масс с крутого берегового склона водохранилища может сгенерировать опасные поверхностные волны [1, 2]. Приемлемое описание волновых режимов на начальной стадии движения первоначально покоившегося подводного оползня может дать классическая (бездисперсионная) модель мелкой воды [3, 4]. Однако подводные оползни генерируют более короткие волны [5], чем цунамигенные землетрясения, поэтому для более точного описания таких волн необходимо учитывать дисперсию волн и неоднородность процесса в вертикальном направлении, например, использовать нелинейно-дисперсионные (НЛД-)уравнения мелкой воды типа Буссинеска, при выводе которых предполагается малость амплитуды волн [5], или свободные от этого ограничения полные НЛД-уравнения [6]. Нелинейно-дисперсионные уравнения содержат производные по времени высокого порядка, а также смешанные производные, непосредственная аппроксимация которых приводит к сложной разностной задаче, не поддающейся исследованию. Поэтому проблеме конструирования обоснованных и эффективных численных алгоритмов для решения НЛД-уравнений уделяется в настоящее время пристальное внимание специалистов по вычислительной гидродинамике [7-9].

Плодотворным может быть подход, основанный на расщеплении системы НЛД-уравнений на ряд так называемых «простых задач», для которых эффективные численные алгоритмы либо существуют, либо их можно построить в виде, позволяющем выполнить исследование и обоснование. Подобное расщепление уже используется [8, 10, 11] при решении приближенных НЛД-уравнений Буссинеска и приводит к последовательному решению на каждом временном шаге «простых задач» для определения полной глубины из уравнения неразрывности, вычисления двух вспомогательных величин из системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и задачи нахождения компонент скорости путем решения некоторых уравнений эллиптического типа. Однако такое расщепление имеет ряд недостатков. Например, хорошо изученные численные алгоритмы решения бездисперсионных уравнений мелкой воды здесь не используются, уравнения расщепленной системы не имеют вид законов сохранения (баланса) и т.д. В настоящей работе используется другое расщепление системы НЛД-уравнений, в результате которого получается система уравнений гиперболического типа, аналогичная системе уравнений

---

<sup>1</sup> Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russia

мелкой воды первого гидродинамического приближения и отличающаяся от последней лишь правой частью, и уравнение эллиптического типа для дисперсионной составляющей давления. Подход, основанный на таком расщеплении, позволил построить единый численный алгоритм, пригодный для решения задач как в рамках полной НЛД-модели, так и новых приближенных моделей типа Буссинеска [12], описывающих поверхностные волны, генерируемые оползнями малой высоты или медленно сползающими оползнями.

Настоящее исследование является продолжением работ [3, 4, 13], посвященных изучению влияния дисперсии на картину генерируемых оползнем поверхностных волн в прибрежной акватории морей. В отличие от указанных работ, теперь рассмотрены оползни в ограниченном водоеме. Исследовано влияние параметров, определяющих геометрию водоема и движение квазидеформируемого оползня [14] по неровному склону, на величины максимальных заплесков на берег и плотину водохранилища. Выполнено сравнение с численными результатами, полученными по бездисперсионной модели мелкой воды [15] и модели потенциальных течений [16], а также с имеющимися экспериментальными данными [17-19] о волнах, возникающих при движении твердых тел по плоскому подводному откосу. Некоторые из полученных результатов приведены в настоящей статье.

### НЕЛИНЕЙНО-ДИСПЕРСИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Пусть слой несжимаемой жидкости ограничен снизу подвижным дном  $z = -h(x, y, t)$ , а сверху - свободной границей  $z = \eta(x, y, t)$ , где  $t$  - время,  $x, y, z$  - координаты точки в декартовой системе координат  $Oxyz$ , ось  $Oz$  которой направлена вертикально вверх, а координатная плоскость  $Oxy$  совпадает с невозмущенной свободной поверхностью. В моделях мелкой воды искомыми величинами являются полная глубина слоя жидкости  $H = \eta + h > 0$  и вектор  $\mathbf{u} = (u, v)$ , связанный некоторым образом со скоростью течения. Если в качестве  $\mathbf{u}$  использовать осредненную по глубине горизонтальную составляющую вектора скорости трехмерного течения, то НЛД-уравнения мелкой воды принимают следующий вид [12]:

$$H_t + \nabla \cdot (H\mathbf{u}) = 0, \quad (1)$$

$$H\mathbf{u}_t + H(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = p_0 \nabla h, \quad (2)$$

где через  $p$  обозначено давление в НЛД-модели, проинтегрированное по глубине слоя жидкости,  $p_0$  означает давление на дне,

$$p = \frac{gH^2}{2} - \left( \frac{H^3}{3} R_1 + \frac{H^2}{2} R_2 \right), \quad p_0 = gH - \left( \frac{H^2}{2} R_1 + HR_2 \right), \quad R_1 = D(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \mathbf{u})^2, \quad R_2 = D^2 h,$$

$g$  - ускорение свободного падения,  $D = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$  - оператор полной производной.

Лаконичная форма записи уравнения движения (2) позволяет заметить аналогию с неоднородным уравнением движения для течения идеального газа. В газовой же динамике (а также в гидродинамике вязкой несжимаемой жидкости) для численного решения часто используется подход с выделением задачи определения давления в качестве одной из «простых задач». В НЛД-модели гидростатическая составляющая давления вычисляется через полную глубину слоя жидкости, поэтому «простая задача» формулируется только для дисперсионной составляющей  $\varphi = H^3 R_1 / 3 + H^2 R_2 / 2$ , уравнение для которой имеет вид [20]

$$\nabla \cdot \left( \frac{\nabla \varphi}{H} - \frac{(\nabla \varphi \cdot \nabla h) \nabla h}{Hr} \right) - 6\varphi \left( \frac{2}{H^3} \frac{r-3}{r} + \nabla \cdot \frac{\nabla h}{H^2 r} \right) = F, \quad (3)$$

где  $r = 4 + |\nabla h|^2$ ,

$$F = \nabla \cdot \left( g \nabla \eta + \frac{R \nabla h}{r} \right) - \frac{6R}{Hr} + 2(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 - 2(u_x v_y - u_y v_x), \quad (4)$$

$$R = -g\nabla\eta \cdot \nabla h + \mathbf{u} \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\nabla h) + h_{tt} + 2(\mathbf{u} \cdot \nabla h_t). \quad (5)$$

Уравнение (3) является равномерно эллиптическим, не содержит производных по времени от компонент вектора скорости и полной глубины, и если коэффициент при  $\varphi$  положителен (например,  $h = \text{const}$ ), то для нахождения численного решения можно построить разностные схемы с положительно определенными операторами. Для сильно неровного дна коэффициент при  $\varphi$  в некоторых точках может стать отрицательным. Анализ таких случаев выполнен в работе [21].

Введение новой зависимой переменной  $\varphi$  позволяет записать уравнение движения (2) НЛД-модели в виде

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + g\nabla H = g\nabla h + \frac{\nabla\varphi - \psi\nabla h}{H}, \quad (6)$$

где  $\psi = H^2 R_1 / 2 + HR_2$  - дисперсионная составляющая давления на дне, связанная с переменными  $\varphi$ ,  $H$ ,  $\mathbf{u}$  выражением  $\psi = (6\varphi / H + HR + \nabla\varphi \cdot \nabla h) / r$ . Таким образом, возникает вторая «простая задача», заключающаяся в решении системы уравнений гиперболического типа (1), (6), аналогичной системе бездисперсионных уравнений мелкой воды и отличающейся от последней лишь правой частью. В настоящей работе для ее численного решения используется явная схема предиктор-корректор [22, 23], хорошо зарекомендовавшая себя при исследовании волновых процессов в рамках бездисперсионной модели мелкой воды.

Декомпозиция исходной системы НЛД-уравнений (1), (2) на две «простые задачи» позволяет предложить следующий алгоритм расчета на текущем слое по времени. На шаге предиктор сначала определяется функция  $\varphi^n$  из конечно-разностного уравнения, аппроксимирующего (3) с коэффициентами, вычисленными по известным значениям  $H^n$  и  $\mathbf{u}^n$  с  $n$ -го слоя по времени. Затем решается гиперболическая система уравнений (1), (6) для нахождения величин  $H^*$  и  $\mathbf{u}^*$  на некотором промежуточном временном слое между  $t^n$  и  $t^{n+1}$ , при этом в правой части уравнения движения (6) используются известные значения  $\varphi^n$ ,  $\psi^n$ ,  $H^n$  и  $h^n$ . После этого вновь численно решается уравнение (3), в коэффициентах которого берутся величины, вычисленные на предикторе. Найденные на этом этапе значения  $\varphi^*$ ,  $\psi^*$  используются затем на шаге корректор для определения окончательных значений  $H^{n+1}$  и  $\mathbf{u}^{n+1}$  путем численного решения системы уравнений гиперболического типа, состоящей из уравнения неразрывности (1) и уравнения движения с дивергентной формой левой части:

$$(\mathbf{H}\mathbf{u})_t + \nabla \cdot (\mathbf{H}\mathbf{u}\mathbf{u}) + g\nabla \frac{H^2}{2} = gH\nabla h + \nabla\varphi - \psi\nabla h. \quad (7)$$

Для контроля вычислений использовался разностный аналог закона изменения полной энергии  $E$  в НЛД-модели [12]

$$(\mathbf{H}E)_t + \nabla \cdot \left[ \mathbf{u}H \left( E + \frac{P}{H} \right) \right] = -p_0 h_t, \quad (8)$$

где

$$E = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} + \frac{H^2}{6} (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + \frac{H}{2} (\nabla \cdot \mathbf{u}) Dh + \frac{(Dh)^2}{2} + \frac{g(H-2h)}{2}. \quad (9)$$

В случае стационарного дна ( $h_t = 0$ ) уравнение изменения энергии (8) принимает дивергентный вид и выражает собой закон сохранения полной энергии.

Далее нелинейно-дисперсионную модель, состоящую из уравнений (1), (3), (7), будем называть NLD-моделью. При выводе уравнений NLD-модели предположение о малости амплитуды волн не использовалось. По этой причине мы называем NLD-модель полной.

На рис. 1 показаны графики свободной поверхности  $z = \eta(x, y, t)$  в момент времени  $t = 140$  с, которые получаются при решении в квадратном бассейне  $0 \leq x, y \leq 10000$  м глубиной  $h_0 = 100$  м

начально-краевой задачи в рамках бездисперсионной модели мелкой воды и полной NLD-модели с использованием в разностных схемах неотражающих краевых условий на всей границе, полученных модификацией условий из [16]. В начальный момент времени жидкость покоилась, а источником волнового движения была возмущенная свободная поверхность, заданная при  $t = 0$  формулой

$$\eta(x, y, 0) = a_0 \exp\left[-\alpha(x - x_0)^2 - \alpha(y - y_0)^2\right],$$

где  $a_0 = 10$  м,  $x_0 = y_0 = 5000$  м,  $\alpha = 10^{-5}$  м<sup>-2</sup>. Из рис. 1 видно, что при использовании классических (бездисперсионных) уравнений мелкой воды (1), (2) ( $p = gH^2 / 2$ ,  $p_0 = gH$ ) получается упрощенная волновая картина, состоящая из положительной головной волны, удаляющейся от центра источника возмущения, и следующей за ней отрицательной волны. NLD-модель дает цуг диспергирующих волн, что ближе к реальности и наблюдается также в лабораторных экспериментах и при численном моделировании по более точным математическим моделям.

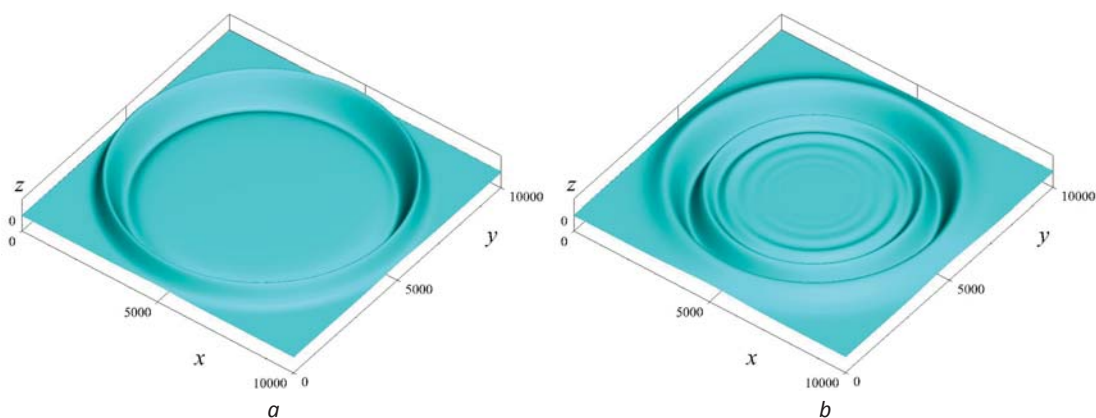


Рис. 1. Свободная поверхность, полученная в расчете по классической модели мелкой воды (а) и NLD-модели (б)

Различие волновых картин хорошо прослеживается и на мареограммах (см. Рис. 2), записанных двумя виртуальными датчиками, установленными в точках  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  с координатами  $x_1 = 2500$  м,  $y_1 = y_2 = 5000$  м,  $x_2 = 1250$  м. Кроме того, видно, что высота головной волны в бездисперсионной модели получается бóльшей, чем при использовании NLD-модели, и распространяется она с бóльшей скоростью.

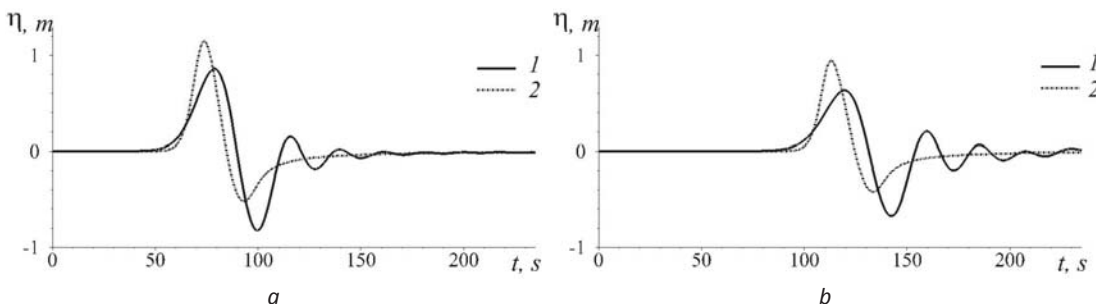


Рис. 2. Мареограммы первого (а) и второго (б) датчиков, полученные в расчетах по NLD-модели (1) и классической модели мелкой воды (2)

Интересно отметить, что выявленные на этом простейшем примере различия имеют место и для решений задач о распространении волн над подвижным дном. Приведем сравнительный анализ расчетных и экспериментальных данных из [19] для случая плоского откоса, по которому движет-

ся модельный оползень пространственной формы. Эксперименты [19] проводились в бассейне глубиной 1.5 м, длиной 30 м и шириной 3.7 м, ограниченном с трех сторон вертикальными непроницаемыми стенками. Моделью подводного оползня было удобообтекаемое твердое тело в форме тонкого сглаженного эллипсоидального сегмента толщиной  $T = 8.2$  см с размерами 39.5 см и 68 см вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ , соответственно, массой 16 кг и объемом  $V = 6.57 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>. Оползень начинал свое движение с некоторой глубины вниз по плоскому склону, установленному под углом  $\theta = 15^\circ$ . В эксперименте, с которым здесь проводится сравнение, вершина оползня в начальный момент времени имела координаты  $x_c^0 = 1.01$  м,  $y_c^0 = 1.85$  м,  $z_c^0 = 6.1$  см. Высоты волн фиксировались четырьмя датчиками, первый из которых был расположен над вершиной оползня ( $x_1 = 1.01$  м,  $y_1 = 1.85$  м), а второй - ниже по склону и с некоторым смещением относительно оси бассейна ( $x_2 = 1.469$  м,  $y_2 = 2.2$  м).

Известно, что модели мелкой воды весьма чувствительны к гладкости функции, задающей подвижное дно, поэтому численные эксперименты проводились для оползня со сглаженной начальной поверхностью (см. рис. 3, а)

$$h_{sl}^0(x, y) = \begin{cases} \frac{T}{4} \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi(x-x_c^0)}{b_x}\right) \right] \cdot \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi(y-y_c^0)}{b_y}\right) \right], & \text{если } \begin{cases} |x-x_c^0| \leq b_x/2 \text{ и} \\ |y-y_c^0| \leq b_y/2 \end{cases} \\ 0, & \text{если } \begin{cases} |x-x_c^0| > b_x/2 \text{ или} \\ |y-y_c^0| > b_y/2 \end{cases} \end{cases},$$

имеющего ту же толщину  $T$  и начальное заглубление  $z_c^0$ , что и оползень в лабораторном эксперименте [19]. При численном моделировании движения оползня согласно уравнению, приведенному в [14], использовались значения параметров

$$b_x = 0.431 \text{ м}, b_y = 0.743 \text{ м}, \gamma = 2.435, C_w = 0.607, \theta_* = 1.7^\circ, C_d = 0.473,$$

согласующиеся с условиями лабораторных экспериментов [19] и обеспечивающие равенство объемов численного и лабораторного оползней, а также совпадение их траекторий движения. Здесь  $b_x, b_y$  - длины численной модели оползня вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ , соответственно,  $\gamma$  - отношению плотности материала оползня к плотности воды,  $C_w$  - коэффициент присоединенной массы,  $\theta_*$  - угол трения,  $C_d$  - коэффициент гидродинамического сопротивления.

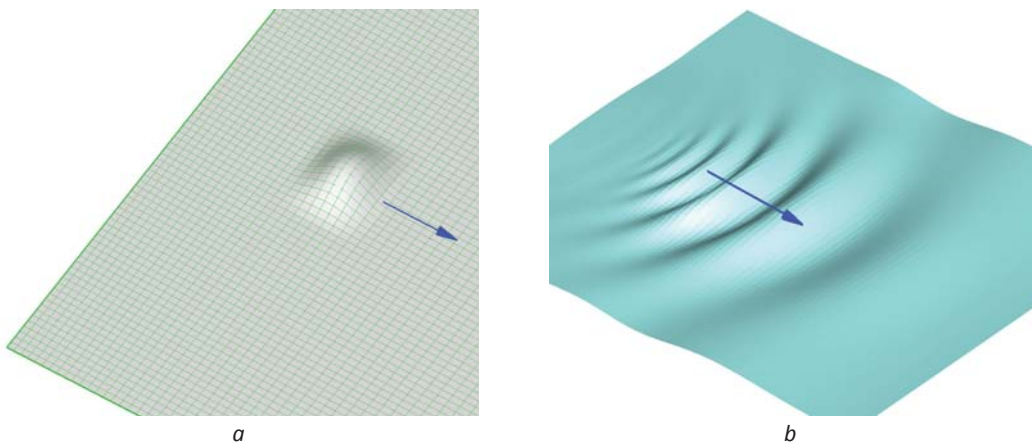


Рис. 3. Оползень пространственной формы, скользящий по плоскому откосу (а), и генерируемые им поверхностные волны (б) в расчете по трехмерной модели потенциальных течений жидкости



На рис. 3, *b* изображена поверхность воды в некоторый момент времени, полученная в расчете по трехмерной модели потенциальных течений со свободной границей [16]. Видно, что оползень генерирует систему диспергирующих волн. Такая же картина получается при применении NLD-модели. Напротив, расчеты по бездисперсионной модели мелкой воды показывают, что в этом случае образуются ярко выраженные одиночные волны, движущиеся с большей скоростью, чем сгенерированные оползнем дисперсионные волны в NLD-модели.

Из рис. 4 видно, что волна повышения и следующая за ней волна понижения хорошо описываются в рамках NLD-модели. По сравнению с бездисперсионной моделью мелкой воды результаты расчетов по NLD-модели лучше соответствуют экспериментальным данным по значениям локальных экстремумов генерируемых волн, однако со временем волны в расчетах становятся более длинными, чем в эксперименте.

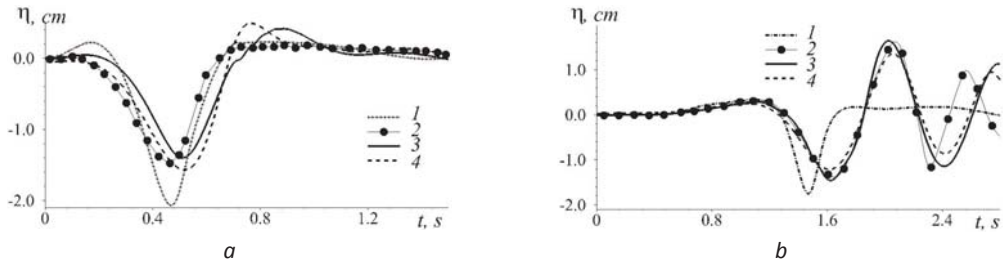


Рис. 4. Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными из [19]. Мареограммы первого (*a*) и второго (*b*) датчиков, полученные в лабораторных экспериментах (2) и в расчетах по модели мелкой воды (1), NLD-модели (3), модели потенциальных течений (4)

### СЛАБО ДИСПЕРСИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Приведем теперь приближенные НЛД-уравнения [12] для волн малой амплитуды. В слабо дисперсионной модели типа Буссинеска (NLDB-модели) мы имеем [20] систему уравнений (1), (7) гиперболического типа и равномерно эллиптическое уравнение для дисперсионной составляющей  $\varphi$  проинтегрированного по толщине слоя давления  $p$  с более низкой, чем в (3), степенью нелинейности функции  $H$  в коэффициентах и правой части:

$$\nabla \cdot \left( \frac{\nabla \varphi}{H} - \frac{(\nabla \varphi \cdot \nabla h) \nabla h}{Hr} \right) - 6\varphi \left( \frac{2}{Hh^2} \frac{r-3}{r} + \nabla \cdot \frac{\nabla h}{Hhr} \right) = F, \quad (10)$$

при этом

$$F = \nabla \cdot \left( g \nabla \eta + \frac{R \nabla h}{r} \right) - \frac{6R}{hr} + (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \frac{Dh}{h} - 2(u_x v_y - u_y v_x), \quad \psi = \frac{1}{r} \left( \frac{6\varphi}{h} + HR + \nabla \varphi \cdot \nabla h \right),$$

$$p = \frac{gH^2}{2} - H \left( \frac{h}{3} D(h \nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{h}{2} D^2 h \right), \quad p_0 = gH - H \left( \frac{1}{2} D(h \nabla \cdot \mathbf{u}) + D^2 h \right).$$

Уравнение энергии NLDB-модели совпадает с уравнением энергии (8) NLD-модели, однако выражение для полной энергии отличается от (9):

$$E = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} + \frac{h^2}{6} (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + \frac{h}{2} (\nabla \cdot \mathbf{u}) Dh + \frac{(Dh)^2}{2} + \frac{g(H-2h)}{2}.$$

Уравнения слабо дисперсионных течений над слабо деформируемым дном получаются [12] из уравнений NLDB-модели при дополнительном предположении о слабой изменчивости дна во времени:  $h(x, y, t) = h_0(x, y) + \varepsilon h_1(x, y, t)$ , где  $\varepsilon$  - малое число. В этой модели (NLDD-модели) уравнение неразрывности (1) остается прежним, уравнение движения принимает вид

$$(Hu)_t + \nabla \cdot (Huu) + g \nabla \frac{H^2}{2} = gH \nabla h + \nabla \varphi - \psi \nabla h_0, \quad (11)$$

а уравнение для функции  $\varphi$  модифицируется к следующему:

$$\nabla \cdot \left( \frac{\nabla \varphi}{H} - \frac{(\nabla \varphi \cdot \nabla h_0) \nabla h_0}{Hr} \right) - 6\varphi \left( \frac{2}{Hh_0^2} \frac{r-3}{r} + \nabla \cdot \frac{\nabla h_0}{Hh_0 r} \right) = F, \quad (12)$$

где

$$F = \nabla \cdot \left( g \nabla \eta + \frac{R \nabla h_0}{r} \right) - \frac{6R}{h_0 r} + (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \frac{Dh_0}{h_0} - 2(u_x v_y - u_y v_x), \quad r = 4 + |\nabla h_0|^2,$$

$$R = -g \nabla \eta \cdot \nabla h_0 + \mathbf{u} \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla h_0), \quad \psi = \frac{1}{r} \left( \frac{6\varphi}{h_0} + HR + \nabla \varphi \cdot \nabla h_0 \right).$$

Уравнение баланса полной энергии NLDD-модели записывается в следующем виде [12]:

$$(HE)_t + \nabla \cdot \left[ \mathbf{u} H \left( E + \frac{p}{H} \right) \right] = -gHh_t,$$

при этом выражения для полной энергии и давления в NLDD-модели определяются формулами

$$E = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} + \frac{h_0^2}{6} (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + \frac{h_0}{2} (\nabla \cdot \mathbf{u}) Dh_0 + \frac{(Dh_0)^2}{2} + \frac{g(H-2h)}{2},$$

$$p = \frac{gH^2}{2} - H \left( \frac{h_0}{3} D(h_0 \nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{h_0}{2} D^2 h_0 \right).$$

Отметим, что в случае неподвижного дна, в частности, неподвижного горизонтального дна, NLDB и NLDD-модели совпадают. В отличие от NLD-модели они не имеют решения в виде уединенной волны.

Поскольку структура уравнений полученных нами приближенных моделей Буссинеска получилась идентичной структуре уравнений полной NLD-модели, то описанный выше алгоритм численного решения полных NLD-уравнений можно использовать и для решения задач в рамках NLDB и NLDD-моделей, при этом для уравнений приближенных моделей на каждом шаге по времени дополнительно решается задача для эллиптического уравнения, но не относительно компонент скорости, как это делается в известных подходах, а относительно негидростатической составляющей давления. Более того, алгоритм решения задачи для бездисперсионных уравнений мелкой воды также укладывается в предлагаемую схему, из которой исключаются этапы расчета дисперсионной составляющей давления  $\varphi$ . Таким образом, численные алгоритмы расчета на основе всей рассматриваемой иерархии моделей мелкой воды могут быть реализованы в едином программном комплексе, ядром которого является вычислительный модуль схемы предиктор-корректор.

Приведем некоторые результаты сравнения данных, полученных в рамках полной и приближенных нелинейно-дисперсионных моделей при численном решении задачи о накате волн, возникших при движении подводного оползня, на берег водохранилища, форма дна которого не зависела от горизонтальной координаты  $y$  и задавалась дугой параболы

$$z = h_{\text{от}}(x) = (h_w - h_\xi) \left( \frac{x}{\xi} - 1 \right)^2 + h_\xi, \quad 0 \leq x \leq L,$$

где  $h_w$  - глубина в точке  $x = 0$ ,  $h_\xi$  - максимальная глубина водоема. Использовались следующие значения параметров, определяющих форму дна:  $h_\xi = -100$  м,  $h_w = -10$  м,  $\xi = 500$  м,  $L = 1000$  м. С боков (в точках  $x = 0$  и  $x = L$ ) водоем был ограничен вертикальными непроницаемыми стенками с глубиной около них, равной  $h_w$ .

Форма оползня также не зависела от  $y$  и задавалась при  $t = 0$  формулой

$$h_{sl}^0(x) = \begin{cases} \frac{T}{2} \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi(x-x_c^0)}{b_x}\right) \right], & \text{если } |x-x_c^0| \leq b_x/2 \\ 0, & \text{если } |x-x_c^0| > b_x/2 \end{cases}$$

Параметры, определяющие движение оползня, принимали следующие значения:

$$T = 10 \text{ м}, b_x = 200 \text{ м}, \gamma = 2, C_w = 1, \theta_* = 5^\circ, C_d = 1, x_c^0 = 109.13 \text{ м}, z_c^0 = -45 \text{ м}. \quad (13)$$

Для выяснения влияния дисперсии на картину генерируемых волн были выполнены расчеты на основе модели плоскопараллельных потенциальных течений со свободной границей [16], NLD-модели и бездисперсионной модели мелкой воды [23]. В отсутствие экспериментальных данных в качестве «эталонных» использованы результаты, полученные по модели потенциальных течений, в которой учитываются вертикальные перемещения воды и нет ограничений на длину волны.

Из рис. 5, а видно, что для значений параметров (13) модель потенциальных течений и NLD-модель дают очень близкие результаты. При уменьшении длины оползня падают скорость его движения, дальность распространения, генерируются более короткие поверхностные волны и различие результатов становится значительным. Таким образом, длина оползня существенно влияет на адекватность численных результатов на основе NLD-модели. В отличие от NLD-модели по бездисперсионной модели мелкой воды получается большая скорость распространения волн, которые по истечению некоторого времени формируют одиночную волну, многократно меняющую направление своего распространения при отражениях от противоположных берегов водоема. Таким образом, сравнение с результатами расчетов по «эталонной» модели показывает, что учет дисперсии волн приводит к более точному воспроизведению волновой картины, возникающей при движении оползня. Отметим также, что несмотря на отличие волновых картин, воспроизводимых различными математическими моделями, максимальные значения заплесков на берег оказались для них сопоставимыми в довольно широких диапазонах изменения определяющих параметров.

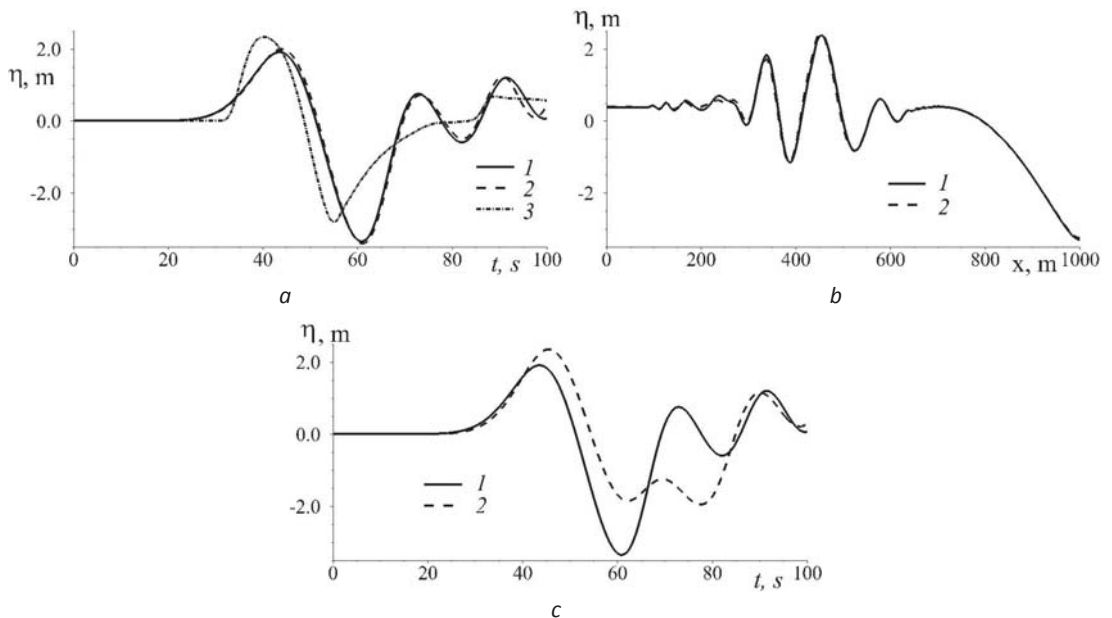


Рис. 5. Мареограммы (а, с) в точке  $x = L$  и профили свободной границы (b) в момент времени  $t = 60$  с, полученные в рамках (а) NLD-модели (1), модели потенциальных течений жидкости (2) и бездисперсионной модели мелкой воды (3); (b) NLD-модели (1) и NLDB-модели (2); (с) NLD-модели (1) и NLDD-модели (2)

На рис. 5, б дано сравнение профилей свободной границы, полученных на основе NLD- и NLDB-моделей. Видно, что для значений параметров (13) NLDB-модель дает в рассматриваемой задаче практически неотличимые от полной NLD-модели результаты. При увеличении высоты оползня амплитуда генерируемых волн растет и различие в рассчитанных по этим моделям профилях свободной границы увеличивается. Таким образом, для поверхностных волн умеренной амплитуды использование слабо дисперсионной NLDB-модели может быть вполне оправданным, поскольку разработанный для этой модели численный алгоритм имеет большую устойчивость в силу понижения степени нелинейности в некоторых членах уравнения (10) по сравнению с уравнением (3) для NLD-модели.

Результаты на основе NLDD-модели для параметров (13) значительно отличаются от полученных по NLD-модели (см. рис. 5, с). Хорошее соответствие наблюдается только при условии слабой деформации дна, например, при малой высоте оползня и большом угле трения, поскольку тогда оползень движется медленнее, проходит небольшое расстояние по склону и генерирует волны небольшой амплитуды. Аналогичные выводы относительно областей применимости трех рассмотренных нелинейно-дисперсионных моделей получены при решении задачи исследования величин заплесков на плотину ГЭС. Кроме того, проведенные вычислительные эксперименты подтвердили выводы работы [13] о том, что криволинейность склона оказывает существенное влияние на движение оползня и, как следствие, на величины заплесков волн на берег.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Представлен метод расщепления для численного решения задач в рамках нелинейно-дисперсионных моделей гидродинамики поверхностных волн над подвижным дном, заключающийся в последовательном решении на каждом временном слое системы гиперболического типа для уравнений мелкой воды первого гидродинамического приближения и уравнения эллиптического типа для негидростатической составляющей давления. На основе сравнения с экспериментальными данными, а также сопоставления численных результатов, полученных в рамках бездисперсионной модели мелкой воды, полной и приближенных НЛД-моделей и модели потенциальных течений со свободной границей, показано, что дисперсионные эффекты существенно влияют на форму и скорость распространения поверхностных волн, возникающих при сходе подводного оползня в ограниченном водоеме.

В настоящей работе расчет наката волн на наклонный берег выполнялся в упрощенной постановке, предполагающей вычисление величин заплесков на вертикальную стенку, установленную вдоль береговой линии водоема на некоторой глубине. Такой подход к определению зон затопления реального берегового откоса, особенно пологого, может привести к значительным погрешностям [25]. Поэтому в дальнейшем предполагается разработать для НЛД-моделей метод адаптивных сеток с явным выделением подвижной линии уреза и использованием на ней разностных краевых условий, основанных на точных аналитических решениях НЛД-уравнений в окрестности этой линии. Такой подход был успешно реализован ранее [26] для бездисперсионных уравнений мелкой воды.

## **БЛАГОДАРНОСТИ**

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 12-01-00721-а) и программы Интеграционных исследований СО РАН (проект № 42).

## **ЛИТЕРАТУРА**

- [1] Ostapenko V.V., Numerical modeling of wave flows in Sares lake caused by hazardous sliding of lakeside landslide. Proc. Intern. Conf. AMCA-95. Novosibirsk: NCC Publisher. 1995. P.212-217.
- [2] Ward S.N., Day S., The 1963 landslide and flood at Vaiont reservoir Italy. A tsunami ball simulation. Ital. J. Geosci. Vol.130, No.1. 2011. P.16-26.

- [3] Chubarov L.B., Eletskiy S.V., Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S., Simulation of surface waves generation by an underwater landslide. *Russian J. Numer. Analysis Math. Modelling*. Vol.20, No.5. 2005. P.425-437.
- [4] Shokin Yu.I., Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S., Chubarov L.B., Beisel S.A., Modelling surfaces waves of generated by a moving landslide with allowance for vertical flow structure. *Russian J. Numer. Analysis Math. Modelling*. Vol.22, No.1. 2007. P. 63-85.
- [5] Lynett P.J., Liu P.L.-F., A numerical study of submarine-landslide-generated waves and run-up. *Proc. Royal Society of London. A*. Vol.458. 2002. P. 2885-2910.
- [6] Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S., Shallow water equations on a movable bottom. *Russian J. Numer. Analysis Math. Modelling*. Vol.24, No.1. 2009. P.31-42.
- [7] *Environmental Hazards. The Fluid Dynamics and Geophysics of Extreme Events*. Eds. H.K. Moffatt and E. Shuckburgh. Singapore: World Scientific. 2010.
- [8] Dutykh D., Katsaounis T., Mitsotakis D., Finite volume schemes for dispersive wave propagation and runup. *J. Comput. Phys*. Vol.230. 2011. P.3035-3061.
- [9] Dutykh D., Mitsotakis D., Beysel S., Shokina N., Dispersive waves generated by an underwater landslide. *Numerical Methods for Hyperbolic Equations: Theory and Applications. An international conference to honour Professor E.F. Toro*. Eds. E. Vazques-Cendon, A. Hidalgo, P. Garcia-Navarro. CRC Press. 2013. P. 245-250.
- [10] Fedotova Z.I., Pashkova V.Yu., Methods of construction and the analysis of difference schemes for nonlinear dispersive models of wave hydrodynamics. *Russian J. Numer. Analysis Math. Modelling*. Vol.12, No.2. 1997. P.127-149.
- [11] Chubarov L.B., Fedotova Z.I., Shkurovatskii D.A., Investigation of computational models of long surface waves in the problem of interaction of a solitary wave with a conic island. *Russian J. Numer. Analysis Math. Modelling*. Vol.13, No.4. 1998. P. 289-306.
- [12] Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S., Dutykh D., On the energy equation of approximate models in the long-wave hydrodynamics. *Russian J. Numer. Analysis Math. Modelling*. Vol.29, No.3. 2014 (in print).
- [13] Beisel S.A., Chubarov L.B., Khakimzyanov G.S., Simulation of surface waves generated by an underwater landslide moving over an uneven slope. *Russian J. Numer. Analysis Math. Modelling*. Vol.26, No.1. 2011. P.17-38.
- [14] Beisel S.A., Chubarov L.B., Dutykh D., Khakimzyanov G.S., Shokina N.Yu., Simulation of surface waves generated by an underwater landslide in a bounded reservoir. *Russian J. Numer. Analysis Math. Modelling*. Vol.27, No.6. 2012. P.539-558.
- [15] Khakimzyanov G.S., Shokina N.Yu., Evaluation of the height of waves generated by an underwater landslide in a confined water reservoir. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. Vol.53, No.5. 2012. P.690-699.
- [16] Хакимыанов Г.С., Шокин Ю.И., Барахин В.Б., Шокина Н.Ю., Численное моделирование течений жидкости с поверхностными волнами. Новосибирск: Изд-во СО РАН. 2001.
- [17] Елецкий С.В., Майоров Ю.Б., Максимов В.В., Нуднер И.С., Федотова З.И., Хажоян М.Г., Хакимыанов Г.С., Чубаров Л.Б., Моделирование генерации поверхностных волн перемещением фрагмента дна по береговому склону. *Вычисл. технологии*. Т.9, Специальный выпуск, Ч.2. 2004. С.194-206.
- [18] Grilli S.T., Watts P., Tsunami generation by submarine mass failure. I: Modeling, experimental validation, and sensitivity analyses. *J. Waterway, Port, Coastal, Ocean Eng*. Vol.131, No.6. 2005. P.283-297.
- [19] Ene F., Grilli S.T. Experimental study of tsunami generation by three-dimensional rigid underwater landslides. *J. Waterway, Port, Coastal, Ocean Eng*. Vol.133, No.6. 2007. P.442-454.
- [20] Гусев О.И., Шокина Н.Ю., Кутергин В.А., Хакимыанов Г.С., Моделирование поверхностных волн, генерируемых подводным оползнем в водохранилище. *Вычисл. технологии*. Т.18, №5. 2013. С.74-90.
- [21] Гусев О.И., Об алгоритме расчета поверхностных волн в рамках нелинейно-дисперсионной модели на подвижном дне. *Вычисл. технологии*. Т.17, No.5. 2012. С.46-64.
- [22] Shokina N.Yu., To the problem of construction of difference schemes on movable grids. *Russian J. Numer. Analysis Math. Modelling*. Vol.27, No.6. 2012. P.603-626.
- [23] Хакимыанов Г.С., Шокина Н.Ю., Метод адаптивных сеток для одномерных уравнений мелкой воды. *Вычисл. технологии*. Т.18, No.3. 2013. С.54-79.
- [24] Peregrine D.H., Long waves on a beach. *J. Fluid Mech*. Vol.27, Pt.4. 1967. P.815-827.
- [25] Бейзель С.А., Шокина Н.Ю., Хакимыанов Г.С., Чубаров Л.Б., Ковыркина О.А., Остапенко В.В., О некоторых численных алгоритмах расчета наката волн цунами в рамках модели мелкой воды. I. *Вычисл. технологии*. Т.19, No.1. 2014. С.40-62.
- [26] Bautin S.P., Deryabin S.L., Sommer A.F., Khakimzyanov G.S., Shokina N.Yu., Use of analytic solutions in the statement of difference boundary conditions on a movable shoreline. *Russian J. Numer. Analysis Math. Modelling*. Vol.26, No.4. 2011. P.353-377.

## ON A DISCRETE OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH A SMALL STEP

### ОБ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С МАЛЫМ ШАГОМ

---

Many tasks of economical and technical objects management come to solving discrete problems of optimum control [1-5], moreover the discrete pitch is found to be low or the quantity of pitches is great. In most cases constructing of exact analytical decision of such problems is still impossible.

The way of construction is offered in this work relatively solution of a discrete problem of optimum control with low pitch.

---

Пусть движения объекта характеризуется разностным уравнением

$$x(t + \mu) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0 \quad (2)$$

где  $x$  -  $n$ -мерный вектор состояния,  $u$  -  $r$ -мерный вектор управления,

$t \in T_\mu = \{t: t = k\mu, k = 0, 1, \dots, N-1\} \subset T = \{t: t \in [0; 1]\}$ ,  $N = 1/\mu$ ,  $\mu > 0$  – малый шаг,  $A$  и  $B$  - постоянные матрицы размерности  $n \times n$ ,  $n \times r$  соответственно.

Качество процесса оценивается квадратичным функционалом

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} u'(k\mu)u(k\mu). \quad (3)$$

Предположим, что

1. Матрица  $A$  является матрицей простой структуры [1, 5] и она не имеет нулевого собственного значения  $\lambda_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ).
2. Все собственные значения  $\lambda_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) матрицы  $A$  удовлетворяют условию  $|\lambda_i| < q_0 < 1$ .

Пусть далее  $x^N$  – произвольно выбранный вектор фазового пространства  $R^n$ . Функционал (3) оценивает затрачиваемую энергию в процессе управления [6]. Тогда задача об управлении с минимальной энергией для рассматриваемого процесса состоит в следующем:

требуется найти такое управление  $u = u(t)$ , чтобы соответствующее ему решения задачи (1) - (2) удовлетворяло условию

$$x(1) = x(N\mu) = x_N \quad (4)$$

и при этом функционал (3) достигал своего наименьшего значения.

Решение задачи (1), (2) можно представить в виде [1]

$$x(k\mu) = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu(i\mu), \quad k = t / \mu. \quad (5)$$

При выполнении условия 2 для матрицы  $A$  имеет место ограничение по норме

$$\|A^l\| \leq C_0 q_0^l \quad (C_0 \geq 1, \quad l = 0, 1, 2, \dots). \quad (6)$$

По первому условию матрица  $A$  не имеет нулевого собственного значения и она не вырождена. Тогда собственные значения матрицы  $(A')^{-1}$  равны  $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ , а соответствующие собственные векторы совпадают [1].

При  $k = N$  с учетом (4) из (5) будем иметь

$$\alpha_N = \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i-1} B u(i\mu), \quad \alpha_N = x_N - A^N x_0. \quad (7)$$

Равенство (7) выражает необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять функция  $u(t) = u(k\mu)$  ( $k = 0, 1, \dots, N-1$ ), чтобы система (1) перешла из заданного начального состояния в заданное конечное состояние. Кроме того, она должна доставлять минимум функционалу (3).

Такое решение может быть представлено в виде

$$u(i\mu) = B'(A')^{N-i-1} c. \quad (8)$$

Тогда вектор  $c$  является решением уравнения

$$W \cdot c = \alpha_N, \quad (9)$$

где  $W = \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i-1} B B'(A')^{N-i-1}$ .

Пусть  $n - v$  – ранг матрицы  $W$  в уравнении (9), причем  $v \geq 0$ , а  $r^{(1)}, r^{(2)}, \dots, r^{(v)}$  – линейно независимая система векторов из  $R^n$  отвечающая собственному значению  $\lambda = 0$  этой матрицы. Если  $v = 0$ , то числу  $\lambda = 0$  ставится в соответствие нулевой вектор  $r^{(0)} = \{0, 0, \dots, 0\} \in R^n$ .

Тогда для разрешимости матричного уравнения (9) справедливы [7] следующие теоремы:

*Теорема 1. Для того, чтобы дискретная задача об оптимальном управлении (1) - (3), (4) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы вектор  $\alpha_N$ , определяемый формулой из (7), удовлетворял условиям*

$$(r^{(i)}, \alpha_N) = \sum_{j=1}^n r_j^{(i)} \alpha_N = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, v)$$

*Если  $v = 0$ , задача разрешима при любых  $\alpha_N$ . В этом случае вектор  $c = c_0$  находится однозначно из уравнения (9).*

Следует заметить, что матрица  $W$  симметрична и  $\lambda = 0$  не является ее собственным значением тогда и только тогда, когда она положительно определена.

*Теорема 2. Для того, чтобы дискретная задача об оптимальном управлении (1) - (3), (4) имела решение, при любых векторах  $x_0, x_N$  необходимо и достаточно, чтобы матрица  $W$  (9) была положительно определенной или векторы  $H_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) (компонентами которых являются строки матрицы  $A^{k-i-1} B$ ) были линейно независимы.*

Из уравнения (9) будем иметь  $\tilde{y} = W^{-1} \alpha_N$ .

Тогда искомое управление записывается в виде

$$u(k\mu) = B'(A')^{N-k-1} W^{-1} \alpha_N, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (10)$$

или

$$u(k\mu) = B' [A'^{-1}]^{k+1-N} W^{-1} \alpha_N. \quad (11)$$

С учетом (10) формула (5) примет вид

$$x(k\mu) = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B B' (A')^{k-i-1} W^{-1} \alpha_N, \quad (12)$$

Функция (12) формирована с учетом граничных условий (2), (4) и она содержит в себе левые и правые пограничные составляющие.

*Теорема 3. Пусть выполнены предположения 1, 2. Тогда найдутся постоянные*

$\tilde{N}_0 \geq 1$ ,  $C_1 \geq 1$ ,  $q_0 < 1$ ,  $\mu_0 > 0$ ,  $q_1 > 1$  такие, что во первых

$$\|A^{\tau_0}\| \leq C_0 q_0^{\tau_0}, \quad \tau_0 \geq 0, \quad \|A^{\tau_1}\| \leq C_1 q_1^{\tau_1}, \quad \tau_1 \leq 0 \quad (13)$$

и во вторых при  $\mu \leq \mu_0$  решение задачи (1), (3), (4) можно представить в виде

$$u(t, \mu) = O(q_1^{\tau_1}), \quad x(t, \mu) = O(q_0^{\tau_0}) + O(q_1^{\tau_1}), \quad (14)$$

где  $\tau_0 = t/\mu$ ,  $\tau_1 = (t-1)/\mu$ ,  $\tau_0 = 0, 1, \dots, N$ ;  $\tau_1 = -1, -2, \dots, -N$ .

Доказательство. При выполнении условий 1, 2 согласно (6) безсомнения имеют места неравенства (13). Покажем теперь, справедливости соотношений (14). Действительно необходимые условия оптимальности [2] для задачи (1), (3) имеют вид

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial H}{\partial u} = B' \psi(t + \mu) - 2u(t) = 0, \quad \text{где} \quad H = [Ax(t) + Bu(t)]' \psi(t + \mu) - u'(t)u(t).$$

Из последнего равенства имеем

$$u(t) = (1/2) B' \psi(t + \mu). \quad (15)$$

Вектор функция  $\psi(t)$  является решением следующего разностного уравнения

$$\begin{aligned} \psi(t) &= A' \psi(t + \mu), \quad \psi(1) = -\varepsilon \quad \text{или} \\ \psi(t + \mu) &= (A')^{-1} \psi(t), \quad \psi(1) = -\varepsilon. \end{aligned} \quad (16)$$

Следует отметить, что основное свойство сопряженного уравнения (16) заключается в том, что оно представляет решение исходного уравнения т.е уравнения  $x(t + \mu) = Ax(t)$  в обратном времени. Поэтому, полагая

$$\begin{aligned} t &= (N-1)\mu, \quad (N-2)\mu, \quad \dots, \quad k, \quad \dots \quad \text{из (16) имеем} \\ -\varepsilon &= (A')^{-1} \psi[(N-1)\mu], \quad -\varepsilon = (A')^{-2} \psi[(N-2)\mu], \quad -\varepsilon = (A')^{k-N} \psi(k\mu), \quad \dots \end{aligned}$$

Из последнего равенства следует, что

$$\psi(k\mu) = -(A')^{N-k} \varepsilon \quad \text{или} \quad \psi(t) = -[(A')^{-1}]^{\frac{t-1}{\mu}} \varepsilon. \quad (17)$$

Тогда из (15) - (17) получаем

$$u(k\mu) = -(1/2) B' [(A')^{-1}]^{k+1-N} \varepsilon. \quad (18)$$

Сравнивая соотношения (11) и (18) находим значения вектора  $\varepsilon$

$$\varepsilon = -2W^{-1} \alpha_N. \quad (19)$$

Если учесть, что  $t = k\mu$ , то формулу (11) можно записать в форме

$$u(t, \mu) = B' [(A')^{-1}]^{\tau_1} W^{-1} \alpha_N, \quad \tau_1 = (t-1)/\mu. \quad (20)$$

Как видно из (20), что управление  $u(t) = u(t, \mu)$  определяется решением сопряженного уравнения



- правым пограничным слоем, т.е.  $u(t, \mu) = O(q_1^t)$ .

Точно так же из формулы (12) будем иметь соотношение для вектора переменных состояния  $x(t, \mu)$ , указанное в (14), где данный вектор представлен в виде суммы двух пограничных функций, ч.т.д.

В заключении отметим следующее: в ходе доказательства теоремы выявлен особый случай, который связан с недостаточными краевыми условиями системы сопряженных уравнений, где определения их непосредственно из принципа максимума не следует.

ПРИМЕР. Пусть движения управляемого объекта описывается системой

$$\begin{aligned} x_1(k + \mu) &= (1/4)x_1(k) + (1/3)x_2(k) + u(t), \\ x_2(k + \mu) &= (1/2)x_2(k) + u(t), \end{aligned} \quad (21)$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1. \quad (22)$$

Требуется найти такое управление  $u = u(k, \mu)$ , чтобы соответствующее ему решение задачи (21), (22) удовлетворяло условиям:

$$x_1(1) = 2, \quad x_2(1) = 2 \quad (23)$$

и доставляло минимум функционалу  $J = \sum_{k=0}^4 u'(k\mu)u(k\mu)$ .

Решение. Используем алгоритм решение задачи (1) - (3), (4).

Вводим исходные данные:

$A = [1/4 \ 1/3; 0 \ 1/2]$ ;  $B = [1; 1]$ ;  $x_1 = [1; 1]$ ;  $x_2 = [2; 2]$  и вычисления проводим в Matlab. Значения матрицы  $W$ , управляющей функции  $u$ , состояния объекта  $x$  определяем соответственно по формулам (9), (11), (12).

Результаты вычислений представлены в следующей таблице:

Таблица 1.

$k$	0	1	2	3	4
$x_1$	1	2,5881	2,3371	2,1157	2,0083
$x_2$	1	2,5048	2,2718	2,0905	2,0054
$u$	0,1017	0,1731	0,2251	0,0340	2,0048

Согласно результатом вычислений графики зависимости движения объекта и управляющей функции от дискретной времени  $k$  имеют вид:

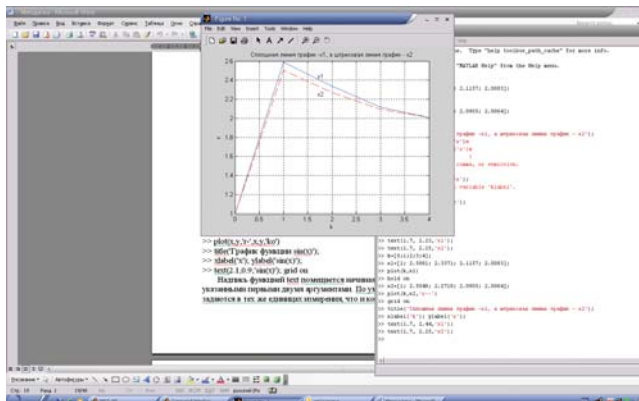


Рис. 1. Графики зависимости движения объекта от дискретной времени  $k$ .

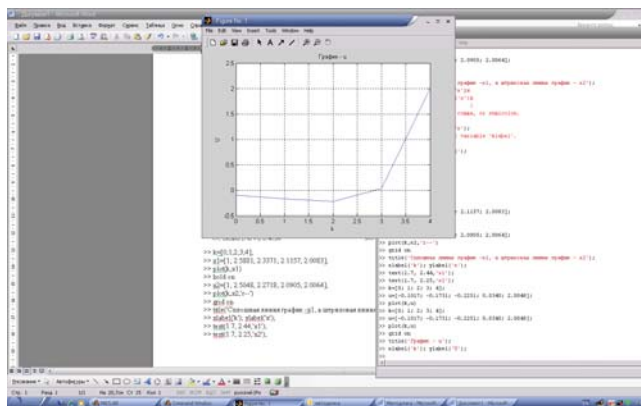


Рис. 2. График зависимости управляющей функции  $u$  от дискретной времени  $k$ .

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шаршеналиев.Ж., Иманалиев.З.К. К применению проблемы моментов в задачах оптимизации дискретных систем, Труды ФПИ. Техническая кибернетика. Фрунзе. 1976. Вып.95. С. 15-29.
- [2] Глизер В.Я., Дмитриев М.Г. Асимптотика решения некоторых дискретных задач оптимального управления с малым шагом, Дифференц. уравнения. 1979. Т.15. №9. С. 116-122.
- [3] Глизер В.Я. Об одной разностной задаче оптимального управления с малым шагом, Дифференц. уравнения. 1985. Т.21. №8. С. 1440-1442.
- [4] Глизер В.Я. Асимптотика решения одной разностной с малым шагом задачи оптимального управления с подвижным правым концом траектории, Дифференц. уравнения. 1988. Т.24. №8. С. 1457-1459.
- [5] Коровин С.К., Мамедов И.Г., Мамедова И.П. Равномерная по малому параметру устойчивость и стабилизация дискретных сингулярно-возмущенных динамических систем, Изв. АН СССР. Техн. кибернетика 1989. №1. С. 21-29.
- [6] Н.Н.Красовский Теория управления движением. - Москва: Наука, 1968. - 476 с.
- [7] Егоров А.И. Оптимальное управление линейными системами. - Киев: Выща школа, 1988. - 278 с.

## THE MATHEMATICAL MODELING OF NEAR-SURFACE PROCESSES ON THE ANODE AT THE PLASMA CUTTING OF METALS

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИПОВЕРХНОСТНЫХ ЯВЛЕНИЙ НА АНОДЕ ПРИ ВОЗДУШНО-ПЛАЗМЕННОЙ РЕЗКЕ МЕТАЛЛОВ

---

*In the work numerical modeling of air plasma for cutting of metals is executed on the base of system of MGD equations within equilibrium model of the low-temperature plasma. For the purpose of simplification of the solution of a considered task, the calculated contour is divided into the conjugate areas on physical processes. Calculations of plasma composition, thermodynamic and transport properties are executed by Chapman-Enskog technique. It is considered at near anode area in which occur jump of characteristics of arc plasma that allowed to carry out in total with all system of considered tasks more the integrated analysis of process of heat exchange in a processing zone is considered.*

---

#### ВВЕДЕНИЕ

Широкое распространение технологических процессов плазменной обработки материалов повысило актуальность исследований взаимодействия потоков дуговой плазмы с поверхностью изделия, направленных на решение вопросов управления дугой и ее свойствами. Наибольший интерес представляет сжатая воздушно-дуговая плазма, применяемая для резки металлов. Потoki дуговой плазмы генерируются плазмотронами, которые различаются между собой конструктивными особенностями, мощностью, плазмообразующей средой и т.д. В большинстве случаев, обрабатываемое изделие из электропроводящего материала выступает в качестве второго электрода - анода [1,2]. В результате направленного воздействия источника энергии на изделие формируется определенная зона нагрева, где имеют место соответствующие физические и химические процессы в металле: испарение, плавление, структурные превращения и т.п. Таким образом, прианодная область дуги играет важную роль в передаче энергии столба дуги обрабатываемому металлу и определяет характер его нагрева.

**Постановка задачи.** К основным процессам при плазменной резке относят электрические, тепловые, газодинамические, гидродинамические. Для модельного представления процессов при плазменной резке, вся рассматриваемая область исследования  $U$  разделена на следующие подобласти [3]:

$$\Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$$

т.е.  $\Omega_i \subset U$ , где  $\Omega_0$  - каналовая часть дуги, в плазмотроне;  $\Omega_1$  - открытая часть дуги, от поверхности сопла до плоскости анода;  $\Omega_2$  - область взаимодействия плазменно-дугового потока с металлом;  $\Omega_3$  - область расплавленного слоя металла;  $\Omega_4$  - область изделия в зоне термического влияния. В областях  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$  рассматривается электрическая дуга на основе системы МГД уравнений с целью определения характера течения и нагрева газа в плазмотронах для резки при различных режимах. Предположение, что анодное пятно привязано к верхней плоскости изделия, позволяет решать квазистационарную задачу, и делает возможным выполнение для дуги условия осесимметричности.

---

<sup>1</sup> Institution of Mine and Mountain Technologies named after academician U. Asanaliev, Kyrgyz State Technical University, Bishkek, Kyrgyzstan

Таким образом, математическое моделирование процессов теплообмена при плазменной резке основано на решении группы подзадач, которые можно разделить по физическим процессам, рассматривая их как сопряженные задачи (Рис. 1). В каждом случае, для математического описания используется система уравнений, выражающих законы сохранения массы, количества движения и энергии: для электродуговой плазмы, расплавленного слоя металла в зоне взаимодействия; а также уравнение теплопроводности с условиями Стефана для зоны нагрева и плавления металла.

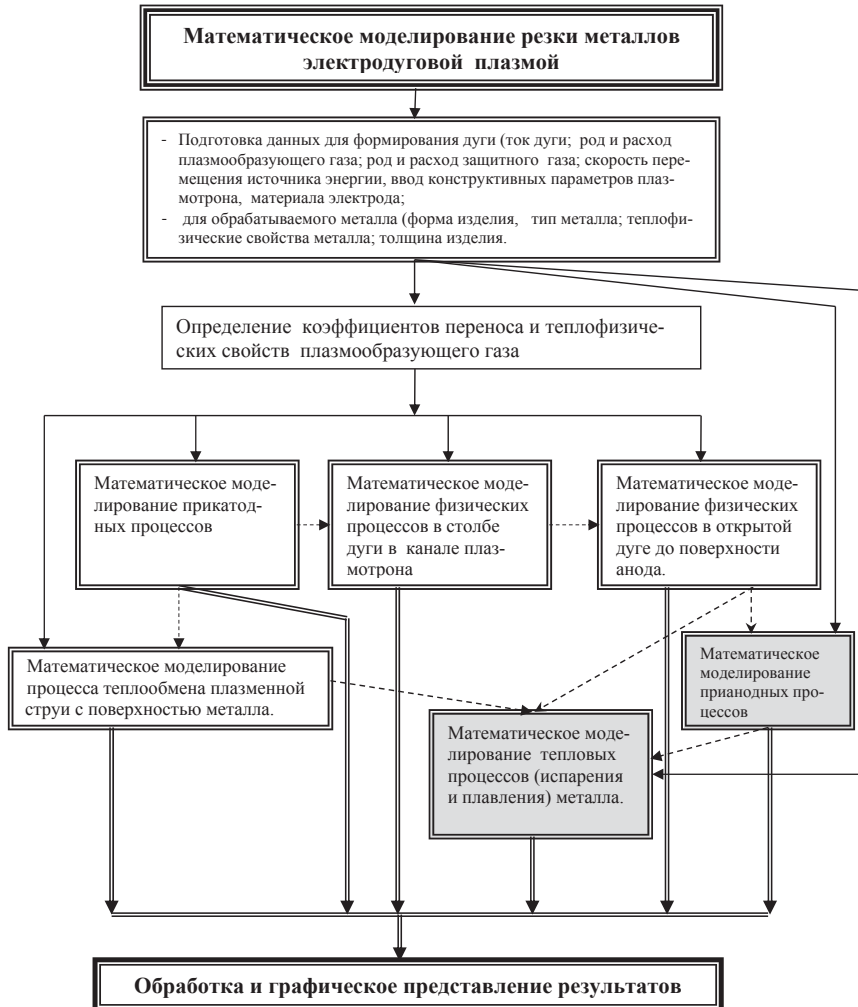


Рис. 1. Общая схема математического моделирования процесса плазменной резки металлов.

В настоящей работе для определения составляющих теплового и динамического воздействия дуговой плазмы на металл, выполнены расчеты энергетических характеристик дуги на основе системы уравнений магнитной гидродинамики с учетом методик их решения, рассмотренных в работах [4,5]

Рассматриваемая в работе область дуги, разделена на: 1) дугу в канале плазмотрона, открытую часть дуги, от поверхности соплового отверстия до анодной поверхности; 2) приповерхностную часть дуги, которая привязана анодным пятном к разрезаемому изделию. Рассмотрены случаи: плазмообразующий газ подается под давлением от 0,2 до 0,5 МПа, с аксиальной подачей защитного газа (без учета закрутки) или тангенциальной его подачи.

Считается, что плазма при давлениях равных и выше атмосферного находится в состоянии локального термодинамического равновесия [6-11]. Допущение о локальном термодинамическом равновесии, позволяет рассмотреть дугу как сплошную среду, обладающую общей тепло и электропроводностью, вязкостью, плотностью, энтальпией и другими свойствами, зависящими от температуры. Учет процессов взаимодействия элементарных частиц в плазме выполняется при подсчете коэффициентов переноса и термодинамических параметров среды, с помощью усредненных по функции распределения сечения различных процессов [4-6].

Система МГД уравнений для электродуговой плазмы в состоянии ЛТР записывается с учетом основных факторов, имеющих наиболее существенное влияние на ее формирование, таких как джоулево тепло, потоки тепла, кондуктивная теплопроводность, вязкое трение и ускорение газа собственным магнитным полем, плазма оптически тонкая. С учетом принятых допущений в методике исследований, система МГД уравнений записывается в цилиндрической системе координат  $(r, z, \varphi)$ ,  $\partial/\partial\varphi=0$  для случая, когда нет внешней закрутки газа, не наложено внешнее магнитное поле и действием сил тяжести можно пренебречь  $gl/v^2 \sim 10^{-6}$ ;  $l \sim 10^{-1}$  м,  $v \sim 10^3$  м/с.

Физическая модель: а) изделие представляет собой полубесконечную пластину толщиной  $l_m$ , с начальной температурой  $T_0$ ; б) электрическая дуга прямого действия привязана анодным пятном к верхней кромке изделия; в) на фронтальную (боковую) поверхность изделия воздействует высокотемпературная и высокоскоростная плазменная струя; г) тепловой поток на фронтальную поверхность пластины может быть однороден по всему участку воздействия, или распределен по определенному закону. Принято допущение, что образуется жидкий слой металла толщиной  $\delta$ , через который осуществляется теплоперенос к твердой фазе и на внешней поверхности которого происходит испарение металла, не оказывающее влияние на процесс теплопередачи, а на внутренней границе фазового перехода из твердого в жидкое состояние (межфазная граница) поддерживается постоянная температура, равная температуре плавления. Скорость перемещения межфазной границы в направлении резки определяется скоростью плавления металла. Жидкий слой металла удаляется внешним потоком, падающим под нулевым углом атаки.

Уравнения неразрывности, движения и энергии в цилиндрической системе координат, можно представить в обобщенном виде для сокращения их записи, а также для удобства составления разностного алгоритма [12]

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho\alpha\Phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho vr\alpha\Phi) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + S_\Phi,$$

где  $\Phi = \Phi(r, z)$  - зависимая переменная;  $\alpha$  - коэффициент, зависящий от переменной  $\Phi$ ;  $\Gamma$  - коэффициент диффузии;  $S_\Phi$  - источникный член. В таблице 1 приведены значения коэффициентов обобщенного уравнения.

**Таблица 1.** Значения коэффициентов обобщенного уравнения

в уравнениях	$\alpha$	$\Phi$	$\Gamma_\Phi$	$S_\Phi$
неразрывности	1	1	0	0
движения	1	$u$	$\mu$	$-\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \frac{1}{3} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV) \right) - j_z B_\Phi$
		$v$	$\mu$	$-\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \frac{1}{3} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV) \right) + j_z B_\Phi$
энергии	$C_p$	$T$	$\lambda$	$2\mu \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{V}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 - \frac{2}{3} \mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV) \right]^2 + \frac{f_z^2 + f_r^2}{\sigma} - \Psi + \frac{5k}{2e} \left( j_z + \frac{\partial T}{\partial z} + j_r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$
потенциала электр. поля	1	$V$	$\sigma$	0
векторного потенциала магнитного поля	1	$A_z$	1	$\mu_0 j_z$
		$A_r$	1	$\mu_0 j_r$

Система дополняется уравнениями Максвелла и закона Ома

$$H_z = 0; H_r = 0; E_\varphi = 0 \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\varphi) = \sigma E_z \quad \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = 0 \quad -\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = \sigma E_r$$

Для решения электромагнитной части системы вводятся переменные - векторный потенциал  $A$  магнитного поля и потенциал электрического поля  $V$ . Расчетная схема представлена на Рис. 2, и граничные условия в таблице 2.

Таблица 2. Граничные условия

	P	$u$	$v$	T	V	$A_z$	$A_r$
AB	$\frac{\partial P}{\partial r} = 0$	$\frac{\partial u}{\partial r} = 0$		$\frac{\partial T}{\partial r} = 0$	$\frac{\partial V}{\partial r} = 0$	$\frac{\partial A_z}{\partial r} = 0$	$\frac{\partial A_r}{\partial r} = 0$
BB <sub>1</sub>		0	0	$\frac{\partial T}{\partial z} = 0$	0	$\frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial A_r}{\partial z} = 0$
B <sub>1</sub> C		0	0	1000		$\frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial A_r}{\partial z} = 0$
CD	$\frac{1}{\text{атм}}$	$\frac{\partial u}{\partial r} = 0$	$\frac{\partial v}{\partial r} = 0$	1000	0	0	0
DE	$\frac{1}{\text{атм}}$	$\frac{\partial u}{\partial r} = 0$	$\frac{\partial v}{\partial r} = 0$	1000	0	0	0
EA <sub>1</sub>		0	0	1000	0	0	0
AA <sub>1</sub>		0	0	3000	$\frac{\partial V}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial A_z}{\partial r} = 0$	$\frac{\partial A_r}{\partial z} = 0$
BB <sub>1</sub>				$\frac{\partial T}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial V}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial A_r}{\partial z} = 0$
BF	$\frac{\partial P}{\partial r} = 0$	$\frac{\partial u}{\partial r} = 0$	0	$\frac{\partial T}{\partial r} = 0$	$\frac{\partial V}{\partial r} = 0$	$\frac{\partial A_z}{\partial r} = 0$	0
B <sub>1</sub> F <sub>1</sub>	0	0	0	3000K	0	0	

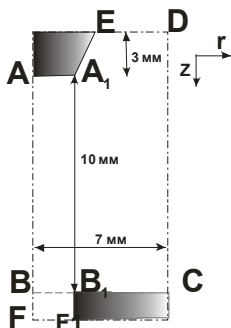


Рис. 2. Расчетная схема.

Для решения системы уравнений использован известный метод контрольного объема (МКО) [12]. Полученная система дискретных уравнений решается комбинацией метода Гаусса-Зейделя. Итерации завершаются при выполнении условия  $\max(|\Phi_{i,j}^k - \Phi_{i,j}^{k-1}|) / \Phi_{i,j}^{k-1} < \varepsilon, \varepsilon \cong 10^{-3}$ , где  $\Phi_{i,j}^k$  - значение переменной на текущей итерации,  $\Phi_{i,j}^{k-1}$  - значение переменной на предыдущей итерации. В качестве примера, на Рис. 3 приведены результаты вычислений: распределение продольной компоненты скорости по сечению плазменной струи. На рис. 4 показаны изолинии температур и скоростей в воздушной плазме.



Рис. 3. Профили скоростей по сечению воздушно-дуговой плазмы: 1-  $z = 8$  мм; 2-  $z = 15$  мм;

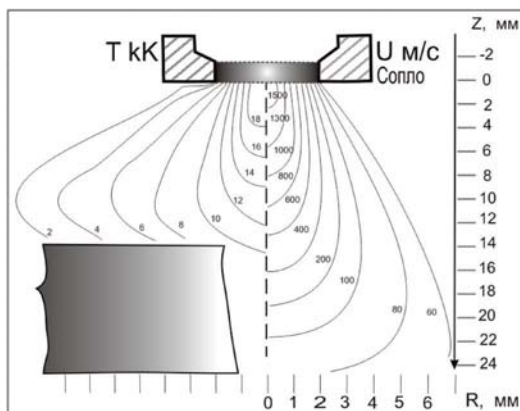


Рис. 4. Изолинии температур и скоростей в воздушной плазме

Наиболее сложной областью для модельного представления при выполнении расчетов является зона взаимодействия дуговой плазмы с металлом, для которой в некоторых работах применяются методики согласования между кинетическим подходом и МГД приближением [4,5]. Анодная

область разряда является переходной областью между плазмой положительного столба и металлом анода. Согласно современным представлениям плазодинамической ситуации прианодных явлений:

- Функционирование анодной области дуги характеризуется анодным падением потенциала  $U_a$  (рис. 5). Зона анодного падения потенциала имеет протяженность  $l_a$  от конца невозмущенного положительного столба до анода. Значение и знак анодного падения потенциала регулируют концентрацию заряженных частиц перед анодом на уровне, обеспечивающем подведение к нему разрядного тока, и определяются в основном энергией, необходимой для образования положительных ионов в анодной области [6-9].

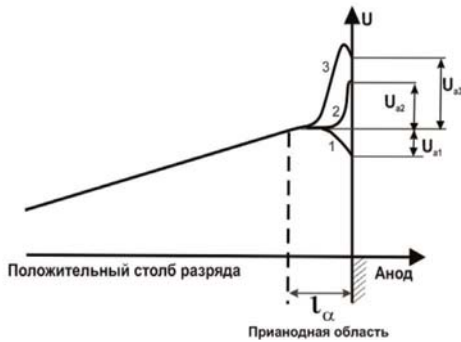


Рис. 5. Схема распределения потенциала в анодной области:

- 1 - анодное падение отрицательно;
- 2 - анодное падение положительно, у анода слой отрицательного объемного заряда;
- 3 - анодное падение положительно, у анода интенсивная ионизация газа электронами.

- Знак и величина анодного падения потенциала зависят от формы как самого анода, так и окружающих его стенок газового пространства, от рода и давления газа, силы тока, ряда других факторов. [6-9,13].
- Вблизи анода существует область отрицательного объемного заряда. Известны два механизма ионизации газа вблизи анода; 1) Е-ионизация электронами, ускоренными в прианодном электрическом поле - имеет место при пониженных давлениях и температурах; 2) Т - ионизация электронами, находящимися в высокоэнергетической части спектра и имеющими максвелловское распределение по скоростям - имеет место при высоких давлениях и температурах [9].
- Толщина прианодного слоя имеет порядок величины одного свободного пробега электронов  $\sim 2$  мк. Непосредственно к прианодному слою, согласно представлениям [6], примыкает слой, толщиной до 0,1 мм от поверхности анода. Граница между этими областями лежит приблизительно при температуре 10000К, здесь температура электронов выше температуры тяжелых частиц. К ней примыкает тепловой пограничный слой толщиной 1мм с температурой на границе  $T=12000$ К. Под действием вязкости и теплопроводности на поверхности анодного слоя образуется гидродинамический пограничный слой[6,7]. В более поздних работах [13,14] рассматривались двухслойные модели: в [13] модель прианодной области, состоящая из зоны объемного заряда и диффузионного слоя при условии слабой конвекции; в [14] -модель прианодной зоны, состоящая из кнудсеновского слоя, который формируется близи поверхности металла при его испарении и охватывает область пространственного заряда и ионизационную область, а также гидродинамического слоя.
- Прианодная область характеризуется высокими градиентами температур и тепловыми потоками. Вследствие натекания высокоскоростной дуги плазмы на анод, положительное анодное падение потенциала может резко уменьшиться до величины близкой к нулю из-за превышения плотности хаотического тока электронов на анод, вызванного их тепловым движением, над плотностью необходимой для непрерывности тока в цепи[6].
- В продольных разрядах, горящих в потоке газа, направленном к аноду возмущения, которые

рождаются в анодной области, сразу же выносятся из разряда. Скорости дрейфа ионов  $v_{+a}$  сравнимы со скоростями  $u = 100 - 200$  м/с. Быстрый поток тормозит ионы, а при  $u > v_{+x}$  должен их сдвигать [6,7].

- В передаче энергии к поверхности анода вносят вклад: конвективная теплоотдача от столба дуги через пограничный слой, включающая тепло, выделяющееся в пограничном слое; излучение дуги; кинетическая энергия электронов, составляющих ток дуги и соударяющихся с поверхностью анода; энергией электронов (работа выхода), проникающих через поверхность анода. Газ, состоящий из тяжелых частиц, и переносящий ток, электронный газ передают энергию аноду независимо друг от друга [6-9]

Теоретические исследования процессов в прианодной области приведены в работах [4,5,6,13,14] и других. В [13] рассматривается полная модель с учетом неравновесности для распределенной дуги. Простая модель рассмотрена в работе [10], для решения задач технологического процесса, вполне обосновано применение упрощенной расчетной модели анодной области. При построении модели, необходимо учесть особенности технологического процесса. К примеру, для резки металлов используются плазмотроны линейной схемы, с продуваемым разрядом и контрагированной привязкой анодного пятна, плотностью тока:  $j_a \approx 10^4 - 10^5$  А/см<sup>2</sup> [1,2].

Таким образом, для описания процессов в анодной области для открытой сильноточной дуги с плоским протяженным анодом рассматривается упрощенная математическая модель, приведенная в работе [5]. При условиях, что:

- Прианодная область состоит из двух зон: термически неравновесной плазмы и зоны пространственного заряда;
- Протяженность анодной области дуги мала по сравнению с ее поперечными размерами, таким образом электрическая и тепловая часть сводится к одномерному приближению.

Система уравнений для зоны термически неравновесной плазмы:

$$\vec{j} = \vec{j}_e + \vec{j}_i = \sigma(T, T_e) \vec{E}, \quad (1)$$

$$\text{div} \vec{j}_e = 0, \text{div} \vec{j}_i = 0, \quad (2)$$

$$\vec{j}_e = en_e \vec{V}_e, \vec{j}_i = en_i \vec{V}_i, \quad (3)$$

$$\vec{Q}_e = -\lambda_e \nabla T_e + \frac{1}{e} \vec{j}_e \beta k T_e, \quad (4)$$

$$\vec{Q} = -\lambda \nabla T + \rho \vec{V} h, \quad (5)$$

$$\text{div} \vec{Q}_e = -3 \frac{m}{\mu} n_e v k (T_{e-T}) + \vec{j} \vec{E} - \psi(T_e), \quad (6)$$

$$\text{div} \vec{Q} = 3 \frac{m}{\mu} n_i v k (T_e - T), \quad (7)$$

$$\text{div} \rho \vec{V} = 0, \quad (8)$$

$$\rho \text{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) + \rho \left( \text{rot} \vec{V} \times \vec{V} \right) + \text{grad} p = 0 \quad (9)$$

где:  $\beta = 3,2$ ;  $Q_e, Q$  - потоки тепла за счет электронной компоненты и тяжелых частиц, соответственно.  $E$  - эффективная напряженность электрического поля, включает в себя поле, создаваемое за счет диффузии электронов.

Из условия квазинейтральности можно получить

$$\vec{j} \approx j_e, \quad (10)$$



т.е., электрический ток в рассматриваемой зоне переносится электронами.

Путем несложных подстановок можно получить

$$\frac{d\vec{j}}{dz} = 0 \text{ или } \vec{j} = const,$$

и используя уравнение движения электронной компоненты можно получить

$$\frac{m_e d\vec{V}_e}{dt} = 0, \text{ следовательно } m_e \frac{d\vec{V}_e}{dt} = m_e V_e \frac{dV_e}{dz} = \frac{d}{dz} \left( \frac{m_e V_e^2}{2} \right) = \frac{3}{2} k \frac{dT_e}{dz} = 0$$

Откуда следует  $T_{e0} \approx const$ , подставляя (4) в (6), с учетом (1), (2) и  $T_{e0}$

$$\frac{j^2}{\sigma(T_e)} = 3 \frac{m}{M} n_e v k (T_e - T) + \psi(T, T_e), \quad (11)$$

или  $T_e = T + \frac{j^2 M}{3 m_e v k \sigma(T_e)} - \frac{\psi(T, T_e) M}{3 m_e v k}$ , пренебрегая излучением записать в виде:

$$T_e = T + j^2 \varphi^*, \varphi^* = \frac{M}{3 m_e v k n_e \sigma}, \quad (12)$$

Можно ввести функцию теплопроводности  $S$  и при условии, что в рассматриваемой области выполняется условие  $\vec{V} \perp grad h$ , подставим (5) в (7), суммируя с (11) и пренебрегая излучением, имеем

$$\frac{d^2 S}{dx^2} + \frac{j^2}{\sigma(S, T_e)} = 0 \quad (13)$$

Считая, что в рассматриваемой области проводимость определяется электронной температурой, то решение для (13) имеет вид

$$S(r, z) = S_1(r) - \frac{dS}{dz} \Big|_{z=z_1} (z_1 - z) - \frac{j^2(r)^2 (z_1 - z)^2}{2 \sigma(r)}, \quad (14)$$

Где  $S_1(r), \frac{dS}{dz} \Big|_{z=z_1}$  - радиальное распределение функции теплопроводности и ее аксиальной производной на границе прианодной области  $z_1$  и столба дуги  $z$ .

Протяженность прианодной области можно найти из (14), используя условие  $S = S_w^0$  при  $S = 0, r = 0$ , где  $S_w^0$  определяется температурой поверхности анода.

Чтобы получить выражения для скоростей и давления вводим векторный потенциал:

$$\rho \vec{V} = rot \vec{\Pi}. \quad (15)$$

Из (15) следует, что  $\vec{\Pi} \perp \rho \vec{V}$ . Для рассматриваемой осесимметричной задачи  $\vec{\Pi} = \Pi \vec{e}_\varphi$ , где  $\vec{e}_\varphi$  - азимутальный единичный вектор. С учетом этого из (15) имеем

$$\rho \vartheta = - \frac{\partial \Pi}{\partial z}, \quad (16)$$

$$\rho u = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\Pi)}{\partial r}, \text{ откуда получаем } \Pi = \frac{1}{r} \int_0^r \rho u r dr = \frac{\psi}{r}. \quad (17)$$

Где  $\psi = \int_0^r \rho u r dr$  - функция тока. Подставляя (17) в предыдущие выражения получаем

$$\rho \vartheta = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (18)$$

$$\rho u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (19)$$

Форма газодинамических линий тока в рассматриваемой области аппроксимируется двухпараметрической зависимостью

$$\psi = -azr^2 \left( 1 - e^{-\frac{b}{r^2}} \right), \quad (20)$$

где  $a$  и  $b$  параметры. Эта зависимость точно описывает течение газа в окрестностях точки торможения и удовлетворяет краевым условиям задачи

$$r = 0 : v = 0, du/dr = 0;$$

$$r \rightarrow \infty : u \rightarrow 0, v \sim 1/r;$$

$$z = 0 : u = 0$$

Распределение скоростей в этом случае принимает вид:

$$v = \frac{a}{\rho} r \left[ \left( 1 - e^{-\frac{b}{r^2}} \right) \right] \quad (21)$$

$$u = -\frac{2a}{\rho} z \left[ \left( 1 - e^{-\frac{b}{r^2}} \right) - \frac{b}{r^2} e^{-b/r^2} \right], \quad (22)$$

Параметр  $a$  находится из условия  $\rho u = \rho_0' u_0'$  при  $z = z_1, r = 0$  которое дает  $a = -\frac{\rho_0' u_0'}{2z_1}$

Параметр  $b$  находится из условия  $G = 2\pi\psi(\delta_0, z_1)$ , в результате  $b = \delta_0^2 \ln \left( \frac{1}{1 - \frac{G}{\pi\rho_0 u_0}} \right)$

Поле давлений в рассматриваемой области определяется из (9), записав его для этого, в проекциях на оси  $r$  и  $z$ :

$$\rho g \frac{\partial u}{\partial r} + \rho u \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (23)$$

$$\rho g \frac{\partial g}{\partial r} + \rho u \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (24)$$

Считая плотность постоянной и записав (24) при  $r = 0$ , а в (24) учитывая что  $v$  не зависит от  $z$  можно получить выражения для нахождения  $P(r, z)$ :

$$P_0(z) = P_0^{z_1} + \frac{\rho (u_0^{z_1})^2}{2} - \frac{\rho u_0^2(z)}{2} \quad (25)$$

$$P(r, z) = P_0(z) - \frac{\rho g^2(r, z)}{2} \quad (26)$$

Формулы (10), (12), (14), (21), (22), (25), (26) предназначены для расчета параметров плазмы в неравновесной зоне прианодной области.

Вторая зона это бесстолкновительный слой пространственного заряда. Ее протяженность имеет порядок длины свободного пробега электронов. Падение потенциала в этом слое определяется выражением [13]

$$\Delta\varphi = -\frac{kT_e}{e} \ln \frac{j}{j_{ex}}, \quad (27)$$

где  $j_{ex}$  -плотность хаотического тока электронов, равная

$$j_{ex} = \frac{en_e}{4} \left( \frac{8kT_e}{\pi m_e} \right)^{1/2}, \quad (28)$$

В случае, если  $\Delta\varphi$  - величина отрицательная, локальный поток тепла в анод можно представить в виде  $q_{\Sigma} = q_c + q_A + q_j$  здесь,  $q_c = -\frac{dS}{dz} = -\frac{dS}{dz}\Big|_{z=z_1} - \frac{j^2 z_1}{\sigma}$ ,  $q_A = j\varphi_b$ ,  $q_j = \frac{j}{e} \beta k T_e$ ,  $\varphi_b$  - работа выхода

металла анода. При  $\varphi > 0$  появляется еще одно слагаемое  $q_{A\varphi} = j\Delta\varphi$ . интегральный поток тепла на площадку радиуса  $r$  анода определяется выражением  $Q_A(r) = 2\pi \int_0^r q_{\Sigma} r dr$ .

В прианодной области воздушной плазмы, при температурах выше 6000 К существуют электроны, молекулы, молекулярные ионы, атомы и атомарные ионы. Нами были выполнены расчеты состава среды, теплофизических свойств и коэффициентов переноса по методике Чепмена-Энскога [15-21]. Состав воздушной смеси задавали в следующих весовых долях с учетом смешивания со спутными газами Ar, CO<sub>2</sub> в виде:

(78% N<sub>2</sub>), (21% O<sub>2</sub>), (0.93% Ar), (0.02% CO<sub>2</sub>).

Расчет проводился в интервале температур 1000К - 35000К и давлений 0,1 - 0,7 МПа. Для расчета равновесного состояния воздушной плазмы использован универсальный программный комплекс АСТРА.4/рс, На Рис. 6 в качестве примера приведены полученные результаты для 0,1-0,4 МПа.

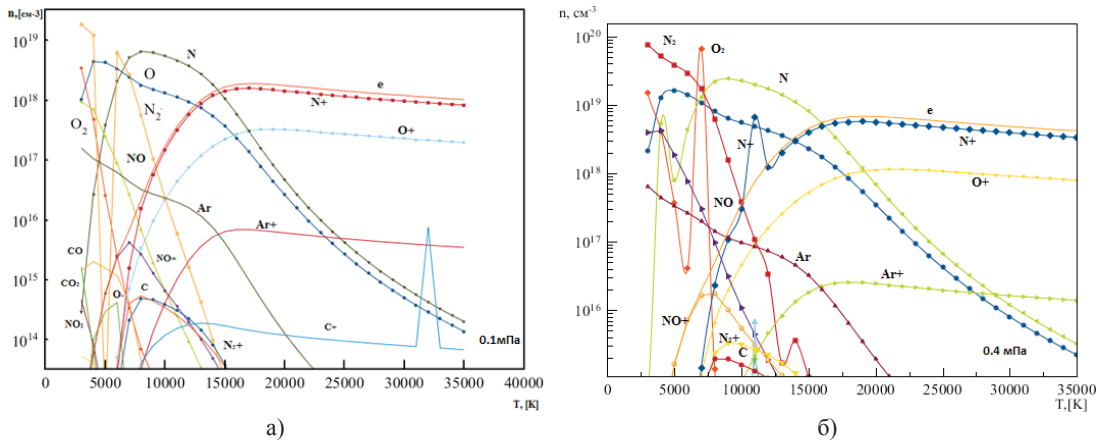


Рис. 6. Состав воздушной плазмы в зависимости от температуры при давлениях: а) 0,1 МПа; б) 0,4 МПа.



Рис. 7. Концентрация электронов  $n_e$ , ионов  $n_i$  и тяжелых частиц  $n_{mi}$  в прианодной области при 0,1 МПа.

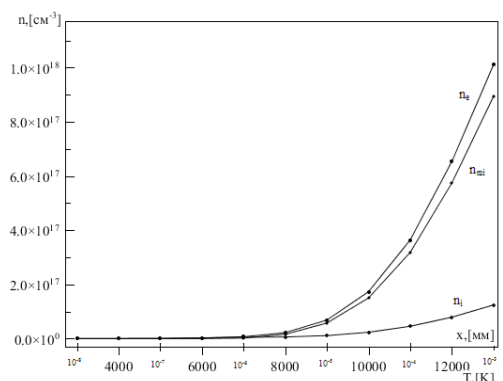


Рис. 8. Распределение температуры по радиусу анодного пятна.

Полученные результаты удовлетворительно согласуются с данными других авторов [19,21], имея некоторый разброс при высоких температурах. На рис. 7 приведены диаграммы зависимости

концентрации электронов и тяжелых частиц в прианодной области в зависимости от температуры и распределение температуры в анодном пятне по радиусу нагрева для рассматриваемых параметров расчета.

Весь комплекс рассматриваемых задач замыкает решение тепловой задачи плавления и испарения на аноде, определения температурного поля в зоне воздействия, с подвижными границами фаз (задача Стефана). Целью расчетов является определение координат границ плавления и испарения в определенный момент времени и температурного поля в металле.

На рис. 9 и 10 показаны в качестве примера результаты проведенных расчетов: изменение температуры изделия в зависимости от времени при воздействии источника нагрева по его фронтальной (боковой) поверхности; изменение скорости перемещения межфазной границы плавления во времени.



Рис. 9. Изменение температуры поверхности во времени. Рис. 10. Скорость движения межфазной границы плавления.

Для выполнения расчетов были использованы авторские модули системы моделирования физических процессов при плазменной обработке металлов. Рассмотрение прианодной области, в которой происходит резкое изменение температуры и концентрации частиц, происходят процессы переноса заряда и тепла позволило в совокупности со всей системой рассматриваемых задач провести более полный анализ процесса теплообмена при взаимодействии дуговой плазмы с обрабатываемым изделием.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Эсибян Э.М. Воздушно-плазменная резка: состояние и перспективы //Автоматическая сварка, № 12, 2000. -С. 6-16.
- [2] Васильев К.В. Особенности плазменно-дуговой резки в азотно-кислородных смесях (Обзор) //Автоматическая сварка, 12, 2000.-С.21-25.
- [3] Компьютерное моделирование процессов обработки материалов высококонцентрированными потоками энергии / Жайнаков А.Ж., Солоненко О.П., Кабаева Г.Д., Головин А.А.- Бишкек, Илим. 2011 - 228 с.
- [4] Теория столба электрической дуги / В.С.Энгельшт, В.Ц. Гурович, Г.А. Десятков и др. - Новосибирск: Наука. Сиб.отд, 1990.-376 с -(Низкотемпературная плазма. Т.1).
- [5] Математическое моделирование электрической дуги /Под ред. В.С. Энгельшта -Фрунзе; Илим, 1983. - 363с.
- [6] Финкельбург В., Меккер Г. Электрические дуги и термическая плазма. - М. ИЛ, 1961.-369 с.
- [7] Райзер Ю.П.Физика газового разряда. Научное издание-3-е изд. - Долгопрудный: Изд. дом. «Интеллект», 2009.- 736 с.
- [8] Шоек П.А. Исследование баланса энергии на аноде сильноточных дуг, горящих в атмосфере аргона //Современные проблемы теплообмена. - М.: Энергия, 1966. -с. 110 - 139.
- [9] Грановский В.Л. Электрический ток в газе. Установившийся ток.- М.:Наука,1971.-543с.
- [10] Лесков Г.И., Электрическая сварочная дуга. -М.: Машиностроение, 1970. -335с.
- [11] Физика и техника низкотемпературной плазмы. М.,Атомиздат, 1972.(Дресвин С.В., Донской А.В., Гольдфарб В.М., Клубникин В.С.), 352 с

- [12] Патанкар С.В. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах. М.:Изд-во МЭИ, 2003, -312 с.
- [13] Назаренко И.П. Приэлектродные процессы в электродуговых двигателях и плазменных процессах. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук. Москва 2000. 47 с.
- [14] Кривцун И.В. Модель испарения металла при дуговой, лазерной и лазерно-дуговой сварке //Автоматическая сварка, № 3, 2001.-С. 3-10.
- [15] В.В.Рябов.К расчету коэффициентов переноса равновесного диссоциированного воздуха. / Труды ЦАГИ, 1980, с.3-14.
- [16] Варгафтик Н.Б.Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. - М.: Физматгиз, 1963. -708 с.
- [17] С.Н.Казейкин. Расчет термодинамических и переносных свойств высокотемпературного воздуха. / Препринт Ин-т проблем механики АН СССР N108, 1978.
- [18] Р. М. Севастьянов, М. Д. Здункевич. Термодинамические функции смеси газов при высоких температурах. Инж. ж., 1964, 4, вып. 4, 639-645.
- [19] Е. В. Ступоченко и др. Термодинамические свойства воздуха в интервале температур от 1000 до 12 000° К и интервале давлений от 0,001 до 1000 атм.В сб. «Физ.газодинамика». М., Изд-во АН СССР, 1959, 3-38.
- [20] В. С. Белянинч Э. Э. Шпильрайн. К расчету равновесного состава многокомпонентной реагирующей газовой смеси. Теплофиз. высоких т-р, 1975, 13, № 5, 969-973.
- [21] D. Angola, G. Colonna, C. Gorse and M. Capitelli Thermodynamic and transport properties in equilibrium air plasmas in a wide pressure and temperature range. Eur. Phys. J. D 46, 129-150(2008).

## THE BALANCE TO THE POWER OF PLAZMATRONS OF DIRECT ACTION

### К ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМУ БАЛАНСУ ПЛАЗМОТРОНА ПРЯМОГО ДЕЙСТВИЯ

*The work is devoted to the theoretical and experimental research of energy balancing heat flow welding plasmotrons. Comparison of calculation results and experimental data.*

В работе представлена математическая модель плазматрона прямого действия. Расчетная область включает в себя катодный узел, канал плазматрона, свободную область и анод. Это позволило включить в рассмотрение теплофизические процессы в электродуговой плазме, в канале плазматрона, в катодном узле и в аноде.

Численные расчеты проведены на основе МГД уравнений, включающих в себя уравнения Навье-Стокса, Максвелла, энергии. Поставлены граничные условия и условия сопряжения между областями расчета. Такой подход позволил проведение сквозного расчета в твердом теле, расплавленном металле и в электродуговой плазме; и учесть процессы между этими областями (Рис. 1).

По результатам численного моделирования физических процессов в плазматроне прямого действия проводится расчет баланса энергии электрической дуги.

Результаты расчета сравниваются с результатами экспериментальных исследований.

Основные уравнения МГД уравнений для электродугового разряда, в предположении выполнения локального термодинамического равновесия, запишутся в виде [1]:

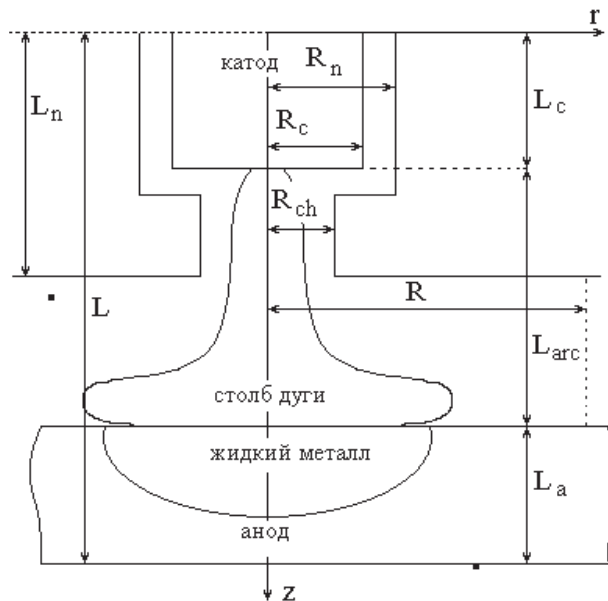


Рис. 1. Схема расчетной области. 1

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \operatorname{grad} \left( P + \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{v} \right) + 2 \operatorname{div}(\mu \dot{S}), \quad (2)$$

$$\rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} h = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \varphi + \operatorname{div} \left( \frac{\lambda}{c_p} \operatorname{grad} h \right), \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (4)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (5)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (6)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (7)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

Система (1-7) дополняется соотношениями:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(T, P), \quad \sigma = \sigma(T, P), \quad \lambda = \lambda(T, P), \quad \mu = \mu(T, P), \\ c_p &= c_p(T, P), \quad h = h(T, P), \quad \psi = \psi(T, P) \end{aligned} \quad (8)$$

На основе уравнений (1-8) проводился численный расчет в переменных «вихрь-функция тока». Преобразование уравнений к цилиндрическим координатам и их конечно-разностная аппроксимация изложены в [1-2]; постановка граничных условий, их анализ для данной задачи подробно изложены в [3-4]. Полученная, в результате конечно-разностных аппроксимаций, система нелинейных алгебраических уравнений решалась методом Зейделя-Гаусса. Полагалось, что течение плазмы ламинарное, дозвуковое и обладает осевой симметрией; столб электрической дуги оптически прозрачен. Для учета процессов в прианодной области использовалась модель предложенная в [1].

По результатам расчета определены: количество тепла, отводимое на нагрев канала плазматрона -  $Q_c$ ; количество тепла, расходуемое на нагрев обрабатываемого изделия (анод) -  $Q_a$ ; потоки тепла, рассеиваемого в окружающую среду -  $Q_{sr}$ , потери на излучение -  $Q_\psi$ . Вкладываемая в электрическую дугу мощность -  $Q_d$ . Таким образом, тепловой баланс дуги можно записать как:

$$Q_d = Q_c + Q_a + Q_{sr} + Q_\psi, \quad (9)$$

где

$$Q_c = 2\pi R_{ch} \int_{L_c}^{L_h} \lambda \frac{\partial T}{\partial r} dz + 2\pi \int_{R_{ch}}^R r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} dr \quad (10)$$

$$Q_a = 2\pi \int_0^R r \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} + j_z \varphi_0 \right) dr \quad (11)$$

$$Q_{sr} = 2\pi R \int_{L_n}^{L_{arc}} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial r} + \rho v_r h \right) dz \quad (12)$$

$$Q_\psi = 2\pi \int_0^R \int_0^{L_{arc}} r \psi dr dz \quad (13)$$

$$Q_d = 2\pi \int_0^R \int_0^{L_{arc}} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} r dz dr \quad (14)$$

Расчеты проводились для сварочного плазматрона с неплавящимся катодом, радиусом канала сопла  $R_{ch}=1,5\text{мм}$ , работающего в среде аргона, при силе электрического тока  $I=60\text{А}$  и расходе плазмообразующего газа  $G=0,1\text{г/с}$ .

Для этого же плазматрона, методом водяного калориметрирования, определялись тепловые мощности, отводимые его различными элементами.

Баланс энергии при экспериментальных исследованиях составлялся следующим образом:

$$Q_{de}=Q_{ce}+Q_{ae}+Q_{sre}+Q_{ke}, \quad (15)$$

где символ «e» относится к экспериментальным данным.  $Q_{de}$  - энергия, вкладываемая в дугу,  $Q_{ce}$  - количества тепла, отводимая на сопло,  $Q_{ae}$  - количество тепла, нагревающая анод-изделие,  $Q_{sre}$  - количество тепла, рассеивающая в окружающую среду,  $Q_{ke}$  - количество тепла, нагревающая катод.

Как видно, уравнения баланса (9) и (15) отличаются последними слагаемыми: в (9) - это излучение дуги, в (15) - тепло, затрачиваемое на нагрев катода. Это обусловлено следующим: при проведении эксперимента вклад излучения в нагрев различных элементов плазматрона уже учитывается в остальных слагаемых; при математическом моделировании процессов нам не удалось построить приемлимую модель прикатодных процессов, и по этой причине мы не можем учесть поток тепла в катод. Тем не менее сравнение результатов исследований показывает нижеследующее.

**Таблица 1.** Сравнение расчетных и экспериментальных данных, дано в Дж

	$Q_d Q_{de}=IU$	$Q_c Q_{ce}$	$Q_a Q_{ae}$	$Q_{sr} Q_{sra}$	$Q_{ke}$	$Q_{\psi}$
расчет	2372	320	1123	459	-	496
эксперимент	3000	393	1528	628	432	

Около половины подводимого тепла ( $\approx 47\%$  -расчет,  $\approx 51\%$  эксперимент) передается аноду, на нагрев сопла затрачивается от  $13\%$  до  $14\%$  тепла (эксперимент и расчет соответственно), во внешнюю среду выносятся  $18\%$  (расчет) и  $21\%$  (эксперимент) тепла.

Несмотря на внешнюю качественную близость расчетных и экспериментальных данных, их сравнение показывает достаточное расхождение в количественном отношении. Из анализа результатов исследований следует - математическую модель необходимо дополнить уравнениями описывающих прикатодные процессы. В этой области в результате нагрева и ускорения частиц может выделяться до  $21\%$  энергии дуги и затрачиваться на нагрев катода около  $14\%$ . При учете количества тепла отводимых на нагрев элементов плазматрона необходимо учесть вклад излучения. Из-за того, что не были учтены процессы в прикатодной области и нагрев элементов плазматрона излучением оказались заниженными вкладываемая в электрическую дугу мощность, перенос тепла в сопло плазматрона и анод.

Результатом проведенных исследований явилось:

- Расчетные и экспериментальные данные в качественном отношении согласуются между собой;
- При проведении дальнейших исследований необходимо учесть вышеприведенный анализ полученных результатов.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Жуков М. Ф., Коротеев А. С., Урюков Б. А., Прикладная динамика термической плазмы. Новосибирск: Наука, 1975  
 [2] Жайнаков А., Усенканов Дж. О., Поток плазмы, генерируемые сварочной дугой. Бишкек: Илим, 2000  
 [3] Usenkanov J. O., Djumaliev T. R., Asanaliev M. K., Zhainakov A., The determination of compressed arc characteristics //IX Intern. Confer. of Phen. Ioniz. Gases. Belgrad, 1989



- [4] Усенканов Дж.О., Жайнаков А., Султангазиева Р.Т.К постановке граничных условий для функции «вихрь скорости» на границе плазма-жидкий металл. //Материалы международной научно-практической конференции. «Проблемы вычислительной математики и информационных технологий», Алматы, 1999
- [5] Jainakov A., Usenkanov J., Sultangazieva R., On joint modeling of processes in electric arc plasma and in melted metal. International scientific and technical conference //New technologies in Islamic countries, Republic of Kazakhstan, Almaty, 27-30 June 1999.
- [6] Моделирование процессов сварочной ванны электрической дуги.//Материалы Международной конференции «Проблемы математического моделирования и информационных технологий» Бишкек, 2001 г.
- [7] Sadyrov K., Usenkanov Dj., Jainakov A., Nishio K. To interaction of the electric arc with the molten metal //Satellite Venture Business Laboratory. Kyushu Institute of Technology, Japan, №8, June, 2007.
- [8] Усенканов Дж. О., Акмолдоева С. Б., Сейталиева С. Ч., Садыров К.А. Об устойчивости решения электродугового разряда сварочного плазматрона // Известия КГТУ им. И. Раззакова, 2011, № 24

# ANALYSIS OF BRIGHTNESS EFFECT ON THE QUALITY OF PICTURES AFTER COMPRESSION WITH JPEG AND SPIHT COMPRESSION METHOD

---

*In this paper we presented a comparison of objective quality of pictures after compression using two methods - JPEG and SPIHT. Methods are applied on pictures with different levels of brightness for different values of the bit rate (bpp) using software VCDemo. The quality of the compressed pictures is determined by values of MSE (mean square error), SNR (signal to noise ratio) and PSNR (peak signal to noise ratio). The values are presented in appropriate tables and diagrams. Based on the obtained data, we compared the quality of pictures with different brightness after compression. It was found that using compression gives better results compared with different levels of picture brightness. Presented below is how the quality of compression varies with the brightness pictures at different bit rates.*

---

## INTRODUCTION

Development of digital images led to the creation of several methods to store digital pictures. In order to reduce the size of storage needed for high resolution still digital images, it is necessary to perform compression and thus reduce the file size. Compression is the process of eliminating data redundancy or converting data into a form that occupies less storage space.

The JPEG (Joint Photographic Experts Group) method is a standard procedure for image compression. It is an established method for the compression of both black and white and coloured images in real (natural) scenes. It is used for the compression of natural images and paintings, but it is not efficient for the compression of text images, freehand or technical drawings. Together with GIF (Graphics Interchange Format), JPEG is the most popular format for transferring images over the Internet due to a satisfactory compression ratio and support by all web browsers for these file formats.

The JPEG method is used for the compression of still images and it belongs to the group of "intra-frame" compression methods. The similar standard - MPEG is used for the compression of moving images and it belongs to the group of "inter-frame" compression methods. In order to meet the diverse needs of many applications, the JPEG standard includes two basic compression methods: a DCT (Discrete Cosine Transformation) based method for "lossy" compression and a predictive method for "lossless" compression [1].

The "lossy" compression - called Baseline method - is the most widely implemented JPEG method. In the baseline mode, the image is divided into 8x8 pixel blocks and each of these is transformed using the DCT. The "power" of compression lies in the quantization of DCT coefficients with a uniform scalar quantizer, zig-zag scanning of the block and entropy coding using the Huffman code.

EZW (Embedded Zero-tree Wavelet) algorithm enables the progressive transmission of a compressed image. By using this algorithm, it is possible to stop the encoding process at any moment when the desired bit-rate is achieved. In the wavelet decomposition, the image is divided into sets of frequency/spatial hierarchical sub-bands. The important premise of the zero-tree algorithm is that substantial redundancy exists between the "parent" and "child" samples within the sub-band hierarchy [2].

EZW algorithm has very good PSNR (peak signal to noise ratio) performance compared to other compression algorithms with low bit-rates. It keeps significant coefficients in all levels. The main drawback

---

1 Faculty of Technical Sciences, Kosovska Mitrovica, Serbia

2 Ministry of Interior Republic of Serbia, Belgrade, Serbia

3 High school of Electrical Engineering and Computers, Belgrade, Serbia

of the EZW algorithm is its complexity, which impacts calculation resources [3, 4].

The EZW algorithm is used as a base for development of large number of similar compression methods. One of the most popular methods is SPIHT (Set Partitioning In Hierarchical Trees). In the original EZW method, arithmetic coding of the bit streams was essential in order to compress the ordering information as conveyed by the results of the significance tests.

Unlike the EZW, SPIHT doesn't use arithmetic coding. The subset partitioning is so effective and the significance information so compact that even binary un-coded transmission achieves similar or better performance than EZW. The reduction in complexity from eliminating the arithmetic encoder is significant.

The algorithm is introduced by Said and Pearlman [5] for the compression of still images. This method gives better results for larger compression ratios than EZW. The term "Hierarchical Trees" points to quad trees that consist of "parent" and "child" nodes as defined in EZW. Set Partitioning is the operation which divides wavelet coefficients from quad trees into partitions.

The algorithm selects the coefficients  $c_{i,j}$  such that, with  $n$  decremented in each pass, the coefficients are distributed into three ordered lists - List of Insignificant Sets (LIS), List of Insignificant Pixels (LIP) and List of Significant Pixels (LSP).

After initialization, the following steps are iterated: sorting pass, refinement pass and quantization step update. Through those steps the appropriate significance, sign, and most significant bits are sent to the decoder or stored on file.

## THE MEASURES OF COMPRESSION QUALITY

Three of the most used measures for the comparison of image quality are the mean square error (MSE), signal to noise ratio (SNR) and peak signal to noise ratio (PSNR).

A method for the estimation of image quality is needed so as to give a view of how "lossy" compression methods modify image quality. We may treat an image as a matrix whose elements are image pixels.

The estimation process is then based on the calculation of distances between appropriate elements of input and output matrices. In this way, not only are the different qualities of the different compression methods compared, but also the results of the same methods using different compression ratios.

We denote the matrix  $A$  at the input of the compression system with elements  $a_{ij}$ , with  $i \in \{1 \dots M\}$ ,  $j \in \{1 \dots N\}$ , where  $M$  is the number of image elements in the vertical and  $N$  is the number of image elements in horizontal direction [6].  $M \times N$  is the total number of image elements.

The output of the compression system is the matrix  $A'$  with elements  $a'_{ij}$ . The distance between the elements of matrices  $A$  and  $A'$  represents the error or the loss of image quality. Usually, the error is larger for higher compression ratios. A user can set the compression ratio according to the desired image quality, and hence directly influence the data size of the compression image [6].

The total reconstruction error is defined as:

$$E = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} || a_{ij} - a'_{ij} ||^2 \quad (1)$$

The distance between the matrices  $A$  and  $A'$  is frequently calculated using the Mean Square Error:

$$MSE = \frac{E}{MN} = \frac{1}{MN} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} || a_{ij} - a'_{ij} ||^2 \quad (2)$$

Where  $M \times N$  is the total number of image pixels, and the sum is applied to all image elements.

The amplitudes of image elements are in the range  $[0, 2^n - 1]$ , where  $n$  is the number of bits needed for binary representation of amplitude of each element in the original image. MSE does not consider am-

plitudes of image elements (it only considers differences between amplitudes) and it is the reason for introducing the Peak Signal to Noise Ratio

$$PSNR = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{MAX_I^2}{MSE} \right) = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{MAX_I}{\sqrt{MSE}} \right) \quad (3)$$

Where  $MxN$  is the total number of image pixels, and the sum is applied to all image elements.

The variable  $MAX_I$  is the maximum amplitude value of the image element (pixel). When the amplitude of the image pixel is represented by B bits,  $MAX_I$  is  $2^B - 1$ .

With  $n=8$  bits/image element we can define:

$$PSNR == 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{255^2}{MSE} \right) \quad (4)$$

Typical values for PSNR for “lossy” compressed images are between 30 and 50 dB.

## SYSTEM MODEL

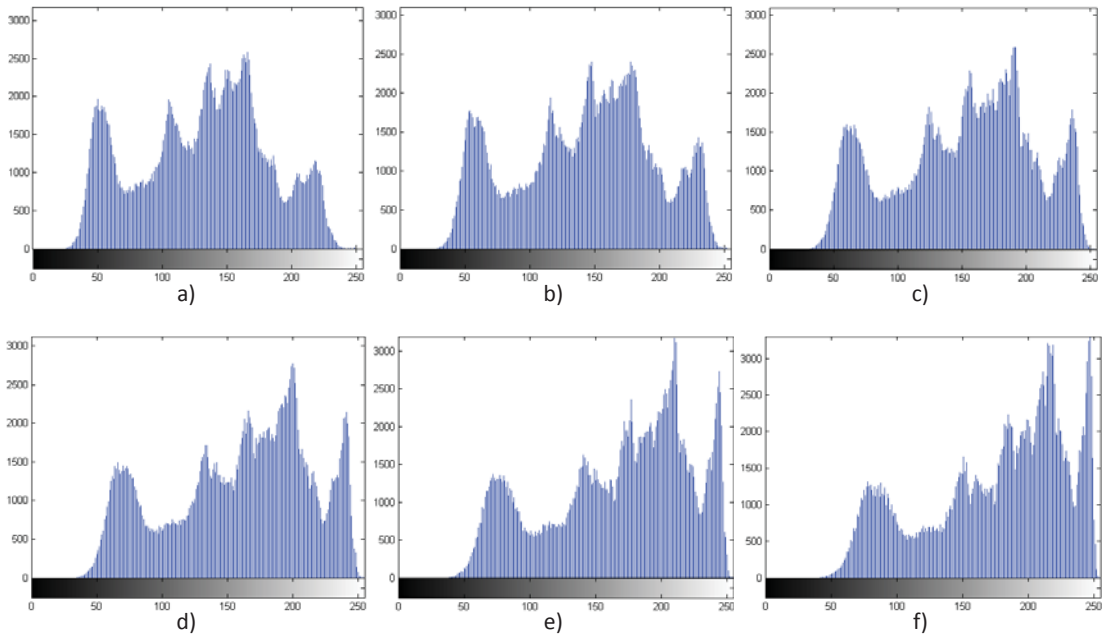
For analysis of objective image quality 8-bit uncompressed images saved in bmp format were used, with an original resolution of 512x512, 512x768 and 768x512 pixels available on the website: [<http://sipi.usc.edu/database/misc.zip>].

Images were brightened to various degrees using the illumination tool in Adobe Photoshop software [7]. Fig. 1 shows an example of one of the analyzed images with the original lighting and illuminated to 15%, 30%, 45%, 60% and 75% compared with the original, and its corresponding histograms are shown in Fig. 2.



**Fig. 1.** An example of the analyzed image: a) original, b) 15% illuminated, c) 30% illuminated, d) 45% illuminated, e) 60% illuminated, f) 70% illuminated.

Image compression is performed in the software package VCDemo using modules for compression [8]. Nine bit rates were applied: 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.7, 1.0, 1.5 and 3.0 bits / element images (bpp). Based on the differential between the original and the reconstructed images the mean squared error (MSE), signal/noise ratio (SNR) and peak signal/noise ratio (PSNR) were calculated.



**Fig. 2.** Histogram of the analyzed image: a) original, b) illuminated 15%, c) 30% illuminated, d) illuminated 45%, e) 60% illuminated, f) 70% illuminated.

## RESULTS AND DISCUSSION

The JPEG compression values for different illuminated images are given in Table 1, Table 2 and Table 3, respectively. The graphic changes of PSNR with increasing bit rates in the JPEG compression method is presented in Fig. 3.

**Table 1.** Values of MSE for the JPEG compression method.

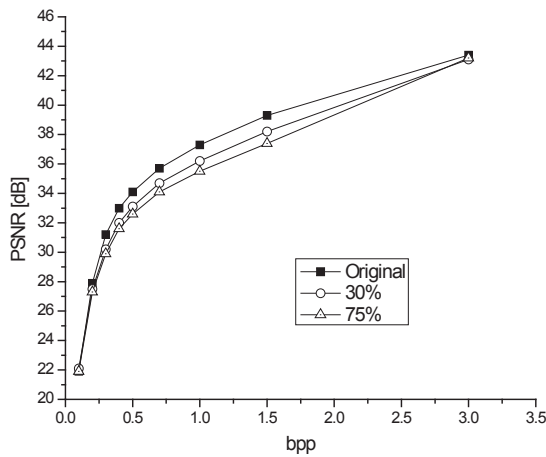
IMAGE	Bpp								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.7	1	1.5	3
Original	416.7	106.1	49.9	32.8	25.1	17.5	12.2	7.6	3.0
15%	398.9	110.0	54.4	37.4	29.0	20.6	14.2	8.9	3.1
30%	397.3	115.6	61.4	41.1	31.6	22.1	15.5	9.9	3.2
45%	399.6	117.1	63.5	42.7	33.1	23.6	16.4	10.4	3.2
60%	410.4	119.6	65.4	44.1	35.0	24.5	17.6	11.3	3.1
75%	418.0	121.6	66.5	45.3	36.1	25.4	18.2	11.7	3.1

**Table 2.** Values of SNR for the JPEG compression method.

IMAGE	bpp								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.7	1	1.5	3
Original	7.8	13.8	17.0	18.8	20.0	21.6	23.1	25.2	29.3
15%	8.4	14.0	17.1	18.7	19.8	21.3	22.9	25.0	29.5
30%	8.6	14.0	16.7	18.5	19.6	21.2	22.7	24.6	29.6
45%	8.6	13.9	16.6	18.3	19.4	20.9	22.5	24.4	29.6
60%	8.5	13.8	16.4	18.1	19.1	20.7	22.1	24.1	29.6
75%	8.3	13.6	16.3	17.9	18.9	20.4	21.9	23.8	29.6

**Table 3.** Values of PSNR for the JPEG compression method.

IMAGE	bpp								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.7	1	1.5	3
Original	21.9	27.9	31.2	33.0	34.1	35.7	37.3	39.3	43.4
15%	22.1	27.7	30.8	32.4	33.5	35.0	36.6	38.7	43.2
30%	22.1	27.5	30.2	32.0	33.1	34.7	36.2	38.2	43.1
45%	22.1	27.4	30.1	31.8	32.9	34.4	36.0	37.9	43.1
60%	22.0	27.4	30.0	31.7	32.7	34.2	35.7	37.6	43.2
75%	21.9	27.3	29.9	31.6	32.6	34.1	35.5	37.4	43.2



**Fig. 3.** Graphical dependence of peak signal / noise ratio (PSNR) for JPEG compression method.

From the given tables it can be seen that the MSE values decrease and the values of SNR and PSNR increase with increasing bpp for all images with different lighting conditions. At increased and decreased values of bpp, the changes in MSE are less pronounced in images with different lighting conditions.

From the graph shown in Fig. 3 and Table 3 it can be noted that at low values of bit rates, PSNR values are the same, and that an increase in the bit rates leads to a decrease in PSNR for the images with stronger lighting. At high bit rates values PSNR has again become the same regardless of the degree of image brightness.

The values of MSE, SNR and PSNR for different bit rates during compression using SPIHT for different illuminated images are given in Table 4, Table 5 and Table 6, respectively. Graphic changes of PSNR with increasing bit rates during compression SPIHT method are given in Fig. 4.

**Table 4.** Values of MSE for the SPIHT compression method.

IMAGE	Bpp								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.7	1	1.5	3
Original	68.8	35.0	23.1	17.0	13.7	8.9	6.5	3.6	0.6
15%	79.3	40.2	26.8	19.7	15.8	10.5	7.5	4.2	0.7
30%	85.2	43.3	29.1	21.5	17.2	11.4	8.2	4.5	0.7
45%	89.2	45.8	30.9	23.0	18.3	12.2	8.6	4.7	0.7
60%	92.2	48.1	32.4	24.4	19.3	12.8	9.0	4.8	0.7
75%	94.5	49.9	33.7	25.4	20.2	13.2	9.2	4.8	0.7

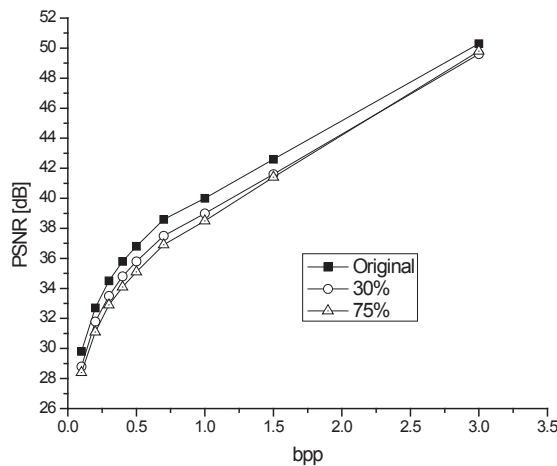
**Table 5.** Values of SNR for the SPIHT compression method.

IMAGE	Bpp								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.7	1	1.5	3
Original	15.6	18.6	20.4	21.7	22.7	24.5	25.9	28.5	36.2
15%	15.5	18.4	20.2	21.5	22.5	24.2	25.7	28.3	36.2
30%	15.3	18.2	20.0	21.3	22.2	24.0	25.5	28.1	36.1
45%	15.1	18.0	19.7	21.0	22.0	23.8	25.3	27.9	36.1
60%	14.9	17.8	19.5	20.7	21.7	23.5	25.1	27.8	36.1
75%	14.7	17.5	19.2	20.5	21.5	23.3	24.9	27.7	36.1

**Table 6.** Values of PSNR for the SPIHT compression method.

IMAGE	Bpp								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.7	1	1.5	3
Original	29.8	32.7	34.5	35.8	36.8	38.6	40.0	42.6	50.3
15%	29.1	32.1	33.9	35.2	36.1	37.9	39.4	41.9	49.8
30%	28.8	31.8	33.5	34.8	35.8	37.5	39.0	41.6	49.6
45%	28.6	31.5	33.2	34.5	35.5	37.3	38.8	41.5	49.6
60%	28.5	31.3	33.0	34.3	35.3	37.1	38.6	41.4	49.6
75%	28.4	31.1	32.9	34.1	35.1	36.9	38.5	41.4	49.8

From these tables it can be seen that, as in the case of JPEG compression methods, decreasing the value of MSE, PSNR, and SNR increase with increasing bit rates of all images with different lighting conditions.



**Fig. 4.** Graphical dependence of peak signal / noise ratio (PSNR) for SPIHT compression method.

From the graph shown in Fig. 4 and Table 6, we can see that the PSNR increases with increasing bit rates. If we look at the level of image brightness, we can see that unlike JPEG compression methods, for lower values of bit rates, PSNR values are different. Only with high bit rate values do they have almost the same PSNR. The highest value of PSNR is in the original image and with increasing brightness, the PSNR decreases. The PSNR difference between a picture with different brightness values is most pronounced at a bit rate of 0.5.

Fig. 5 shows the PSNR comparison between JPEG and SPIHT compression methods for the most and the least illuminated image. The JPEG method gives lower PSNR values in comparison to the SPIHT method regardless of the level of light.

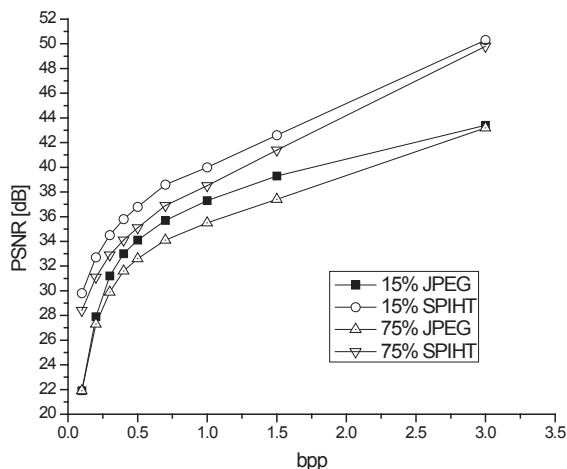


Fig. 5. Graphical dependence of peak signal / noise ratio (PSNR) for JPEG and SPIHT compression method at different levels of brightness.

## CONCLUSION

Based on results obtained, it can be concluded that the same quality compressed images is achieved at higher bit rates, no matter how the image is illuminated. This applies to both the analyzed methods of compression. With a reduction in the bit rate, better quality is obtained for a darker image. At extremely low speed (0.1 bit / picture element) we get the same compression quality for the JPEG method regardless of image brightness. The SPIHT method continues to get better results in darker images than brighter images.

In terms of compression methods, in all analyzes the SPIHT method gives better results than the JPEG compression method.

## ACKNOWLEDGEMENTS

This work was done within the research project of the Ministry of Science and Technological Development of Serbia III47016 and TR35026.

## REFERENCES

- [1] Wallace G. K., The JPEG still picture compression standard, *IEEE Trans. on consumer electronics*, 38 (1992), No 1.
- [2] Shapiro J. M., Embedded image coding using Zerotrees of wavelet coefficients, *IEEE Trans. Signal Process.* 41 (1993), No 12, pp. 3445-3462.
- [3] Usevitch B. E., A Tutorial on Modern Lossy Wavelet Image Compression: Foundations of JPEG 2000, *IEEE Signal Processing Magazine*, September 2001.
- [4] Malnar L., Kosović B., Batan J., Kompresija slike pomoću EZW algoritma, ZESOI, 2007.
- [5] Pearlman W. A., Said A., New fast efficient image codec based on SPIHT, *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 6 (1996).
- [6] Jančić M., Norme za kompresiju mirnih slika, FER, 2002.
- [7] <http://www.adobe.com/rs/products/photoshop.html>.
- [8] VCDemo, Delft University of Technology (TU-Delft) Faculty of Electrical Engineering, Mathematics, and Computer Science (EEMCS) ICT group, Delft, The Netherlands



# INFORMATION VISUALIZATION ON THE BASE OF GRAPH MODELS

## ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ИНФОРМАЦИИ НА ОСНОВЕ ГРАФОВЫХ МОДЕЛЕЙ

---

*Methods and tools for information visualization based on graph models are widely used in many applications, such as system and applied programming, biology, chemistry, artificial intellect, analysis of financial information, sociology and many others. In the paper, a survey on main existent methods of information visualization on the base of graph models is given.*

---

### ВВЕДЕНИЕ

Визуализация - это процесс преобразования больших и сложных видов абстрактной информации в интуитивно понятную визуальную форму. Универсальным средством такого представления структурированной информации являются графы. Графы применяются для представления любой информации, которую можно промоделировать в виде объектов и связей между объектами [1, 2]. Поэтому визуализация графовых моделей является ключевой компонентой во многих приложениях в науке и технике, а методы визуализации графов представляют собой теоретическую основу методов визуализации абстрактной информации. Методы и средства визуализации графов и графовых моделей широко используется в таких областях, как информационные системы и программное обеспечение, компьютерное обучение, биологические науки, искусственный интеллект, анализ финансовой информации, компьютерное моделирование и многие другие.

В зависимости от применения элементы<sup>3</sup> (вершины и ребра) графа должны изображаться различными способами. Например, вершины могут быть нарисованы в виде точек, кругов, прямоугольников или других геометрических фигур, или представлены неявно - через имена, которыми вершины помечены. Аналогично имеется большое разнообразие рисования ребер: например, в виде отрезков прямых, ломаных линий или кривых. Граф может рисоваться на плоскости или в трехмерном пространстве. Он может изображаться целиком, частично или иерархически, например, путем стягивания некоторых его подграфов в вершины, которые могут раскрываться по требованию. Изображения графа могут быть не только статическими, но и интерактивными, поддерживающими различные способы навигации, адекватные потребностям пользователя. Интерактивная визуализация может быть вызвана не только динамическим характером работы с визуальным представлением графа в приложении, но и большим размером визуализируемого графа. Если число элементов графа велико, его обработка может занимать неприемлемо большие ресурсы или даже достигать предельных возможностей используемой для визуализации платформы. Даже если возможно разместить и показать все элементы большого графа, часто возникают проблемы наглядности и удобства, поскольку на таком изображении графа становится невозможным различать его элементы (вершины и дуги). Интерактивная визуализация превращает статическую демонстрацию визуального представления информации в непрерывный процесс взаимодействия пользователя с информацией через её визуальное отображение и доступные ему навигации. Пользователь может исследовать, рассматривать, открывать, узнавать и манипулировать данными через визуальные метафоры.

Активная разработка методов и средств визуализации графов началась во второй половине 80-х годов прошлого столетия. Это было связано, с одной стороны, с возросшей потребностью опе-

---

1 Institute of Informatics Systems, Novosibirsk, Russia

2 Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

3 Здесь и ниже без определений используются стандартные термины теории графов (см., например, [3]).

рировать с большими объемами информации и сложными структурами данных, которые достаточно естественным образом представляются графами, а с другой стороны, с существенным прогрессом в развитии аппаратных средств, позволившим сделать графический интерфейс и компьютерную графику удобным и эффективным средством общения человека с компьютером.

В настоящее время вопросам визуализации графов и графовых моделей посвящена обширная литература (см., например, [1, 2, 4 - 15]), а на рынке широко представлены наукоемкие программные продукты, использующие методы визуализации информации на основе графовых моделей. Исследования в области визуализации графов и графовых моделей проводятся широким фронтом и имеют обширные и все более разнообразные сферы приложения. В работе [8] перечисляются в качестве основных источников, содержащих результаты этих исследований, такие журналы, как Journal of Graph Algorithms and Applications (JGAA), IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, Computational Geometry: Theory and Applications и Algorithmica, а также труды таких регулярных конференций, как Graph Drawing Symposia (GD), ACM Conference on Human Factors in Computing Systems (CHI), ACM Symposium on User Interface Software and Technology (UIST), IEEE Information Visualization Conference (InfoVis), Eurographics Workshop on Scientific Computing. Такая разбросанность исследований по журналам и конференциям, относящимся к весьма разной тематике, усложняет поиск подходящих методов визуализации при создании систем, использующих визуализацию графовых моделей, а также затрудняет объединение полученных результатов в единую теорию и/или структурированное множество методологий.

В докладе дается краткий обзор основных существующих методов визуализации структурированной информации на основе графовых моделей.

## **ЗАДАЧА ВИЗУАЛИЗАЦИИ ГРАФОВЫХ МОДЕЛЕЙ**

*Изображение (drawing)* (или, как иногда говорят, *представление, рисунок, расположение, укладка* или *раскладка*) графа на плоскости (или в пространстве) - это отображение вершин и ребер графа в множество точек плоскости (или пространства). Понятно, что один и тот же граф можно визуализировать разными способами, причем качество одного и того же изображения может по-разному оцениваться разными индивидуумами, а разные приложения могут требовать разные способы визуализации графа. Например, при работе с различными таксономиями часто желательнее ортогональное расположение ребер и меток, так как взаимодействие с изображением должно облегчать чтение сопутствующей информации, а при визуализации карт дорог нужно, чтобы расположение вершин и ребер соответствовали географическим реалиям. Поэтому главным критерием оценки качества методов визуализации информации является адекватность изображения графовой модели заданному типу информации и характеру её использования.

Понятие качественного способа рисования графа формализуется с помощью таких понятий, как *изобразительное соглашение*, *эстетический критерий* и *ограничение*.

*Изобразительное соглашение (drawing convention)* - это одно из основных правил, которому должно удовлетворять изображение графа, чтобы быть допустимым. Например, при рисовании блок-схемного представления программ можно использовать соглашение о том, что все вершины должны изображаться прямоугольниками, а дуги - ломаными линиями, состоящими из вертикальных и горизонтальных звеньев. При этом, конкретный вид соглашения реального применения может быть достаточно сложен и включать много деталей, касающихся изображения.

Широко используются следующие изобразительные соглашения:

- *полилинейное (polyline)* изображение предполагает, что каждое ребро графа рисуется в виде ломаной линии,
- *прямолинейное (straight-line)* изображение характеризуется тем, что каждое ребро представляется с помощью отрезка прямой,

- *ортогональное* (orthogonal) изображение предполагает, что каждое ребро графа изображается в виде ломаной линии, состоящей из чередующихся горизонтальных и вертикальных сегментов,
- *сетчатое* (grid) изображение предполагает, что все вершины, а также все точки пересечения и сгибы ребер имеют целочисленные координаты, т.е. находятся в узлах координатной сетки, образованной прямыми, параллельными координатным осям и пересекающими их в точках с целочисленными координатами,
- *плоское* (planar) изображение предполагает отсутствие точек пересечения у линий, изображающих ребра,
- *восходящее* (upward) (соответственно *нисходящее* (downward)) изображение имеет смысл по отношению к ациклическому орграфу и предполагает, что каждая дуга изображается ориентированной линией, координаты точек которой монотонно изменяются в направлении снизу вверх (соответственно сверху вниз) и слева направо.

*Эстетические критерии* (aesthetics) специфицируют такие свойства изображений, которые желательно применять в такой наибольшей степени, как только это возможно, чтобы повысить наглядность изображения. Широко используются следующие эстетические критерии: минимизация пересечений, минимизация сгибов, минимизация области размещения, максимизация разрешения, минимизация общей длины ребер, минимизация длины ребра, унификация длин ребер, минимизация числа сгибов на ребре, унификация сгибов, максимальная симметричность, минимизация коэффициента сторон.

Большинство из используемых эстетических критериев, как задачи оптимизации, являются сложными для решения с вычислительной точки зрения. Поэтому обычно при построении изображений используются различные эвристики и стратегии приближенных решений.

*Ограничения* (constraints). Если соглашения и эстетические критерии формулируются по отношению ко всему графу и его изображению, то ограничения относятся к отдельным подграфам и частям изображений.

Наиболее часто рассматриваются следующие ограничения: центр, когда требуется поместить заданную вершину ближе к центру изображения, внешность, когда требуется поместить заданную вершину на внешней границе изображения, кластер, когда требуется разместить заданную группу вершин рядом друг с другом, последовательность слева-направо (соответственно сверху-вниз), когда требуется нарисовать заданный путь горизонтально слева-направо (соответственно сверху-вниз).

## ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ДЕРЕВЬЕВ

Наиболее простым и широко используемым для решения задач визуализации информации подклассом графов являются деревья. Алгоритмы размещения деревьев имеют наименьшую сложность и являются наиболее простыми для реализации.

Корневые деревья часто используются для представления иерархий, таких как генеалогические деревья, организационные схемы или поисковые деревья. К их изображениям часто применяют дополнительные соглашения, эстетические критерии и ограничения. Например, при соглашении *включения* (inclusion) вершины корневого дерева изображаются прямоугольниками, а отношения отец-сын представляются включением одного прямоугольника в другой, а соглашение *опрокидывания* (tip-over) подобно классическому соглашению нисходящего плоского изображения корневого дерева, однако допускает, чтобы сыновья некоторых вершин располагались не горизонтально, а вертикально. Простой и эффективный метод построения нисходящего плоского изображения корневого дерева  $T$  состоит в использовании поуровневого расположения дерева, при котором вершины  $p$  глубины  $i$  имеют  $y$ -координату  $y(p'')=-i$ , а  $x$ -координаты присваиваются вершинам таким образом, чтобы разность  $x(p'')-x(p')$  имела тот же знак, что и разность

$x(\text{отец}(p'')) - x(\text{отец}(p'))$ ). Некоторой вариацией поуровневого изображения дерева является его *радиальное* расположение, в котором уровни имеют вид концентрических окружностей, а под-деревья занимают секторные сегменты.

«Свободные» деревья не представляют никакой иерархии и не имеют выделенного корня. Алгоритмы, применяемые к корневым деревьям, можно также использовать для получения допустимых радиальных изображений свободных деревьев, размещая вершины свободного дерева на концентрических окружностях по уровням относительно теоретико-графового центра дерева.

Гиперболическое размещение деревьев (или других классов графов) является одной из таких форм раскладки, которая разрабатывалась под влиянием вопросов визуализации графов большого размера и интерактивности. Первыми статьями в этом направлении были статьи Лэмпинга и Мунзнера 1995-1996 годов. Оба проекта были связаны с разработкой браузеров, которые основывались на предложенных авторами новых технологиях. Гиперболические виды, которые могут быть реализованы как в  $2D$ , так и в  $3D$ , представляют собой искаженный вид деревьев. Этот способ изображения похож на эффект от использования линз рыбьего глаза при традиционном размещении деревьев. Такое искаженное изображение позволяет осуществлять визуализацию потенциально больших деревьев, делая их пригодными для приложений из реальной жизни. Другая пространственная природа гиперболической геометрии делает некоторые весьма простые алгоритмы укладки графов заметно более жизнеспособными.

Существует два канонических способа отображения гиперболической плоскости на внутренность круга евклидовой плоскости. В обоих случаях одна окрестность гиперболической плоскости находится в фокусе в центре круга, в то время как остальная часть гиперболической плоскости постепенно исчезает в перспективе по мере приближения к границе круга. Первая каноническая модель - это *конформная модель Пуанкаре*, которая сохраняет углы, но превращает линии гиперболического пространства в дуги единичного круга. Вторая каноническая модель - это проективное отображение или *модель Клейна*, которая отображает линии гиперболического пространства в прямые линии на плоскости, но зато искажает углы.

Метод визуализации, получивший название *дерево-карта* (tree-map), впервые был использован для визуализации распределения дискового пространства между файлами в иерархической структуре директорий в 1991 году, но постепенно получил широкое применение для визуализации иерархических (древовидных) структур во многих областях визуализации от финансовой информации до результатов спортивных состязаний. Этот вид визуализаций дерева использует соглашение включения и является крайне эффективным при изображении численных атрибутов элементов (размер, стоимость, значение), организованных в большие иерархии.

Базовая идея метода состоит в том, чтобы изобразить дерево, каждая вершина которого имеет имя и численный атрибут, в виде прямоугольника, каждая вершина которого имеет имя и значение численного атрибута, равного сумме значений атрибута всех ее сыновей, внутри прямоугольника заданного размера.

Для изображения поддеревьев обычно используется рекурсивная процедура разбиения прямоугольника, соответствующего всему дереву, на прямоугольники меньшей площади без незаполненных пространств и наложений. Для этого площадь прямоугольника разбивается горизонтальными и вертикальными линиями на прямоугольники, площадь которых пропорциональна значению данного атрибута. Такая разновидность метода называется методом *продольно-поперечных разрезов* (Slice-and-Dice).

Рассматриваются также различные модификации данного метода, использующие для изображения вершин графа геометрические фигуры, отличные от прямоугольников. Например, *деревья-карты Вороного* (Voronoi treemaps) используют сечения Вороного для вычисления размещения произвольных многоугольников, заполняющих пространство экрана. Весьма популярны также *круговые деревья-карты* (circular treemaps). Хотя эти методы могут приводить к неполному

заполнению больших кругов кругами меньшего радиуса, они позволяют строить изображения, хорошо показывающие вложенность, и поэтому используются для визуализации всевозможных иерархических структур, включая онтологии, тезаурусы, метрики программного обеспечения и т.д.

## МЕТОДЫ РИСОВАНИЯ

Большинство методологий рисования графа основывается на следующих двух простых наблюдениях: эстетические критерии часто противоречат друг другу и таким образом поиски компромиссов неизбежны; даже если эстетические критерии не конфликтуют, часто алгоритмически трудно удовлетворить всем им одновременно.

Тем не менее имеется ряд методов, которые позволяют получить удовлетворительные решения задач визуализации графов; основными среди них являются следующие четыре.

*Планаризация.* Плоские расположения графов, т.е. без пересечений рёбер, обычно более привлекательны, чем неплоские. Например, они весьма важны в технологиях печатных плат с точки зрения минимизации размещения.

Существует целый ряд методов укладки планарных графов, которые опираются на специальные упорядочения вершин, часто называемые *каноническими*. В этих алгоритмах сначала вершины упорядочиваются, а затем по одной (или группами) вершины последовательно добавляются в соответствии с найденной упорядоченностью к структуре данных, описывающей представление графа.

Некоторые планарные графы можно нарисовать на плоскости таким образом, чтобы каждая граница грани являлась выпуклым многоугольником. Такое представление возможно для графа только тогда, когда границы всех граней являются простыми циклами. Таким образом, граф, не являющийся двусвязным, не имеет выпуклого представления, а для любого 3-связного графа существует выпуклое представление (теорема Татта).

К сожалению, на практике многие графы не являются планарными, более того, почти все графы не являются планарными. Можно пытаться сделать граф планарным, удаляя из него либо как можно меньше ребер (эта проблема является *NP*-полной), либо те ребра, чья вставка впоследствии может создать наименьшее число пересечений. Эта проблема минимизации пересечений является в общей постановке *NP*-трудной, но есть некоторые эвристики, которые позволяют получать вполне удовлетворительные результаты.

*Использование физических аналогий.* Эти методы интерпретируют граф при построении его изображения как физическую систему с силами между вершинами и пытаются минимизировать энергию системы для получения хорошего рисунка. Наиболее простой подход состоит в использовании комбинации пружин и электронных сил, когда каждое ребро рассматривается как пружина, а вершины считаются одинаково заряженными частицами, между которыми действуют силы отталкивания. Такого типа методы часто используются для рисования произвольных (разреженных) сетей, таких как блок-схемы, графы программного планирования, графы телефонных вызовов и т.п. Они также применяются для построения кластерных изображений.

В общем случае методы, основанные на использовании физических аналогий, дают хорошие результаты для относительно небольших графов, но не являются хорошо масштабируемыми. Большие графы часто приводят к тому, что функция энергии становится весьма трудной для достижения минимума. Более того, типичный алгоритм, реализующий данные методы, является итерационным. Во время каждой итерации позиции всех вершин переопределяются на основе результата предыдущей итерации, что вероятно требует  $O(n^2 + m)$  времени, где  $n$  и  $m$  - количества вершин и ребер соответственно. Для достижения хорошей раскладки графа обычно требуется  $O(n)$  итераций. Следовательно, общая временная сложность итерационного алгоритма составляет  $O(n^3)$  или даже  $O(n^4)$ . Кроме того, основанные на физических аналогиях алгоритмы раскладки

не обладают предсказуемостью (см. ниже), и это означает, что один и тот же алгоритм, обрабатывая один и тот же граф, может получать совсем непохожие результаты. Отсутствие свойства предсказуемости у данных алгоритмов может вызывать в некоторых случаях серьезные проблемы, поскольку навигация пользователя сильно зависит от визуального представления графов.

*Поуровневые* или *Сугияма-подобные* методы. Наиболее широко используемыми алгоритмами рисования являются алгоритмы, относящиеся к классу, предложенных Сугиямой. Они производят *поуровневые* (или *иерархические*) изображения для ациклических орграфов, пытаются также минимизировать количество пересечений или размер области размещения.

Канонически метод поуровневого изображения состоит из трех основных последовательно применяющихся шагов.

Первый шаг - это распределение вершин орграфа по уровням. Каждой вершине  $u$  присваивается число  $L(u)$ , указывающее уровень этой вершины, так, чтобы все дуги, соединяющие вершины, следовали от меньшего номера к большему, при этом вершины одного уровня не должны быть связаны между собой. Подразумевается, что все вершины одного уровня будут расположены на одной прямой - вертикальной или горизонтальной - в зависимости от того, какое мы предпочитаем общее направление размещения: сверху вниз или слева направо.

Задача второго шага состоит в сортировке вершин на каждом из уровней. Порядок вершин определяет топологию конечного изображения и должен быть выбран с целью минимизации пересечений ребер графа. Следует отметить, что количество пересечения дуг в поуровневом графе не зависит от конечных координат вершин, а зависит только от их относительного положения внутри каждого уровня. Таким образом, задача данного этапа является не геометрической, а всего лишь комбинаторной. Однако эта задача является *NP*-полной уже для графа, имеющего всего лишь два уровня, и, более того, *NP*-полной эта задача остается, даже если есть всего лишь одна вершина со степенью, большей единицы на каждом из уровней.

На третьем шаге каждой вершине присваивается вертикальная координата (при размещении в горизонтальном направлении) так, чтобы сохранить порядок вершин на уровне, который был вычислен на предыдущем шаге. Координата выбирается с целью минимизации общей длины дуг и количества изломов. Наконец, конечное изображение получается представлением каждой дуг в виде прямолинейного отрезка и удаления фиктивных вершин. В этом случае длинные дуги оказываются изображенными в виде ломанных.

Выбор подкласса ациклических орграфов для рисования можно объяснить двумя причинами. Во-первых, преимущественное большинство реальных графов, встречающихся в программировании, являются ациклическими орграфами, а, во-вторых, любой ориентированный (и тем более неориентированный) граф может быть преобразован к ациклическому орграфу путем смены или задания ориентации у части его ребер. Методы, основанные на поуровневом размещении (иерархический подход), хотя и не являются лидерами по всем эстетическим критериям, однако значительно опережают конкурентов на больших графах, возникших в реальных приложениях.

*Потоковые методы.* Проблема минимизации числа сгибов может эффективно решаться путем сведения ее к задаче потока в сети, по крайней мере, в тех случаях, когда зафиксирована топология размещения. Те же самые методы могут применяться для максимизации углов между ребрами.

## **ВИЗУАЛИЗАЦИЯ БОЛЬШИХ ГРАФОВ**

Размер визуализируемого графа является ключевой проблемой при визуализации графов. Большие графы ставят ряд сложных проблем. Если число элементов графа велико, его обработка может выходить за границы производительности или даже достигать предельных возможностей используемой для визуализации платформы. Даже если возможно разместить и показать все элементы большого графа, возникают проблемы наглядности и удобства, поскольку становит-

ся невозможным различать вершины и дуги. По существу, проблема удобства возникает даже раньше, чем проблема различия элементов. Хорошо известно, что охватывающий и детальный анализ данных в графовой структуре наиболее прост, когда размер демонстрируемого графа не большой.

Вообще говоря, нет смысла проверять планарность графа, состоящего из нескольких сотен вершин, и пытаться минимизировать количество пересечений ребер. Часто более очевидным и практическим решением является простое размещение покрывающего дерева графа. Как известно, алгоритмы размещения деревьев имеют наименьшую сложность и являются наиболее простыми для реализации. При таком подходе проблема визуализации включает задачу нахождения покрывающего дерева. Он также предполагает построение изображения графа на основе уже построенного изображения дерева, которое содержит все вершины данного графа и перед этим было извлечено из него. При этом сам процесс построения сводится к добавлению некоторых дополнительных ребер к уже имеющемуся изображению дерева. Существенно, что, используя определенные изображения покрывающих деревьев для укладки графов, мы можем также получать размещения графа с определенными свойствами.

Другим популярным подходом к визуализации больших графов является переход от  $2D$  к  $3D$  изображению. Имеется громадное число методов представления графов на плоскости. Дополнительное третье измерение (переход от  $2D$  к  $3D$  изображению), однако, имеет ряд преимуществ. Оно позволяет более гибко размещать элементы графа и вообще обходиться без пересечений. С другой стороны, при использовании дополнительного измерения возникают новые проблемы, поскольку текущие устройства вывода являются двумерными по своей природе и поддерживают ограниченные разрешение и область визуализации. Поэтому результирующие изображения усложняются и становятся трудными для просмотра. Эти недостатки можно преодолеть с помощью таких навигационных операций как повороты, сдвиги и масштабирование. Указанные операции позволяют эффективно использовать область экрана и дают возможность пользователю разрешить неоднозначности для больших графов при сопровождении их общих абстрактных представлений. Возможность изменения точки зрения в  $3D$  позволяет также снизить проблему пересечений ребер, связанную с двумерным изображением трехмерного графа на экране.

При работе с большими графами часто используются специальные методы, позволяющие уменьшать количество деталей, размещаемых одновременно. Вместо статического размещения также используются различные интерактивные методы с применением навигации и методов выделения (фокус+контекст), включающих геометрическую или семантическую деформацию, кластеризацию, агрегацию и другие техники.

В 1986 году Фурнас описал класс методов, в которых вершины иерархической структуры автоматически включаются или удаляются из изображения в соответствии автоматически вычисляемой степенью пользовательского интереса, зависящей от априорной значимости данной вершины и её расстояния в дереве от вершины, выбранной пользователем в качестве фокуса. Он создал системы для просмотра и фильтрации структурированного программного кода, биологических таксономий и календарей, а также экспериментально продемонстрировал удобство этих динамические изображений для пользователя. Существует целый ряд методов и систем, использующих метрику Фурнаса для упрощения изображения путём фильтрации или кластеризации, а также для построения изображений, которые позволяют пользователю фокусироваться на некоторых деталях без потери контекста. В 1992 году Саркар и Браун обобщили данный подход на случай произвольного графа, предложив использовать в качестве функции расстояния до фокуса - евклидово расстояние между вершинами уже существующего изображения.

*Кластеризация* (clustering) в общем случае - это процесс разбиения заданной выборки объектов (ситуаций) на подмножества, называемые *кластерами* (clusters), так, чтобы каждый кластер состоял из схожих объектов, а объекты разных кластеров существенно отличались. Кластеризация позволяет уменьшать количество видимых элементов графа с сохранением при этом его

глобальной структуры. Конкретным примером, где её применение весьма оправдано, являются так называемые *графы малых миров* (small-world graphs) - графы, которые имеют небольшой средний кратчайший путь между вершинами, но высокую степень кластеризации (по сравнению с усреднённым графом соответствующего размера). Это свойство присуще многим графам реальных приложений, таких как социальные сети, нейронные сети, программные системы, сети электроснабжения, базы знаний с перекрестными ссылками и Интернет.

Если кластеризация выполняется последовательным применением одного и того же процесса кластеризации к группам, обнаруженным на предыдущем шаге кластеризации, то говорят об *иерархической кластеризации* (hierarchical clustering). Результатом такой иерархической кластеризации является иерархия по включению, и по ней можно осуществлять навигацию как по дереву, в котором каждый кластер представлен в виде вершины. Следовательно, иерархическая кластеризация может быть использована для порождения иерархий в графах и построения на их основе так называемых *иерархических графов* (hierarchical graphs), ориентированных на поддержку визуализации сложных информационных моделей [4, 9 - 13].

*Иерархический граф  $H$*  - это пара  $(G, T)$ , которая состоит из графа  $G$  и корневого дерева  $T$ , вершины которого соответствуют элементам некоторой иерархии фрагментов  $F$  графа  $G$ , а дуги отражают отношение их непосредственной вложенности.  $T$  называется *деревом вложенности*, а  $G$  - *основным графом* иерархического графа  $H$ .

В ряде случаев только за счет выбора подходящего способа изображения ребер можно уменьшить запутанность (clutter) изображения, что особенно важно для тех графов, чьи вершины должны иметь predeterminedенные позиции, как это, например, имеет место в геоинформационных приложениях. В частности, запутанность изображения можно уменьшить путем замены полилинейных линий, изображающих ребра, на гладкие кривые. Другие способы - это различные методы слияния изображений ребер или их выборочного изображения.

## ИНТЕРАКТИВНАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ

Рассмотренные выше методы используются для рисования статических графов. Однако, есть ряд применений, требующих построения интерактивных изображений графов. Среди них: инструменты отладки, сохранение документов, модули отношений сущностей, схемы СБИС, а также Web-графы.

Средства навигации и интерактивности являются существенными также при визуализации информации большого объема. Сам алгоритм размещения графа не может преодолеть проблемы, вызванные громадными размерами визуализируемых графов, возникающих в различных приложениях. К тому же размещение внутри одного изображения большого количества элементов может лишь ухудшить понимаемость и наглядность графового изображения.

При разработке интерактивных визуализаций существенной становится временная сложность алгоритмов. Возникает необходимость в разработке алгоритмов, сложность которых близка к линейной. Также появляется новый критерий качества для динамических и интерактивных алгоритмов, называемый *предсказуемостью* (или *сохранением ментальной карты*). Этот критерий требует, чтобы два разных исполнения одного и того же алгоритма на одних и тех же или похожих данных давали похожий результат.

Обычно процесс создания интерактивной визуализации распадается на два последовательных этапа. Первый этап состоит в отображении исходных данных на геометрическую плоскость в виде статического графового изображения. Содержанием второго этапа является собственно навигация, обеспечивающая пошаговое изменение изображения и позволяющая достичь той формы представления информации, которая нужна пользователю в данный момент. Как правило, на этом этапе применяются различные методы поддержки взаимодействия пользователя с графовым изображением, построенном на первом этапе, но иногда реализация второго этапа - это



многократное выполнение первого этапа с измененными требованиями к получаемому графовому изображению.

*Приближение (zoom) и прокрутка (pan)* - традиционные инструменты интерактивной визуализации. Они весьма необходимы, когда просматривается громадная графовая структура. Приближение путем увеличения масштаба изображения особенно хорошо подходит для графов, поскольку графические элементы, используемые для их изображения, обычно являются достаточно простыми (линии и простые геометрические формы). Это означает, что приближение может в большинстве случаев осуществляться не масштабированием пиксельного образа, а простыми настраиваемыми преобразованиями сцены и перерисовкой содержимого сцены по внутреннему представлению, при которой может изменяться видимая часть графа и показываться больше ее деталей.

Уже отмечалось, что во многих приложениях размер графов является основной проблемой при их визуализации. Имеются случаи, когда этот размер так велик, что делает вообще невозможным показать весь граф целиком; сеть Интернет является очевидным примером. Методы *инкрементального просмотра (incremental exploration)* хорошо подходят для таких ситуаций. Система демонстрирует только небольшую часть всего графа, а другие части графа демонстрируются по мере необходимости. Преимущество такого инкрементального подхода состоит в том, в любой заданный момент на сцене может демонстрироваться только подграф ограниченного размера, и, следовательно, перестает быть критическим время, необходимое на построение изображения и осуществление взаимодействия с ним.

В процессе взаимодействия пользователь может иметь возможность открывать и закрывать новые окна для рассмотрения тех или других частей визуализируемого графа, а также осуществлять различные манипуляции с изображением, представленным в том или в другом окне. Часто оказывается полезным предоставлять пользователю отдельное окно для общего изображения большого графа с показом на нем частей графа, визуализируемым в других окнах.

При этом помимо стандартных методов навигации, таких как открытие (и закрытие) новых окон, масштабирование, прокрутка или инкрементальный просмотр, широко используются специальные методы взаимодействия с графовой информацией, такие как фильтрация, выделение, кластеризация и различные деформации.

Методы деформации *фокус+контекст (focus+context)* предназначены для взаимодействия с изображениями большого объема и позволяют совместить в одном изображении глобальный вид всей представленной структуры (графа, дерева, меню, календаря, таблицы и т.д.) и детали некоторого её фрагмента, находящегося в фокусе. Другой пример деформации - так называемая метафора *резинового листа (rubber-sheet)*, при которой дисплей действует как резиновый лист с закреплёнными границами, в котором растягивание одних областей приводит к сморщиванию других.

## **СИСТЕМЫ ВИЗУАЛИЗАЦИИ**

Преимущества представления сложных структур и процессов графами становятся более ощутимыми при наличии хороших средств их визуализации. Поэтому неслучайно в последнее время в мире растет интерес к созданию и использованию систем визуализации информации на основе графовых моделей, которые условно можно разделить на два класса.

К первому (более широкому) классу относятся узкоспециальные системы, которые ориентированы на графовые модели с определенной семантикой и топологией.

Второй класс - это универсальные системы визуализации, такие как daVinci, GraphEd, Graphlet, GraVis, VCG, GLT, aiSee, yEd, которые, как правило, являются зарубежными. Первой и, пожалуй, до сих пор единственной отечественной универсальной системой визуализации является созданная в ИСИ СО РАН система Higes, ориентированная на многооконную работу с атрибутированными

иерархическими графовыми моделями. Важным отличием системы Higras от других универсальных систем визуализации является ее способность сохранять во внутреннем представлении и визуализировать не только сам граф, но и его семантику, представленную в виде системы типов атрибутированных вершин, дуг и фрагментов графа, а также библиотеки алгоритмов обработки - так называемых внешних модулей [12, 13].

Наряду со специализированными и универсальными системами визуализации на основе графовых моделей широко распространены и используются различные библиотеки классов, такие как LEDA, ffGraph, Graph Drawing Server. Они позволяют описывать семантику графовой модели путем создания производных классов с дополнительными атрибутами и обычно включают множество других полезных функций, связанных как с визуализацией графов, так и с выполнением на них различных теоретико-графовых алгоритмов и алгоритмов рисования.

## **БЛАГОДАРНОСТИ**

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ N 12-07-0091).

## **ЛИТЕРАТУРА**

- [1] Касьянов В.Н. Применение графов в программировании. Программирование. N 3. 2001. С.51-70.
- [2] Касьянов В.Н., Евстигнеев В.А. Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. СПб.: БХВ-Петербург. 2003.
- [3] Евстигнеев В.А., Касьянов В.Н. Толковый словарь по теории графов в информатике и программировании. Новосибирск: Наука. 1999.
- [4] Касьянов В.Н. Иерархические графы и графовые модели: вопросы визуальной обработки. Проблемы систем информатики и программирования. Новосибирск: ИСИ СО РАН. 1999. С.7-32.
- [5] Касьянов В.Н., Касьянова Е.В. Визуализация графов и графовых моделей. Новосибирск: Сибирское Научное Издательство. 2010.
- [6] Di Battista G., Eades P., Tamassia R., Tollis I. G. Graph Drawing: Algorithms for Visualization of Graphs. Prentice Hall. 1999.
- [7] Drawing Graphs. Methods and Models. Berlin: Springer, 2001.
- [8] Herman I., Melancon G., Marshall M.S. Graph visualization and navigation in information visualization: a survey. IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics. Vol.6. 2000. P.24-43.
- [9] Kasyanov V. N. Hierarchical graphs and visual processing. ICM 1998 International Congress of Mathematicians. Abstracts of Short Communications and Poster Sessions. Berlin. 1998. P.292.
- [10] Kasyanov V. N. Methods and tools for structural information visualization. WSEAS Transactions on Computers. Vol.12. Issue 7. 2013. P.349-359.
- [11] Kasyanov V.N. Kasyanova E.V. Information visualization based on graph models. Enterprise Information Systems. Vol.7. N 2. 2013. P.187-197.
- [12] Kasyanov V.N., Lisitsyn I.A. Hierarchical graph models and visual processing. Proc. of Intern. Conf. on Software: Theory and Practice. 16th World Computer Congress IFIP. Beijing. PHEI. 2000. P.179-182.
- [13] Lisitsyn I.A., Kasyanov V.N. Higras - visualization system for clustered graphs and graph algorithms. Lecture Notes in Computer Science. Vol.1731. 1999. P.82-89.
- [14] Nishizeki T., Rahman M. Planar graph drawing. World Scientific. 2004.
- [15] Sugiyama K. Graph drawing and applications. For software and knowledge engineers. World Scientific. 2002.

## SUPPORT TOOLS FOR APPLICATION OF GRAPHS AND GRAPH ALGORITHMS

### ИНСТРУМЕНТЫ ПОДДЕРЖКИ ПРИМЕНЕНИЯ ГРАФОВ И ГРАФОВЫХ АЛГОРИТМОВ

---

*Graphs are the most common abstract structure encountered in computer science and have many areas of application. In the paper, the WikiGRAPP, WEGA, Higes and Visual Graph systems which are under development in A.P. Ershov Institute of Informatics Systems as support tools for application of graph-theory methods to informatics and programming are considered.*

---

#### ВВЕДЕНИЕ

Теория графов стала активно применяться на заре программирования в силу удобного выражения задач обработки информации на теоретико-графовом языке. Расширение круга задач, решаемых на ЭВМ, потребовало выхода на модели дискретной математики, что привело к подлинному расцвету теории графов и комбинаторики, которые за прошедшие полвека трансформировались из разделов «досуговой» математики в первостепенный инструмент решения огромного числа задач. Академик Андрей Петрович Ершов, основатель сибирской школы информатики и программирования, называл графы основной конструкцией для программиста и говорил, что «графы обладают огромной, неисчерпаемой изобразительной силой, соразмерной масштабу задачи программирования».

Современное состояние программирования нельзя представить себе без графов и графовых алгоритмов. Хорошо известно, что многие задачи повышения качества трансляции с точки зрения улучшения рабочих характеристик транслятора и повышения качества получаемых машинных программ формулируются и решаются как задачи на графах и графовых моделях. К ним относятся, в первую очередь, задачи, связанные с представлением программ в виде схем программ и синтаксических деревьев. Кроме того, необходимо указать на такие области применения граф-моделей, как

эффективное использование ресурсов вычислительной системы (оптимизация использования регистров, уменьшение обменов между оперативной и внешней памятью и т.д.), организация больших массивов информации (деревья и, вообще, графы данных для повышения эффективности информационного поиска), увеличение степени параллелизма программы, повышение эффективности работы многопроцессорных и многомашинных систем (распределение загрузки процессоров, обмен сообщениями между процессами, синхронизация, конфигурация сетей связи между процессорами и т.д.). Решение этих и подобных задач привело к появлению множества граф-моделей, связанных как с программами и структурами данных, так и с вычислительными системами, в том числе параллельными (см., например, [1, 2]).

Широкая применимость графов связана с тем, что они являются естественным средством объяснения сложных ситуаций на интуитивном уровне. Эти преимущества представления сложных структур и процессов графами становятся более ощутимыми при наличии хороших средств их визуализации. Поэтому неслучайно в последнее время в мире растет интерес к методам и системам рисования и визуальной обработки графов и графовых моделей [3]. Многие программные системы, особенно те, которые используют информационные модели, включают элементы визуальной обработ-

1 Institute of Informatics Systems, Novosibirsk, Russia

2 Institute of Automation and Electrometry, Novosibirsk, Russia

3 Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

ки графовых объектов. Среди них - системы и окружения программирования, инструменты CASE-технологии, системы автоматизации проектирования и многие другие.

Доклад посвящен средствам поддержки применения графов в информатике и программировании, которые разрабатываются в Институте систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты РФФИ № 09-07-0012, № 12-07-0091). В нем рассматриваются работы по созданию электронного словаря по графам в информатике WikiGRAPP и электронной энциклопедии графовых алгоритмов WEGA, а также систем визуализации графов и графовых алгоритмов Higes и Visual Graph.

### ВИКИ-СЛОВАРЬ WIKIGRAPP

Проблема терминологии, без сомнения, является одной из основных проблем в применении теоретико-графовых методов в программировании и информатике. Терминология в при-

кладной теории графов далеко не устоялась, при написании статей требуется терминологическая привязка к одной из существующих на русском языке монографий, что становится все более трудным делом из-за сокращения числа издающихся книг, в том числе переводных, и резкого сокращения их тиража. Созданный нами расширяемый электронный словарь по графам в информатике WikiGRAPP (см. рис. 1) призван если не решить, то значительно облегчить эту проблему.

В 1999 году в издательстве «Наука» вышел в свет толковый словарь по теории графов и её применению [4], который охватывал основные связанные с графами термины из монографий, вышедших на русском языке. Это был первый словарь по графам в информатике, и он вызвал большой интерес среди читателей. Электронная версия словаря получила название GRAPP (GRaphs and their APplications). Новое исправленное и пополненное издание словаря [5], работа над которым была завершена авторами в 2009 году, представляет собой рас-

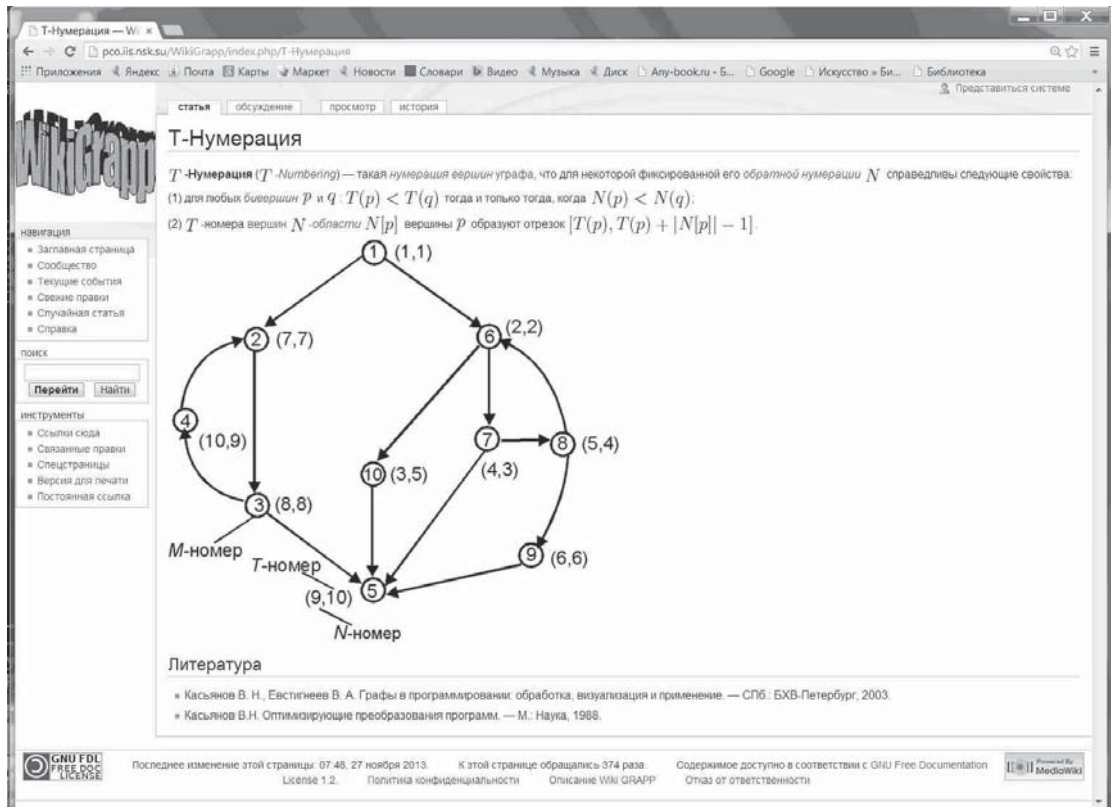


Рис. 1. Электронный словарь по теории графов WikiGRAPP

ширение словаря 1999 года и включает в себя более 1000 новых терминов из статей, рефераты которых публиковались в РЖ «Математика» в разделе «Теория графов», а также из томов ежегодных конференций «Graph-Theoretic Concepts in Computer Science» и книг серии «Graph Theory Notes of New York».

Авторы словарей отдавали себе отчет в постоянно развивающемся теоретико-графовом лексиконе в информатике и поэтому одновременно с завершением работ по подготовке второго словаря к изданию инициировали работы по созданию на базе изданных словарей новой версии электронного словаря, которая была бы расширяемой. Новый словарь [6], получивший название WikiGRAPP (см. рис. 1), обладает интерактивностью и поддерживает коллективную сетевую работу по его пополнению и развитию. Для его создания мы использовали систему MediaWiki [7] - написанное на препроцессоре гипертекста (PHP) свободно распространяемое программное обеспечение, предназначенное для создания гипертекстовых «вики»-систем - таких веб-сайтов, структуру и содержимое которых пользователи могут сообщать изменять с помощью инструментов, предоставляемых самими сайтами. И хотя MediaWiki изначально создавалась в качестве «движка» всем известной Википедии, она имеет гораздо более широкое применение в многочисленных и весьма разнообразных сайтах, включая сайт о самой системе MediaWiki [7].

К настоящему времени практически завершена работа по наполнению словаря WikiGRAPP до уровня, покрывающего печатные издания, и начата работа по исправлению обнаруженных опечаток и пополнению словаря.

## **ВИКИ-ЭНЦИКЛОПЕДИЯ WEGA**

Теория графов из академической дисциплины все более превращается в средство, владение которым становится решающим для успешного применения компьютеров во многих прикладных областях. Несмотря на наличие обширной специальной литературы по решению задач на графах, широкое применение в практике программирования полученных математических результатов затруднено в силу отсутствия систематического их описания, ориентирован-

ного на программистов. Поэтому значительный класс практических задач, по существу сводящихся к простому выбору подходящего способа решения и к построению конкретных формулировок абстрактных алгоритмов, для многих программистов все еще остается полем для интеллектуальной деятельности по «переоткрытию» методов.

Выполнен цикл работ по изучению и систематизации алгоритмов обработки, визуализации и применения графовых моделей в программировании. Впервые издана книга [2], которая содержит систематическое и полное изложение фундаментальных основ современных компьютерных технологий, связанных с применением теории графов. Даны основные модели, методы и алгоритмы прикладной теории графов. Подробно описаны такие основные области приложения теории графов в программировании, как хранение и поиск информации, трансляция и оптимизация программ, анализ, преобразование и распараллеливание программ, параллельная и распределенная обработка информации.

Ведётся работа по созданию на базе этой книги вики-системы WEGA, являющейся расширяемой интерактивной электронной энциклопедией теоретико-графовых алгоритмов решения задач информатики и программирования (см. рис. 2).

В отличие от Д. Кнута, при создании данной энциклопедии мы, как и в изданной книге, ориентируемся на абстрактную модель современных ЭВМ (равнодоступная адресная машина - РАМ) и высокоуровневое описание алгоритмов в терминах специального языка высокого уровня - ВУ-язык. Этот язык является псевдоязыком (лексиконом) программирования и содержит в качестве базовых традиционные конструкции математики и языков программирования. Наряду с обычными для современных языков типами простых и составных данных он допускает такие более сложные структуры данных, как, например, деревья, графы и т.д. Для каждой базовой конструкции ВУ-языка фиксируется класс её допустимых реализаций на РАМ. Предполагается, что ВУ-язык позволяет наряду с базовыми использовать любые необходимые конструкции, если очевидны или заранее за-



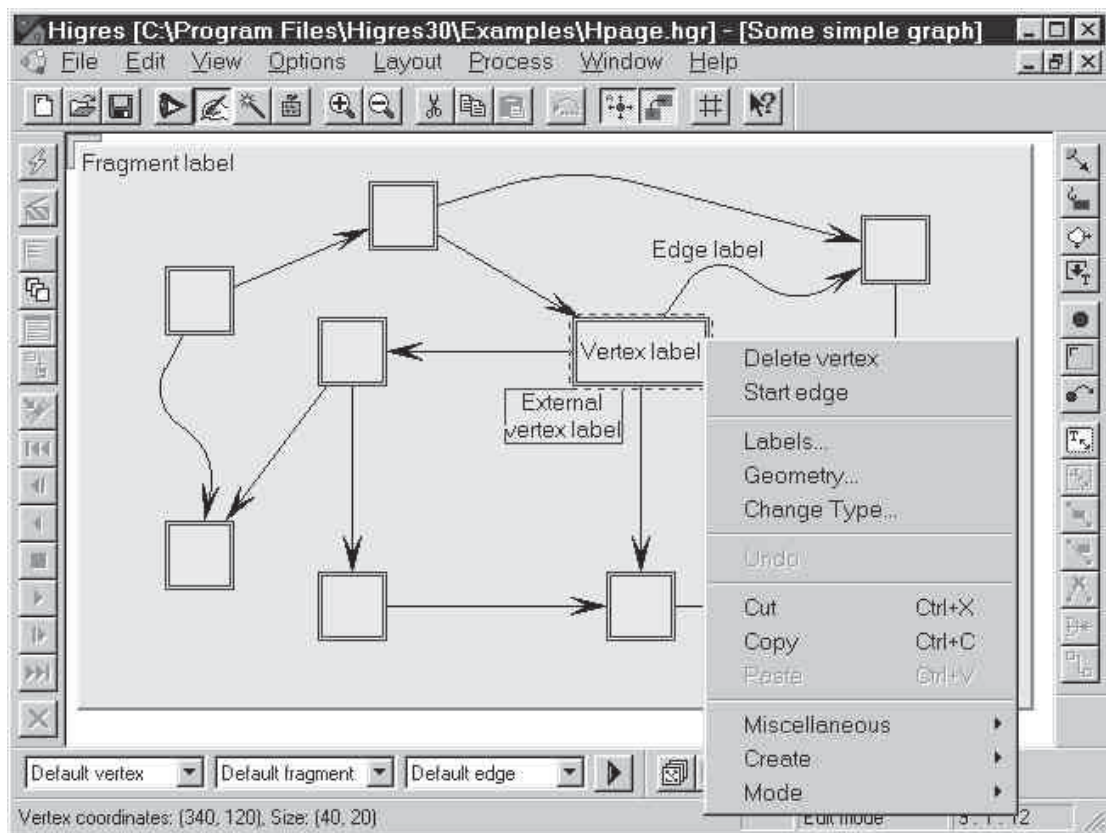


Рис. 3. Графовый редактор Higras

лизации графов и графовых моделей, в котором наряду с более традиционными вопросами качества и эффективности при автоматическом размещении графов на плоскости большое внимание было уделено вопросам визуализации больших графов, интерактивности и навигации, характерным для большинства современных приложений, использующих визуализацию структурированной информации [3].

Предложена и исследована модель иерархических графов, ориентированная на моделирование сложно организованных систем и охватывающая классы составных и кластерных графов, традиционно используемых для представления информационных моделей, обладающих иерархической структурой [8 - 11].

Разработаны эффективные методы и алгоритмы построения наглядных изображений иерархических графовых моделей на плоскости и их редактирования, и создан графовый редактор Higras (см. рис. 3), поддерживающий мно-

гоконную работу с иерархическими графами [12 - 14]. Важным его отличием от других графовых редакторов является способность Higras сохранять во внутреннем представлении и визуализировать не только сам граф, но и его семантику, представленную в виде системы типов атрибутированных вершин, фрагментов и дуг графа и библиотеки алгоритмов обработки - так называемых внешних модулей. При этом пользователь может корректировать и доопределять семантику графовой модели с помощью введения новых типов и внешних модулей, а также управлять методами её визуализации. Такой подход обеспечивает, с одной стороны, универсальность системы Higras, с другой - возможность её специализации.

Несомненным достоинством системы Higras является также то, что она является не только редактором иерархических графовых моделей, но и платформой для исполнения и анимации алгоритмов работы с иерархическими графами.

Пользователь с помощью системы может выбрать нужный ему алгоритм из расширяемой библиотеки внешних модулей (в частности алгоритм автоматического размещения графа на плоскости) и запустить его. Система передает текущий граф обрабатывающему модулю и открывает специальное окно, предоставляющее пользователю интерфейс для управления работой модуля. Пользователь может регулировать параметры обработки, прерывать ее на любом шаге, просматривать промежуточные результаты в любую сторону в форме анимации либо в покадровом режиме (см. рис. 4).

Анимация алгоритмов, поддерживаемая системой Higes, может быть использована для их тестирования и отладки, для образовательных целей, а также для изучения итеративных процессов, возникающих, например, в некоторых методах рисования графов.

Создана также экспериментальная версия универсальной расширяемой системы Visual Graph (см. рис. 5) для визуализации атрибути-

рованных иерархических графовых моделей большого размера, представленных на языке GraphML [15 - 17]. Система работает под управлением ОС Windows, Linux и MacOS и ориентирована на визуализацию структур данных, возникающих в компиляторах. Она поддерживает интерактивное управление визуализацией графовых моделей и удобную навигацию по визуализируемым графовым моделям. В отличие от зарубежных аналогов (таких, как, например, система aiSee) система Visual Graph позволяет: обрабатывать информацию, представленную в виде произвольных иерархических графов (в том числе составных и кластерных графов), использовать для спецификации входного (визуализируемого) графа стандартный язык описания графов GraphML, поддерживать расширяемость системы и настройку её на нужды конкретного пользователя, осуществлять анализ и визуализацию структурных свойств атрибутированных графовых моделей, а также производить полнофункциональный поиск и навигацию по значениям атрибутов.

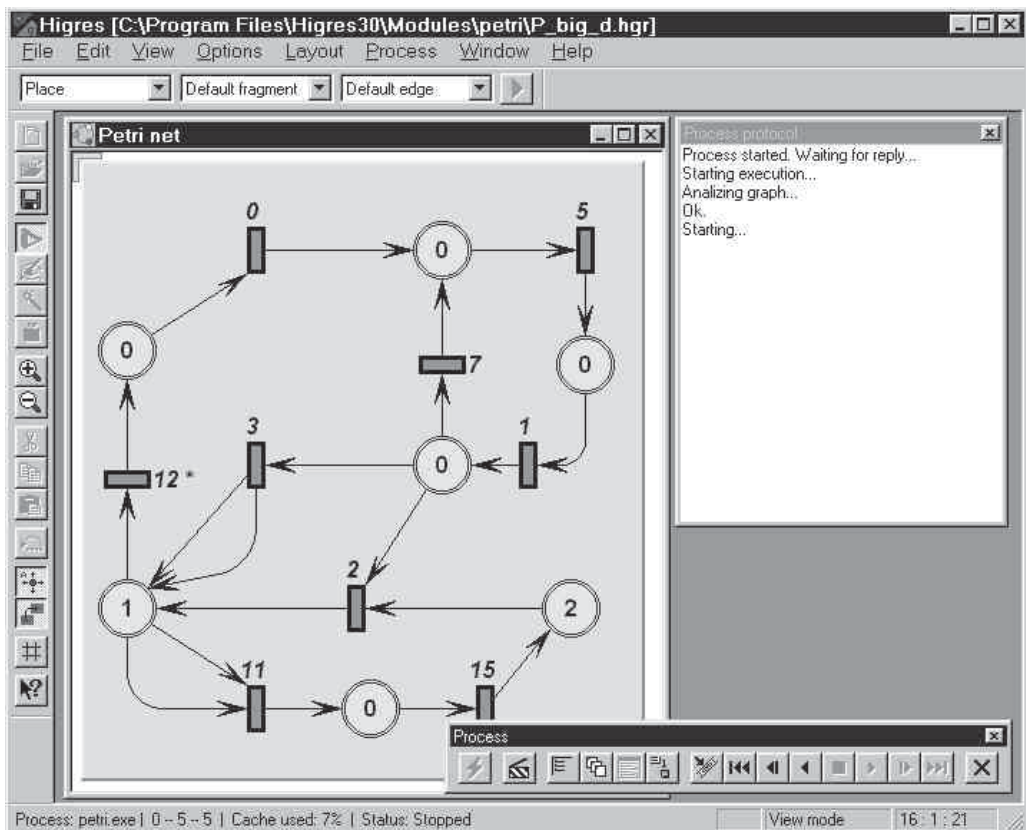


Рис. 4. Анимация функционирования сети Петри в системе Higes



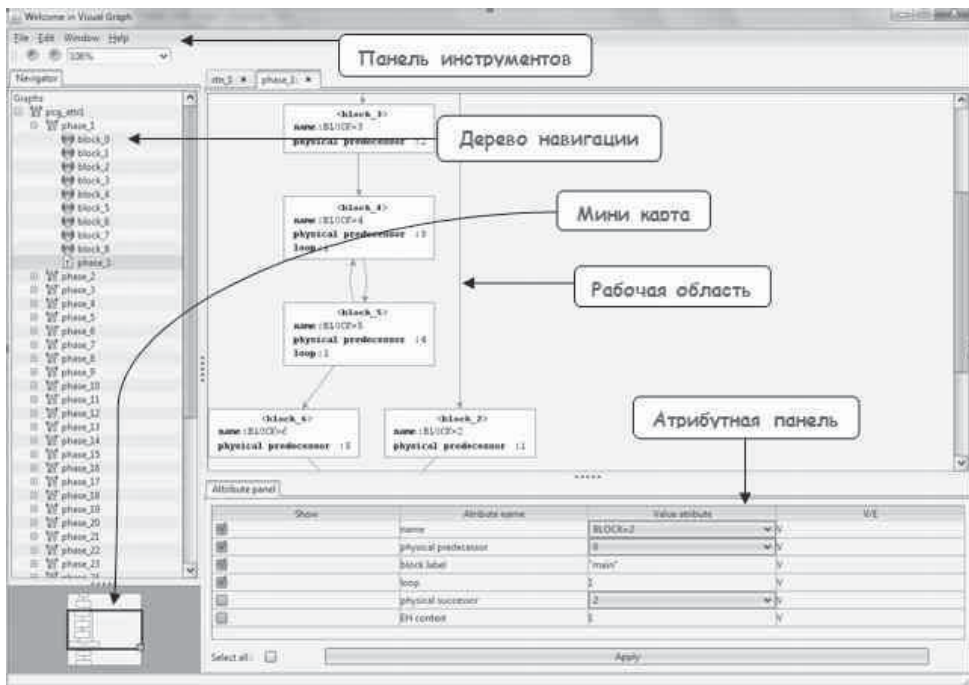


Рис. 5. Система Visual Graph

## БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны всем, кто принимает участие в выполнении проектов, рассмотренных в данном докладе, в первую очередь проф. В.А. Евстигнееву и доц. Е.В. Касьяновой.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты РФФИ № 09-07-0012 и № 12-07-0091).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Касьянов В.Н. Применение графов в программировании. Программирование. N 3. 2001. С.51-70.
- [2] Касьянов В.Н., Евстигнеев В.А. Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. СПб.: БХВ-Петербург. 2003.
- [3] Касьянов В.Н., Касьянова Е.В. Визуализация графов и графовых моделей. Новосибирск: Сибирское Научное Издательство. 2010.
- [4] Евстигнеев В.А., Касьянов В.Н. Толковый словарь по теории графов в информатике и программировании. Новосибирск: Наука. 1999.
- [5] Евстигнеев В.А., Касьянов В.Н. Словарь по графам в информатике. Новосибирск: Сибирское Научное Издательство. 2009.
- [6] Система WikiGRAPP. - <http://pco.iis.nsk.su/WikiGrapp/>
- [7] Система MediaWiki: <http://www.mediawiki.org/wiki/MediaWiki/ru/>
- [8] Kasyanov V. N. Hierarchical graphs and visual process-

ing. ICM 1998 International Congress of Mathematicians. Abstracts of Short Communications and Poster Sessions. Berlin. 1998. P.292.

- [9] Касьянов В.Н. Иерархические графы и графовые модели: вопросы визуальной обработки. Проблемы систем информатики и программирования. Новосибирск: ИСИ СО РАН. 1999. С.7-32.
- [10] Kasyanov V. N. Methods and tools for structural information visualization. WSEAS Transactions on Computers. Vol. 12. Issue 7. 2013. P.349-359.
- [11] Kasyanov V.N. Kasyanova E.V. Information visualization based on graph models. Enterprise Information Systems. Vol.7. N 2. 2013. P.187-197.
- [12] Система HIGRES. - <http://pco.iis.nsk.su/higres/>
- [13] Kasyanov V.N., Lisitsyn I.A. Hierarchical graph models and visual processing. Proc. of Intern. Conf. on Software: Theory and Practice. 16th World Computer Congress IFIP. Beijing: PNEI. 2000. P.179-182.
- [14] Lisitsyn I.A., Kasyanov V.N. HIGRES - visualization system for clustered graphs and graph algorithms. Lecture Notes in Computer Science. Vol.1731. 1999. P.82-89.
- [15] Касьянов В.Н. Язык представления графов GraphML: базовые средства. Информатика в науке и образовании. Новосибирск: ИСИ СО РАН. 2012. С.7-22.
- [16] Касьянов В.Н. Язык представления графов GraphML: дополнительные возможности. Информатика в науке и образовании. Новосибирск: ИСИ СО РАН. 2012. С.23-46.
- [17] Brandes U., Eiglsperger M., Lerner J. GraphML Primer. <http://graphml.graphdrawing.org/primer/graphml-primer.html#EXT>

## APPLIED STATISTICS IN PROCESS CONTROL AND MONITORING

---

*In modern industrial processes the main task is process control and monitoring. Statistical process control is a powerful collection of problem-solving tools useful in achieving process stability through the reduction of variability. In this paper are presented control charts as the most sophisticated tool of statistical process control. After the general theory of control charts the results obtained from control charts which were applied on real process in thermal power plant are presented. A discussion about the advantages of the control charts application in industrial processes is given.*

---

### INTRODUCTION

Process control and monitoring are becoming essential tasks in nowadays industry. Today, all processes are automatized and they contain a lot of sensors and actuators. Because of that, the control of these processes is sometimes very difficult. Statistical process control (SPC) is a powerful collection of problem-solving tools useful in achieving process stability and improving capability through the reduction of variability. SPC can be applied to any process. It has seven major tools, but the control chart is the most technically sophisticated. It was developed in the 1920. by Walter A. Shewhart [1] of the Bell Telephone Laboratories. Since then many types of control charts were developed and univariate SPC is extended to multivariate SPC when there is need for monitoring more than one variable. Control charts have had long history of use in industries.

There are many reasons for their popularity. Control charts are a proven technique for improving productivity, as they are effective in defect prevention, they prevent unnecessary process adjustment, they also provide diagnostic information and they provide information about process capability. Modern computer technology has made it easy to implement control charts in any type of process, as data collection and analysis can be performed on a microcomputer or a local area network terminal in real time.

The main purpose of the control chart is to improve the process. In practice it is generally found that most processes work out of statistical control. Routine and careful use of control charts may

help in successful identification of failures. If the causes of failures can be eliminated, variability will be reduced, and consequently the process will be improved [2].

This paper is structured as follows: in the next section we present the general theory of univariate control charts. In section 3 the brief theoretical review of multivariate control charts is given. In section 4 we present the application of univariate control charts in thermal power plant "Nikola Tesla". In section 5 the conclusion and a short discussion about the advantageous and the shortcomings of the application of control charts in industrial processes and possible solutions to problems encountered are presented.

### UNIVARIATE CONTROL CHARTS

The control chart is a statistical tool for fault detection in the system. Control charts make a clear difference between changes that are result of numerous, always present immeasurable disturbances in the process and changes that are the result of system fault. Generally speaking, control charts present graphical display of regular, e.g., irregular operation mode of process during time.

In any production process, regardless of how well it is designed and maintained, a certain amount of inherent or natural variability will always exist. This natural variability or "background noise" is the cumulative effect of many small, essentially unavoidable causes. In the framework of statistical quality control, a system that has this natural variability is often called a "stable system of common causes". A process that is operating with only

---

<sup>1</sup> School of Electrical Engineering and Computer Science of Applied Studies, Belgrade, Serbia

<sup>2</sup> School of Electrical Engineering, University of Belgrade, Belgrade, Serbia

common causes of variation is said to be *in statistical control*. In other words, the common causes are an inherent part of the process. Other kinds of variability may occasionally be present in the output of the process. Such variability is generally large when compared to the background noise, and it usually represents an unacceptable level of process performance. We refer to these sources of variability that are not part of the chance cause pattern as “*special causes*”. A process that is operating in the presence of special causes is said to be *out of control*.

The control chart is a graphical display of a quality characteristic that has been measured or computed from a sample versus the sample number or time. A typical control chart contains a center line that represents the average value of the quality characteristic corresponding to the in-control state, e.g. only common causes are present. Two other horizontal lines, called the upper control limit (UCL) and the lower control limit (LCL), are also shown on the chart. These control limits are chosen so that if the process is in control, nearly all of the sample points will fall between them. It is customary to connect the sample points on the control chart with straight-line segments, so that it is easier to visualize how the sequence of points has evolved over time. On figure 1 typical control chart is shown.

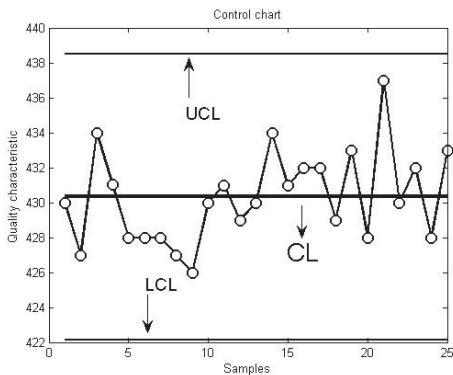


Fig. 1. Typical control chart

Even if all the points fall inside the control limits, if they behave a systematic or nonrandom manner, then this could be an indication that the process is out of control. If the process is in control, all the plotted points should have an essentially random pattern.

There is a close connection between control charts and *hypothesis testing*. The control chart is a test of the hypothesis that the process is in a state of statistical control. A point plotting within the control limits is equivalent to failing to reject the hypothesis of statistical control. One place where the hypothesis testing framework is useful is in analyzing the performance of a control chart. For example, we may think of the probability of type I error of the control chart (concluding the process is out of control when it is really in control) and the probability of type II error of the control chart (concluding the process is in control when it is really out of control).

We now may give a general model for a control chart. Let  $w$  be a sample statistic that measures some quality characteristic of interest, and suppose that the mean of  $w$  is  $\mu_w$  and the standard deviation of  $w$  is  $\sigma_w$ . Then the center line, the upper control limit, and the lower control limit become

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_w + L\sigma_w \\ CL &= \mu_w \\ LCL &= \mu_w - L\sigma_w \end{aligned} \tag{1}$$

where  $L$  is the “distance” of the control limits from the center line, expressed in standard deviation units. This general theory of control charts was first proposed by Walter A. Shewhart, and control charts developed according to these principles are often called Shewhart control charts.

Specifying the control limits is one of the critical decisions that must be made in designing a control chart. By moving the control limits further from the center line, we decrease the risk of a type I error. However, widening the control limits will increase the risk of a type II error. Commonly practice is to take for  $L$  to be  $L=3$  making three-sigma control limits. If the distribution of the quality characteristics is reasonably approximated by the normal distribution, then it is assumed that 99.7% of points will fall inside the control limits while the system is in statistical control. In this way it is made good balance between type I error and type II error.

The first step in constructing the control chart requires analysis of preliminary data set which is assumed to be in statistical control. This phase is called phase I. In this phase it is very important

to establish reliable control limits for phase II. In phase II, we use the control chart to monitor the process by comparing the sample statistic for each successive sample as it is drawn from the process to the control limits.

Performance of the control chart can be expressed in terms of its average run length (ARL). Essentially, the ARL is the average number of points that must be plotted before a point indicates an out of control condition. If the process observations are uncorrelated, then for any Shewhart control chart, the ARL can be calculated easily from

$$ARL = \frac{1}{p} \quad (2)$$

where  $p$  is the probability that any point exceeds the control limits. That means for three-sigma control limits,  $p = 0.0027$  is the probability that a single point falls outside the limit when the process is in control and  $ARL=370$ . That is, even if the process remains in control, an out-of-control signal will be generated every 370 samples, on average.

When we monitor only one qualitative characteristic of interest, we use *univariate control charts*. There are many types of control charts which can be chosen depending on the nature of the process [2]. In this paper is performed univariate analysis with MR (Moving Range) chart for individual measurements which actually contains two charts-upper chart is chart for individual measurements and lower chart is MR chart.

In many applications of the individuals control chart we use the moving range of two successive observations as the basis of estimating the process variability. The moving range is defined as

$$MR_i = |x_i - x_{i-1}| \quad (3)$$

Let the  $\overline{MR}$  be mean value of all moving ranges and  $\bar{x}$  mean value of samples. Then the control lines for control chart for individual measurements are:

$$UCL = \bar{x} + 3\overline{MR} / d_2$$

$$CL = \bar{x} \quad (4)$$

$$LCL = \bar{x} - 3\overline{MR} / d_2$$

Control lines for MR control charts are:

$$UCL = D_4 \overline{MR}$$

$$CL = \overline{MR} \quad (5)$$

$$LCL = D_3 \overline{MR}$$

All constants in formulas (4) and (5) are in look up tables and depend on sample size [2].

## MULTIVARIATE CONTROL CHARTS

When we monitor more qualitative characteristics which are correlated, we use *multivariate control charts* which take this correlation into account. We can find in literature  $T^2$  [3], MEWMA [4] and MCUSUM [5] control charts. In this paper the brief theoretical review of  $T^2$  multivariate control charts and MEWMA control charts is given.

The most familiar multivariate process-monitoring and control procedure is the Hotelling  $T^2$  control chart for monitoring the mean vector of the process. Hotelling was first to propose a multivariate control chart based on a statistical distance [3].

Suppose that  $m$  samples are available and that  $p$  is the number of quality characteristics that we observe. Let  $\bar{x}$  and  $S$  be the sample mean vector and covariance matrix, respectively. The Hotelling  $T^2$  statistic is

$$T^2 = (x - \bar{x})^T S^{-1} (x - \bar{x}) \quad (6)$$

where  $x$  is the observation vector of size  $1 \times p$ ,  $\bar{x}$  is the mean vector of size  $1 \times p$ ,  $S$  is the covariance matrix of size  $p \times p$  and the symbol  $^T$  represents the transpose of a vector or a matrix.

The phase II control limits for this statistics are:

$$UCL = \frac{p(m+1)(m-1)}{m^2 m p} F_{\alpha, p, m-p} \quad (7)$$

$$LCL = 0$$

When the number of preliminary samples  $m$  is large ( $m > 100$ ) many practitioners use an approximate control limit, either

$$UCL = \frac{p(m-1)}{m-p} F_{\alpha, p, m-p} \quad (8)$$

or

$$UCL = \chi_{\alpha, p}^2 \quad (9)$$

For  $m > 100$ , equation (9) is a reasonable approximation. The chi-square limit in equation (9) is only appropriate if the covariance matrix is known, but it is widely used as an approximation. Lowry and Montgomery [6] show that the chi-square limit should be used with caution. If  $p$  is large ( $p > 9$ ), then at least 250 samples must be taken before the chi-squared upper control limit is a reasonable

approximation to the correct value.

Tracy, Mason and Young [13] point out that the phase I limits should be based on a beta distribution. This would lead to phase I limits defined as

$$UCL = \frac{(m-1)^2}{m} \beta_{\alpha, p/2, (m-p-1)/2} \quad (10)$$

$$LCL = 0$$

where  $\beta_{\alpha, p/2, (m-p-1)/2}$  is the upper percentage point of a beta distribution with parameters  $p/2$  and  $(m-p-1)/2$ . Approximations to the phase I limit based on the  $F$  and chi-square distributions are likely to be inaccurate. Detailed explanation about computing these parameters can be found in [2].

As we can see in the equation (6), the  $T^2$  statistic is a scalar. So, we can plot the value of the  $T^2$  statistic for different time instants, and with an appropriate control limit, the  $T^2$  control chart is obtained. On this chart, each point represents the information extracted from all the  $p$  variables. A fault is detected when a point is beyond control limit.

The  $T^2$  control charts use information only from the current sample, so consequently they are relatively insensitive to small to moderate shifts in the mean vector. The chart which solves the problem of slow detection of small shifts in the mean value is MEWMA (Exponentially Weighted Moving Average) chart. The MEWMA is a logical extension of the univariate EWMA which is defined as follows:

$$Z_i = \lambda \bar{X}_i + (1-\lambda)Z_{i-1}, \quad 0 \leq \lambda < 1, \quad Z_0 = \mu_0 \quad (11)$$

where  $\mu_0$  presents mean value of data while the process is under statistical control. The MEWMA quantity plotted on the control chart is:

$$T_i^2 = Z_i^T \Sigma_z^{-1} Z_i \quad (12)$$

where  $Z_i$  is given as follows:

$$Z_i = \Lambda \bar{X}_i + (I - \Lambda)Z_{i-1} \quad (13)$$

where  $I$  is unity matrix,  $\Lambda$  is weighted matrix and  $\bar{X}_i$  is mean value of observations, where  $i=1, \dots, n$ , and  $n$  presents number of samples.

Covariance matrix  $\Sigma_z$  is given as:

$$\Sigma_z = \frac{\lambda}{2-\lambda} [I - (1-\lambda)^{2i}] \Sigma \quad (14)$$

For adequate choice of parameter  $\lambda$  we can look in tables for achieving the specified ARL performances. There are many methods for computing UCL, LCL and CL, and choice of the method will

depend of concrete problem that we must solve.

The main advantage of multivariate statistical control is taking the correlation between variables into account because the covariance matrix is part of computing. Because of that, it is possible to detect change in relations between variables that we are monitoring. We could not detect these relations with separate univariate control charts. Also, multivariate statistical control is simple graphical tool, because we use one chart for monitoring of more variables, instead of more univariate control charts.

Of course, multivariate statistical control has its disadvantageous. Main problem is that this control procedure is computationally demanding. Multivariate control charts work well when number of variables that we are monitoring is less than ten. As number of variables grows, they are less effective in shift detection. The other shortcoming is lack of information about signals which are out of control when the fault is detected. Because of these characteristics univariate and multivariate control charts are compatible systems. When multivariate chart detects the change, then univariate chart will help us in determining the characteristic which caused this change.

## EXPERIMENTAL RESULTS

The application of control chart techniques on real process in thermal power plant is described in this paper. We analyzed the system for measuring under-pressure differences in boiler furnace at unit B2 in thermal power plant Nikola Tesla, Obrenovac.

In order to analyze system for measuring under-pressure differences on boiler, we performed analysis on system of measurement with MR control charts. Results were obtained from measurements which are recorded 16.12.2011. in typical mode of block B2 (nominal operation mode), during decreasing of block power and from measurements which are recorded 31.01.2012. during the block outage. All control lines are established in phase I under statistical control.

On figure 2 and figure 3 we can see that in typical mode of block B2 almost all points are between control lines and we can conclude that our process is under statistical control.

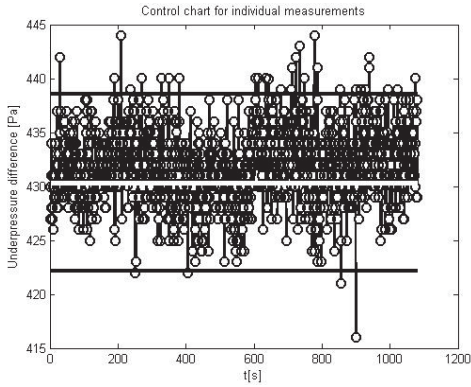


Fig. 2. Control chart for individual measurements in typical mode of block B2

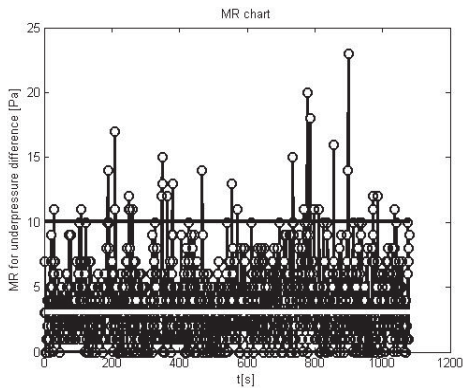


Fig. 3. MR chart for in typical mode of block B2

On figure 4 and figure 5 we can see that after 1500<sup>th</sup> sample is one point far from control line, which means that fault is detected and that is time moment when block outage began. After that sample, we can see distancing of points from central line which means that process is out of statistical control.

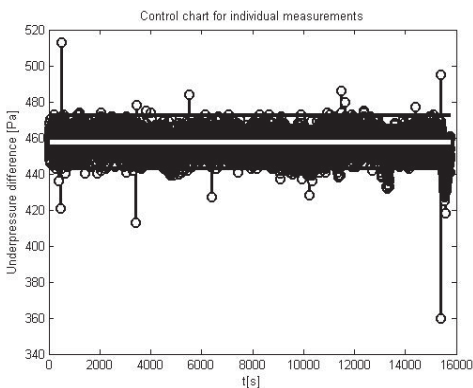


Fig. 4. Control chart for individual measurements during the block outage

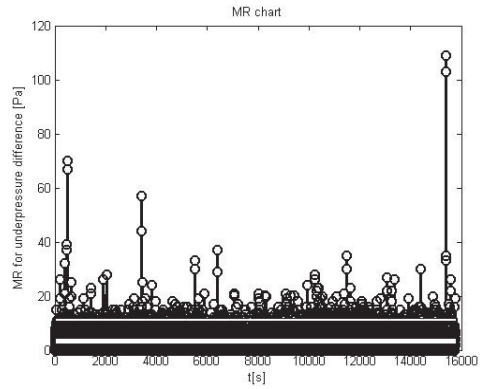


Fig. 5. MR chart during the block outage

## CONCLUSION

We can conclude that control charts are very useful tool for process monitoring and control. However, in practice we have to take care of a few things. Independence of the observations is the most important assumption used during control chart design. Conventional control charts do not work well if the quality characteristics exhibit even low levels of correlation over time. Specifically, these control charts will give misleading results in the form of too many false alarms if the data are positively correlated. This point has been made by numerous authors [7, 8]. There are many techniques that can be found in literature for solving this problem [2]. Almost all approaches are based on analytical techniques. These approaches have proved useful in dealing with correlated data by direct modeling the correlative structure with an appropriate time series model (AR, ARIMA) and using that model to remove autocorrelation from the data and then applying control charts on residuals [9]. Also, there is approach that is not based on the model, e.g a model-free approach [10] and it is applied in this paper. Runger and Willemain [10] proposed a control chart based on unweighted batch means for monitoring autocorrelated process data. The unweighted batch means chart breaks successive groups of sequential observations into batches, with equal weights assigned to every point in the batch. The important implication of this method is that although one has to determine an appropriate batch size  $b$ , it is not necessary to construct an ARIMA model of the data.

The second problem that we must take care of during the control chart designing is nonnormal-

ity of data from the old system of measurement. General model of control chart assume normal distribution of data and therefore if we choose three-sigma control limits then it is assumed that 99.7% of points will fall inside the control limits while the system is in statistical control. Very often this assumption is not valid, so control charts that do not assume normality of data are developed. They can be found in literature as *distribution-free* or *nonparametric* control charts [11]. A key advantage of distribution-free charts is that the user does not need to assume any particular distribution (such as the normal distribution) for the underlying process and the in-control probability calculations and associated conclusions remain valid

for any continuous distribution. This distribution robustness could be an advantage, particularly, in start-up situations where we usually do not have knowledge of the underlying distribution.

Also, there is a big problem with control chart designing of dynamic-behavior processes. A possible solution for this problem would be the making of adaptive control limits that follow system dynamics in the sense that big variation from central line which is consequence of system dynamics, not system fault, is treated as the nominal operation mode. In the literature one can find some solutions for this problem [12], but there is a lot of space for new ideas.

## REFERENCES

- [1] Shewhart W. Economic Control of Quality of Manufactured Product. D. Van Nostrand Co. 1931.
- [2] Montgomery D. Introduction to Statistical Quality Control. Fifth Edition. New York. John Wiley & Sons 2005.
- [3] Hotelling H. Multivariate quality control Techniques of Statistical Analysis. 1947. pp. 111-184.
- [4] Lowry C, Woodall W, Champ C, Rigdon S. A multivariate exponentially weighted moving average control chart. Technometrics. 1992. 34(1). pp. 46-53.
- [5] Pignatiello J, Runger G. Comparison of multivariate cusum charts Journal of Quality Technology 1990. 22(3). pp. 173-186.
- [6] Lowry C, Montgomery D. A review of multivariate control charts. IIE transactions. 1995. Vol. 27(6). pp. 800-810.
- [7] Montgomery D, Mastrangelo C. Some Statistical Process Control Methods for Autocorrelated Data (with Discussion). Journal of Quality Technology. 1991. 23. pp. 179-204.
- [8] Alwan L. Effects of Autocorrelation on Control Charts Communications in Statistics-Theory and Methods. Vol. 21 (4). 1992. pp. 1025-1049.
- [9] Montgomery D, Johnson L, Gardiner J. Forecasting and Time Series Analysis. 2nd ed. McGraw-Hill. New York. 1990.
- [10] Runger G, Willemain T. Batch Means Control Charts for Autocorrelated Data. IIE Transactions. Vol. 28 (6). 1996. pp. 483-487.
- [11] Chakraborti S, van der Laan P, van der Wiel M. A Distribution-Free Control Charts. Applied Statistics. 53 Part 3. 2004. pp. 443-462.
- [12] Haridy S, Wu Z. Univariate and Multivariate Control Charts for Monitoring Dynamic-Behavior Processes: a Case Study. Journal of Industrial Engineering and Management. Vol.2. No.3. 2009. pp. 464-49.

## ANALYSIS AND IMPLEMENTATION OF TREE-TYPE STORAGE MODEL FOR AIRCRAFT INVENTORY CONTROL

---

*The aircrafts are maintained on regular basis in order to guarantee that their operating conditions meet performance requirements of their intended use. The maintenance activities on the aircraft are typically time-consuming and the available maintenance resources are limited. Moreover, different components of aircrafts are used and stored in different ways. Due to these reason, the implementation of existing inventory management systems are often unsuccessful. The main objective of this paper is to create tree-type storage model which will support the hierarchical structure of bill of material i.e. to provide improved bill of material as a main component of material requirement planning system. The improved bill of material will result in easier monitoring, control and recording of spare part components and thereby improve the system for inventory maintenance.*

*Key words: BOM - Bill of Materials, Data Model, Hierarchical Data Structure, Aircraft Inventory Control.*

---

### INTRODUCTION

Inventory is the total amount of goods a business has on hand at a given time. It is a vital asset that keeps that business running smoothly, but too large amounts of inventory can lead to very high cost levels. Manufacturing companies implement inventory management systems; to control inventory levels to where demand can still be met and costs related to inventory can be minimized. Specifically in the aviation industry, inventory management is especially important because the costs of the parts being manufacturing can reach upwards of a million dollars.

Material Requirements Planning (MRP) is a computerized ordering and scheduling system that uses data generated from the company, such as the Bill of Materials (BOM), to project what material will be needed in the future. Traditionally, manufacturing companies have controlled their parts through the reorder point (ROP) technique. Gradually, they recognized that some of these components had dependent demand, and MRP evolved to control the dependent items more effectively. However, component parts assembled to meet repair plan requirements for parent parts have a dependent demand, making inventory management more complex. Thus, MRP must be adapted specifically to managing dependent-demand inventory and scheduling replenishment orders. [1]

### MRP BACKGROUND

MRP breaks a component into parts and subassemblies, and plans for those parts to come into stock when needed. MRP relates each component or sub-assembly to every other part and to the component as a whole. With advancement of computer technology, maintenance and repairs have become integrated within the system. MRP is sold for manufacturing applications, but with some modification it could be successfully used for aircraft inventory control.

If an MRP system failed, it was for: lack of top management commitment to the project, lack of education/training in MRP for those who had to use the system, unrealistic master schedule or inaccurate data, particularly BOM data and inventory data [1]. Since the first three factors are difficult to influence, the aim of this paper is to create the quality BOM i.e. tree-type storage system which will support the BOM hierarchical structure.

### BILL OF MATERIALS

The bill of material (BOM) is used to demonstrate the structure and relationship between the final product (never processed in current enterprises), sub-assembly (composed of other parts, and used by

<sup>1</sup> Faculty of Science and Mathematics, Kosovska Mitrovica, Serbia



other sub-assembly or final product within current enterprise), parts or materials (produced outside), as well as the corresponding quantities of the subordinate parts and materials of each assembly.

Hierarchical BOM gives us a complete structure of an assembly including the hierarchical structures of all its sub-assemblies.[2] Regardless of the type and class of BOM, design and functional use of BOM is based on the hierarchical structure of the data i.e. on the tree-type data structure. Tree node can have child and parent nodes. Elements of an assembly (sub-assemblies/components), in engineering terms, correspond to child nodes. These elements are further installed in an assembly that represents a parent node.

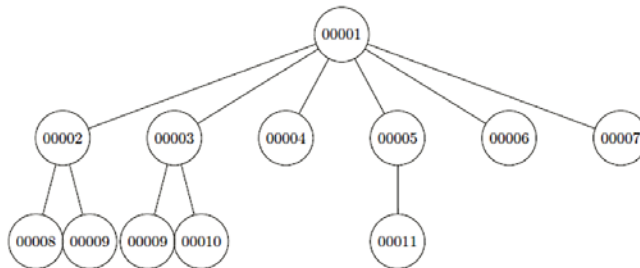
- The root of the tree has only child nodes, and it presents the complex assembly.
- Leaves have no child nodes and they present materials or complex assemblies that are not included in the maintenance system.

We will use the real BOM of a special sub-assembly which maintains a constant temperature of the hydraulic fluid in the aircraft. This sub-assembly has the following elements:

**Table 1.** BOM of hydraulic radiator

ID	Title
00001	Heater
00002	Upper container I
00003	Upper container II
00004	Lower container
00005	Grid
00006	Signboard carrier
00007	Signboard
00008	Upper container's tin
00009	Pipe
00010	Lower container's tin
00011	Pipe wall

The sub-assembly given in Table 1 has the following tree-type form:



**Fig. 1.** Hierarchical BOM of hydraulic radiator

The database of the inventory management system, among other things, includes a table of assemblies, sub-assemblies and materials which together with the table of storage makes the fundament of the MRP system. For that reason we explored the structure of these tables:

$$\begin{aligned}
 id &::= \langle CHAR, 3, FORMAT : 999 \rangle \\
 title &::= \langle CHAR, 40 \rangle \\
 storage &::= \langle id, title, * \rangle \\
 storage &::= \langle storage, PRIMARY KEY IS id \rangle
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

The corresponding table of assemblies, sub-assemblies, components and materials will be the table of items with the following structure:

$$\begin{aligned}
 \textit{id} &::= \langle \textit{CHAR}, 5, \textit{FORMAT} : 9999, \textit{AUTONUMBER} \rangle \\
 \textit{storage} &::= \textit{storage.id} \\
 \textit{title} &::= \langle \textit{CHAR}, 40 \rangle \\
 \textit{id} &::= \langle \textit{CHAR}, 12 \rangle \\
 \textit{item} &::= \langle \textit{id}, \textit{storage}, \textit{title}, \textit{id}, * \rangle \\
 \textit{item} &::= \langle \textit{item}, \textit{PRIMARY KEY IS id} \rangle
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

BOM (1) we can get after we appropriately arrange the set of components of the observed sub-assembly (2). Subject of further research will be modeling the data structure that will support the hierarchical structure of the data set, and thus provide support to the concept of BOM. Further, we will imply the existence of table of items with given structure (2).

### SINGLE LEVEL BOM

Usually a new BOM is created by creating a set of single level BOMs, each of which contains a parent node and its direct child-nodes.[3] Fig 2 presents a single level BOM obtained from hierarchical BOM on fig. 1. The single level BOM of the tree's root defines the way of assembling a complex object, and it can be found in the technical documentation. Parent node, in this case the very root 00001, has a set of subordinate components i.e. child nodes:

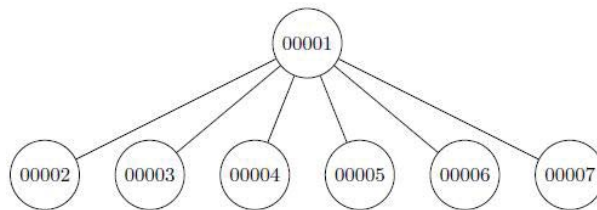


Fig. 2. Modular BOM of hydraulic radiator

Modular BOM (fig 2.) can be modeled with the following data structure:

$$\begin{aligned}
 \textit{id\_parent} &::= \textit{item.id} \\
 \textit{id\_child} &::= \textit{item.id} \\
 \textit{branch} &::= \langle \textit{id\_parent}, \textit{id\_child} \rangle \\
 \textit{subtree} &::= \langle \textit{branch} : \textit{PRIMARY KEY IS id\_parent} + \textit{id\_child} \rangle
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

The structure of the branches in (3), can contain details which can reveal the nature of the relationship between parent nodes and child nodes [4]. Each tree is comprised of nodes and branches. Nodes present assemblies and sub-assemblies while branches describe their interconnection. Branches may include:

- The order of installing individual sub-assemblies in the final assembly.
- The amount of certain sub-assemblies required for final assembly.
- The time required for the installation of certain sub-assemblies in the final assemblies.

### THE ORDER OF ASSEMBLING

The data structure (3) is known as Generic Bill of Material (GBOM) and it is the foundation to create all

other BOMs, because its modification and the introduction of new operations leads to more complex models of BOMs. The GBOM should primarily enable displaying multiple versions of components, and then multiple versions of the product. The previous example shows a basic shortcoming of GBOM - it does not include the order of assembling. This shortcoming can be solved with proposed extension:

$$\begin{aligned}
 id\_parent &::= item.ident \\
 id\_child &::= item.ident \\
 order &::= \langle NUMBER, 5 \rangle \\
 branch &::= \langle id\_parent, id\_child, order \rangle \\
 EBOM &:= \langle branch : PRIMARY KEY IS id\_parent + id\_child \rangle
 \end{aligned} \tag{4}$$

This data structure is known as Engineering Bill of Material (EBOM) - and represents the first modification of GBOM. At first glance, modification seems to be simple, but it brings a possibility of complete mapping of two-level tree which represent parent-child relationship i.e. order of assembling components into final product.

### REQUIRED QUANTITIES

A branch between nodes usually carries information on required amount of components (sub-assemblies) that comprise an assembly. Without considering the type of unit of measurement, further modification of BOM is given in following structure:

$$\begin{aligned}
 id\_parent &::= item.ident \\
 id\_child &::= item.ident \\
 order &::= \langle NUMBER, 5 \rangle \\
 quantity &::= \langle NUMBER, 13.4 \rangle \\
 branch &::= \langle id\_parent, id\_child, order, quantity \rangle \\
 EBOM - T &:= \langle branch : PRIMARY KEY IS id\_parent + id\_child \rangle
 \end{aligned} \tag{5}$$

The above mentioned BOMs (GBOM, EBOM, EBOM-T) vary in relation to the quality of data which they provide. The quality of information determines their usefulness and their application area. GBOM is easier to work with because of better focus on the problem solving. Substantially better EBOM provides better application of theoretical achievement on real problems. Data structure given in (5) some authors describe as follows:

$$\begin{aligned}
 id\_parent &::= item.ident \\
 id\_child &::= item.ident \\
 order &::= \langle NUMBER, 5 \rangle \\
 list &::= \langle * \rangle \\
 branch &::= \langle id\_parent, id\_child, order, list \rangle \\
 EBOM &:= \langle branch : PRIMARY KEY IS id\_parent + id\_child \rangle
 \end{aligned} \tag{6}$$

Further, the term engineering BOM will involve structure (6).

### NUMBER OF THE PRODUCT

The discussion on flexibility mainly focuses on the problem of how to deal with the diversification of the products. Here, the diversification means - assemblies and final products with few differences. Products with a high-end technology are extremely complex and they have static BOMs. Typical examples are planes and anything related to the military industry. Static BOM, no matter how it is created, is fixed

and its structure remains unchanged. In practice, a product can have hundred or thousand varieties/versions. It is necessary to analyze how the number of versions of the product affects the design of BOMs and their nature.

Products with a great number of versions have a unique hierarchical BOM, often referred as GBOM. It is simply assumed that one BOM can describe several products that belong to the same class. Versions of the product can be obtained by small modifications of existing hierarchical BOMs.

The class of products should be, naturally, described as a minimal set of modular BOMs that present the building blocks of a hierarchical BOM. Also, if you have already created modular BOMs it is easy to create a specific hierarchical BOM. The great number of version should not be a problem. First of all it is necessary to expand the EBOM data structure as follows:

$$\begin{aligned}
 id\_parent &::= item.ident \\
 version &::= \langle CHAR,3 \rangle \\
 id\_child &::= item.ident \\
 order &::= \langle NUMBER,5 \rangle \\
 list &::= \langle * \rangle \\
 branch &::= \langle id\_parent, id\_child, order, order, list \rangle \\
 EBOM - H &= \langle branch \rangle
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Attribute version can have a special null value which presents a 0 version of the product. Traditionally, null value specifies the lack of value. This way, the problem of products with great number of version is simply solved by adding a version attribute (7).

### GENERATING HIERARCHICAL BOM

Hierarchical BOM presented in figure (1) gives a complete structure of installation of parts in final assembly elaborated by hierarchy levels. Note that a sub-assembly can be installed more than once into the final assembly on the same or different levels[5]. Basically hierarchical BOM in Figure (1) is composed of modular BOMs. The following figure shows all modular BOMs that are necessary and can be found in table 2:

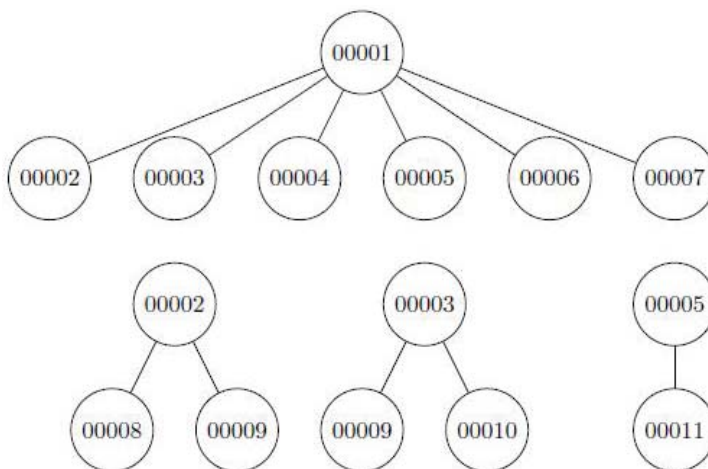


Fig. 3. Modular BOMs of sub-assemblies

According to the Fig 3, sub-assembly 00009 has to be installed twice, but as a data set it appears only

once. Usually, these modular BOMs are presented in tables.

**Table 2.** Modular BOMs of hydraulic radiator

parent_id	child_id	order
00001	00002	1
00001	00003	2
00001	00004	3
00001	00005	4
00001	00006	5
00001	00007	6
00002	00008	1
00002	00009	2
00003	00009	1
00003	00001	2
00005	00011	1

The creation of hierarchical BOM is based on creation of relations between modular BOMs, with continual control of what are the leaves, parent or child nodes. In order to map table 2 into a database, it is necessary to change the data structure first. The first modification is introducing the attribute order.

$$\begin{aligned}
 id\_parent &::= item.ident \\
 id\_child &::= item.ident \\
 order &::= \langle NUMBER, 5 \rangle \\
 branch &::= \langle id\_parent, id\_child, level, order \rangle \\
 subtree &::= \langle branch: PRIMARY KEY IS id\_parent + id\_child \rangle
 \end{aligned} \tag{8}$$

In this way, the order of installation of sub-assemblies into final assembly has been defined. Modular BOMs are defined as followed:

$$\begin{aligned}
 subtree = \{ \\
 &\langle 00001, 00002, 1 \rangle, \langle 00001, 00003, 2 \rangle \\
 &\langle 00001, 00004, 3 \rangle, \langle 00001, 00005, 4 \rangle \\
 &\langle 00001, 00006, 5 \rangle, \langle 00001, 00007, 6 \rangle \\
 &\langle 00002, 00008, 1 \rangle, \langle 00002, 00009, 2 \rangle \\
 &\langle 00003, 00009, 1 \rangle, \langle 00003, 00010, 2 \rangle \\
 &\langle 00005, 00011, 1 \rangle \\
 &\}
 \end{aligned} \tag{9}$$

Another characteristic of hierarchical BOM is that the number of levels - the “depth” of the hierarchical BOM cannot be introduced elementary.[6] The number of levels i.e. depth is determined during the creation of hierarchical BOM.

### GENERAL ALGORITHM FOR HIERARCHICAL BOM

The input variable is the root of the sub-tree for which we are generating hierarchical BOM. The algorithm shown below is generic and it creates GBOM.

## Recursive algorithm for GBOM

```

-----
void create_gbom(c_ident, n_level)
{
    local sledeci;
    if (!dbseek( subtree, c_ident )) {
        dbappend( gbom, n_level, c_ident, "00000");
        return;
    }
    else {
        while(!dbeof(subtree) && subtree.id_parent == c_ident) {
sledeci = sbnext ( subtree );
dbappend ( gbom, n_level, c_ident, subtree.id_child);
creat_gbom ( subtree.id_child, n_level+1 );
dbgoto ( subtree, sledeci )
        };
    };
    return;
}
-----

```

Recursive procedures `create_gbom` selects nodes of the hierarchical BOM by the so-called "extreme left branches". The result is stored in a table with the following structure:

$$\begin{aligned}
 \textit{level} &::= \langle \textit{NUMBER}, 5 \rangle \\
 \textit{id\_parent} &::= \textit{item.ident} \\
 \textit{id\_child} &:= \textit{item.ident} \\
 \textit{branch} &::= \langle \textit{level}, \textit{id\_parent}, \textit{id\_child}, \textit{order} \rangle \\
 \textit{gbom} &:= \langle \textit{branch} \rangle
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

The table is used as a repository for results of algorithm, for example, if the algorithm is applied to a set of modular BOMs (Fig. 3.), the contents of the above mentioned table will be:

```

gbom = {
    <1, 00001, 00002>,
    <2, 00002, 00008>, <3, 00008, 00000>,
    <2, 00002, 00009>, <3, 00009, 00000>,
    <1, 00001, 00003>, <2, 00003, 00009>,
    <3, 00009, 00000>, <2, 00003, 00010>,
    <2, 00002, 00008>, <3, 00008, 00000>,
    <3, 00000, 00008>, <1, 00001, 00004>,
    <2, 00004, 00000>, <1, 00001, 00005>,
    <2, 00005, 00011>, <3, 00011, 00000>,
    <1, 00001, 00006>, <2, 00006, 00000>,
    <1, 00001, 00007>, <3, 00007, 00000>,
}

```

## CONCLUSION

In order to improve MRP system that has been widely used in aviation industry we proposed a new data storage model for BOMs which are the foundation stone of the inventory management system. The stability and flexibility of the storage model are the keys to the information system of the entire enterprise. The tree structure storage model is simple, smart, easy to implement, suits products with both stable and complex structure and also those with variable and similar structure. This model does not pose limit on the depth of the product tree. With the development of hardware technology, the effect of redundancy will be reduced to minimum. It is certain that this model will be widely applied in the foreseeable future.

## REFERENCES

- [1] Ghobbar A. A., Chris H.F., The material requirements planning system for aircraft maintenance and inventory control, *Journal of Air Transport Management* 10 pp 217-221, 2004
- [2] Контрец, Н., Милошевић Х., Лазовић, Г., Деспотовић, М., Адаптивни приступ војнотехничком евиденционом систему у одржавању ваздухоплова, МИТ конференција, Будва 2011.
- [3] Zhu S., Cheng D., Xue K., and Zhang X. A Unified Bill of Material Based on STEP/XML. *Computer Supported Cooperative Work in Design III*, Volume 4402/2007, 267-276
- [4] Радојевић С., Митровић Ч., Аранђеловић М., Припрема саставница у одржавању. XXXIII Научно-стручни скуп Одржавање машина и опреме, 2008.
- [5] Chung Y., Fisher G.W., A Conceptual Structure and Issues for an Object-Oriented Bill of Materials (BOM) Data Model, *Computers and Industrial Engineering* Vol 26, No 2, pp 321-339, 1994
- [6] S. Radojevic and Z.A. Veljkovic. Rekurzivni algoritam za stvaranje prve hijerarhijske sastavnice. 28. JUPITER konferencija, 30. simpozijum Upravljanje proizvodnjom u industriji prerade metala, Zbornik radova, Vol. 4.

## INFORMATION AND SOFTWARE TOOLS SUPPORT OF JOINT EXPERT ACTIVITY IN THE ENERGY SECTOR

### ИНФОРМАЦИОННАЯ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНАЯ ПОДДЕРЖКА КОЛЛЕКТИВНОЙ ЭКСПЕРТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В ОБЛАСТИ ЭНЕРГЕТИКИ

---

*Integration of information resources is performed on the basis of ontologies energy research through information infrastructure developed by the author. The ontological space of energy system consist of energy system metaontology, metaontology of energy system research, ontology of energy industry sector, problem ontologies, database ontologies and program ontologies. Specialized data and knowledge warehouse is suggested use to support the research individual energy industry sector. This article is described the suggested methodological approach, the basic technologies and tools*

---

#### ВВЕДЕНИЕ

Энергетика является одной из базовых отраслей экономики России, от состояния которой зависит функционирование других отраслей промышленности. В Институте систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН выполняются исследования систем энергетики (электроэнергетики, тепло-, газо-, угле-, нефтеснабжения), исследования энергетической безопасности России, региональных проблем энергетики, взаимосвязей энергетики и экономики, работы выполняются для стран СНГ, России и ее регионов. Исследования, проводимые в институте, тесно связаны и имеют общую информационную базу: для исследований ТЭК требуются агрегированные данные, которые, как правило, являются обобщением результатов исследований отраслевых систем; результаты исследований направлений развития ТЭК должны учитываться при исследованиях развития отраслевых систем энергетики. Основными инструментами исследований энергетики являются математическое моделирование и вычислительный эксперимент. [1]

В информационном обеспечении исследований энергетики можно выделить две взаимосвязанные, но в то же время различные проблемы:

- проблема информационной обеспеченности,

т.е. обеспеченности данными, связанная с необходимостью получения данных из разных источников, их верификации (оценка достоверности, как источников, так и самих данных, устранение ошибок и разночтений и т.д.);

- проблема разработки инструментальных средств информационного обеспечения.

#### КОЛЛЕКТИВНАЯ ЭКСПЕРТНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ В ОБЛАСТИ ЭНЕРГЕТИКИ

Для проведения системных исследований энергетики необходимы координация и согласование исходной и результирующей информации для получения обоснованных выводов и рекомендаций, которые готовятся для внешних организаций. Для организации коллективной экспертной деятельности в энергетике предлагается использовать сетцентрический подход [2].

*Сетцентричность* - принцип организации систем управления, позволяющий реализовать режим ситуационной осведомленности благодаря формированию и поддержанию единой для всех ярусов управления целостной, контекстной информационной среды. Решение проблемы непрерывной и высокоточной актуализации данных для всех ярусов управления возможно за счет реализации принципа сете-

---

<sup>1</sup> Melentiev Energy Systems Institute of Siberian Branch of the RAS, Irkutsk, Russia



центричности. При этом важнейшим условием успешной поддержки принятия решений является использование одного и того же, не фрагментированного по какому-либо признаку информационного образа реальной ситуации всеми ярусами системы управления. Для поддержки принятия решений в энергетике было предложено использовать этот принцип сетцентричности.

Понятие «*ситуационная осведомленность*», или *Situational Awareness*, сформировалось на рубеже 1990-х годов и связано в первую очередь с пионерными работами Mica R. Endsley (Мика Эндсли). Согласно классическому определению, принцип *Situational Awareness* представляет собой «чувственное восприятие элементов обстановки в (едином) пространственно-временном континууме, осознанное восприятие их значения, а также проецирование их в ближайшее будущее» [3].

### **ИТ-ИНФРАСТРУКТУРА СИСТЕМНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ В ЭНЕРГЕТИКЕ КАК ПРООБРАЗ ЕДИНОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ СРЕДЫ В СЕТЕЦЕНТРИЧЕСКОЙ КОНЦЕПЦИИ**

Под ИТ-инфраструктурой понимается телекоммуникационная распределенная информационно-вычислительная инфраструктура, а именно, совокупность технических и программных средств, телекоммуникаций и информационной базы научных исследований; технологий их разработки и использования; стандартов (как внутренних, так и внешних) для разработки информационных и программных продуктов в области исследований энергетике, обмена ими и их представления на информационный рынок. ИТ-инфраструктура, являясь интеграционной информационной и вычислительной средой для проведения исследований в энергетике, облегчает построение распределенных баз данных и программных комплексов, создание Web-ориентированных программных комплексов и оказание информационных услуг на основе наукоемких информационных и программных продуктов.

ИТ-инфраструктура включает интеллектуальную инфраструктуру, интеграционную информационную инфраструктуру, распределенную вычислительную инфраструктуру и телекоммуникационную инфраструктуру [4, 5].

Интеграционная информационная инфраструктура исследований энергетике, разработанная в ИСЭМ СО РАН [6], используется для хранения:

- данных о сотрудниках, проводимых ими научных исследованиях и их результатах, информации обо всех разрозненных базах данных и хранилищах данных, используемых для хранения базовой (основной), промежуточной и результирующей информации, необходимой для исследований;
- информации о методах (алгоритмах), выполняющих какие-либо действия над информацией (программных комплексах, пакетах прикладных программ, различных сервисах).

Информационная инфраструктура также содержит модели программ и баз данных, представленные в виде ER-диаграмм, UML-диаграмм, XML-описаний и др.

Под интеллектуальными ресурсами понимаются знания, которыми обладает институт, представленные как в традиционном виде (электронные тексты статей, отчетов и монографий), так и в виде моделей данных и моделей программ и онтологий предметных областей энергетике [7].

Для поддержки научной деятельности научных групп и отдельных исследователей разработаны специализированные хранилища данных и хранилища знаний для каждой системы энергетике, что позволяет значительно упростить построение единого корпоративного хранилища для решения комплексных проблем энергетике. Архитектура типового хранилища данных и знаний представлена на рисунке 1.

Процесс исследования отдельной энергетической системы начинается со сбора массива исходных данных, который может быть получен из различных статей, отчетов, статистических сборников, также в качестве исходных данных могут выступать результаты предыдущих исследований. Для поддержки этой деятельности создается хранилище данных и знаний, интегрирующее данные и декларативные знания и разработанное на единой концептуальной основе с использованием базовых программных средств.

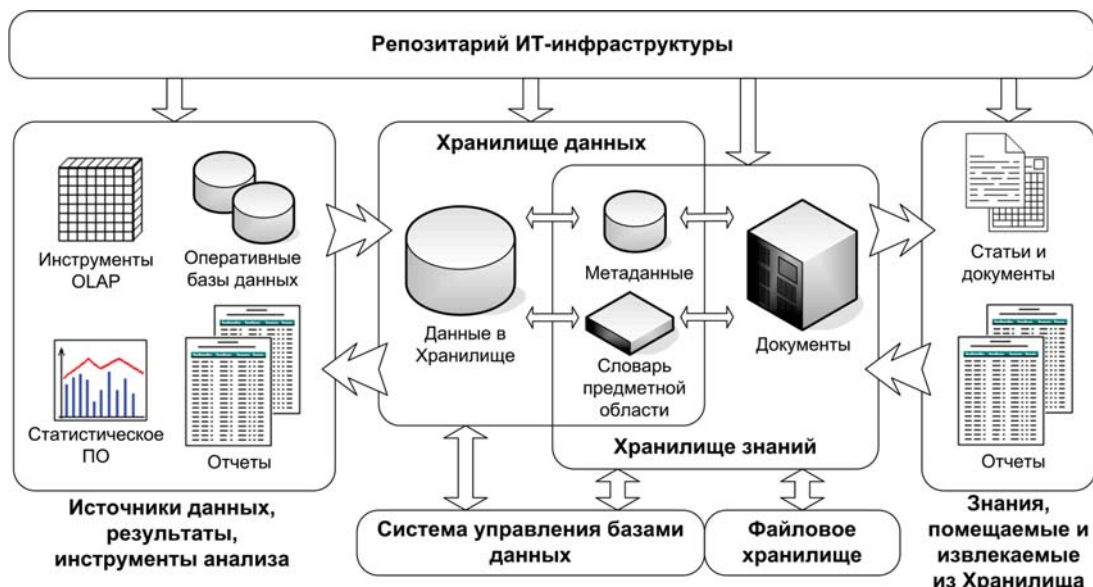


Рис. 1. Архитектура хранилища данных и знаний исследований энергетики

Хранилище данных и знаний обеспечивает информационную поддержку исследований в энергетике, хранение описаний размещенных документов, предоставляет возможность быстрого поиска и извлечения любого документа на основе метаданных, поддерживает использование виртуальных коллекций (витрин) документов в соответствии с конкретными потребностями исследователей, а также обеспечивает выполнение других задач на уровне оперирования документами, группами документов и данными. Репозитории ИТ-инфраструктуры описываются хранилища данных и знаний отдельных систем энергетики, указывается их расположение (адреса серверов) и интерфейсы взаимодействия (описания Web-сервисов).

### СИСТЕМА ОНТОЛОГИЙ

Онтологии являются одним из современных направлений в области искусственного интеллекта. Сам термин был введен Т. Грубером (Gruber T.) [8] для обозначения связанного фрагмента декларативного знания и использования его в информационных технологиях, до этого термин использовался в философии. Онтология описывает основные понятия (концепты) и связи между ними и может быть представлена в графическом виде или описана на одном из

формальных языков (OWL, XML и др.).

При построении онтологий, как правило, используется концепция «открытого мира» (open world assumption). Допущение об открытом мире предполагает, что никто не располагает полной информацией об окружающем мире, а в онтологии описывается лишь интересующая автора (известная автору) часть. При этом в описании могут присутствовать ссылки на другие внешние описания: ссылки из одной онтологии на понятия, введенные в другой. Концепция «закрытого мира» (closed world assumption) подразумевает создание полностью законченной модели, такой как, например, модели данных (ER-модели). В таком случае неизбежно существование нескольких полностью изолированных «миров» (представлений мира или моделей), которые формально никак не взаимодействуют между собой, но при этом являются отражением одних и тех же реальных понятий или процессов.

В результате онтологического моделирования создается онтологическое пространство ТЭК, включающее совокупность онтологий, которое позволяет работать не только с данными, но и знаниями, в том числе описаниями сценариев ситуаций, моделей и программных комплексов и интегрировать их в ИТ-инфраструктуру исследований энергетики.

Онтологиями верхнего уровня системы онтологий исследований ТЭК являются «Метаонтология ТЭК» и «Метаонтология исследований энергетики», в которых определены базовые понятия ТЭК и научных исследований. На основе этих метаонтологий строятся онтологии отраслевых систем ТЭК и онтологии задач, в которых отражаются основные понятия поставленных научных задач в рамках исследований отраслей ТЭК или ТЭК в целом. Онтологии баз данных описывают модели данных и связи данных с понятиями, определенными в онтологиях задач и отраслей ТЭК. В онтологиях программных комплексов представлены их описания. Отражение связей между онтологиями выполняется с помощью двух отношений: «экземпляр класса» (ClassOf) и «то же, что и / тождественно» (SameAs).

В метаонтологии ТЭК определены понятия ТЭК, ТЭР (топливно-энергетического ресурса), системы ТЭК («ЭЭС» - электроэнергетическая система, «ГСС» - газоснабжающая система и др.), а также классы объектов энергетики («Добыча», «Хранение», «Транспорт» и др.).

Онтологии отраслевых систем более подробно описывают объекты энергетики и их взаимодействие. Например, в онтологии газоснабжающей системы вводятся такие специфические для этой системы энергетики классы как «Скважины», «Подземные хранилища газа» и «Газосборная сеть», а также конкретизируется класс «ТЭР» до понятий «Газ», «Газ на экспорт», «Газ как топливо». На основе онтологий могут быть получены единые справочники (классификаторы), в которых содержатся базовые понятия систем энергетики.

## **ИНТЕГРАЦИЯ ДАННЫХ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ В ЭНЕРГЕТИКЕ**

Основная идея интеграции данных в исследованиях энергетики состоит в том, что предлагается отказаться от слияния отдельных баз данных и перейти к виртуальной интеграции, при этом базы данных и данные, хранящиеся в них, не интегрируются на физическом уровне, в Репозитории описаны источники данных и методы доступа к ним [9]. Владельцы данных (администраторы СУБД) устанавливают уровень доступа к данным для каждого конкретного пользователя.

Разработчикам баз данных для облегчения процесса выполнения запросов необходимо размещать в Репозитории не только модели данных, лежащих в основе БД, но и записанные на SQL типовые запросы, которые могут применять пользователи для доступа к данным. Описание в Репозитории может быть как минимальным (указание того, что такая база данных существует), частичным (представление в Репозитории модели данных), так и полным (полное описание источника данных, текстов запросов, с возможным указанием имени пользователя и пароля для гостевого входа на сервер). В любом случае степень представления описания каждой базы данных определяется индивидуально в каждом конкретном случае, основываясь на потребностях в этих данных других отделов института, секретности и стоимости.

Однако при этом оставалась нерешенной проблема информирования пользователей о наличии потенциально интересующей его информации в базах данных. Пользователи также были лишены средств поиска информации об однотипных и близких понятиях, определенных в онтологиях.

После разработки онтологий баз данных, которые в свою очередь опираются на онтологии задач и онтологии отраслевых систем энергетики, и публикации их в Хранилище моделей, возможна организация поиска понятий (и связанных с ними данных) по принадлежности к какому-либо классу или синонимам.

В процессе публикации онтологий в Хранилище выполняется их анализ и построение индексов, содержащих информацию о концептах и ссылках на понятия в других онтологиях. Поиск осуществляется на основе анализа связей «ClassOf» и «SameAs».

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В работе рассмотрен методический подход и технология информационной и инструментальной поддержки коллективной экспертной деятельности в области энергетики на основе применения системы онтологий, ИТ-инфраструктуры и ее компонентов, а также хранилища данных и знаний, используемых для поддержки исследований отдельных систем энергетики.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Разработанный методический подход применяется в работах по грантам РФФИ №11-07-00192, №12-07-00359, №13-07-00140, №13-07-00422 и гранту программы Президиума РАН №229.

Автор выражает благодарность этим организациям за частичную финансовую поддержку проводимых исследований.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Системные исследования в энергетике: Ретроспектива научных направления СЭИ-ИСЭМ / отв. ред. Н.И. Воропай. - Новосибирск: Наука, 2010. - 686 с.
- [2] Massel L.V., Ivanov R.A. Possibility of application of Situational Awareness in energy research. / Proceedings of the Workshop on Computer Science and Informational Technologies (CSIT-2010), Russia, Moscow - St.Petersburg, September 13-19, 2010. - Volume 1,Ufa State Aviation Technical University, 2010. - pp. 185-187.
- [3] Mica R.Endsley, Daniel J. Garland, Situation awareness: analysis and measurement, Lawrence Erlbaum Associates, 2000, ISBN 0805821341, 9780805821345.
- [4] Массель Л.В., Болдырев Е.А., Макагонова Н.Н., Копайгородский А.Н., Черноусов А.В. ИТ-инфраструктура научных исследований: методический подход и реализация // Вычислительные технологии, т.11, 2006. - С.59-67.
- [5] Воропай Н.И., Массель Л.В. ИТ-инфраструктура системных исследований в энергетике и предоставление ИТ-услуг. - Известия АН - Энергетика, №3, 2006. - С. 86-93.
- [6] Копайгородский А.Н., Массель Л.В. Разработка и интеграция основных компонентов информационной инфраструктуры научных исследований // Вестник ИргТУ. - 2006. - № 2 (26), - С. 23-29.
- [7] Массель Л.В., Копайгородский А.Н. ИТ-инфраструктура научных исследований как основа информационного обеспечения научно-образовательного процесса / Труды VII Всероссийской научно-практической конференции «Корпоративные библиотечные системы: технологии и инновации», 2009. - Спб: СПбГПУ. - С. 88-93
- [8] Gruber T. R. The role of common ontology in achieving sharable, reusable knowledge bases. In J. A. Allen, R.Fikes, and E. Sandewell, editors, Principles of Knowledge Representation and Reasoning - Proceedings of the Second International Conference, pp. 601-602. Morgan Kaufmann (1991).
- [9] Копайгородский А.Н. Виртуальная интеграция распределенных данных исследований в энергетике // Труды XIII Байкальской Всероссийской конференции «Информационные и математические технологии в науке и управлении». - Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2008. - С. 260-266.

## PROJECTS ON IMPLEMENTATION OF SPATIAL DATA INFRASTRUCTURE IN THE RUSSIAN FEDERATION: A REVIEW BASED ON AVAILABLE SOURCES

### РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОЕКТОВ ПО СОЗДАНИЮ ИНФРАСТРУКТУРЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДАННЫХ В СУБЪЕКТАХ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ: ОБЗОР НА ОСНОВЕ ДОСТУПНЫХ ИСТОЧНИКОВ

---

*The analysis of methods used to implement the SDI (Spatial Data Infrastructure), the information technologies for designing the SDI, and the SDI components was carried out. It is noted, that in Russia, the SDI implementation is in preparatory stage. The available experience is focused on regional SDIs. The analysis of design solutions on the SDI implementations in such Russian regions as the Bashkortostan, Komi and Tatarstan Republics, Ural Federal District, Voronezh, Kaluga, Moscow and other oblasts was performed. The most applicable tools for spatial data processing and sharing via network services and geo-portals are ArcGIS and open source software products. Any examples are given to illustrate experiences, that carried out in the scientific institutes of Russian Academy of Sciences and its Siberian Branch regarding to SDIs components and SDI-like GIS.*

---

Создание инфраструктуры пространственных данных (ИПД) в субъектах Российской Федерации обусловлено практическими потребностями многоцелевого использования актуальных и достоверных информационных ресурсов. Согласно основополагающей идее ИПД РФ является иерархически организованной территориально-распределенной системой, обеспечивающей доступ к ее ресурсам пространственных данных и геосервисам в узлах федерального, регионального и муниципального уровня. Построение ИПД направлено как на обеспечение интеграции государственных информационных ресурсов, так и на потребление любыми организациями и гражданами. Создание региональных ИПД в субъектах РФ должно решить задачу объединения ресурсов различных информационных систем: градостроительных, земельно-имущественных, дорожных, телекоммуникационных. От полноценности ИПД может зависеть решение многих проблем устойчивого развития регионов и территорий России.

Цель настоящего обзора - оценить текущее состояние российских региональных ИПД и ее отдельных региональных компонентов и на этой основе «поставить диагноз» этой отрасли геоинформационной индустрии, переживающей непросто длительный застой.

Анализ стоит начать с истории национальной ИПД Российской Федерации (ИПД РФ, известной также как «РИПД»), когда идея ее создания, начиная с первых публикаций о сути ИПД и международном опыте их построения в странах Старого и Нового света [1] и дискуссий [2], стала обретать облик документа. Вначале это были проекты Концепции ИПД РФ, разработанные в 2003-2004 гг. параллельно Роскартографией РФ и ГИС-Ассоциацией, а затем и их согласованный вариант, спустя два года одобренный распоряжением Правительства Российской Федерации от 21 августа 2006 г. # 1157-п (<http://base.consultant.ru/cons/cgi/online.cgi?req=doc;base=EXP;n=372580>). С тех пор прошло семь с лишним лет, срок, достаточный для полномасштабной реализации стратегии создания и развития любой национальной ИПД.

К сожалению, успехи в деле создания компонентов ИПД РФ более чем скромны. Не приняты поправки в ФЗ «О геодезии и картографии» в той его части, которая касается ИПД. Действующий ныне ФЗ «О геодезии и картографии» (1995) (<http://docs.kodeks.ru/document/9015033#>) с

1 Institute of Geography RAS, Moscow, Russia

2 Altai State University, Institute of Water and Environmental Problems SB RAS, Barnaul, Russia

некоторыми более поздними поправками уже не соответствуют сложившимся реалиям. Лишь через пять лет после утверждения Концепции ИПД РФ, в июле 2011 г., был опубликован проект ФЗ «Об ИПД, геодезической и картографической деятельности в Российской Федерации», разработанный в Минэкономразвития РФ, вынесенный на обсуждение на площадке ГИС-Ассоциации ([http://www.gisa.ru/proekt\\_fz\\_ipd.html](http://www.gisa.ru/proekt_fz_ipd.html)), а через год, в июле 2012 г. Минэкономразвития РФ опубликовал проект нового федерального закона, на этот раз под именем ФЗ «О геодезии, картографии и пространственных данных...» с предложением провести его антикоррупционную экспертизу ([http://www.gisa.ru/ekspertiza\\_proekta\\_fz\\_o\\_geodezii.html](http://www.gisa.ru/ekspertiza_proekta_fz_o_geodezii.html)). Нового закона нет до сих пор, и в этих условиях «разработки в области создания ИПД в РФ (и не только ИПД национального и регионального уровней) ведутся, по существу, в условиях правового вакуума» [3].

Столь же неудовлетворительно состояние нормативно-технической базы ИПД, то есть системы стандартов, гарантирующих interoperability пространственных данных и связанных с ними сервисов в сетевой среде. Многие годы бездействует Технический комитет по стандартизации ТК 394 «Географическая информация/геоматика» Ростехрегулирования РФ (<http://www.tk394.ru>), который является российским аналогом Технического комитета ИСО ТК 211 «Географическая информация/геоматика» (ISO/TC 211 «Geographic information/Geomatics»), источника международных стандартов в области геоинформатики и ИПД серии ИСО 19100.

До сих пор не определен однозначно перечень базовых наборов данных ИПД РФ. Более того, спорны определения «базовых пространственных данных» (БПД) и даже критерии, которые позволяют отнести те или иные наборы к категории базовых. Один из предложенных перечней содержится в российском национальном стандарте на БПД (ГОСТ Р 53339-2009), другие предложения сведены в работе [4].

Достаточно медленно развивается национальный геопортал (<http://www.nsd.ru>), введенный в опытную эксплуатацию в марте 2012 г. и работающий пока, по состоянию на ноябрь 2013 г., в тестовом режиме, хотя при его разработке использованы международные стандарты ИСО и Консорциума OGC и требования Директивы INSPIRE, и с технологической точки зрения ОАО Дата+ как его разработчик предложил решение, которое может быть тиражировано по регионам (см. подробнее ниже).

Очевидно, что все это не может не отразиться на региональных инициативах, тормозя, с одной стороны, развитие региональных ИПД, и вынуждая регионы строить свои автономные ИПД без оглядки на федеральный центр, с другой. Этот сценарий развития, то есть «геоинфраструктурная самоорганизация» регионов [4], был предсказуем. Еще на этапе осознания необходимости ИПД-строительства в России, в 2001 г., было сказано: «Есть соблазн, не дожидаясь и не надеясь на «геоинфраструктуризацию» в масштабах всей страны, начать эту работу в регионах» [5, с. 142]. Предположение, сделанное в 2001 г., увы, оказалось верным, обретя в 2009 г. на страницах журнала «Пространственные данные» (ныне не издаваемом) законченную форму рекомендации к действию: «при фактическом отсутствии нормативно-правовой базы, административных и технических регламентов, стандартов, базовых пространственных данных, геопорталов для доступа к данным, системы управления метаданными, механизмов организации и управления... вполне возможен, и более того разумен, сценарий информационно-инфраструктурной самоорганизации регионов, ведомств, бизнес-структур и научно-образовательных сообществ, создания ИПД для решения своих региональных, ведомственных, корпоративных и прикладных научных задач» [6].

Известна попытка Росреестра РФ направить этот процесс в нормальное русло: предложенный им план мероприятий по созданию региональной модели инфраструктуры пространственных данных в пилотных субъектах РФ (республиках Башкортостан и Татарстан, Кировской, Саратовской, Свердловской, Тверской, Ульяновской, Ярославской областях и Алтайском крае) согласно Приказу Росреестра от 27 августа 2010 г. № 462 «Об организации работ по разработке и реализации мероприятий по созданию региональной модели ИПД»: <http://www.gisa.ru/66952.html>,

<http://www.rosreestr.ru/document/legislation/1146422>. Была создана рабочая группа Росреестра с полномочиями по организации разработки и управлению реализацией пилотных проектов (<http://www.gisa.ru/66952.html>). К сожалению, эта инициатива не принесла ожидаемых результатов.

Другой попыткой унификации региональных подходов следует считать разработанное ГИС-Ассоциацией «Типовое Положение о региональной ИПД субъекта РФ», а также примерное «Соглашение о совместной деятельности по организации ИПД РФ на территории субъекта РФ» (<http://www.gisa.ru/94535.html>). Ныне он лежит в основе соглашений между региональными администрациями и Росреестром РФ, которые начали активно заключаться в 2013 г. На сегодняшний день (по состоянию на январь 2014 г.) это 28 субъектов РФ, «узаконивших» свои региональные инициативы, либо начинающих их. Отметим, что здесь речь идет не о региональных ИПД как узлах ИПД РФ, а о региональных фрагментах (сегментах) федеральной ИПД, предполагая, что предоставление региональных информационных ресурсов, а именно, региональных наборов пространственных данных (неизвестно кому, как и из каких финансовых средств) с публикацией метаданных о них на национальном геопортале, подобно тому, как это предусмотрено «Соглашением о совместной деятельности по организации ИПД Российской Федерации на территории Республики Башкортостан»: [http://to02.rosreestr.ru/upload/to02/files/soglashenie\\_21\\_05\\_2013\\_29.PDF](http://to02.rosreestr.ru/upload/to02/files/soglashenie_21_05_2013_29.PDF). Таким образом, в сегодняшнем виде ИПД РФ не является целостной иерархически организованной системой, поэтому ИПД РФ и региональные ИПД существуют и развиваются независимо и параллельно [7]. Региональных ИПД, полностью соответствующих этому понятию, не создано. Однако отдельные компоненты ИПД успешно реализованы на региональном уровне, причем, как показывает опыт последних лет, наиболее значимые инициативы, эксперименты и результаты - заслуга субъектов РФ, а отнюдь не федерального центра.

Рассмотрим эти компоненты.

Это, прежде всего, региональная нормативная правовая база.

Примерами регионального законодательства в сфере ИПД могут служить:

*Постановление Правительства Республики Башкортостан от 25.06.2012 г. № 206 «Об инфраструктуре пространственных данных Российской Федерации на территории Республики Башкортостан*: [http://to02.rosreestr.ru/geodeziya\\_cartografiya/spatial\\_data\\_infrastructure/](http://to02.rosreestr.ru/geodeziya_cartografiya/spatial_data_infrastructure/) и *Постановление Правительства Республики Башкортостан от 11 марта 2013 г. № 77 «О республиканской целевой программе «Создание и развитие инфраструктуры пространственных данных Российской Федерации на территории Республики Башкортостан» на 2013 - 2018 годы*»: <http://www.garant.ru/hotlaw/bashkor/465463/>. Ранее, в 2011 г. состоялось заседание Координационного совета по формированию ИПД РФ на территории РБ [Постановление Правительства Республики Башкортостан от 23.05.2011 № 172 «О Координационном совете по формированию инфраструктуры пространственных данных Российской Федерации на территории Республики Башкортостан»]: [http://to02.rosreestr.ru/geodeziya\\_cartografiya/spatial\\_data\\_infrastructure/](http://to02.rosreestr.ru/geodeziya_cartografiya/spatial_data_infrastructure/)] и по его итогам был утвержден проект Концепции ИПД РБ и определены приоритеты на ближайшее время, опубликованы документы, включая проект Концепции ИПД РБ, Положение об операторе ИПД РБ, Положение о временном порядке ведения ИПД РБ и предоставлении БГД и метаданных (<http://www.gisa.ru/77653.html>).

*Постановление Кабинета Министров Республики Татарстан от 26 марта 2012 г. № 239 «Об утверждении Положения об инфраструктуре пространственных данных на территории Республики Татарстан*: <http://www.zakonprost.ru/content/regional/65/1714840>, разработанного на основе активного обсуждения его проекта (<http://www.gisa.ru/file/file2167.doc>) экспертами ГИС-Ассоциации и принятого по итогам обсуждения в качестве «Типового Положения о региональной Инфраструктуре пространственных данных субъекта РФ» (<http://www.gisa.ru/file/file2220.doc>). Предпосылкой внедрения ИПД Республики Татарстан (ИПД РТ) является реализация с 2005 г. ком-

плексного проекта «Электронное Правительство РТ» в тесном взаимодействии с федеральными органами власти.

*Положение о «Региональной инфраструктуре пространственных данных (РИПД) Калужской области»* ([http://www.giskaluga.ru/About/News/polozhen\\_ripd.pdf](http://www.giskaluga.ru/About/News/polozhen_ripd.pdf)) и Интегрированная региональная информационная система (ИРИС) Калужской области, которая является составной частью государственной информационной системы области.

*Постановление Правительства Москвы от 30.06.2009 № 619-ПП «О Концепции среднесрочной городской целевой программы работ по развитию единого геоинформационного пространства города Москвы на 2010 - 2011 годы»* (<http://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/292230/>) и «*Постановление Правительства Москвы от 24.02.2010 № 162-ПП «О Среднесрочной городской целевой программе работ по развитию единого геоинформационного пространства города Москвы на 2010-2011 годы»*» ([http://mosopen.ru/document/162\\_pp\\_2010-02-24](http://mosopen.ru/document/162_pp_2010-02-24)).

*Распоряжение Правительства Свердловской области от 03.11.2011 г. № 1998-РП «О создании Координационного совета по созданию и развитию инфраструктуры пространственных данных Свердловской области»:*

<http://mugiso.midural.ru/upload/iblock/7e7/7e7551ee9926028ba0015ff97acb0d18.pdf>.

Немаловажно, что в последние годы в регионах предложены и реализованы технологические решения, позволившие создать полнофункциональные или функционально ограниченные геопорталы. Первыми из них были: геопортал электронного правительства Самарской области (<http://geosamara.ru>). На сегодняшний день наиболее полнофункциональным можно считать геопортал Воронежской области (<http://map.govvnr.ru>). Наличие функций поиска данных по метаданным позволяет отнести к числу «истинных» и «Отраслевой узел Единого геоинформационного пространства города Москвы» (интегрированную автоматизированную информационную систему) (<http://egip.mka.mos.ru/egip/egip.nsf/>). Из недавних примеров нужно упомянуть геоинформационный портал Чувашии (<http://sdi.cap.ru/geoportal/catalog/main/home.page>) в составе ИПД Чувашской Республики и геопортал Республики Коми (<http://gis.rkomi.ru/>) (рис. 1)

Не все региональные геопорталы соответствуют своему назначению. Напомним, что абсолютно обязательной функцией геопортала в составе ИПД является функция поиска данных и сервисов по метаданным; остальные сервисы, доступ к которым обеспечивает геопортал, включая сервис визуализации данных, являются факультативными. Не являются геопорталами в точном соответствии с их определением «геопорталы» (геоинформационные порталы) Ульяновской (<http://gis.ulgov.ru/>), Белгородской (<http://www.map31.ru/>), Кировской (<http://geoportal43.ru/>, <http://kirov.rekod.ru/>), Архангельской областей (<http://maps29.ru>) Приморского края (<http://www.primoragr.ru/geoportal>). Это сервисы веб-картографирования, ошибочно относимые к элементам ИПД.

К другим несомненным успехам региональных инициатив нужно отнести разработку систем (подсистем) управления пространственными метаданными, поэтапное наполнение баз метаданных, использование международных стандартов (при отсутствии аналогичных российских норм). К сожалению, часть из систем функционирует в закрытых сетях, что связано с режимными ограничениями на пространственные данные, в том числе топографические планы и карты, что противоречит сути ИПД.

Некоторые из региональных инициатив нельзя с полным правом отнести к «геоинфраструктурным», это «традиционные ГИС» вне сетевых технологических решений, информационные системы для узкого круга пользователей, например, в рамках интрасети предприятия. Открытость - неотъемлемое свойство ИПД. С другой стороны, они служат базовыми при дальнейшем развитии и миграции в общедоступную сетевую среду или интеграции в среду ИПД. Используя взгляд на ИПД как «систему систем», интегрирующую иные информационные системы, в том числе геоинформационные, ведомственные и территориальные ресурсы, прежде всего ресурсы простран-



ственных данных, можно предположить, что именно ИПД станет инструментом межотраслевой, межведомственной и межрегиональной интеграции и управления, разумеется, в децентрализованной распределенной сетевой среде.



Рис. 1. Геопортал Республики Коми, главная страница (<http://gis.rkomi.ru>)

Нужно упомянуть несколько примеров инициатив субъектов РФ, интересных с точки зрения использования опыта в региональных работах и при проектировании ИПД в целом, учитывая, что сеть региональных узлов является или должна явиться неотъемлемой составной частью ИПД РФ. Первый в России прототип региональной ИПД - автоматизированная информационно-аналитическая система «Банк ПД Уральского федерального округа (Банк ПД УрФО)» была создана ФГУП (ныне ОАО) «Уралгеоинформ», который включал базу метаданных, геопортал для публикации данных и метаданных в Интернете и для доступа к геосервисам, подсистемы «Архив» и «Хранилище» [8-11]. ИПД Республики Татарстан разрабатывается в ходе выполнения мероприятий по реализации уже упомянутого Положения об ИПД РТ, разработанного на основе активного обсуждения его проекта (<http://www.gisa.ru/file/file2167.doc>) экспертами ГИС-Ассоциации и принятого по итогам обсуждения в качестве «Типового Положения о региональной Инфраструктуре пространственных данных субъекта РФ» (<http://www.gisa.ru/file/file2220.doc>). Геопортал Воронежской области, разработанный областным Управлением информационных технологий в соответствии с Концепцией создания и развития ИПД РФ и Распоряжением Правительства Воронежской области от 2 апреля 2010 г. № 183-р «Об утверждении концепции создания и развития межотраслевой комплексной геоинформационной системы Воронежской области» ([http://geoportale-reg36.ru/index.php?id=59&tx\\_ttnews\[tt\\_news\]=132&cHash=2f987bcd83d1d8b515e345a52781936e](http://geoportale-reg36.ru/index.php?id=59&tx_ttnews[tt_news]=132&cHash=2f987bcd83d1d8b515e345a52781936e)), объеди-

няет детальную базу геоданных, топографическую карту региона, картографический онлайн-сервис и систему поиска и обмена геоинформационными ресурсами (рис. 2).

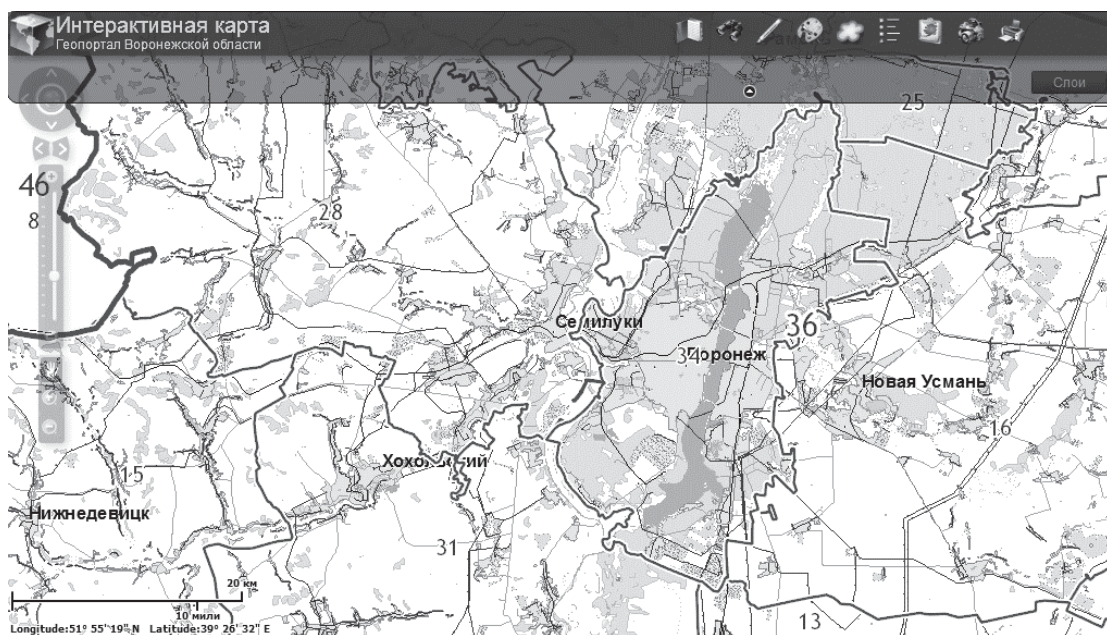


Рис. 2. Геопортал Воронежской области: публичная кадастровая карта Росреестра РФ на топографической основе (<http://map.govvrn.ru/maps>), (<http://map.govvrn.ru:8080/res/catalog/main/home.page>)

Разумеется, это далеко не все примеры инициатив в области создания региональных компонентов ИПД. Стоит упомянуть еще о двух из них: «Едином геоинформационном пространстве» (ЕГИП) Москвы [12] и системах и интеграционных усилиях Санкт-Петербургского информационно-аналитического центра (СПб ИАЦ), в планах которого - создание общегородской Центра пространственных данных Санкт-Петербурга [13]. Витрина ЕГИП - достаточно многофункциональный геопортал Москомархитектуры (<http://egip.mka.mos.ru>). Элементом ЕГИП считается также Электронный атлас Москвы, типичное средство веб-картографирования (<http://eatlas.mos.ru>). Удручает немаловажное обстоятельство: в ЕГИП предусмотрено наличие «информации для служебного пользования», «информации ограниченного доступа» в «режимно-секретном контуре». Известны информационные, и в частности, геоинформационные системы Санкт-Петербурга, разрабатываемые СПб ИАЦ, Эти работы несколько выходят за рамки «региональных инициатив», поскольку ИПД столичных мегаполисов - системы, существенно отличные от региональных, городских и локальных информационных систем и по задачам, и по функциям, что позволяет выделить особый класс ИПД - ИПД мегаполисов.

Нормативно-техническая база ИПД, образуемая стандартами на данные и сервисы, не предъявляет каких-либо специфических требований к программному обеспечению, которое используется разработчиками ИПД. Это относится к пространственным данным, сбор которых вообще выходит за пределы проблематики ИПД (за исключением базовых пространственных данных, если их нет), и речь может идти лишь о среде хранения данных. Сетевые сервисы (геосервисы) поддерживаются, как показывает анализ, двумя типами программных продуктов: коммерческим и распространяемым свободно, в том числе с открытым программным кодом. Могут использоваться облачные сервисные платформы (площадки).

Сборки из продуктов с открытым исходным программным кодом для создания ГИС и геопорталов, включая сервисы картографической визуализации данных, широко распространены в научной и научно-образовательной среде, поскольку не требуют больших финансовых затрат на

их внедрение и поддержку. Для примера можно назвать геопортал ГеоМЕТА-ИГРАН Института географии РАН (<http://asdi.igras.ru>) на базе геопортала геоинформационно-аналитической системы «ГеоМЕТА-ВЦ РАН» (<http://www.geometa.ru>) [14]. Он нацелен на реализацию подсистемы управления пространственными метаданными, обеспечивая доступ к пространственным данным и метаданным о них, инвентаризацию основных, прежде всего сетевых, информационных ресурсов ИГ РАН в части пространственных данных и их описание в форме метаданных, используя академический профиль метаданных «ГеоМЕТА», совместимый с международным стандартом ISO 19115:2003 «Географическая информация - Метаданные». Другой институтский сервис - виртуальная ГИС-лаборатория на платформе облачного сервиса UniHUB (<http://www.unihub.ru>) иллюстрирует тенденцию к миграции пространственных данных, геосервисов и приложений в сетевую среду.

Среди компонентов других сборок - MapServer, GeoServer, OpenLayers, GeoNetwork, PostGIS, PostgreSQL, MySQL и другие средства, которые, в частности поддерживаются фондом OSGeo (Open Source Geospatial Foundation). Кроме того, за рубежом используется готовое интегрированное технологическое решение EasySDI (<http://www.easysdi.org>), рекомендуемое для создания элементов ИПД в рамках европейской программы INSPIRE.

Работы по созданию ИПД или их составляющих выполняются в институтах Сибирского и Дальневосточного отделений РАН, крупных университетах Сибирского региона. Наиболее показателен опыт Института вычислительной математики СО РАН, создавшего и поддерживающего «Геопортал ИВМ СО РАН» (<http://gis.krasn.ru/blog/content/programmnoe-obespechenie-geoportalo>). Он основан на использовании открытого и свободного программного обеспечения: операционная система FreeBSD, СУБД PostgreSQL 8.3, PostGIS 1.5, веб-сервер Apache 2.2, PHP 5.3, MapServer 5.6. Поддерживаются также Quantum GIS, ArcGIS, MapInfo и др. Геопортал служит программно-технологической основой ресурсоемких информационно-аналитических систем регионального уровня для задач различной тематики - информационной поддержки отраслевого управления (в сфере здравоохранения и образования), экологического мониторинга и оценки состояния окружающей природной среды, прогноза социально-экономического развития региона, централизованного информационного обеспечения картографическими данными и т.д. Информационное наполнение обеспечивается за счет результатов научных и прикладных работ в ИВМ СО РАН, партнерских институтах и организациях (рис. 3).

Примерами академических геоинформационных веб-сайтов и геопорталов также служат:

- ГИС-сервер Института вычислительных технологий СО РАН (ИВТ СО РАН), предназначенный для поиска снимков Landsat и SPOT (<http://gis-app.ict.nsc.ru/catalogue/>) и Информационная система спутниковых данных (ИССД) СО РАН, разработанная в ИВТ СО РАН при участии Сибирского центра ГУ «НИЦ ПЛАНЕТА» (Новосибирск). ИССД предоставляет доступ к наборам различной спутниковой и сопутствующей информации, в режимах открытого и ограниченного доступа. Содержит набор интерфейсов для пользовательского и программного доступа к данным (<http://sdc.esemc.nsc.ru/>);
- Геопортал Института динамики систем и теории управления СО РАН, созданный в рамках Интеграционного проекта рядом институтов СО РАН, позволяющий поддерживать импорт метрической и семантической информации, способа визуализации из форматов различных ГИС (SXF/RSC (ГИС Панорама), APR/Shape (ГИС ArcView), WOR/TAB (ГИС MapInfo), ГИС КАМАТ), использующий специализированный сервер ZooPARK - GEO для организации доступа к различным информационным системам на базе трехуровневой модели распределенной информационной системы, основанной на международных стандартах (Z39.50, WWW, LDAP) и реализующий механизмы хранения и обработки метаданных на основе GeoNetwork opensource (<http://geos.icc.ru/>),
- Геопортал Института вулканологии и сейсмологии ДВО РАН, предоставляющий доступ к

ряду информационных систем, каталогов и архивов по тематике деятельности Института (<http://geoportal.kscnet.ru/>) и др.

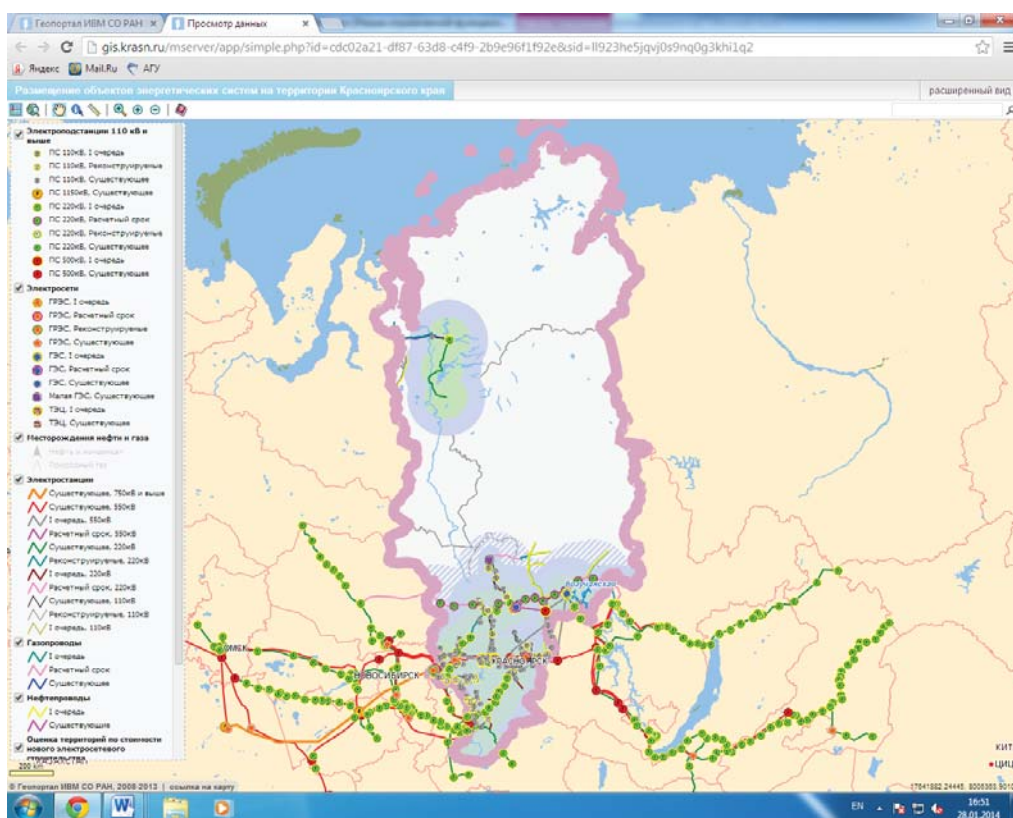


Рис. 3. Геопортал ИВМ СО РАН: Просмотр данных, Размещение объектов энергетических систем на территории Красноярского края (<http://gis.krasn.ru/msserver/>)

Вопросам создания ИПД посвящаются научно-практические мероприятия, организуемые чаще всего по инициативе научных организаций, а также бизнес- и общественных структур, специализирующихся в сфере информационных технологий (IT). Проведение IT-форумов практикуется в различных регионах в целях усиления заинтересованности регионов в создании ИПД [15, 16].

Другой из распространенных путей - ориентация на коммерческую продукцию крупных производителей программных средств ГИС, в линейке которых можно найти средства веб-картографирования и устройства геоportалов в целом. Многие российские разработчики, использующие продукцию Esri, «привязаны» к серверному программному обеспечению ArcGIS (for) Server для обеспечения доступа к геоинформационным ресурсам в виде геосервисов (<http://esri-cis.ru/products/arcgis-server/detail/review/>). Этот продукт лежит в основе упомянутого выше национального геоportала ИПД РФ. Такое решение было обосновано в Техническом задании «Геоинформационный портал и геоинформационная платформа» - в одном из документов, подготовленных ФКЦ «Земля» по государственному контракту № ГК-187-ОФ/Д01 от 15.11.2011 г.) «Создание и развитие инфраструктуры пространственных данных Российской Федерации» (<http://aisup.economy.gov.ru/pubportal/materials.jsp?uuid=pprtcto2k03380000k550rhtl4irk880>) для Минэкономразвития РФ в 2011 г. Задание содержало следующие требования к программному обеспечению, положенные в основу проектирования и создания национального геоportала ИПД РФ (<http://aisup.economy.gov.ru/pubportal/downloadfile?uuid=pprtflo2k03380000k550tefbf7r5238>); среди необходимых программных продуктов:

- Esri Software:
  - ArcGIS for Desktop 10
  - ArcGIS for Server 10
- ОС:
  - Windows Server 2008 Standard, Enterprise, & Datacenter (32-bit and 64-bit)
  - Windows Server 2003 Standard, Enterprise, & Datacenter (32-bit and 64-bit)
  - Windows 7 Ultimate, Professional Edition (32-bit and 64-bit)
  - Windows Vista Ultimate, Enterprise, Business (32-bit and 64-bit)
  - Windows XP Professional Edition (32-bit and 64-bit)
- СУБД:
  - PostgreSQL 8.3.8 and 8.4.1 (32-bit and 64-bit)
  - Oracle 11g 11.1.0.7 (32-bit and 64-bit)
  - Oracle 11g R2 (32-bit and 64-bit)
  - Microsoft SQL Server 2008 Standard edition, Enterprise edition (32-bit and 64-bit)
  - Microsoft SQL Server 2008 R2 Standard edition, Enterprise edition (32-bit and 64-bit)
- Любой почтовый сервер - Mail SMTP Server.
- Служба управления пользователями:
  - LDAP
  - ADS

Требования к программному обеспечению для функционирования ГИС-портала:

- Операционные системы:
  - Windows Server 2008 32bit/64bit
  - Windows Server SP2 2003 32bit/64bit
  - Windows XP Professional SP 3
  - Linux 64-bit Kernel 2.6
  - Linux 32-bit Kernel 2.6
  - RedHat Enterprise Linux AS/ES 5
- Контейнер сервлетов (Servlet Containers ) - Java Web-сервер:
  - Tomcat 6.0.x [6.0.20+]
  - Oracle WebLogic 10.1
  - Oracle WebLogic 11g
  - Sun GlassFish 2.1
  - Servlet Exec AS 6.0
- Java:
  - Java JDK 5
  - Java JDK 6
- СУБД:
  - Oracle 11 Enterprise
  - Oracle 10g
  - PostgreSQL 8.4

- PostgreSQL 8.3
- MS SQL Server 2005
- MS SQL Server 2008
- ESRI JavaScript API.
- Любой почтовый сервер - Mail SMTP Server.
- Служба управления пользователями:
  - LDAP
  - ADS
- Интернет-браузер:
  - Firefox Version 3.5
  - Microsoft Internet Explorer Version 8.0
  - Microsoft Internet Explorer Version 7.0
  - Google Chrome 5
  - Apple Safari 5

Аналогичное решение - ИПД «Регион», разработанное компаниями «DATA+» и Esri CIS ([http://esri-cis.ru/products/sdi\\_region/detail/review/](http://esri-cis.ru/products/sdi_region/detail/review/)). Она включает серверные и настольные продукты Esri ArcGIS и позволяет выполнять функции поиска, публикации, просмотра и использования пространственных данных, а также администрировать и управлять правами доступа к тем или иным наборам пространственных данных. В «ИПД Регион» используется та же технология, что и на федеральном геопортале ИПД РФ, что обеспечивает простую и быструю интеграцию. Решение соответствует стандартам ISO, ГОСТ и моделям данных INSPIRE. В частности, ИПД «Регион» лежит в основе ИПД Чувашской Республики: <http://dataplus.ru/news/detail.php?ID=10800>.

ArcGIS Server используется для организации доступа к данным и межсистемного обмена между органами исполнительной власти центрального узла ЕГИП города Москвы (рис. 4) [12].



Рис. 4. Картографический визуализатор автоматизированной информационной системы Москомархитектуры в составе ЕГИП города Москвы (<http://egip.mka.mos.ru/GeoViewer>)

Приведенные примеры создания региональных ИПД и элементов ИПД и опыт других субъектов РФ позволяют сделать вывод о том, что сегодня существуют и разрабатываются ИПД различного типа, уровня и характера. Структуру и специфику ИПД определяют ее основные компоненты: наборы БПД, метаданные, геопорталы и реализуемые сервисы.

При анализе реализации проектов по созданию ИПД в субъектах РФ использованы материалы, размещенные на сайтах и порталах Правительств/администраций регионов России, институтов Российской академии наук, а также на сайте ГИС-Ассоциации.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 13-05-00462-а и № 12-07-98012-р\_сибирь\_a.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кошкарев А.В. Инфраструктуры пространственных данных // ГИС-Обозрение. 2000. № 3-4 (начало). С. 5-10. 2001. № 1. С. 28-32 (продолжение).
- [2] Кошкарев А.В. Быть или не быть инфраструктуре пространственных данных в России? // Информационный бюллетень ГИС-Ассоциации. Специальный выпуск - геоинформатика. 2003. №1 (38)-2 (39). С.45-47.
- [3] Кошкарев А.В. Нормативная правовая база и стандарты инфраструктур пространственных данных. V международная конференция «Геоинформационные технологии и космический мониторинг», Всероссийское совещание консорциума «Университетские геопорталы - УНИГЕО» (2-6 сентября 2012 г.). Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета. 2012. С. 20-37.
- [4] Кошкарев А.В. Инфраструктуры пространственных данных: текущее состояние и проблемы. Российский и зарубежный опыт. - Охрана окружающей среды и природопользование. 2011. № 3. С. 37-47.
- [5] Кошкарев А.В. Инфраструктуры пространственных данных и очередные задачи картографии // Картография XXI века: теория, методы, практика: Доклады II Всероссийской научной конференции по картографии, посвященной памяти Александра Алексеевича Лютого (Москва, 2-5 октября 2001 г.). М: Институт географии РАН. 2001. С. 137-144.
- [6] Кошкарев А.В. Информационно-инфраструктурная самоорганизация регионов // Пространственные данные. 2009. № 1. С. 19.
- [7] Кошкарев А.В., Ротанова И.Н. Проблемы российских региональных ИПД // Геоинформационное картографирование в регионах России: Материалы V всероссийской научно-практической конференции (Воронеж, 19-22 сентября 2013 г.) / Воронежский государственный университет. - Воронеж: Изд-во «Цифровая полиграфия», 2013. - С. 77 - 90.
- [8] Алябьев А.А., Анисимова О.Л., Серебряков С.В., Цереня П.В. Геопортал Уральского федерального округа как прототип узла РИПД // Пространственные данные. 2009. № 3. С. 16 - 22: <http://gisa.ru/56572.html>.
- [9] Анисимова О.Л., Зраенко Ю.Д., Комоско В.В., Пестов И.Д., Серебряков С.В. Хранилище пространственных объектов в составе регионального узла ИПД УрФО: модели хранилища // Пространственные данные. 2010. № 1. С. 46-49, 62-70: <http://gisa.ru/64211.html>.
- [10] Анисимова О.Л., Комоско В.В., Серебряков С.В. и др. Информационное и программное обеспечение управления метаданными на базе регионального центра Уральского федерального округа // Пространственные данные. 2009. № 2. С. 22 - 30: <http://gisa.ru/54644.html>.
- [11] Серебряков С.В., Баженова Ю.Д. Новый подход к организации и хранению пространственных данных // Геодезия и картография. 2008. № 7. С. 52-55.
- [12] Антипов А.В., Кошкарев А.В., Потапов Б.В., Филиппов Н.В. Единое геоинформационное пространство города Москвы как составная часть инфраструктуры пространственных данных Российской Федерации. Часть 1 // Под ред. А.В. Антипова. М.: ООО Издательство «Проспект». 2013.
- [13] Исаев Б.А., Резина Н.В., Андреев А.А. О формировании единого геоинформационного пространства исполнительных органов государственной власти Санкт-Петербурга: <http://www.iac.spb.ru/img/gis.ppt>
- [14] Кошкарев А.В., Медведев А.А. Сетевые геосервисы Академической ИПД. // Географические исследования молодых ученых в регионах Азии: материалы молодежной конференции с международным участием (Барнаул - Белокуриха, Барнаул, 20-24 ноября 2012 г.) / Ред. О.В. Останин, Н.Ф. Харламова. Барнаул: ООО «Алтай-Циклон». 2012. С. 15-18: <http://www.asu.ru/files/documents/00006764.pdf>.
- [15] Современные информационные технологии для научных исследований. Материалы Всероссийской конференции, Магадан, 20-24 апреля 2008 г. Магадан: СВНЦ ДВО РАН. 2008.
- [16] Тематическое картографирование для создания инфраструктур пространственных данных / Материалы IX научной конференции по тематической картографии (Иркутск, 9-12 ноября 2010г.). В 2-х томах. - Иркутск: Изд-во ИГ СО РАН. 2010.

## ON MODELING OF WAVE FLOWS IN THE NON-PRISMATIC CHANNEL

### О МОДЕЛИРОВАНИИ ВОЛНОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ В НЕПРИЗМАТИЧЕСКОМ КАНАЛЕ

---

*The modeling of the dam break problem is performed on the cross-sectional area jump in the rectangular channel, when the width of the channel in the upper pool is greater than in the lower pool. The theory is compared with numerical and laboratory experiments. The theoretical solutions have quite good matching with two-dimensional numerical calculations and laboratory experiments on the possible types of waves, their spreading velocities and the depth beyond their fronts.*

---

#### ВВЕДЕНИЕ

Для анализа последствий аварийных ситуаций на гидротехнических водоподпорных сооружениях большое значение имеет информация, полученная при экспериментальном и теоретическом моделировании задачи о разрушении плотины [1]. Эта задача, достаточно интенсивно изучавшаяся еще в середине прошлого столетия [2], остается актуальной и в настоящее время [3]-[7]. В настоящей работе приведены результаты сравнения теории с численным и лабораторным моделированием задачи о волновых течениях, возникающих в результате разрушения плотины на скачке площади сечения в прямоугольном канале, ширина которого в верхнем бьефе больше, чем в нижнем.

#### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дифференциальные уравнения теории мелкой воды (уравнения Сен-Венана) в непризматическом прямоугольном канале без учёта влияния трения и уклона дна имеют вид [1]

$$w_t + q_x = 0 \quad (1)$$

$$q_t + (qv + ghw/2)_x = gh^2 b_x / 2 \quad (2)$$

где  $h = h(t, x)$  - глубина воды,  $q = q(t, x)$  - расход воды в поперечном сечении канала,  $w = w(t, x) = bh$  - площадь поперечного сечения потока,  $b = b(x)$  - ширина канала,  $v = v(t, x) = q/w$  - средняя по сечению скорость потока,  $g$  - ускорение свободного падения. Уравнения (1) и (2) представляют собой дифференциальную форму записи законов сохранения массы и полного импульса.

Рассмотрим для системы (1)-(2) задачу о разрушении плотины

$$h(0, x) = \begin{cases} h_l, & x \leq 0, \\ h_r, & x > 0, \end{cases} \quad h_l > h_r, \quad v(0, x) = 0 \quad (3)$$

на скачке площади сечения

$$b(x) = \begin{cases} b_l, & x \leq 0, \\ b_r, & x > 0, \end{cases} \quad w(0, x) = \begin{cases} w_l, & x \leq 0, \\ w_r, & x > 0, \end{cases} \quad (4)$$

где  $w_l = b_l h_l$ ,  $w_r = b_r h_r$ ,  $b_l > b_r$ ,  $w_l > w_r$  (рис. 1).

В работе [7] в рамках автомодельных решений доказана однозначная разрешимость этой зада-

---

<sup>1</sup> Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of SB RAS, Novosibirsk, Russia  
<sup>2</sup> Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia



чи при условии, что на неподвижном гидравлическом прыжке, формирующемся на скачке площади сечения, наряду с непрерывностью расхода  $q$ , непрерывной является функция Бернулли  $J = \frac{v^2}{2} + gh$ , что следует из сохранения на этом скачке полной энергии потока. В [7] однозначная разрешимость задачи (1)-(4) показана при условии, что на скачке площади сечения некоторая часть полной энергии потока теряется в результате удара воды о стенку канала,

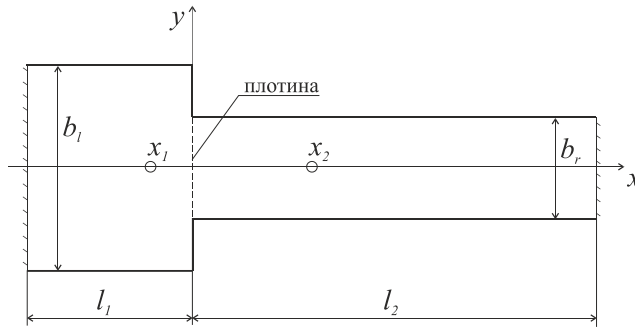


Рис. 1. Схема эксперимента (вид сверху):  $x_1, x_2$  - точки расположения волномеров.

расположенную перпендикулярно к направлению основного течения. Такая потеря полной энергии означает, что некоторая её часть переходит в энергию вихревого движения, которая в рамках одномерной модели теории мелкой воды не учитывается. Математически это приводит к замене условия непрерывности функции Бернулли  $J$  на соотношение  $\sigma J_1 = J_0$ , где  $J_0$  и  $J_1$  - значения функции  $J$  справа и слева от неподвижного гидравлического прыжка, а  $\sigma \in (0, 1]$  - эвристический параметр, задающий часть полной энергии потока, сохраняющуюся при переходе через разрыв (4).

Выполняя преобразование подобия относительно временной и пространственной переменных, можно перейти к безразмерным величинам  $f^*$ , для которых ускорение свободного падения  $g^*$ , ширина канала  $b_i^*$  и начальная глубина воды  $h_i^*$  в верхнем бьефе удовлетворяют условиям  $g^* = h_i^* = b_i^* = 1$ . В этом случае решение задачи о разрушении плотины (1)-(4), при условии  $\sigma J_1 = J_0$  на скачке (4), определяется тремя безразмерными параметрами: относительными глубиной  $h_r^* = h_r / h_i$  и шириной  $b_r^* = b_r / b_i$  канала в нижнем бьефе и параметром  $\sigma$ . Построенные в [7] решения задачи (1)-(4) при любых возможных значениях безразмерных параметров  $b_r^*$  и  $\sigma$  допускают два качественно различных типа течений  $A$  и  $B$ , профили которых схематически показаны на рис. 2.

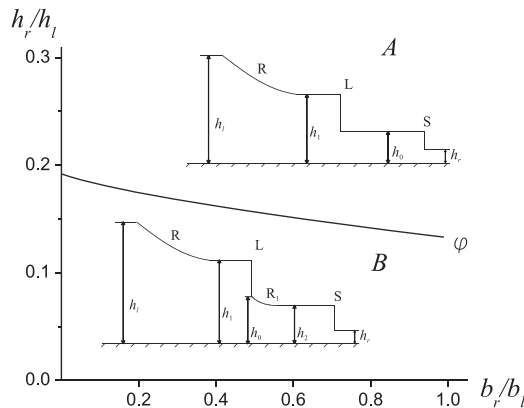


Рис. 2. Качественно различные профили волн  $A, B$  и области их существования на плоскости безразмерных параметров  $\sigma = 0.93$ .

В трёхмерном фазовом пространстве безразмерных параметров  $h_r^*, b_r^*$  и  $\sigma$  граница между этими типами течений представляет собой поверхность

$$F(h_r^*, b_r^*, \sigma) = b_r^* (h_0^*)^{3/2} - 2h_1^* (1 - \sqrt{h_1^*}) = 0,$$

в которой

$$h_0^* = ph_r^*, \quad p = 1 + \frac{4}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)\right) \approx 3.214,$$

$$h_1^* = \alpha \left(1 + 2 \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(1 - \frac{\beta^2}{4\alpha^3}\right)\right)\right),$$

$$\alpha = \frac{h_0^*}{2\sigma}, \quad \beta = b_r^* (h_0^*)^{3/2}.$$

На рис. 2 приведено сечение фазового пространства  $\{h_r^*, b_r^*, \sigma\}$  плоскостью  $\sigma = \sigma_0 = 0.93$ , в которой линия  $\varphi$  задается формулой

$$\varphi = \varphi(h_r^*, b_r^*) = F(h_r^*, b_r^*, \sigma_0).$$

Проведём сравнение автомодельных решений задачи (1)-(4) с результатами её численного моделирования на основе плановых (пространственно двумерных) уравнений теории мелкой воды. Эти уравнения без учёта влияния трения и уклона дна имеют вид [1]:

$$h_t + (q_1)_x + (q_2)_y = 0, \tag{5}$$

$$(q_1)_t + (q_1 v_1 + gh^2/2)_x + (q_1 v_2)_y = 0, \tag{6}$$

$$(q_2)_t + (q_2 v_1)_x + (q_2 v_2 + gh^2/2)_y = 0, \tag{7}$$

где  $h(t, x, y)$  - глубина воды,  $\mathbf{q}(t, x, y) = (q_1(t, x, y), q_2(t, x, y))$  - вектор расхода воды,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2) = \mathbf{q}/h$  - осреднённый по глубине вектор скорости потока,  $g$  - ускорение свободного падения.

Предполагая, что канал (4) имеет продольную осевую симметрию, примем эту ось симметрии за ось  $x$ , а ось  $y$  направим перпендикулярно к ней (рис. 1). С учётом этого систему (5)-(7) будем решать в области

$$G = \left\{ (x, y) : |x| \leq X; |y| \leq \frac{b_l}{2}, \quad x \leq 0; |y| \leq \frac{b_r}{2}, \quad x > 0 \right\} \tag{8}$$

с начальными условиями

$$h(0, x, y) = \begin{cases} h_l, & x \leq 0, \\ h_r, & x > 0, \end{cases} \quad v_1(0, x, y) = v_2(0, x, y) = 0, \tag{9}$$

соответствующими одномерным условиям (3), и условиями непротекания на границе области  $G$ .

Поскольку рассматриваемое течение содержит прерывную волну (в силу чего представляет собой быстропротекающий волновой процесс), то для его численного моделирования была использована условно устойчивая консервативная разностная схема с искусственными вязкостями, при реализации которой отсутствуют прогонки и итерации по нелинейности. Аналогичная схема применялась в [8] для моделирования волновых течений, вызванных сходом берегового оползняка, в [9] - для расчёта процесса распространения прерывных волн по сухому руслу и в [10] - для моделирования эволюции однородной завихренности в прямоугольном бассейне с наклонным дном после резкого замедления его вращения.

На рис. 3 при  $b_l/b_r = 2$  сплошными линиями показана глубина потока  $h(t, x)$ , полученная путём

построения автомодельного решения одномерной задачи (1)-(4). Кружками на этом рисунке приведены осреднённые по ширине канала значения глубин  $h(t, x, y)$ , полученные в результате численного решения двумерной задачи (5)-(9) при тех же значениях входных параметров  $b_l, b_r, h_l, h_r$ . Осреднение проводилось по формуле

$$\bar{h}(t, x) = \frac{1}{b(x)} \int_{-b(x)/2}^{b(x)/2} h(t, x, y) dy,$$

в которой интеграл приближённо вычислялся по формуле трапеций.

На нижних графиках рис. 3 на момент времени  $t = 5$  с показаны решения типа  $A$  (рис. 2), для которых за фронтом прерывной волны  $S$  формируется докритический тип течения. На верхних графиках на момент времени  $t = 4.5$  с приведены решения типа  $B$  (рис. 2), для которых за фронтом прерывной волны  $S$  формируется сверхкритический тип течения. В обоих случаях начальная глубина нижнего бьефа  $h_l = 1$  м, а начальная глубина верхнего бьефа  $h_r = 4.5$  м для решений типа  $A$  и  $h_r = 9$  м для решений типа  $B$ . Точные решения  $h(t, x)$  получены при значении параметра  $\sigma = 0.86$ , которое выбиралось из условия согласования точного и численного решений по расположению фронта прерывной волны  $S$ .

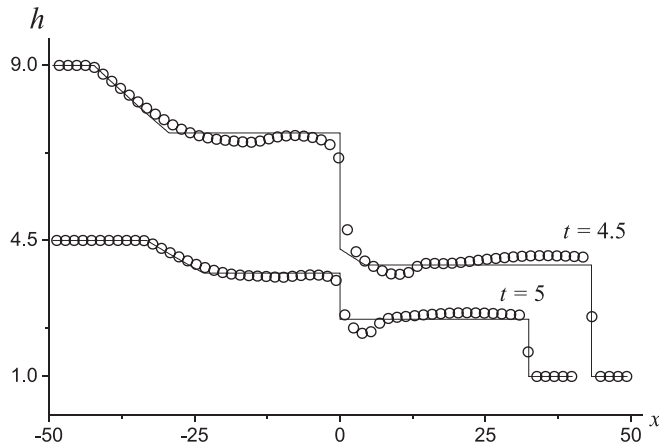


Рис. 3. Сравнение теоретических и осреднённых по ширине канала численных решений для докритического ( $t = 5$  с) и сверхкритического ( $t = 4.5$  с) режимов течений при  $\sigma = 0.86, b_l / b_r = 2$ .

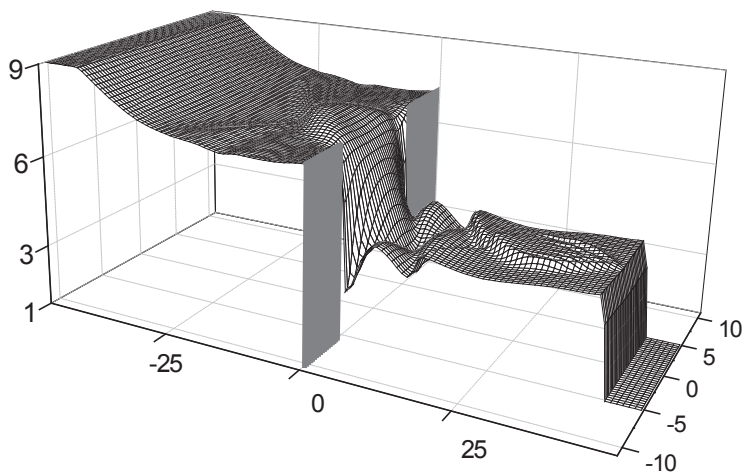


Рис. 4. Поверхность двумерной волны на момент времени  $t = 4.5$  с при  $b_l / b_r = 2, \sigma = 0.86, h_l = 9$  м,  $h_r = 1$  м.

Как видно из рис. 3 заметное отличие осреднённых разностных решений  $\bar{h}(t, x)$  от точных автомодельных решений  $h(t, x)$  наблюдается справа от разрыва  $L$  (рис. 2) и проявляется в некотором «провале» глубин разностного решения, который более ярко выражен в случае решений типа  $A$ , когда справа от разрыва  $L$  отсутствует волна понижения  $R_1$ . Наличие этого «провала» связано с существенно двумерным характером течения в окрестности скачка (4). Для иллюстрации этого на рис. 4 в момент времени  $t = 4.5$  с приведён график численной функции  $\eta(x, y) = h(t_1, x, y)$ , задающей поверхность двумерной волны, получаемой при решении задачи (5)-(9) с параметрами  $b_l/b_r = 2$ ,  $h_l = 9$  м,  $h_r = 1$  м, а на рис. 5 показано поле скоростей этой волны в окрестности разрыва  $L$ .

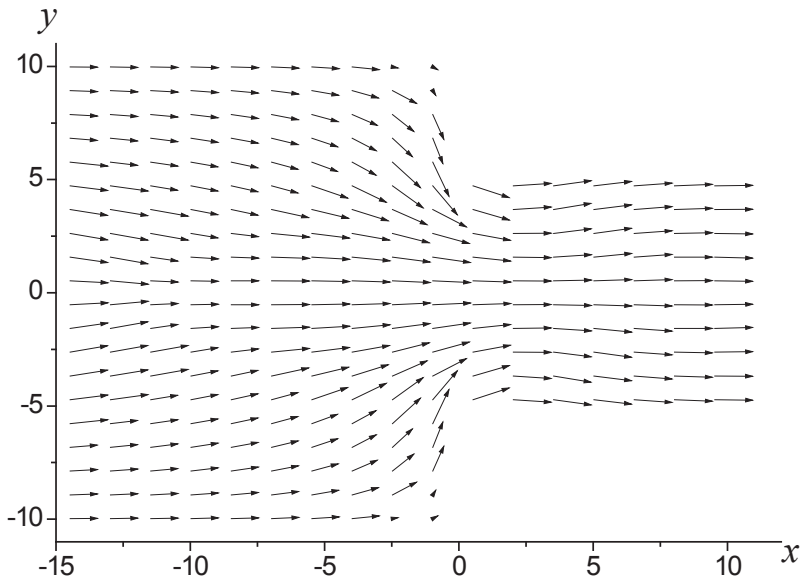


Рис. 5. Поле скоростей двумерной волны в окрестности скачка площади сечения канала на момент времени  $t = 4.5$  с при  $b_l/b_r = 2, \sigma = 0.86, h_l = 9$  м,  $h_r = 1$  м.

Серия расчётов с различными значениями  $b_l/b_r$  показала, что соответствие между точным автомодельным и осреднённым разностным решениями ухудшается с увеличением отношения  $b_l/b_r$ , т.е. с увеличением скачка площади сечения (4). Расчёты также показали, что с течением времени при удалении от разрыва  $L$  эти решения постепенно сближаются, что связано с асимптотическим переходом при  $t, |x| \rightarrow +\infty$  двумерного решения задачи (5)-(9) к одномерному решению, описывающему плоскопараллельное течение жидкости.

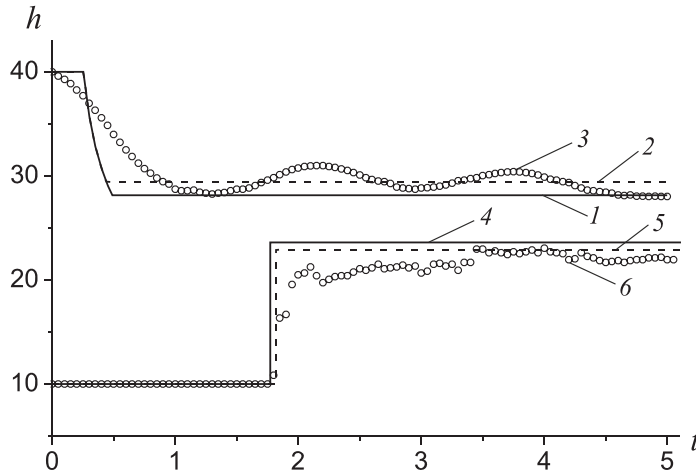
## СРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ И ЭКСПЕРИМЕНТА

Дегтяревым В.В. и его сотрудниками на базе комплексной экспериментальной установки в НГАСУ (Сибстрин) проведены эксперименты, моделирующие задачу о разрушении плотины на скачке площади сечения прямоугольного канала. Схема эксперимента (вид сверху) представлена на рис. 1. В верхнем бьефе длина канала  $l_1 = 5$  м, ширина  $b_1 = 0.38$  м; в нижнем бьефе длина канала  $l_2 = 10$  м, ширина  $b_r = 0.254$  м. Начальный перепад уровней создавался с помощью плоского затвора, расположенного на скачке площади сечения канала (точка  $x = 0$  на рис. 1).

В проведённой серии экспериментов начальная глубина верхнего бьефа была постоянной  $h_l = 40$  см, а начальная глубина нижнего бьефа принимала девять различных значений

$$h_{r,i} = 4 + 2i \text{ см}, \quad i = \overline{0,8}. \quad (10)$$

В начальный момент времени  $t = 0$  затвор удалялся из канала вертикально вверх с помощью рычажной системы за время не более 0.08 с. В точках  $x_1 = -0.5$  м и  $x_2 = 1.7$  м, приведенных на рис. 1, были установлены волномеры, при помощи которых измерялась глубина жидкости в последовательные моменты времени. Рассматриваются такие интервалы времени, на которых в заданном поперечном сечении ещё не проявляется влияние волн, отражённых от торцов канала.



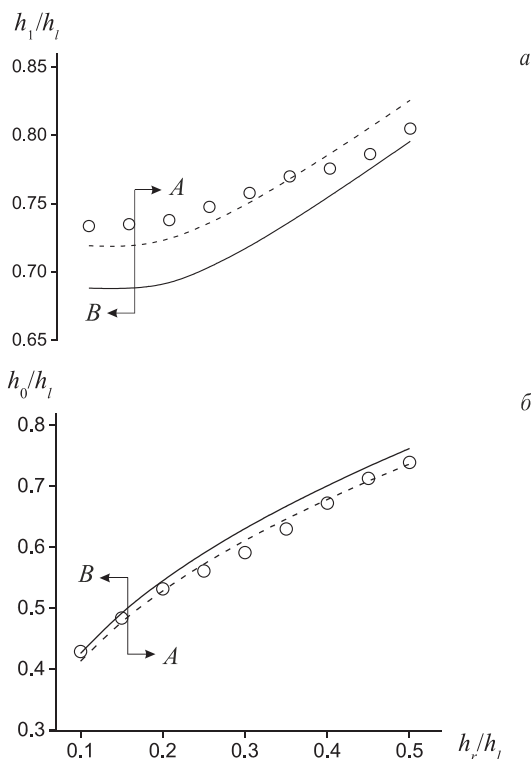
**Рис. 6.** Изменение уровня свободной поверхности во времени при фиксированных значениях продольной координаты  $x$ : 1-3- $x=-0.5$  м, 4-6- $x=1.7$  м. 1, 4 - точные решения при  $\sigma = 1$ ; 2, 5 - точные решения при  $\sigma = 0.93$ ; 3, 6 - экспериментальные данные.

На рис. 6 приведены графики глубины как функции времени в точках  $x_1$  и  $x_2$  для начальной глубины нижнего бьефа  $h_r = 10$  см. На рис. 7 представлены графики глубин в (тех же) точках  $x_1$  и  $x_2$  как функции начальной глубины (10) нижнего бьефа. На рис. 6, 7 теоретическое решение показано сплошной линией при  $\sigma = 1$ , что соответствует сохранению полной энергии на скачке площади сечения (4), а пунктирной линией - при  $\sigma = \sigma_0 = 0.93$ , что соответствует потери части полной энергии на этом скачке. Кружками на рис. 6, 7 показаны результаты соответствующих экспериментов.

Из рис. 6 видно, что теория достаточно хорошо согласуется с экспериментом по глубинам за фронтом прерывной волны  $S$  в нижнем бьефе и за волной понижения  $R$  в верхнем бьефе. Вместе с тем по скорости распространения и форме волн согласование теории и эксперимента в нижнем бьефе заметно лучше (рис. 6, 4-6), чем в верхнем (рис. 6, 1-3).

На рис. 7, а теоретические и экспериментальные данные сравниваются по глубине  $h_1$  за волной понижения  $R$  в верхнем бьефе, а на рис. 7, б - по глубине  $h_0$  за фронтом прерывной волны  $S$  в нижнем бьефе. Каждая экспериментальная точка рис. 7 получена как среднее арифметическое нескольких значений глубин в фиксированной пространственной точке в последовательные моменты времени, принадлежащие некоторому временному интервалу. Точное решение на этом временном интервале постоянно и расположено на некотором расстоянии от фронта прерывной волны, где влияние ондуляций, получаемых в эксперименте, незначительно. Отрезками вертикальных линий с горизонтальными стрелками на рис. 7 показаны границы областей существования волн типов  $A$  и  $B$ .

Сравнение теории [7] с результатами численного и лабораторного моделирования показало достаточно хорошее согласование по возможным типам волн, скорости их распространения и асимптотическим глубинам за их фронтами. Однако данная теория не описывает ондуляций, возникающих за фронтом прерывной волны, и для их описания необходимо привлекать более высокие приближения теории мелкой воды.



**Рис. 7.** Сравнение теоретических и экспериментальных глубин в точках расположения волномеров: а - волномер в точке  $x_1$ , б - волномер в точке  $x_2$ . Точные решения при  $\sigma = 1$  - сплошные линии, при  $\sigma = 0.93$  - пунктирные линии; экспериментальные данные - кружки.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских учёных (грант МК-3477.2013.1) и совместного проекта фундаментальных исследований НАН Украины и СО РАН № 8.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Стокер Дж. Дж. Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: Изд-во иностр. лит. 1959. 618 с.
- [2] Dressler R.F. Comparison of theories and experiments for the hydraulic dam-break wave. Intern. Assoc. Sci. Hydrology. 1954. V.3. No.38. P.319-328.
- [3] Stansby P. K., Chegini A., Barnes T. C. The initial stages of dam-break flow. J. Fluid Mech. 1998. V.374. P.407-424.
- [4] Остапенко В.В. Течения, возникающие при разрушении плотины над уступом дна. ПМТФ. 2003. Т.44. № 6. С.107-122.
- [5] Букреев В.И., Гусев А.В., Остапенко В.В. Распад разрыва свободной поверхности жидкости над уступом дна канала. Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 6. С.72-83.
- [6] Khankandi A.F., Tahershamsi A., Soares-Frazao S. Experimental investigation of reservoir geometry effect on dam-break flow. J. Hydraulic Res. 2012. V.50. No.4. P.376-387.
- [7] Ковыркина О.А., Остапенко В.В. Сравнение теории и численного эксперимента в задаче о разрушении плотины на скачке площади сечения прямоугольного канала. Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2013. № 3. С.12-23.
- [8] Остапенко В.В. Численное моделирование волновых течений, вызванных сходом берегового оползня. ПМТФ. 1999. Т.40. № 4. С.109-117.
- [9] Борисова Н.М., Остапенко В.В. О численном моделировании процесса распространения прерывных волн по сухому руслу. Ж. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т.46. № 5. С.887-909.
- [10] Ахметов А.Д., Никулин В.В., Остапенко В. В. Кумуляция завихренности в прямоугольном бассейне с наклонным дном после резкого замедления его вращения. Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 6. С.94-105.

# FRactal Models in the Microwaves Frequency Diffraction Theory

## ФРАКТАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ В ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ СВЧ ВОЛН

---

*Frequency and energy features of radio waves scattered by a stochastic fractal surface have been theoretically studied. The conception of the two-frequency coherence function (FCF) serves as the basis for our calculations. It was recently shown that the experimental and theoretical data became closer to each other when accounting the fractality of natural surfaces. And so our purpose is to investigate the scattering on fractal surfaces in detail. The fractal model of the surfaces under investigation is based on a modification of the 2D Weierstrass function. We used the Kirchhoff approach to find the scattering characteristics.*

---

### ВВЕДЕНИЕ

Для решения ряда научных и практических задач дистанционного зондирования земной поверхности и радиолокации, наряду с оптическими, широко применяются и радиофизические методы наблюдений в сверхвысокочастотном диапазоне радиоволн - от дециметровых до миллиметровых. Интерес к диапазону СВЧ вызван целым рядом преимуществ, которые даёт его использование по сравнению с более длинноволновыми диапазонами. Это - увеличение разрешающей способности по углу, дальности и скорости при высокой помехоустойчивости к средствам радиопротиводействия, улучшение электромагнитной совместимости и скрытности работы систем, увеличение количества передаваемой информации вследствие более широкой полосы частот, высокая чувствительность процесса рассеяния к структуре и состоянию подстилающих покровов, меньшие габариты и масса аппаратуры. Для различных радиотехнических систем отражение СВЧ волн от земных покровов может рассматриваться или как пассивная помеха, или как источник полезной информации.

В настоящее время имеется два классических подхода к исследованию задач рассеяния на статистически неровной поверхности: метод малых возмущений (МВ) и приближение Кирхгофа (метод касательной плоскости (МКП)) [1 - 3]. Эти методы относятся к двум предельным случаям очень мелких пологих неровностей или гладких и крупномасштабных неровностей соответственно. Естественным их обобщением является двухмасштабная модель рассеяния, т.е. совокупность мелкой ряби (расчет методом МВ) и крупных неровностей (расчет на основе МКП).

Таким образом, ранее задачи дифракции волн на статистически неровной поверхности были преимущественно ориентированы на неровности одного масштаба. Затем было осознано, что многомасштабные поверхности дают более адекватные результаты. Сейчас, опираясь на наши результаты работ в ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, можно уверенно утверждать, что физическое содержание теории дифракции, включающей многомасштабные поверхности, становится более четким при фрактальном подходе и выделении фрактальной размерности или фрактальной сигнатуры, как параметра. Более того, учет фрактальности, значительно сближает теоретические и экспериментальные характеристики индикатрис рассеяния земных покровов в СВЧ диапазоне.

Первые подходы к проблеме рассеяния радиоволн фрактальной поверхностью были изложены д.ф.-м.н. А.А. Потаповым, начиная с 1997 г., на III Научной сессии, посвященной Дню Радио (г. Москва), и на Региональной XXIII конференции по распространению радиоволн (г. Санкт - Петербург).

К настоящему времени большое количество работ авторов по всему миру посвящено взаимо-

---

<sup>1</sup> Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics, Moscow, Russia

действию волн с фрактальными структурами. Фрактальная поверхность предполагает наличие неровностей множества масштабов относительно длины рассеиваемой волны. Особенности рассеяния волн фрактальной поверхностью обусловлены ее недифференцируемостью. Поэтому фрактальный фронт волны, являясь недифференцируемым, не имеет нормали. Тем самым исключаются понятия “лучевая траектория” и “эффекты геометрической оптики”. Однако хорды, соединяющие значения характерных высот неровностей на определенных расстояниях по горизонтали, все-таки имеют конечный среднеквадратичный наклон. В этом случае вводят “топозу” фрактальной хаотической поверхности; она равна длине, на которой наклоны поверхности близки к единичным.

С учетом всех особенностей на сегодня приняты две модели рассеяния: 1) - Модель с фрактальными высотами, 2) - Модель с фрактальными наклонами неровностей. Таким образом, модель № 2 однократно дифференцируема и имеет наклон, изменяющийся непрерывно от точки к точке. Эта модель приводит к геометрической оптике, или к эффектам, описываемым с помощью понятия “луча”.

Рассеяние электромагнитных волн на шероховатых поверхностях детально исследовалось, например, в [1 - 6]. В работе [4] показано, что дифракция на фрактальных поверхностях принципиально отличается от дифракции на традиционных случайных поверхностях, а некоторые классические статистические параметры, такие как длина корреляции и среднеквадратичное отклонение, стремятся к бесконечности. Это объясняется самоподобием фрактальной поверхности. В работе [5] была применена частотно-ограниченная функция Вейерштрасса, на которую налагалось меньше ограничений, чем на функции, изучаемые в [4]. Предложенная функция обладала как свойством самоподобия, так и все-таки конечным числом производных на отдельно взятом рассматриваемом пространственном диапазоне.

Несмотря на то, что существует много работ, посвященных созданию и анализу хаотических поверхностей с фрактальной структурой, лишь в немногих из них рассматриваются двумерные фрактальные поверхности. В нескольких работах описывались (см. [6] и ссылки в ней) волнистые поверхности, имеющие фрактальные свойства только в одном измерении. Модифицированная функция Вейерштрасса часто используется для моделирования двумерной фрактальной хаотической поверхности.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В качестве традиционных математических моделей неровных поверхностей ранее отдельно применялись детерминированные и случайные функции [1 - 6 и ссылки в них]. Развитие фрактальной геометрии даёт новое средство для систематического исследования неровных структур, так как фракталы учитывают различные пространственные масштабы и могут быть непосредственно использованы при описании и детерминированных, и случайных функций или их комбинаций.

Физика волнового взаимодействия с периодической средой или структурой хорошо описывается брэгговским условием в виде закона сохранения момента между волновыми векторами падающей и дифрагированной волны, с учётом пространственного волнового вектора структурных гармоник. Рассеивающая поверхность моделируется диапазоно-ограниченной непрерывной фрактальной функцией неровностей  $f(x)$ , являющейся модифицированной функцией Вейерштрасса  $W(t)$ , свойства которой подробно исследованы в [5, 6]. Данная функция имеет конечный диапазон пространственных частот и проявляет свойство самоподобия в пределах конечного диапазона разрешения:

$$f(x) = C \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{a}^n \sin(Kb^n x + \varphi_n), \quad (1)$$

где  $C$  - коэффициент контроля амплитуды;  $N$  - число гармоник (тонов);  $\tilde{a}$  - коэффициент масштаба



неровностей ( $0 < \tilde{a} < 1$ );  $K$  - основное пространственное волновое число;  $b > 1$  - параметр пространственно-частотного масштабирования;  $\varphi_n$  - произвольная фаза.

Коэффициент контроля амплитуды

$$C = \left\{ \frac{2(1 - \tilde{a}^2)}{1 - \tilde{a}^{2N}} \right\}^{1/2} \quad (2)$$

выбран так, что среднеквадратичное отклонение функции  $f(x)$  было равно  $\sigma = 1$ .

Для функции (1) можно ввести несколько фрактальных размерностей, потому что она самоафинна. В общем случае фрактальная размерность функции Вейерштрасса  $D = 2 + \log \tilde{a} / \log b$  [6]. Для точного описания формы неровностей в [6] используется фрактальная размерность в виде:

$$D = 1 + \tilde{a}. \quad (3)$$

При  $D = 1$  имеем гладкую периодическую кривую. С увеличением  $D$  ( $D \leq 2$ ) получаем различные хаотические кривые.

Геометрия рассеяния падающей плоской волны на одномерной неровной, идеально проводящей фрактальной вдоль оси  $x$  поверхности представлена на рис. 1:

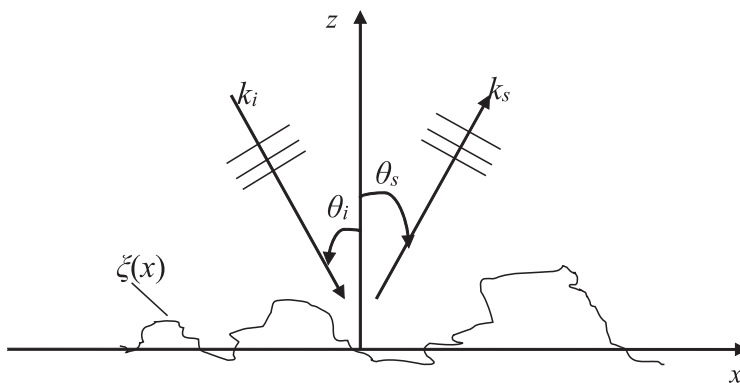


Рис. 1. Геометрия рассеяния волн на фрактальной неровной поверхности.

Индексы  $i$  и  $s$  относятся к падающей и рассеянной волнам с волновыми векторами  $k_i$  и  $k_s$ , соответственно. Одномерная квазипериодическая поверхность описывается уравнением

$$z = \xi(x) = h \sum_{m=1}^M a_m \sin(K_m x + \varphi_m). \quad (4)$$

В формуле (4) параметр  $h$  контролирует среднеквадратическое значение неровностей.

Далее мы будем рассматривать подход на основе приближения Кирхгофа. В методе Кирхгофа используется крупномасштабность  $\rho / \lambda > 1$ , плавность  $a_0 / \lambda > 1$ , пологость  $\langle \langle \gamma^2 \rangle \rangle^{1/2} < 1$ . Здесь  $\rho$  - радиус корреляции неровностей;  $a_0 = [1 + (\xi')^2]^{3/2} / \xi''$  - локальный радиус кривизны,  $\langle \langle \gamma^2 \rangle \rangle^{1/2}$  - среднеквадратичное значение тангенса угла наклона неровностей (штрихи означают порядок производной). В общем случае величина  $D$  определяет угловое распределение энергии. Энергия рассеянного поля концентрируется в зеркальном направлении при малых значениях фрактальной размерности  $D$  и диффузно распределена для больших значений  $D$ .

При моделировании использовалась диапазонно-ограниченная фрактальная функция с нулевым средним, записываемая в виде:

$$\xi(x) = \sigma C \sum_{n=0}^{N-1} (D-1)^n \sin(Kb^n x + \varphi_n), \quad 1 < D < 2. \quad (5)$$

Коэффициент контроля амплитуды  $C$ , определяемый с помощью (2), выразим через фрактальную

размерность  $D$  следующим образом:

$$C = \left\{ \frac{2[1 - (D-1)^2]}{1 - (D-1)^{2N}} \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{2D(2-D)}{1 - (D-1)^{2N}} \right\}^{1/2} \quad (6)$$

Очевидно, что в (5) при необходимости могут быть использованы и другие периодические функции.

Коэффициент контроля амплитуды (6) выбран так, чтобы  $\xi(x)$  имела среднеквадратичное отклонение  $\sigma$ . С увеличением частоты периодические функции (5) описывают всё более тонкую структуру неровностей. Самоподобие функции  $\xi(x)$  демонстрируется соотношением

$$\xi(x) \approx \frac{1}{D-1} \xi(bx),$$

которое означает, что кривая выглядит подобной оригиналу, когда горизонтальная ось масштабируется коэффициентом  $b$ , а вертикальная ось - коэффициентом  $(D-1)^{-1}$ .

В нашей работе мы использовали диапазонно-ограниченную функцию Вейерштрасса. Эта функция обладает свойствами самоподобия, а также имеет конечное число производных на определённом рассматриваемом интервале. Это смягчение условий использования функции Вейерштрасса позволило выполнить аналитические и численные расчёты [5].

Далее представлены некоторые примеры рассеивающих фрактальных поверхностей на основе функции Вейерштрасса. Для анализа поля рассеяния мы использовали приближение Кирхгофа. Расчёты были выполнены на длинах волн  $\lambda = 2.2$  мм,  $\lambda = 8.6$  мм и  $\lambda = 3.0$  см для разных фрактальных размерностей  $D$  и разной геометрии рассеяния [7 - 13].

Двумерная диапазонно-ограниченная функция Вейерштрасса имеет следующий вид

$$W(x, y) = c_w \sum_{n=0}^{N-1} q^{(D-3)n} \sum_{m=1}^M \sin \left\{ Kq^n \left[ x \cdot \cos\left(\frac{2\pi m}{M}\right) + y \cdot \sin\left(\frac{2\pi m}{M}\right) \right] + \phi_{nm} \right\}, \quad (7)$$

где  $c_w$  - константа, обеспечивающая единичную нормировку;  $q > 1$  - параметр пространственно-частотного масштабирования;  $D$  - фрактальная размерность ( $2 < D < 3$ );  $K$  - основное пространственное волновое число;  $N$  и  $M$  - число гармоник;  $\phi_{nm}$  - произвольная фаза, распределённая равномерно в интервале  $[-\pi, \pi]$ .

Данная функция является комбинацией случайной структуры и детерминированного периода. Она анизотропна в двух направлениях, если числа гармоник не очень велики. Также она имеет производные, и в то же время - самоподобна. Поверхность на ее основе имеет много масштабов, а шероховатость может изменяться в зависимости от рассматриваемого масштаба. Так как естественные поверхности не являются чисто случайными или чисто периодическими и часто анизотропны, то предложенная выше функция является хорошим приближением для описания естественных поверхностей. На рис. 2, 3 и 4 приведены примеры диапазонно-ограниченной функции Вейерштрасса для различных масштабов. По осям: относительные единицы. 1 единица = 80 см. Важно отметить, что функция (7) описывает математические фракталы только при стремлении  $M$  и  $N$  к бесконечности.

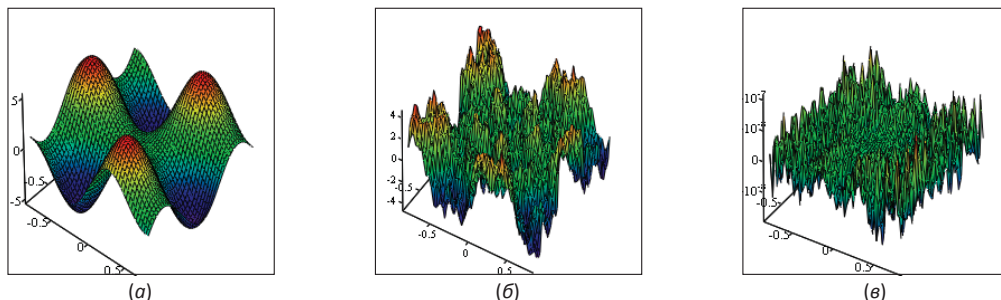


Рис. 2.  $W(x,y)$  при (а) -  $N = 2, M = 3, D = 2.01, q = 1.01$ ; (б) -  $W(x,y)$  при  $N = 5, M = 5, D = 2.5, q = 3$  и (в) -  $W(x,y)$  при  $N = 10, M = 10, D = 2.99, q = 7$ .

## ЧАСТОТНАЯ ФУНКЦИЯ КОГЕРЕНТНОСТИ

Рассмотрим пучок импульса  $E_i(t)$  падающий на одномерную шероховатую поверхность, характеризуемую функцией  $z = \zeta(x)$ , заданную на интервале от  $x = -L/2$  до  $x = L/2$ . Пусть центральная частота падающей волны  $f$ , а угол падения -  $\vartheta_i$ . На основе приближения Кирхгофа первого порядка для поверхностей с малыми наклонами (в этом случае среднеквадратичный наклон  $s = \sqrt{2}\delta/l < 0.5$ , а длина корреляции  $l \geq \lambda$ , где  $\delta$  - среднеквадратичная высота поверхности) запишем поле рассеяния в дальней зоне как [7, 13]:

$$E_s = k \cos \theta_s \sqrt{\frac{2\pi}{kR}} \exp(ikR - i\pi/4) T(\mathbf{K}_s, \mathbf{K}_i), \quad (8)$$

где волновое число падающей волны,  $\vartheta_s$  - угол рассеяния,  $R$  - расстояние от источника до точки наблюдения, а матрица перехода задаётся:

$$T(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_s) = \frac{F_1}{2\pi} \int R_1 \exp[-i(\mathbf{K}_s - \mathbf{K}_i) \cdot \mathbf{r}_1] dx_1. \quad (9)$$

Здесь  $R_1$  - локальный френелевский коэффициент отражения при  $\mathbf{r}_1 = x_1 \hat{x} + \zeta_1 \hat{z}$ . Вектор падающей волны  $\mathbf{K}_i$  и вектор рассеянной волны  $\mathbf{K}_s$ , а также  $F_1$  могут быть записаны как:

$$\mathbf{K}_{i,s} = k \sin \theta_{i,s} \hat{x} \pm k \cos \theta_{i,s} \hat{z}, \quad F_1 = \frac{1 - \sin \theta_i \sin \theta_s + \cos \theta_i \cos \theta_s}{(\cos \theta_i + \cos \theta_s) \cos \theta_s}, \quad (10)$$

где  $\pm$  означает случай падения (индекс  $i$ ) и случай рассеяния (индекс  $s$ ), соответственно. Двухчастотная ЭПР на единицу площади шероховатой поверхности определяется как:

$$\sigma^0(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_s; \mathbf{K}'_i, \mathbf{K}'_s) = \sigma^0(\omega, \omega') = (R/L) < E_s E_s'^* >, \quad (11)$$

где

$$\mathbf{K}'_{i,s} = k' \sin \theta'_{i,s} \hat{x} \pm k' \cos \theta'_{i,s} \hat{z}. \quad (12)$$

В выражении выше  $k = 2\pi f / c = \omega / c$  и  $k' = 2\pi f' / c = \omega' / c$ . Подставляя (8) и (9) в (11), получим:

$$\sigma^0 = 2\pi \sqrt{kk'} \cos \theta_s \cos \theta'_s (< T(\omega) T'^*(\omega') > / L) \exp[i(k - k')R] \quad (13)$$

где  $< T(\omega) T'^*(\omega') >$  - двухчастотная функция взаимной когерентности.

Она обычно обозначается как  $\Gamma(\omega, \omega')$ . В методе Кирхгофа для шероховатой поверхности с малыми наклонами  $R_1$  может быть аппроксимирован френелевским коэффициентом отражения для плоской поверхности. Он постоянен для фиксированного угла падения и может быть вынесен за знак интегрирования в (9). Таким образом, (9) может быть переписано как:

$$T = H_1 \int \exp(-i\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_1) dx_1, \quad (14)$$

где  $H_1 = F_1 R_1 / (2\pi)$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{K}_s - \mathbf{K}_i = v_x \hat{x} + v_z \hat{z}$ ,  $v_x = k(\sin \theta_s - \sin \theta_i)$ ,  $v_z = k(\cos \theta_s + \cos \theta_i)$ . Основываясь на методе Кирхгофа для шероховатых поверхностей с малыми наклонами, можно найти общее выражение для двухчастотной функции взаимной когерентности вида [7, 14, 15]:

$$\Gamma(\omega, \omega') = < T(\omega) T'^*(\omega') > = H_1 H_1' \int dx_1 \int [ < \exp(-i\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_1 + i\mathbf{v}' \cdot \mathbf{r}'_1) > - < \exp(-i\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_1) > < \exp(-i\mathbf{v}' \cdot \mathbf{r}'_1) > ] dx'_1. \quad (15)$$

Если предположить, что высота  $\zeta(x)$  удовлетворяет распределению Гаусса, то будем иметь:

$$< \exp(-i\mathbf{v}_z \zeta_1 + i\mathbf{v}'_z \zeta'_1) > = \exp \left\{ - \left[ (v_z^2 + v_z'^2) \delta^2 / 2 - v_z v_z' < \zeta_1 \zeta'_1 > \right] \right\}, \quad (16)$$

где  $< \zeta_1 \zeta'_1 > = < \zeta(x_1) \zeta(x'_1) > = G(x_1 - x'_1) = G(x_d)$  - функция автокорреляции  $\zeta(x)$ .

Переходя от  $x_1$  и  $x'_1$  к новым переменным интегрирования:  $x_d = x_1 - x'_1$  и  $x_c = (x_1 + x'_1) / 2$ , получим следующие тождества:

$$\int dx_1 \int dx'_1 = \int dx_d \int dx_c, \quad (17a)$$

$$\exp(-i\mathbf{v}_x x_1 + i\mathbf{v}'_x x'_1) = \exp[-i(v_d x_c + v_c x_d)], \quad (17b)$$

где  $v_d = v_x - v'_x = k(\sin \theta_s - \sin \theta_i) - k'(\sin \theta'_s - \sin \theta'_i)$ ,  $v_c = (v_x + v'_x)/2$ .

Подставляя уравнения (15) - (17) в уравнение (13), двухчастотную ЭПР можно упростить:

$$\sigma^0 = 2\pi\sqrt{kk'} \cos \theta_s \cos \theta'_s H_1 H'_1 \varphi_1 \varphi_2 \exp[i(k - k')R] \quad (18)$$

где

$$\varphi_1 = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi x_c^2 / L^2) \exp(-iv_d x_c) dx_c = \exp(-v_d^2 L^2 / 4\pi), \quad (19)$$

$$\varphi_2 = \exp[-(v_z^2 + v'_z{}^2)\delta^2 / 2] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(v_z v'_z \delta^2)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} [G(x_d)]^n \exp(-iv_x x_d) dx_d. \quad (20)$$

Если в уравнении (18) положить:  $k = k'$ ,  $\theta_i = \theta'_i$ ,  $\theta_s = \theta'_s$ , то это уравнение сведётся к общепринятому выражению метода Кирхгофа с ЭПР при разнесённых передатчике и приёмнике для случая непрерывного падения волны. Так как двухчастотная функция взаимной когерентности  $\Gamma(\omega, \omega')$  уже записана (15), то мощность рассеяния  $P_S(t)$ , часто используемую в расчётах и измерениях, также можно найти. Поскольку нас интересует падающий пучок импульса, то мощность падающего излучения может быть выражена как преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} P_i(t) &= \langle E_i(t) E_i^*(t) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \bar{E}_i(\omega) \bar{E}_i^*(\omega') \exp(-i\omega t + i\omega' t) d\omega d\omega' = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int P_i(\omega_d) \exp(-i\omega_d t) d\omega_d, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$P_i(\omega_d) = \int P_i(t) \exp(i\omega_d t) dt = \frac{1}{2\pi} \iint \bar{E}_i(\omega) \bar{E}_i^*(\omega') d\omega_c. \quad (22)$$

Здесь мы также использовали замену переменных:  $\omega_d = \omega - \omega'$ ,  $\omega_c = (\omega + \omega')/2$ . Следовательно, мощность рассеяния может быть записана как:

$$\begin{aligned} P_S(t) &= \langle E_S(t) E_S^*(t) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \Gamma(\omega, \omega') \bar{E}_i(\omega) \bar{E}_i^*(\omega') \exp(-i\omega_d t) d\omega_d d\omega_c = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \Gamma(\omega_d) P_i(\omega_d) \exp(-i\omega_d t) d\omega_d. \end{aligned} \quad (23)$$

В выкладках выше было использовано преобразование уравнения  $\bar{E}_S(\omega) = T(\omega) \bar{E}_i(\omega)$ . Оказалось, что из уравнений (22) и (23) после вычисления  $\Gamma(\omega, \omega')$  можно найти мощность рассеяния, зная мощность падающего излучения. Если предположить, что  $P_i(t)$  является  $\delta$ -функцией, то есть  $P_i(t) = \delta(t)$ , то из уравнения (22) получим  $P_i(\omega_d) = 1$ . Следовательно, в соответствии с уравнением (23) мощность рассеяния  $P_S(t)$  есть просто преобразование Фурье от двухчастотной функции взаимной когерентности.

Далее мы использовали в компьютерных расчётах выражение для функции когерентности, выведенное выше:

$$\Psi_k = \langle E_S(k_1) \cdot E_S(k_2) \rangle \quad (24)$$

для полей, рассеянных фрактальной поверхностью [3, 7, 15, 16].

Во многих задачах радиолокации, радионавигации и дистанционного зондирования окружающей среды рассеяние модулированных волн земной поверхностью играет главную роль. В зависимости от решаемой задачи это влияние покрова является источником требуемой информации или искажающим фактором. Учёт корреляции частоты модулированной волны, рассеянной на шероховатой поверхности, имеет решающее значение при оценке спектральной ширины сложных зондирующих сигналов, частотных интервалов в многочастотных радиосистемах и ширины полосы пропускания широкополосных сигналов, усреднённой по частоте интенсивности волно-

вого поля, искажений формы зондирующих сигналов, высоты полёта авиации и океанографических характеристик, а также волновой фазы (так называемая фазовая задача) [7, 15].

Статистическое описание характеристик флуктуации модулированных волн, рассеянных на шероховатой поверхности, основано на частотной функции когерентности (ЧФК). Ниже на рис. 3 и рис. 4 приведены примеры численного моделирования зависимостей частотной функции когерентности от высоты точки наблюдения (высоты полёта) для дистанционного зондирования фрактальной поверхности.

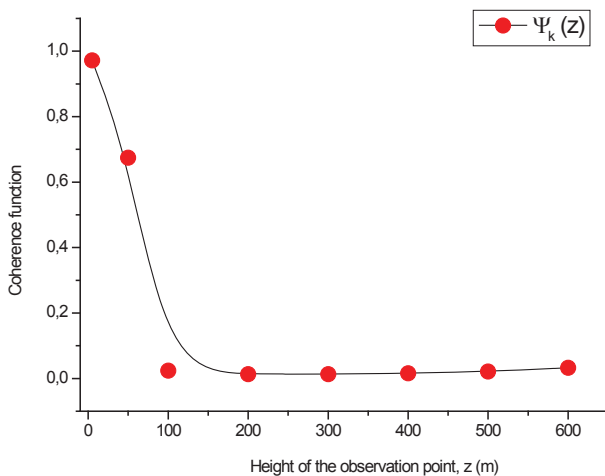


Рис. 3. Зависимость функции когерентности от высоты точки наблюдения на малых высотах.

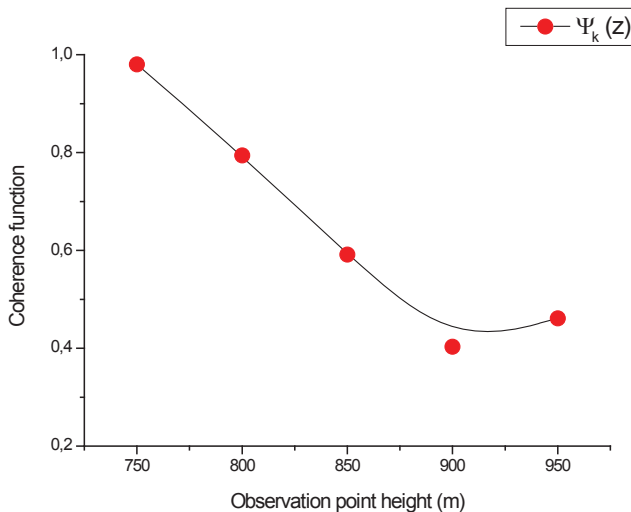


Рис. 4. Зависимость функции когерентности от высоты точки наблюдения на средних высотах.

Стоит отметить, что развитый математический аппарат для ЧФК [7, 15] также имеет значение для применения фрактальных сигнатур в радиолокации и дистанционном зондировании. В сочетании с обработкой фрактальных данных такие многочастотные радиоизмерения являются серьёзной альтернативой доступным методам увеличения отношения сигнал-шум. В одном из предложенных фрактальных методов обнаружения радиосигнала сигналы излучаются на разных частотах [6].

Частоты для радиолокационного зондирования следует выбирать в соответствии с величинами ЧФК  $\Psi\omega(\Delta k)$  или полосы когерентности  $\Delta f_c$  пространственно-временного радиолокационного

канала зондирования. Так как каждая цель имеет свои собственные характерные размеры, то подбор частот зондирования может обеспечить непосредственное определение нового класса радиолокационных свойств в виде фрактально-частотных сигнатур [6, 7, 15-17]. Аналитические приближения для определения обобщённых фрактальных корреляторов обратно рассеянных полей анизотропными поверхностями обсуждаются в работе [7, 15].

### СЛУЧАЙ ДВУМЕРНОЙ ФРАКТАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Для двумерного случая выражение для поля рассеяния, учитывающее параметры рассеивающей поверхности, выглядит следующим образом:

$$E(k) = - \left( \frac{U \cdot k \cdot \cos \beta}{4\pi^2 \cdot z^2} \right) \cdot \iint_S \left( e^{2 \cdot i \cdot k \cdot z} \cdot e^{-2 \cdot i \cdot k \cdot \xi(x,y) \cdot \cos \beta} \cdot e^{i \cdot k \cdot \frac{x^2 + y^2}{z}} \right) \cdot \left( e^{-\left(\frac{x}{z}\right)^2} \cdot \left[ \left(\frac{y \cdot \cos \beta}{z}\right) + \sin \beta \right]^2 \right)^2 dS, \quad (25)$$

где  $U$  - константа, связанная с проводимостью поверхности,  $k$  - волновое число,  $\beta$  - угол падения,  $z$  - высота наблюдения,  $\xi(x, y)$  - рассеивающая поверхность, выражение для которой приведено в формуле (7).

Параметры фрактальной поверхности:  $D = 2.5$ ,  $K = 6.3$ ,  $q = 2.7$ ,  $M = 10$ ,  $N = 10$ ; длина зондирующей волны  $\lambda = 2,2$  мм.

Для расчетов использовалось моделирование поля рассеяния и соответствующей ему функции взаимной когерентности при помощи программного обеспечения Mathcad 15.0 (15.0.0.436 [006041742]). Интеграл для расчета функции когерентности вычислялся с применением метода прямоугольников численного интегрирования по площади  $2.8 \text{ м}^2$ . Количество точек сетки суммирования составило 1000.

Данные многочисленных расчетов ненормированной функции частотной когерентности суммированы на рис. 5 - рис. 7.

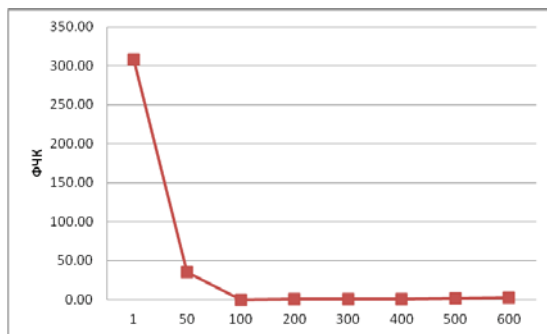


Рис. 5. Функции частотной когерентности от высоты наблюдения (м).

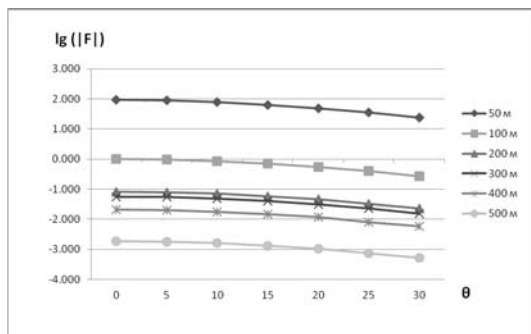


Рис. 6. Зависимость функции частотной когерентности от угла падения  $\theta$  для разных высот наблюдения,  $K_1=2855$ ,  $K_2=730$ ,  $S = 2,8 \text{ м}^2$ .

Для радиофизических и радиолокационных исследований наибольшую ценность представляет полоса когерентности, то есть разность частот  $\Delta k$  и частотная функция когерентности в зависимости от разности частот. Авторы выполнили расчеты и для этого случая. Нормировка производилась для случая совпадения двух волновых чисел. Отметим, что полоса когерентности радиолокационного канала определяется как диапазон частот, в пределах которого коэффициент взаимной корреляции амплитуд любых двух монохроматических колебаний не ниже некоторого допустимого значения [6, 7, 15, 17]. При различной ширине спектра излученного сигнала, возникают, естественно, ситуации, когда разрешение по дальности может быть ограничено полосой когерентности радиолокационного канала зондирования.

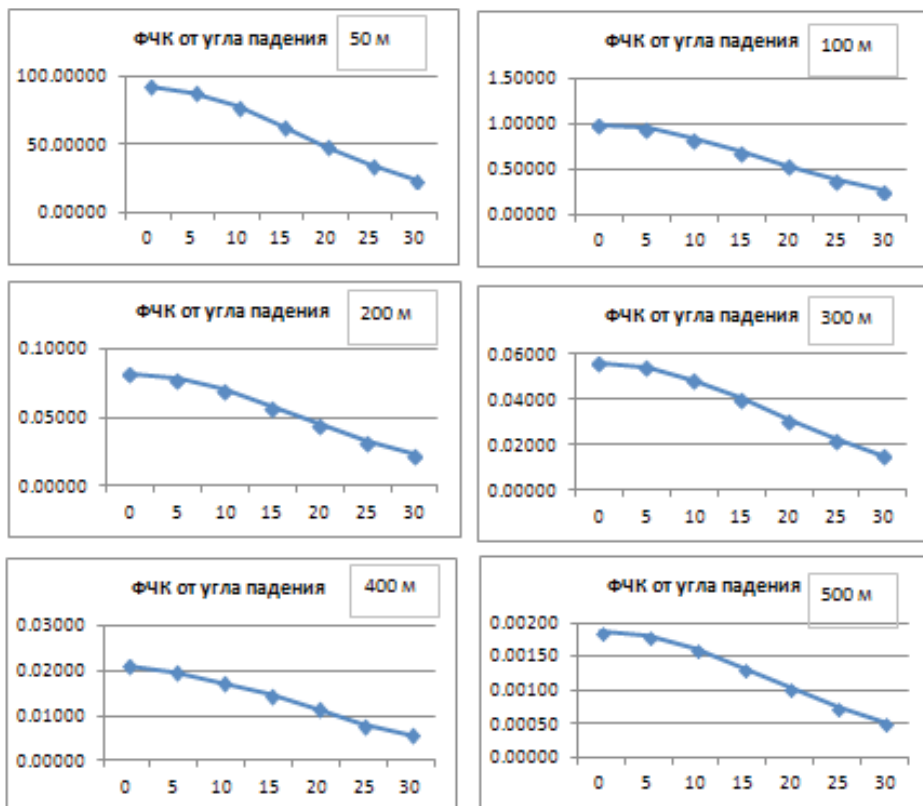


Рис. 7. Зависимости функции частотной когерентности от угла падения  $\theta$  для разных высот наблюдения,  $K_1=2855$ ,  $K_2=730$ ,  $S = 2,8 \text{ м}^2$ .

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Басс Ф.Г., Фукс И.М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука. 1972.
- [2] Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику: В 2 ч. Случайные поля. Часть II. М.: Наука. 1978.
- [3] Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно - неоднородных средах. Т. 2. М.: Мир. 1981.
- [4] Berry M.V. Difractals. J. Phys. A. 1979. V. 12. № 6. P. 781-797.
- [5] Lin N., Lee H.P., Lim S.P., Lee K.S. Wave Scattering from Fractal Surfaces. Journal of Modern Optics. 1995. V. 42. № 1. P. 225-241.
- [6] Поталов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Университетская книга. 2005.
- [7] A.A. Potapov. The Theory of Functionals of Stochastic Backscattered Fields", Journal of Communications Technology and Electronics, vol. 52, № 3. pp. 261-310, 2007.
- [8] Potapov A.A. and Laktyunkin A.V. Microwaves Scattering on Fractal Surfaces as a New Line of Investigations, in: The Second European Conference on Antennas and Propagation EuCAP 2007, 11 - 16 November 2007, (The EICC, Edinburgh, UK, 2007). MoPP.016. pdf. P. 6.
- [9] Поталов А.А., Лактюшкин А.В. Теория рассеяния волн анизотропной фрактальной поверхностью. Нелинейный Мир. Т 6. № 1. 2008. С. 3-35.
- [10] Potapov A.A. and Laktyunkin A.V. Microwaves Scattering from Synthesized Fractal Surfaces, in Proc. the Sixth Int. Symposium "Physics and Engineering of Millimeter and Sub-Millimeter Waves" (MSMW'2007), (Ukraine, Kharkov, June 25 - 30, 2007). Kharkov: IRPE NAS. 2007. V. 2. P. 968-970.
- [11] Laktyunkin A.V., Potapov A.A. Waves Scattering Dependence on the Statistical Parameters of Classical and Fractal Rough Surfaces", in Proc. XXIX URSI General Assembly (USA, Chicago, Illinois, 7 - 16 August 2008). Chicago: University of Illinois at Chicago, 2008. BP16.1(228). pdf. P. 4 (<http://ursi.org/Chicago08/Index%20GA08.htm>).

- [12] Potapov A.A. Fractional "Operators and Fractals for Non-Linear Radio Physics Problems, in Abstracts 3rd IFAC Workshop on Fraction Differentiation and its Applications FDA'08 (Turkey, Ankara, 5 - 7 November 2008). Ankara: Cankaya University, 2008. p. 55. Proc. pdf. P. 5. (<http://www.cankaya.edu.tr/fda08/proceedings.php>).
- [13] Лактюнькин А.В. Моделирование рассеяния миллиметровых и сантиметровых волн фрактальными поверхностями при малых углах падения: Дис. ... кандидата физ.-мат. наук. М.: ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, 2010.
- [14] Guo L., Kim C. Study on the Two-Frequency Scattering Cross Section and Pulse Broadening of the One-Dimensional Fractal Sea Surface at Millimeter Wave Frequency. Progress In Electromagnetics Research. PIER 37. 2002. 221-234.
- [15] Потапов А.А. К теории функционалов стохастических полей обратного рассеяния. Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52. № 3. С. 261-310.
- [16] Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. М.: Логос. 2002.
- [17] Потапов А.А. Фрактальный метод и фрактальная парадигма в современном естествознании. Воронеж: ИПЦ "Научная книга". 2012.



## THE SOFTWARE DEFECTS FIXING PROBLEM OPTIMIZATION USING TAGUCHI METHOD

---

*Software defect repair time is an important factor in software development, and estimates of repair times are essential in planning, scheduling, and resource allocation in software projects. Repair time also depends on the experience and skills of the fixer, his or her workload, and other factors. Predicting defect repair time is a difficult problem that has not been researched as intensively as reliability modeling. This work aims to use defect data from previous software development efforts to describe the when-who-how approach for analyzing defect data. The main goal is to gain a better understanding of the quality control process and identify defect fixing problem improvement opportunities using Taguchi's Design of Experiments method. We used Analysis of Variance (ANOVA) to correlate problem resolution cycle time with three predictors, problem severity, problem complexity and engineer experience to find parametric equation for total software defect cost and resolution time.*

---

### SOFTWARE DEFECT ENGINEERING

Even a well-performed software process introduces defects that impact both development and customer systems. No matter how well we plan and shape software development, defects are generated and can escape to the customers. Failure to quickly resolve software problems leads to negative consequences for our customers and increases internal business costs. A quick deterministic method to prioritize problems and implement their solution helps to reduce cycle time and costs [1].

Defects found in the later stages of the software life cycle tend to be harder to repair than those found in earlier stages [3]. Errors encountered by users are sometimes difficult to reproduce. To make matter worse, repairing one problem may introduce other problems into the system. The ability to predict defect repair time would be useful for creating testing plans and schedules, allocating resources and avoiding project overruns [3,4]. Estimated repair times can improve testing management and consequently, the reliability and time-to-market of software.

Achieving this goal requires several steps [1]. The first is to determine a model that links problem resolution performance to institutional variables and problem characteristics. Statistical Design of Experiments (DOE) is a tool that provides data requirements for estimating the impacts of these variables on problem resolution. Once data has been gathered the results of statistical analysis can be input into a mathematical optimization model to guide the organization [3].

Our goal was to describe such an analysis. We used defect data published in [1] from previous software development efforts to describe the when-who-how approach for analyzing defect data to gain a better understanding of the quality control process and identify defect fixing problem improvement opportunities using Taguchi's Design of Experiments method. We used Analysis of Variance (ANOVA) to correlate problem resolution cycle time with three predictors, problem severity, problem complexity and engineer experience to find parametric equation for total software defect resolution time.

There were several benefits to the project:

- Optimal allocation of problems to the engineering staff resulted in savings of time and money.
- A closer relationship between experienced and novice engineers.
- Knowledge of the necessary problem resolution effort provided a baseline for further problem process improvement.

---

<sup>1</sup> State University of Novi Pazar, Serbia

<sup>2</sup> Union University, School of Computing, Belgrade, Serbia

Defect management is crucial [1-6] for closing the loop between requirements, implementation and verification and validation. Traditional defect tracking management, implemented in a standalone fashion, can no longer address the complexity and pace of change in the modern software development.

## **SOFTWARE METRICS FOR MAINTENANCE**

The analogy with the supermarket directs our attention to metrics for the estimation of maintenance effort. The aim is to develop measures and threshold figures to find out when the service effort will exceed the costs of a new development. Often it is not considered that software - like other products or goods - ages within time and that this a preventive planning of maintenance or redevelopment is necessary. There is broad consensus in the metrics community that productivity depends especially on software size and also that there do exist more parameters influencing productivity. The same holds for maintenance effort. The Cocomo-M(maintenance) model and SLIM both use only one parameter related to maintenance, while PRICE-S, SEER-SEM and Capers Jones' estimation tool Checkpoint [4] do use several such parameters. The average size of the maintenance tasks in the organisation with the web based environment was four times as large as in the military organisation, but the average effort was only two times as much. Thus the average cost per maintenance task was in the web based environment only half as much (about 115 person hours) as in the military environment (221 person hours). From historical project data reported 1996 about 21 maintenance projects of Management Information Systems (MIS) type with larger functional enhancements. The average effort for this projects was more than 2,200 person hours or 332 person days. The authors could find a statistical ( $R^2 = 0.81$ ) relationship between size and effort. The data were from an organisation which was known to deliver its projects successfully on time, in costs, in functionality and in quality. The organisation had already in the beginning of the 1990's reached CMM level 3 with an evidentially strong quantitative management of the KPI (Key Performance Indicators) on level 5.

## **THE PROBLEM RESOLUTION PROCESS**

We examined the way that software problems were assigned in the past projects [1]. We found that problem resolution process faced the following difficulties:

- There was no clear procedure for evaluating a given problem or estimating the effort required for resolution.
- Problem assignments were done on an ad hoc basis, with no group of engineers dedicated to problem resolution. Usually the next available engineer would be assigned the next available problem.
- Less experienced engineers were rarely assigned to fix a high impact problem, limiting their progress.

Consequently problem resolution entailed extra cycle time. Some problems were not getting fixed in a timely fashion, and new development was negatively affected when staff was reassigned to problem resolution. Other negative impacts included:

- Increased problem backlogs.
- New engineers received little training on customer issues.
- Operating in crisis mode, experienced engineers were called upon to fix problems.
- Major fixes were sometimes late.
- Testing was often duplicated.
- New releases were postponed.
- Collected metrics reflected poor problem resolution performance.

Project manager wondered if there was an optimal way to assign problems to engineers. If there were,

it would free more staff for work on other key issues. The critical determinants of problem resolution needed to be defined to discover that new process. It was apparent that these fell into two classes:

1. The skill level of engineers assigned to problem resolution, and
2. Factors that determine problem difficulty.

We needed to find suitable definitions to apply to these classes.

## ENGINEER EXPERIENCE

The first process change was to construct a team of engineers that would be responsible for evaluating, implementing and testing each problem fix. By doing this, we developed a pool of experience to draw on. The software engineer's experience levels were evaluated. We took into account their ability, total technical experience, and interest in specific areas. This led to a classification scheme to define **engineer experience**.

## SOFTWARE PROBLEM CHARACTERIZATION

A review of the problem backlog evidenced the need for a better method of classifying problems. A scheme was developed to classify problems by their customer and system impacts. Customer impact was defined as **problem severity**, which we had already been assessing. Experienced engineers examined problem descriptions and symptoms to determine the extent to which it decreased system performance.

The system impact led to a definition of **problem complexity**. Problem complexity numbers accurately reflected the impact of the given problem to all potential customers. This definition of complexity is based on the difficulty of implementing the problem fix within the system. Problems overlapping several development groups would involve coordination concerns. By assigning a higher complexity value one could identify problems that would be more difficult to fix. Note that this definition of problem complexity is not related to traditional measures of software complexity.

## MATHEMATICAL AND STATISTICAL MODELING

This section presents the quantitative aspects of the project in the following subsections:

1. Statistically designed experiments for data collection.
2. The statistical analysis method to determine model parameters.
3. A mathematical optimization model to improve the process.

## STATISTICALLY DESIGNED EXPERIMENT

We needed to estimate the impact of the problem characteristics and engineer experience on problem resolution cycle time. Historical data was available, but inadequate. For example, the most complex problems had consistently been assigned to the most skilled engineers. Therefore we did not know how less experienced engineers would perform on difficult problems. This did not permit a full evaluation of our model. Statistical Design of Experiments (DOE) is a set of techniques that help the analyst determine data requirements to estimate the parameters of any given model. There are several steps required to generate a statistically designed experiment:

1. Identify the response variable (or variables) to be modeled.
2. Determine the factors that influence that variable.
3. Determine the mathematical model by which the factors affect the response.
4. Determine appropriate factor settings.

5. Determine the number of “runs” required to estimate the model parameters. If possible, replicates are beneficial.

**Step 1: Response Variables:** Our goal was to understand problem resolution time. Two major components of cycle time were considered:

1. *Problem assessment time.*
2. *Problem resolution (implementation) time.*

These two sub-processes employ distinct procedures and are typically performed by different individuals. Until a problem has been properly assessed its true severity and complexity are poorly understood. Problem resolution cost was a second response and employed the same model as cycle time.

**Step 2: Factors:** The three predictor variables, problem severity, complexity and engineer experience were described above.

**Step 3: Model:** This required more thought. Some of the considerations are:

1. Do significant interactions occur? Gurus obviously have an advantage over novices for any type of problem. But perhaps that advantage is not constant. They may have an even greater advantage for some problems. This is an interaction effect.
2. Are there higher interactions? In this case a 3-factor interaction is the only higher order interaction available, given by Severity x Complexity x Experience. It was decided that such an interaction was highly unlikely.

The model that was selected included all possible 2-factor interactions. It is given by:

$$T = S + C + E + (S * C) + (S * E) + (C * E), \quad (1)$$

where

$T$  = Problem resolution time.

$S$  = Problem Severity

$C$  = Problem Complexity

$E$  = Engineer Skill

**Step 4: Factor Levels:** The assigned factor values were:

- Problem Severity: Level 1 or **High** Level 2 or **Low**
- Problem Complexity: Level 1 or **Simple** Level 2 or **Involved (Average)** Level 3 or **Complex**
- Engineer skill: Level 1 or **Novice** Level 2 or **Experienced** Level 3 or **Guru**

**Step 5: Number of Runs:** The product of the numbers of factor levels determines the total number of candidate experiments. With  $2 \times 3 \times 3 = 18$  runs one can estimate the model. In this paper we used sample of 18 data points from work [1]. The data are given in Table 1. Note that all possible combinations of factor levels are represented.

## STATISTICAL METHOD FOR DATA ANALYSIS

Analysis of Variance (ANOVA) was used to analyze closure time components. This is the standard method to correlate a numerical response with qualitative predictors. The full 2-factor interaction model discussed above was fit first. Any terms that failed statistical tests for significance were eliminated to avoid over-fitting the model. For both the assessment and implementation cycle time analyses the main effects of Complexity, Severity and Experience are significant at a very high confidence level (95%). We concluded that the variables to predict cycle time were chosen well.

**Table 1.** Estimated Average Resolution Times and cost to fix

Severity Level	Complexity Level	Engineer Experience	Assessment Mean [Days]	Implementation Mean [Days]	Total Resolution [Days]	Cost to Fix [\$]
High	Simple	Novice	5.2	10.5	15.7	1177.5
		Experienced	3.9	9.0	12.9	1290
		Guru	3.4	6.4	9.8	1225
	Involved	Novice	5.3	11.3	16.6	1245
		Experienced	4.9	10.1	15.0	1500
		Guru	4.9	9.7	14.6	1825
	Complex	Novice	7.7	14.7	22.4	1680
		Experienced	6.9	14.3	21.2	2120
		Guru	5.2	10.5	15.7	1962.5
Low	Simple	Novice	2.4	6.3	8.7	652.5
		Experienced	2.1	2.5	4.6	460
		Guru	0.6	1.3	1.9	237.5
	Involved	Novice	5.2	10.4	15.6	1170
		Experienced	4.5	8.5	13.0	1300
		Guru	3.3	8.5	11.8	1475
	Complex	Novice	6.8	13.4	20.2	1515
		Experienced	5.1	11.1	16.2	1620
		Guru	4.6	8.9	13.5	1687.5

## MATHEMATICAL OPTIMIZATION MODEL

The optimization problem is to minimize total resolution cycle time by assigning a given set of problems, defined by severity and complexity, to engineers of three skill levels.

The linear programming method was used in work [1] to solve the optimization problem. There are  $2 \times 3 \times 3 = 18$  decision variables that represent each possible type of assignment. Each represents a number of problems of given severity and complexity assigned to engineers with one of the three skill levels.

To make the notation more manageable the six classes of problems are indexed with numbers for problem complexity and engineer experience. The problems are labeled as follows:

$H_1$  = High Severity, Complexity 1 (simple) problems.

$H_2$  = High Severity, Complexity 2 (involved or average) problems.

$H_3$  = High Severity, Complexity 3 (complex) problems.

$L_1$  = Low Severity, Complexity 1 problems.

$L_2$  = Low Severity, Complexity 2 problems.

$L_3$  = Low Severity, Complexity 3 problems.

We also have the following resources.

$E^1$  = Number of Engineers of skill Level 1 (Novice),  $E^2$  = Number of Engineers of skill Level 2 (Experienced),  $E^3$  = Number of Engineers of skill Level 3 (Guru).

We denote the resource availability (in work days) by:  $T^1$  = Time availability of novice engineers,  $T^2$  = Time availability of experienced engineers,  $T^3$  = Time availability of guru engineers.

Now we tie these definitions together. Let problems be indexed by severity  $i = H, L$ , complexity  $j=1,2,3$ , and engineer skill level  $k=1,2,3$ . Also identify the problem resolution average cycle times (estimated in the ANOVA) as:

$t_{ij}^k$  = time required to resolve a problem of severity  $i$  and complexity  $j$  by an engineer of skill level  $k$ .

And the number of problems be identified as:

$PR_{ij}^k$  = Total number of problems of severity  $i$  and complexity  $j$  assigned to engineers of skill level  $k$ .

The formal statement of the optimization problem given in problem report (PR) is then to Minimize total problem resolution time:

$$\begin{aligned}
 T = & \left( t_{H1}^1 x PR_{H1}^1 \right) + \left( t_{H1}^2 x PR_{H1}^2 \right) + \left( t_{H1}^3 x PR_{H1}^3 \right) + \\
 & \left( t_{H2}^1 x PR_{H2}^1 \right) + \left( t_{H2}^2 x PR_{H2}^2 \right) + \left( t_{H2}^3 x PR_{H2}^3 \right) + \\
 & \left( t_{H3}^1 x PR_{H3}^1 \right) + \left( t_{H3}^2 x PR_{H3}^2 \right) + \left( t_{H3}^3 x PR_{H3}^3 \right) + \\
 & \left( t_{L1}^1 x PR_{L1}^1 \right) + \left( t_{L1}^2 x PR_{L1}^2 \right) + \left( t_{L1}^3 x PR_{L1}^3 \right) + \\
 & \left( t_{L2}^1 x PR_{L2}^1 \right) + \left( t_{L2}^2 x PR_{L2}^2 \right) + \left( t_{L2}^3 x PR_{L2}^3 \right) + \\
 & \left( t_{L3}^1 x PR_{L3}^1 \right) + \left( t_{L3}^2 x PR_{L3}^2 \right) + \left( t_{L3}^3 x PR_{L3}^3 \right)
 \end{aligned} \tag{2}$$

Subject to the following constraints.

1. The total number of problems of each severity / complexity class to be resolved.
2. The endowment of engineers of each skill level.
3. Each of the 18 decision variables must be non-negative.

These sets of constraints are given algebraically as follows.

1. There are six equality constraints for the total number of problems:

$$\begin{aligned}
 PR_{H1}^1 + PR_{H1}^2 + PR_{H1}^3 &= PR_{H1} \\
 PR_{H2}^1 + PR_{H2}^2 + PR_{H2}^3 &= PR_{H2} \\
 PR_{H3}^1 + PR_{H3}^2 + PR_{H3}^3 &= PR_{H3} \\
 PR_{L1}^1 + PR_{L1}^2 + PR_{L1}^3 &= PR_{L1} \\
 PR_{L2}^1 + PR_{L2}^2 + PR_{L2}^3 &= PR_{L2} \\
 PR_{L3}^1 + PR_{L3}^2 + PR_{L3}^3 &= PR_{L3}
 \end{aligned} \tag{3}$$

2. There are three constraints for the total number of engineer staff-days:

$$\begin{aligned}
 (T_{H1}^1 x PR_{H1}^1) + (T_{H2}^1 x PR_{H2}^1) + (T_{H3}^1 x PR_{H3}^1) + (T_{L1}^1 x PR_{L1}^1) + (T_{L2}^1 x PR_{L2}^1) + (T_{L3}^1 x PR_{L3}^1) &\leq T^1 \\
 (T_{H1}^2 x PR_{H1}^2) + (T_{H2}^2 x PR_{H2}^2) + (T_{H3}^2 x PR_{H3}^2) + (T_{L1}^2 x PR_{L1}^2) + (T_{L2}^2 x PR_{L2}^2) + (T_{L3}^2 x PR_{L3}^2) &\leq T^2 \\
 (T_{H1}^3 x PR_{H1}^3) + (T_{H2}^3 x PR_{H2}^3) + (T_{H3}^3 x PR_{H3}^3) + (T_{L1}^3 x PR_{L1}^3) + (T_{L2}^3 x PR_{L2}^3) + (T_{L3}^3 x PR_{L3}^3) &\leq T^3
 \end{aligned} \tag{4}$$

3. There are 18 non-negativity constraints:

$$PR_{ij}^k \geq 0; i = L, H; j = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3$$

## TIME RESOLUTION MINIMIZATION MODEL

In the work [1] optimization was performed using an Excel add-in program to apply linear programming method that can be used to work out “what-if” scenarios, allowing project managers to see the consequences of choosing cost over schedule or vice-versa. The results appear in the following figures 1 and 2. Figure 1 shows the initial endowments of 900 novice, 450 experienced, and 250 guru staff-days [1]. There were 53 high severity problems, 16 of complexity level 1, 19 of level 2 and 18 of level 3. There were 22, 17, and 24 low severity problems of levels 1, 2, and 3, respectively. Assuming costs of \$75,

\$100 and \$125 per work day for the novice, experienced and guru skill levels, total problem resolution cost equals \$139,145. The program indicates some slack resources i.e 45 staff-days, 249.4 of the total allocation of 250 guru days were used. There were 9.2 days of experienced engineer resources left and 35.1 days of novice resources. The optimal solution, for author in [1] is interesting because, contrary to expectations, the gurus are mostly assigned to low complexity problems, with some preference for low severity. The novices tended to be assigned to high severity, high complexity problems. This surprising result is due to the strong comparative advantage the gurus had in the less complex problems, requiring only two staff-days for the low severity ones!

### COST MINIMIZATION MODEL

The algorithm was run again to determine the cost minimizing solution [1]. The output from this exercise is found in figure 2. The total cost falls to \$138,293 from the previous \$139,145 for a savings of \$852. The cycle time increases to 1,554.1 total days from 1,539.9 days for an increase of 14.2 days. This was accomplished by substituting some of the novice resources that had previously been slack (using 899 of their days compared to the previous 843.2 days). Guru days fell from 249.4 to 214.3, freeing up 35.1 days for them to work on other projects. 6.5 days of experienced engineers were also freed.

### OPTIMIZING TIME RESOLUTION AND COST TO FIX DEFECTS USING TAGUCHI METHOD

In our research we applied Taguchi screening designs for three controlled factors and levels of factors of each influence factors presented in Table 1. From 18 experiment runs for full-fractional design plan we used only total number of 9 treatments presented on Figure 3 (Excel sheet form). To analyse Time resolution and Cost to fix defects for MOTOROLA project data [1] we used MINITAB ver.16 statistical software tool. Some results are given in Fig. 3.

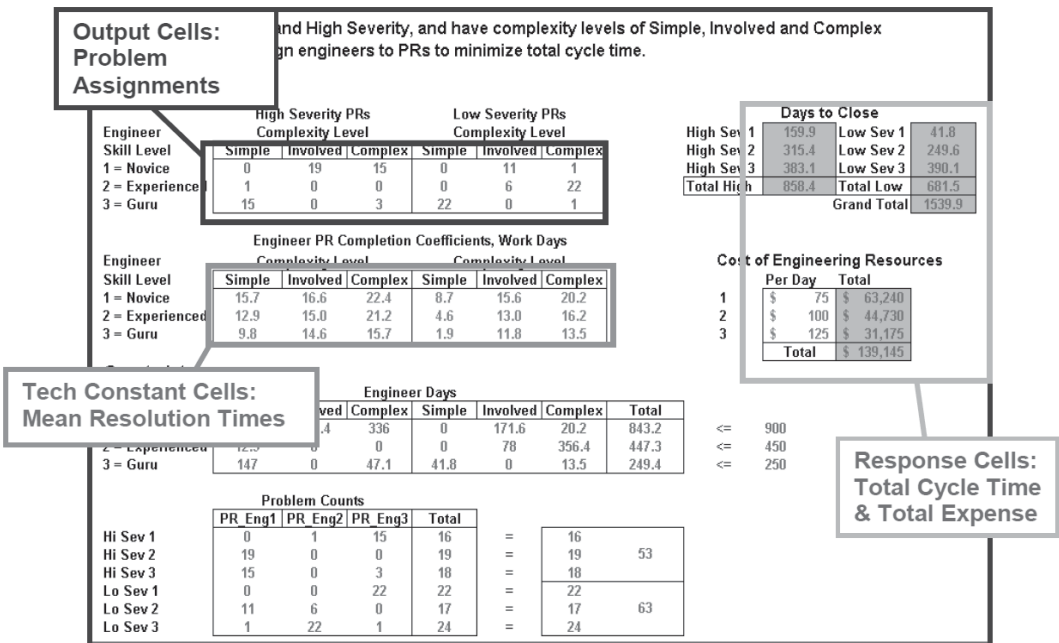


Fig. 1. Output from the Cycle Resolution Time Optimization Algorithm

The main effects plot and the intersection plot are useful tools for visualizing and analyzing the effects for factors. In this paper, we only use the main effects plot because we conclude from MINITAB 16 Taguchi experiment results, because factors interactions are not significant at 95% confidence level. The

main effects plots for outputs: Resolution time and Cost are shown in Fig. 3.

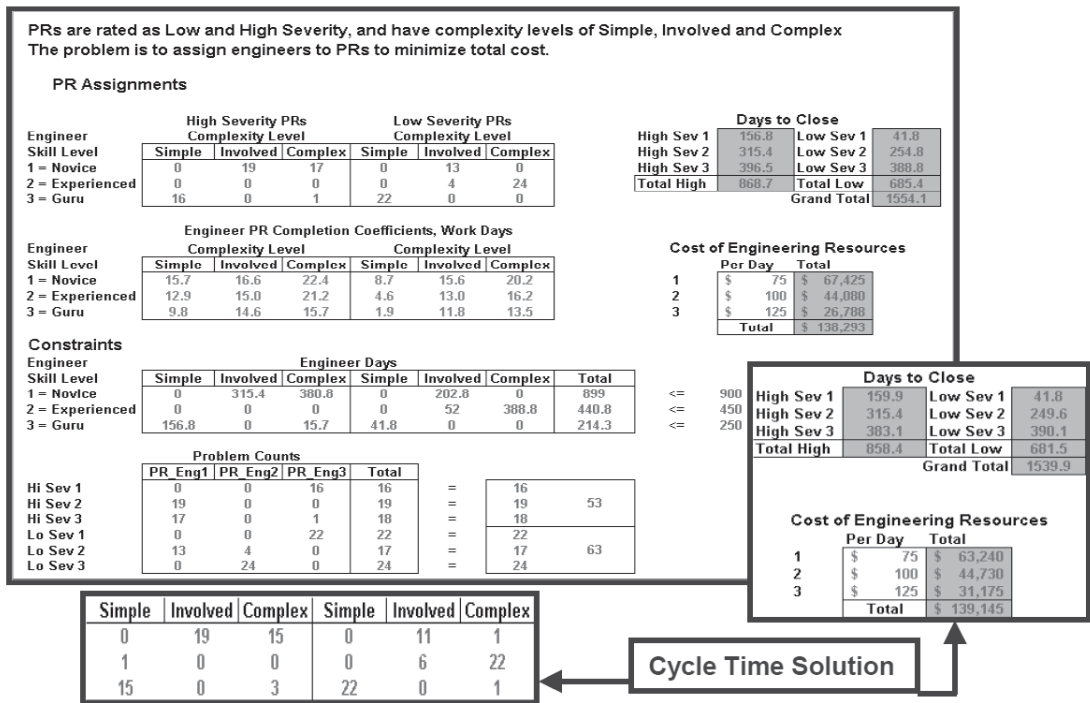


Fig. 2. Output from the Cost Optimization Algorithm

High slope of line means that the factor gives more impact on the experimental results than other factors. Referring to the Ranking table of Taguchi analysis for Cost to fix [\$] and Total Resolution time [Days] versus controlled factors Severity, Complexity and engineers Experience, the slope and graphs on figure 3, we observe that the most influential factor is the Complexity factor, then Severity, and Experience factor in our experiments for Cost to fix output. Also, we observe that the most influential factor for Total Resolution time output, again is the Complexity factor, then Experience, and Severity factor in our experiments. Taguchi optimization for cost to fix design explain author's [1] surprise that "The optimal solution is interesting because, contrary to expectations, the gurus are mostly assigned to low complexity problems, with some preference for low severity.". According to Taguchi method for PR allocation we developed ranking procedure:

- Step 1 - Assign PR of Simple complexity and Low severity (most influential factors first) to the Guru engineers, then
- Step 2 - Simple complexity and High severity PR assign, again to Guru **if there exists** available time (days), then
- Step 3 - Average complexity and Low severity PR, again assign to Guru **if there exists** available time (days) and to Experienced skill engineers, **OR if there does not** Guru available time (days) exists, then assign PR to Experienced skill engineers, then
- Step 4 - Average complexity and High severity PR assign, again to Experienced skill engineers **if there exists** available time (days) and to Novice skill engineers, **OR if there does not exists** Experienced skill engineers available time (days), then assign PR to Novice skill engineers, and
- Step 5 - Complex and Low, then Complex and High severity PR assign to the Novice until available time (days) exists.



Similar ranking procedure should be applied to optimize Total Resolution time taking into account that the most influential factor for Total Resolution time output, again is the Complexity factor, **then Experience**, and Severity factor in our experiments. Taghuchi approach optimization PR assignment tables for Total Resolution time and Cost to fix output are presented on Tables 2 and 3.

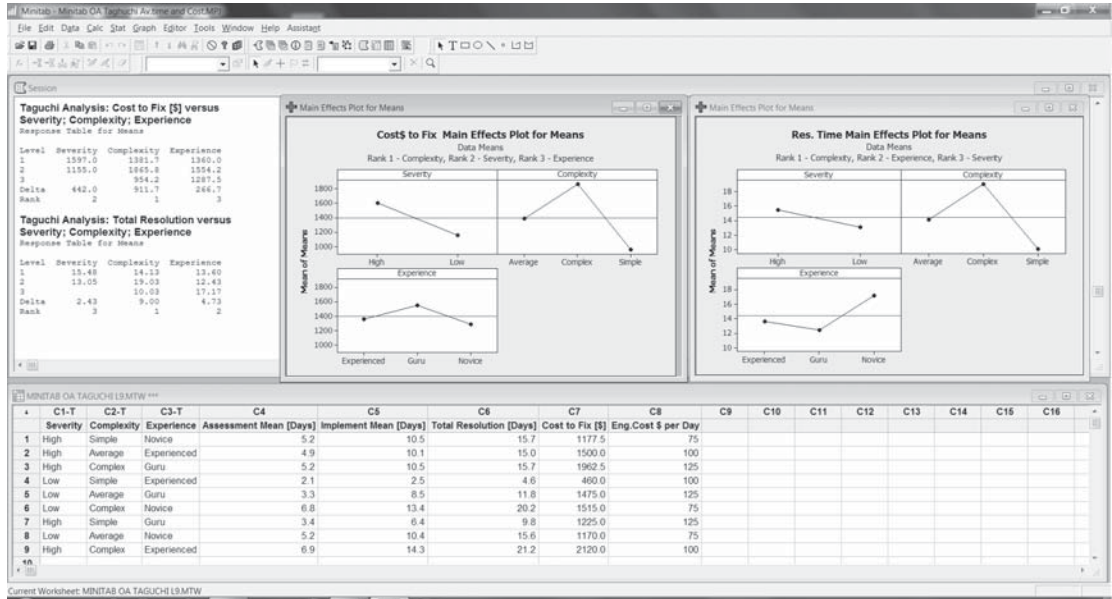


Fig. 3. Output from the Time resolution and Cost Optimization using Taguchi method

Advantages of our Taguchi method application to minimize Total Resolution time output is that Grand Total = \$142770 is higher only 3.2% compared to author's [1] linear programming approach, but in Taguchi case staff resource reserve is 7.8 days instead 45 days in author's [1] case. This means that Taguchi approach can be used for more accurate staff effort maintenance planning and, of course, for PR assignment effort for maintenance task of delivered software product. Also, advantage of our Taguchi method application to minimize Cost to fix output is that Grand Total = \$141853 is higher only 2.6% compared to author's [1] linear programming approach, but in Taguchi case staff resource reserve is 21 days instead 45 days in author's [1] case. Again, Taguchi approach can be used for more accurate staff effort maintenance planning and, of course, for PR assignment effort for maintenance task of delivered software product, allowing project managers to see the consequences of choosing cost over schedule or vice-versa.

Table 2. Taguchi Problem Counts for Time resolution

PR_Eng1	PR_Eng2	PR_Eng3	Severity and Complexity
0	16	0	Hi Sev 1
19	0	0	Hi Sev 2
18	0	0	Hi Sev 3
0	0	22	Lo Sev 1
0	0	17	Lo Sev 2
9	15	0	Lo Sev 3

Grand Total = \$142770, %Delta= 3.2%, Reserve 7.8 instead 45 Days

Table 3. Taguchi Problem Counts for Cost to Fix

PR_Eng1	PR_Eng2	PR_Eng3	Severity and Complexity
0	0	22	Hi Sev 1
0	0	16	Hi Sev 2
0	17	0	Hi Sev 3
4	15	0	Lo Sev 1
24	0	0	Lo Sev 2
15	0	3	Lo Sev 3

Grand Total = \$141853, %Delta= 2.6%, Reserve 21 instead 45 Days

## CONCLUSIONS

Software development activities, in every phase, are error prone so defects play a crucial role in software development. In this case study, a quick deterministic Taguchi Design of Experiment method is described to prioritize problems and implement their solution that helps to reduce maintenance cycle time and costs.

This paper describes such an implemented solution, a Taguchi approach which can be used for more accurate staff effort maintenance planning and, of course, for problem reports assignment effort for maintenance task of delivered software product, allowing project managers to see the consequences of choosing cost over schedule or vice-versa.

## ACKNOWLEDGEMENTS

This work has been done within the project 'Optimal Software Quality Management Framework', supported in part by the Ministry of Science and Technological Development of the Republic of Serbia under Project No.TR-35026.

## REFERENCES

- [1] Porter D. Problem Resolution Optimization, Senior Statistician, Motorola, on web site [www.stickyminds.com](http://www.stickyminds.com), visited 2013.
- [2] Gopalakrishnan Nair, T R. Suma V., Nithya G. N. Estimation of the Characteristics of a Software Team for Implementing. Software Quality Professional; Mar 2011; 13, 2; ProQuest Central, pg. 14
- [3] Lj. Lazić, I. Đokić, S. Milinković, „Estimating Cost and Defect Removal Effectiveness in SDLC Testing activities“, INFOTEH-JAHORINA 2013, Jahorina, Proceedings Vol. 12,, ISBN 978-99955-763-1-8, March 2013. pp.572-577.
- [4] Jones, Capers, Applied Software Measurement, Global Analysis of Productivity and Quality, Third Edition, New York: McGraw Hill, 2008.
- [5] Lj. Lazić S. Milinković, S. Ilić “ OptimalSQM: Optimal Software Quality Management Repository is a Software Testing Center of Excellence”, Proc. of 6th WSEAS European Computing Conference (ECC '12), Prague, Czech Republic, September 24-26, 2012, pp. 197- 209.

## MARINE WAVES INTERACTION WITH SHIP MOORED NEAR BERTH

### ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МОРСКИХ ВОЛН С СУДНОМ, РАСКРЕПЛЁННЫМ У ПРИЧАЛА

---

*Ensuring safe ships berthing is important problem in port engineering. Complicated mooring systems are using to protect ship from undesirable movements. The true choice of mooring connections parameters corresponds to calculating the values of waves impacts on the boat. Ship motions are described by system of differential equations, which contain disturbing, inertia, damping and restoring forces, which magnitudes strongly depend on the berth design. In the given paper, the mathematical model for an interaction between sea waves and ship near the berth is studied. The results are presented of determination of hydrodynamic characteristics of different ship motions, such as horizontal and vertical components of disturbing force and moment, added masses and damping coefficients.*

---

#### ВВЕДЕНИЕ

Для обеспечения безопасной стоянки судов и выполнения погрузочно-разгрузочных работ у причалов в условиях волнения необходима их надежная система раскрепления. Выбор швартовно-отбойной системы осуществляется по данным перемещений судна и усилий в его швартовных связях, для определения которых требуется знание возмущающих и инерционно-демпфирующих сил.

Наличие причала вносит возмущение и оказывает существенное влияние на гидродинамические характеристики судов: присоединенные массы, коэффициенты волнового сопротивления, значения возмущающих сил и моментов. Данная работа посвящена определению перечисленных характеристик и исследованию их взаимосвязи с геометрическими и физическими параметрами причала.

#### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача о колебаниях судна на волнении разделяется на две задачи различной сложности [1]: определение гидродинамических сил, действующих на колеблющееся судно от набегающих волн, и определение параметров возникающей качки. Первая (гидродинамическая) задача сводится к решению краевой задачи для уравнения Лапласа при соответствующих граничных условиях. Вторая (задача о качке) - к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение судна.

Конструкция и геометрические параметры причала влияют на характер и величины сил, действующих на судно. В данной работе предлагается подход к решению задачи о качке судна у причалов с лицевой пористой стенкой (рис. 1).

Задача решается в линейной постановке при следующих предположениях: дно акватории является горизонтальным, жидкость - идеальной и несжимаемой, ее движение - потенциальным. Волновой процесс считается установившимся. Судно схематизируется цилиндрическим телом неограниченной протяженности прямоугольного поперечного сечения.

Набегающие из бесконечности волны описываются потенциалом скорости

$$\Phi_0(x, z, t) = A \operatorname{ch} k_0(z + d) \cdot \exp(-i(k_0 x - \sigma t)), \quad (1)$$

где  $A = \frac{g h i}{2\sigma \operatorname{ch} k_0 d}$  - комплексная амплитуда,  $h$  - высота волн,  $g$  - ускорение свободного падения,  $\lambda$  - длина волн,  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$  - волновое число,  $i = \sqrt{-1}$  - мнимая единица.

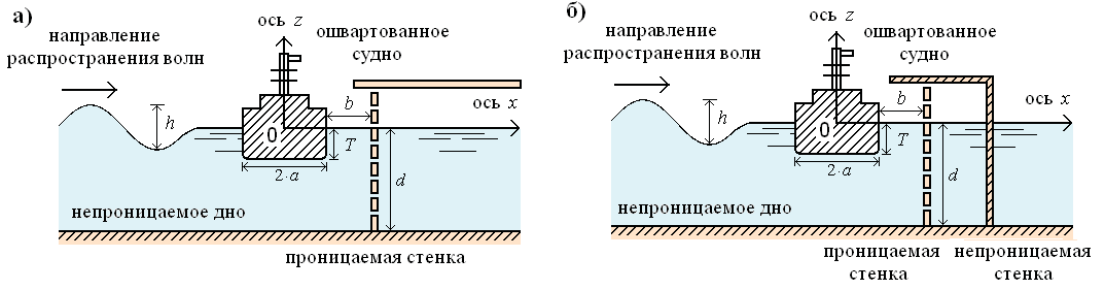


Рис. 1. Модели причалов и основные геометрические обозначения.

Круговая частота, волновое число и местная глубина связаны между собой дисперсионным соотношением

$$\sigma^2 = g k_0 \operatorname{th} k_0 d. \quad (2)$$

Задача определения потенциала скорости движения жидкости  $\Phi(x, z, t) = \varphi(x, z) \cdot \exp(-i\sigma t)$ , возмущенного присутствием судна и причала, сводится к отысканию решения уравнения Лапласа  $\Delta\varphi(x, z) = 0$ , удовлетворяющего условиям:

- кинематическому и динамическому на свободной поверхности жидкости, которые можно записать в виде одного соотношения

$$-\sigma^2 \varphi(x, z) + g \frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial z} = 0, \quad z = 0; \quad (3)$$

- на контуре  $S$  судна

$$\frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial n(x, z)} = u_n(x, z), \quad (x, z) \in S, \quad (4)$$

где  $u_n(x, z)$  - нормальная составляющая скорости судна, определяемая в виде

$$u_n(x, z, t) = [u_x \cos(n, x) + u_z \cos(n, z) + \omega(x \cos(n, z) - z \cos(n, x))] \cdot \exp(i\sigma t),$$

где  $u_x$ ,  $u_z$  - проекции скорости судна на оси  $Ox$  и  $Oz$ ;  $\omega$  - угловая скорость вращения вокруг оси  $Oy$ , перпендикулярной плоскости  $Oxz$ ;  $\cos(n, x)$ ,  $\cos(n, z)$  - косинусы углов между нормалью  $n$  и осями  $Ox$  и  $Oz$ .

- на неподвижных непроницаемых границах области, занятой жидкостью (на поверхности дна и причала)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad (5)$$

- на поверхности пористой стенки

$$\frac{\partial \varphi_-}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_+}{\partial x} = \beta \cdot (\varphi_+ - \varphi_-), \quad (6)$$

где  $\varphi_+$ ,  $\varphi_-$  - значения функции  $\varphi$  (амплитуды потенциала скорости) слева и справа от пористой стенки,  $\beta$  - величина, зависящая от коэффициентов пористости  $\varepsilon$  стенки, ее сопротивления  $f$ , присоединенной массы  $C_m$ , толщины  $w$ , определяемая из [2],

- на бесконечности (условие Зоммерфельда)

$$\varphi = (A \exp(-i k_0 x) + A_0 \exp(i k_0 x)) \cdot \operatorname{ch}(k_0(z+d)), \quad x \rightarrow -\infty. \quad (7)$$

## МЕТОД РЕШЕНИЯ

В силу линейности задачи потенциал скорости всего возмущенного движения жидкости  $\Phi(x, z, t)$  можно представить в виде:

$$\Phi(x, z, t) = \Phi_0(x, z, t) + \Phi^{(1)}(x, z, t) + \Phi^{(2)}(x, z, t), \quad (8)$$

где  $\Phi^{(1)}(x, z, t) = \varphi^{(1)}(x, z, t) \cdot \exp(-i\sigma t)$  - дифракционный потенциал, характеризующий волновое движение, возникающее при набегании волн на судно как на неподвижное препятствие,  $\Phi^{(2)}(x, z, t) = \varphi^{(2)}(x, z, t) \cdot \exp(-i\sigma t)$  - потенциал скорости, описывающий волновое движение, вызываемое вынужденной качкой судна при отсутствии набегающих волн,  $\Phi_0(x, z, t)$  определяется по формуле (1).

Таким образом, исходная задача распадается на дифракционную задачу для судна, рассматриваемого как неподвижная преграда, и задачу о вынужденной качке судна на спокойной воде (при отсутствии набегающих волн).

Рассмотрим дифракционную задачу для случая, когда судно ошвартовано у причала, представляющего собой пористую стенку, как на рис. 1а. Задача описывается следующими соотношениями: уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial z^2} = 0; \quad (9)$$

условием на поверхности жидкости

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial z} = 0, \quad z = 0; \quad (10)$$

условием на дне

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial z} = 0, \quad z = -d; \quad (11)$$

условием на контуре судна

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial n}, \quad (x, z) \in S; \quad (12)$$

условием на стенке

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi^{(1)}(a+b-0, z, t)}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi^{(1)}(a+b+0, z, t)}{\partial x} = \\ &= \beta \cdot (\varphi^{(1)}(a+b+0, z, t) - \varphi^{(1)}(a+b-0, z, t)); \end{aligned} \quad (13)$$

условиями на бесконечности

$$\varphi^{(1)} = \varphi_0 + A_0 \operatorname{ch} k_0(z+d) \cdot \exp(i(k_0 x + \sigma t)), \quad x \rightarrow -\infty; \quad (14)$$

$$\varphi^{(1)} = B_0 \operatorname{ch} k_0(z+d) \cdot \exp(-i(k_0 x - \sigma t)), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (15)$$

Коэффициенты  $A_0$  и  $B_0$  в уравнениях (14) и (15) являются комплексными амплитудами потенциалов волн, отражённых от судна и проходящих за него.

Для решения дифракционной задачи разобьем область  $\Omega$ , занятую жидкостью, на прямоугольные подобласти (рис. 2).

В каждой из подобластей  $\Omega_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) решение  $\varphi^{(1)} = \varphi_j^{(1)}$  отыскивается методом разделения переменных. На общих границах подобластей при  $x = \pm a$  ставятся условия непрерывности давления  $p = -\rho \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t}$  и горизонтальной составляющей скорости жидкости  $v = \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x}$ , где  $\rho$  - плотность

жидкости:

$$\varphi_j^{(1)} = \varphi_{j+1}^{(1)}, \quad j = 1, 2; \quad (16)$$

$$\frac{\partial \varphi_j^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_{j+1}^{(1)}}{\partial x}, \quad j = 1, 2. \quad (17)$$

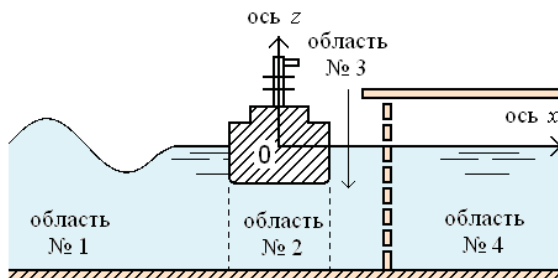


Рис. 2. Разбиение области, занятой жидкостью

Решая уравнение Лапласа и удовлетворяя граничным условиям (3, 4, 5, 7, 8), функции  $\varphi_j^{(1)}$  находим в виде

$$\varphi_1^{(1)} = \left( A \exp(-ik_0 x) + A_0^{(1)} \exp(ik_0 x) \right) \operatorname{ch} k_0 (z+d) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} \exp(k_n x) \cdot \cos k_n (z+d), \quad (18)$$

$$\varphi_2^{(1)} = \left[ \left( A_0^{(2)} x + B_0^{(2)} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n^{(2)} \exp\left(\frac{n\pi x}{d-T}\right) + B_n^{(2)} \exp\left(-\frac{n\pi x}{d-T}\right) \right) \right] \cos \frac{n\pi}{d-T} (z+d), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \varphi_3^{(1)} = & \left( A_0^{(3)} \exp(ik_0 x) + (B_0^{(3)}) \exp(-ik_0 x) \right) \operatorname{ch} k_0 (z+d) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n^{(3)} \exp(k_n x) + (B_n^{(3)}) \exp(-k_n x) \right) \cos k_n (z+d), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\varphi_4^{(1)} = B_0^{(4)} \exp(-ik_0 x) \cdot \operatorname{ch} k_0 (z+d) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(4)} \exp(-k_n x) \cdot \cos k_n (z+d), \quad (21)$$

где  $k_n$  - положительные корни уравнения  $\sigma^2 = g k \operatorname{tg} k d$ .

Неизвестные коэффициенты  $A_n^{(j)}$ ,  $B_n^{(j)}$  ( $j = 1, 2, 3, 4; n = 0, 1, 2, \dots$ ) определяются из условий (13), (16-17). При расчетах количество членов рядов в (18-21) ограничивалось сверху величиной  $N$ .

Величины горизонтальной  $X$ , вертикальной  $Z$  составляющих возмущающей силы и момента  $M$ , действующих на судно, определяются по формулам [1]

$$X = - \int_{-T}^0 \left[ p(a, z, t) - p(-a, z, t) \right] dz, \quad (22)$$

$$Z = - \int_{-a}^a p(x, -T, t) dx, \quad (23)$$

$$M = \int_{-T}^0 \left[ p(-a, z, t) - p(a, z, t) \right] z dz - \int_{-a}^a p(x, -T, t) x dx. \quad (24)$$

В задаче о качке судна у причала неизвестной является функция  $\varphi^{(2)}$ . Математическая формулировка задачи о качке отличается от дифракционной (условия (9-15)) тем, что функция  $\varphi^{(1)}$  заменяется функцией  $\varphi^{(2)}$ , условие (12) - соотношением

$$\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n} = u_n, \quad (x, z) \in S, \quad (25)$$

а условия (14) и (15) соответственно примут вид

$$\varphi^{(2)} = C_0 \operatorname{ch} k_0(z+d) \cdot \exp(i(k_0 x + \sigma t)), \quad x \rightarrow -\infty; \quad (26)$$

$$\varphi^{(2)} = D_0 \operatorname{ch} k_0(z+d) \cdot \exp(-i(k_0 x + \sigma t)), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (27)$$

В дальнейшем задача решается аналогично дифракционной.

Величины составляющих гидродинамической (инерционно-демпфирующей) силы и момента, действующих на судно, связаны с присоединенными массами и коэффициентами сопротивления соотношениями [1]:

$$X(t) = - \left[ \mu_{22} \frac{du_x(t)}{dt} + \lambda_{22} u_x(t) \right], \quad (28)$$

$$Z(t) = - \left[ \mu_{33} \frac{du_z(t)}{dt} + \lambda_{33} u_z(t) \right]. \quad (29)$$

В формулах (28-29)  $\mu_{22}$  и  $\mu_{33}$  - присоединенные массы качки судна,  $\lambda_{22}$  и  $\lambda_{33}$  - коэффициенты волнового сопротивления.

После определения возмущающих и инерционно-демпфирующих сил вычисляются перемещения судна, необходимые для расчета усилий в швартовных связях.

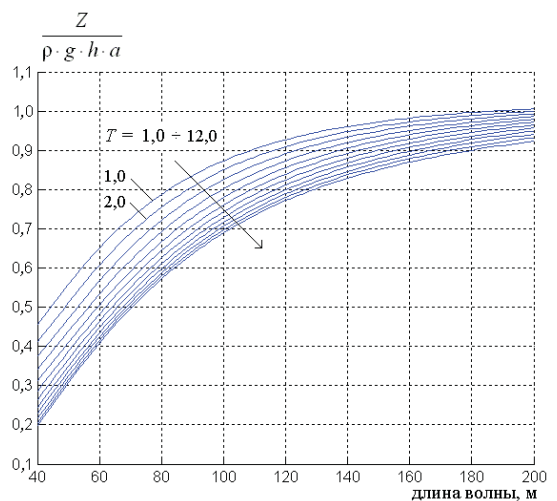
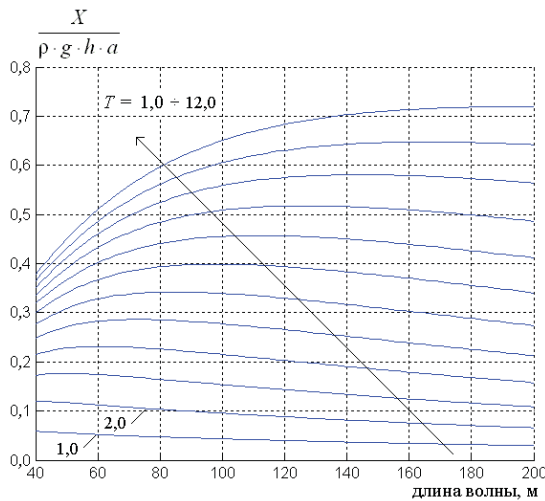
Ниже приведены результаты расчетов зависимостей гидродинамических характеристик судна от различных параметров задачи о судне у причала, приведенной на рис. 1а.

Зависимость коэффициентов присоединенной массы  $\mu_{22}$ ,  $\mu_{33}$ , коэффициентов сопротивления  $\lambda_{22}$ ,  $\lambda_{33}$ , составляющих возмущающей силы  $X$ ,  $Z$ , значения момента  $M$  от величины  $T$  осадки судна приведены на рис. 3, 4 и 5. Параметры выполненных расчетов соответствовали типовому причалу:

*геометрия задачи* -  $a = 15$  м;  $b = 5$  м;  $d = 15$  м;

*параметры стенки* -  $w = 1,0$  м;  $e = 0,5$ ;  $f = 2,0$ ;  $C_m = 1,0$ ;

*количество членов рядов* -  $N = 10$ .



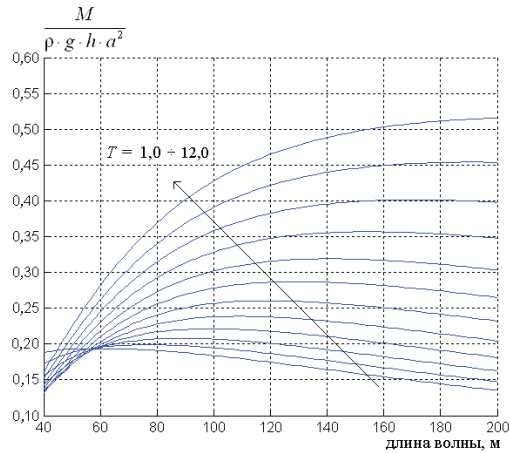


Рис. 3. Зависимость составляющих X и Z возмущающей силы, значения момента M от величины T осадки судна

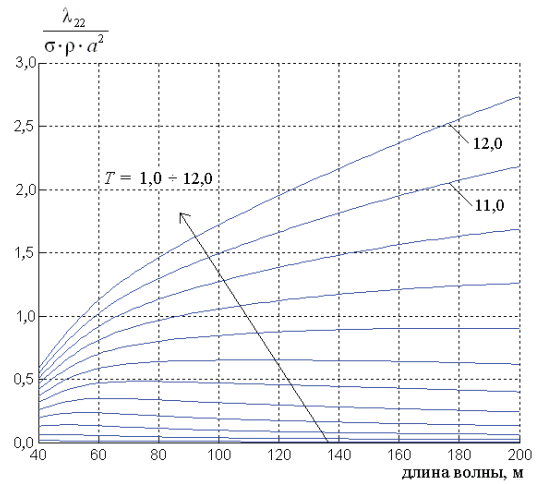
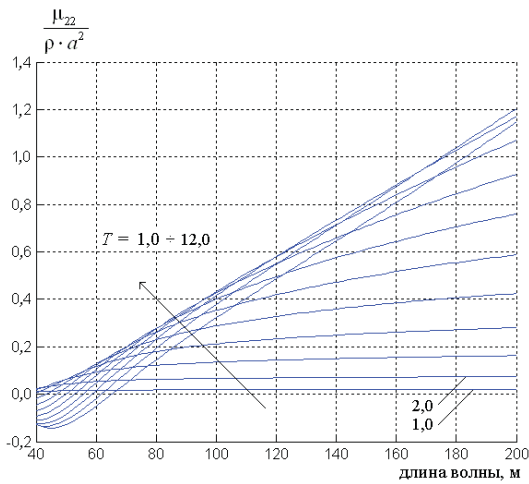


Рис. 4. Зависимость коэффициента присоединенной массы  $\mu_{22}$  и коэффициента сопротивления  $\lambda_{22}$  от величины T осадки судна

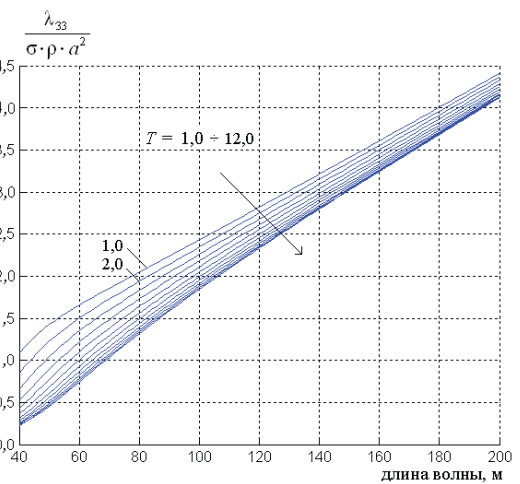
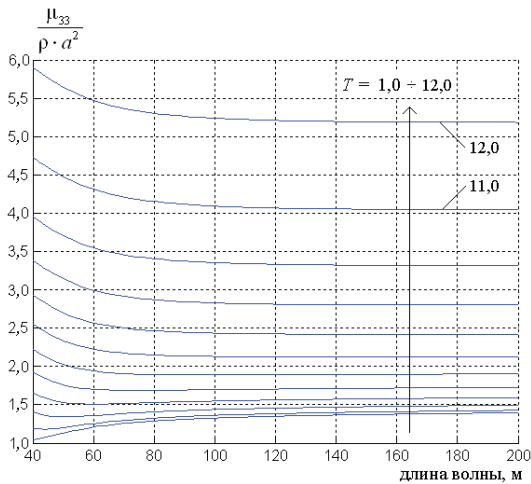


Рис. 5. Зависимость коэффициента присоединенной массы  $\mu_{33}$  и коэффициента сопротивления  $\lambda_{33}$  от величины T осадки судна



Зависимость коэффициентов присоединенной массы  $\mu_{22}$ ,  $\mu_{33}$ , коэффициентов сопротивления  $\lambda_{22}$ ,  $\lambda_{33}$ , составляющих возмущающей силы  $X$ ,  $Z$ , значения момента  $M$  от расстояния  $b$  от судна до стенки приведены на рис. 6, 7 и 8. Расчеты выполнены для следующих параметров:

геометрия задачи -  $a = 15$  м;  $T = 10$  м;  $d = 15$  м;

параметры стенки -  $w = 1,0$  м;  $e = 0,5$ ;  $f = 2,0$ ;  $C_m = 1,0$ ;

количество членов рядов -  $N = 10$ .

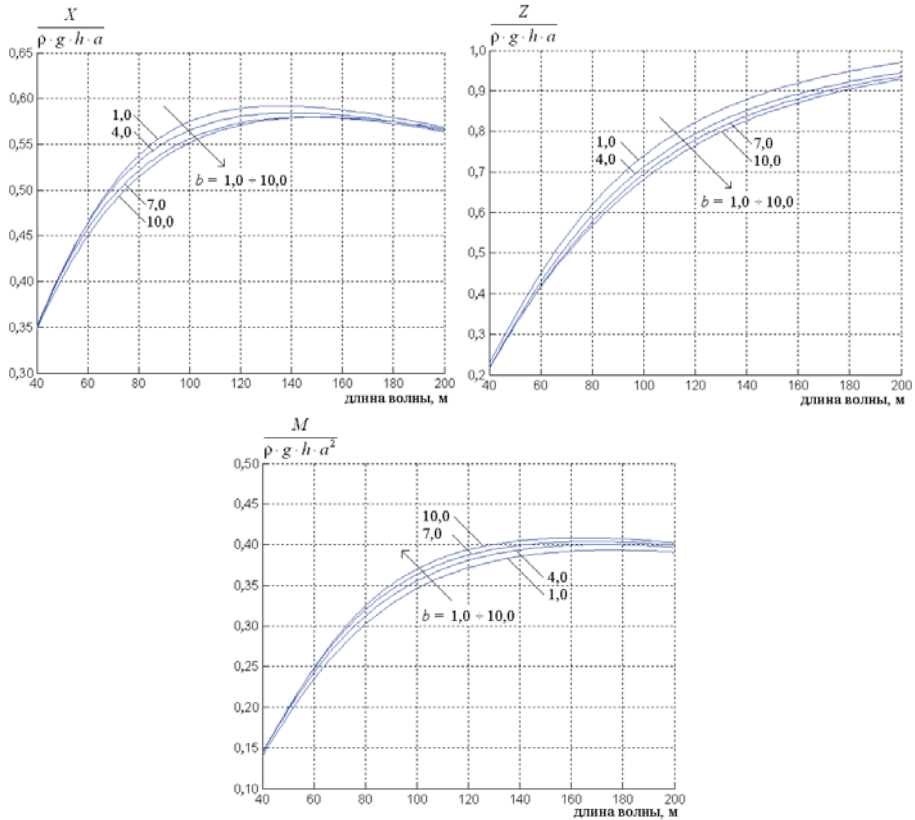


Рис. 6. Зависимость составляющих возмущающей силы  $X$ ,  $Z$ , значения момента  $M$  от величины  $b$  расстояния от судна до стенки

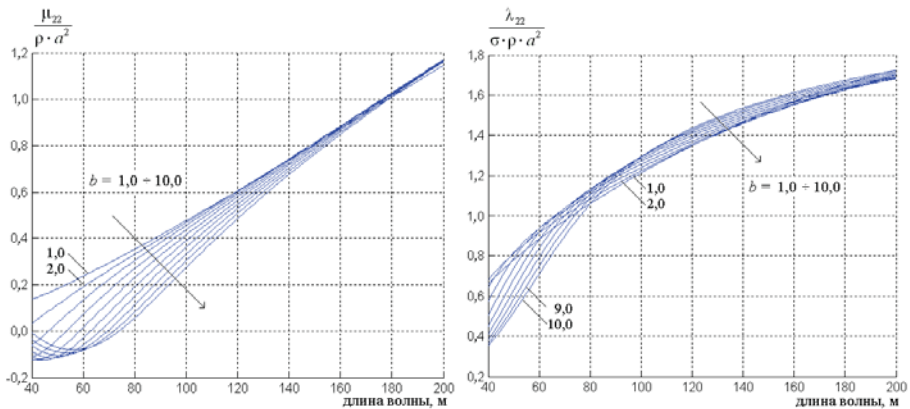


Рис. 7. Зависимость коэффициента присоединенной массы  $\mu_{22}$  и коэффициента сопротивления  $\lambda_{22}$  от величины  $b$  расстояния от судна до стенки

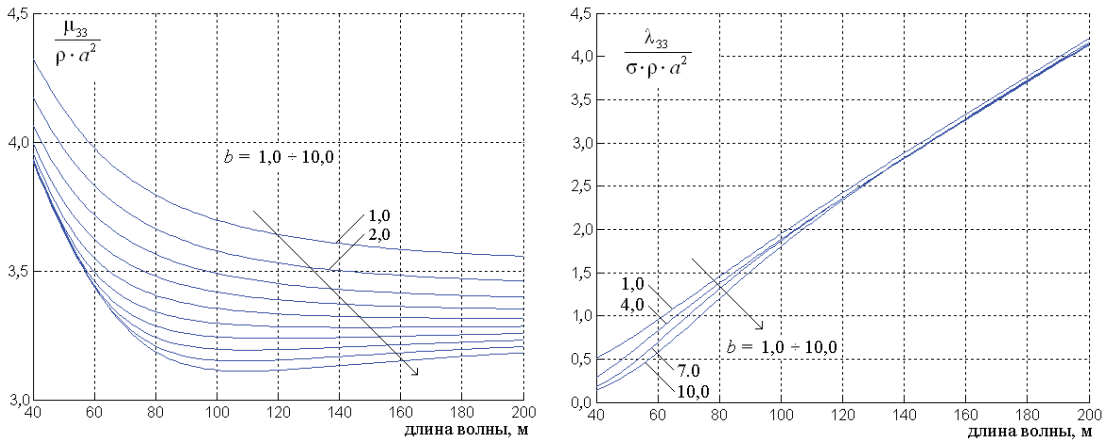


Рис. 8. Зависимость коэффициентов  $\mu_{33}$  и  $\lambda_{33}$  от величины  $b$  расстояния от судна до стенки

Зависимости тех же величин от значения  $\varepsilon$  пористости стенки приведены на рис. 9, 10 и 11. Параметры расчетов были те же, что и выше (за тем исключением, что  $b = 5$  м).

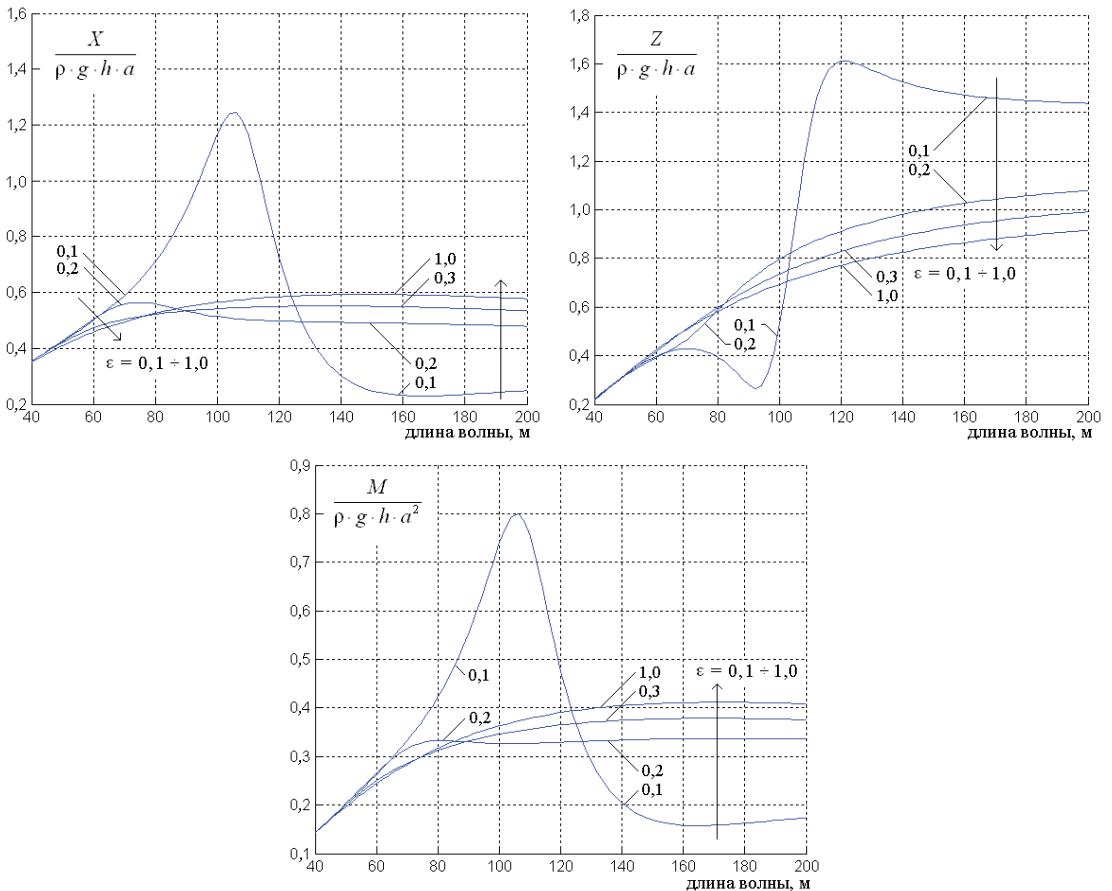


Рис. 9. Зависимость величин  $X$ ,  $Z$ ,  $M$  от величины  $\varepsilon$  пористости стенки

Кривая для величины вертикальной силы  $Z$  при величине малой пористости стенки  $\varepsilon = 0,1$  качественно совпадает с результатами, полученными для качки двух тел, второе из которых - большей

осадки [3, 4].

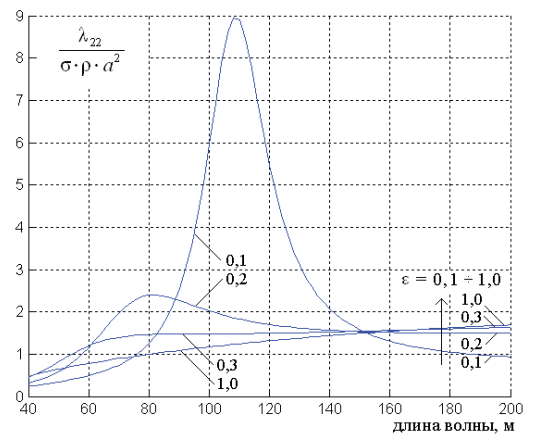
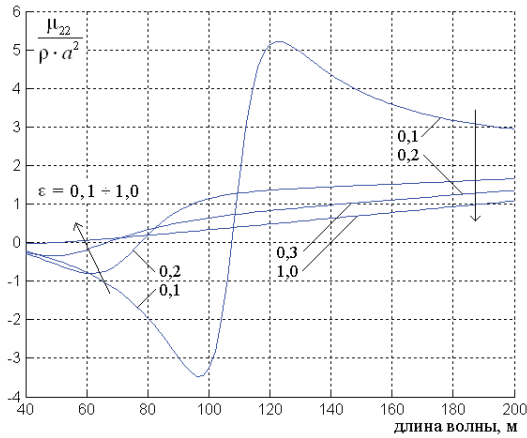


Рис. 10. Зависимость коэффициента присоединенной массы  $\mu_{22}$  и коэффициента сопротивления  $\lambda_{22}$  от величины  $\epsilon$  пористости стенки

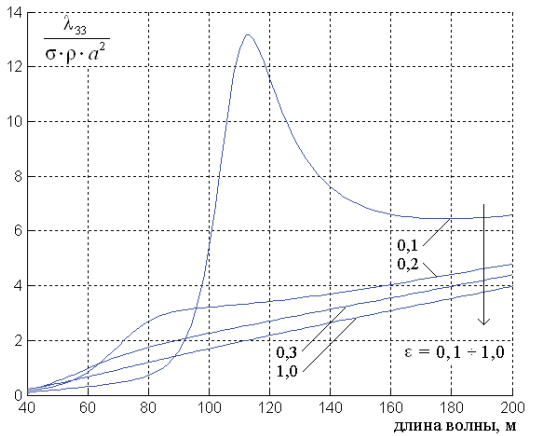
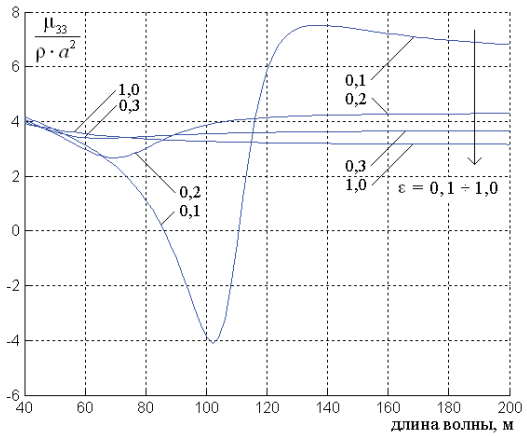


Рис. 11. Зависимость коэффициента присоединенной массы  $\mu_{33}$  и коэффициента сопротивления  $\lambda_{33}$  от величины  $\epsilon$  пористости стенки

Зависимости тех же величин от значения  $C_m$  присоединенной массы проницаемой стенки приведены на рис. 12, 13 и 14. Параметры расчетов - те же, что и выше ( $\epsilon = 0,5$ ).

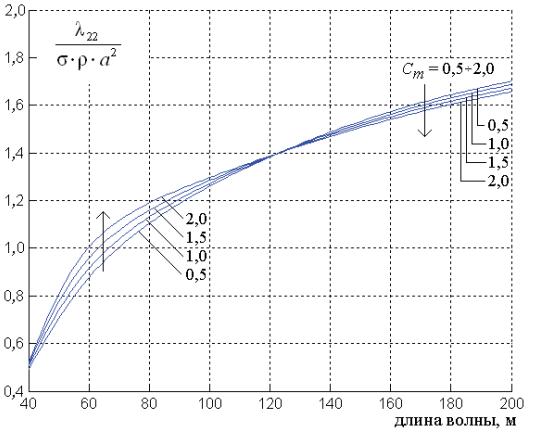
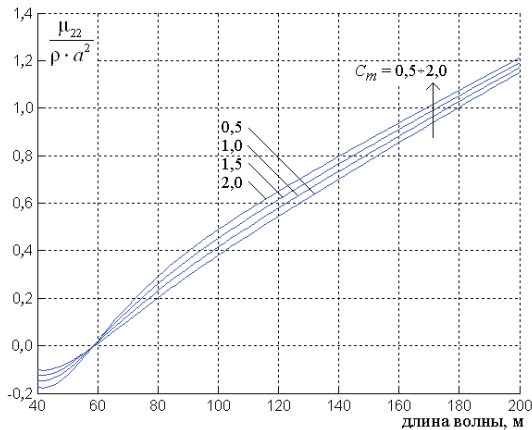


Рис. 12. Зависимость коэффициентов  $\mu_{22}$  и  $\lambda_{22}$  от величины  $C_m$  присоединенной массы стенки

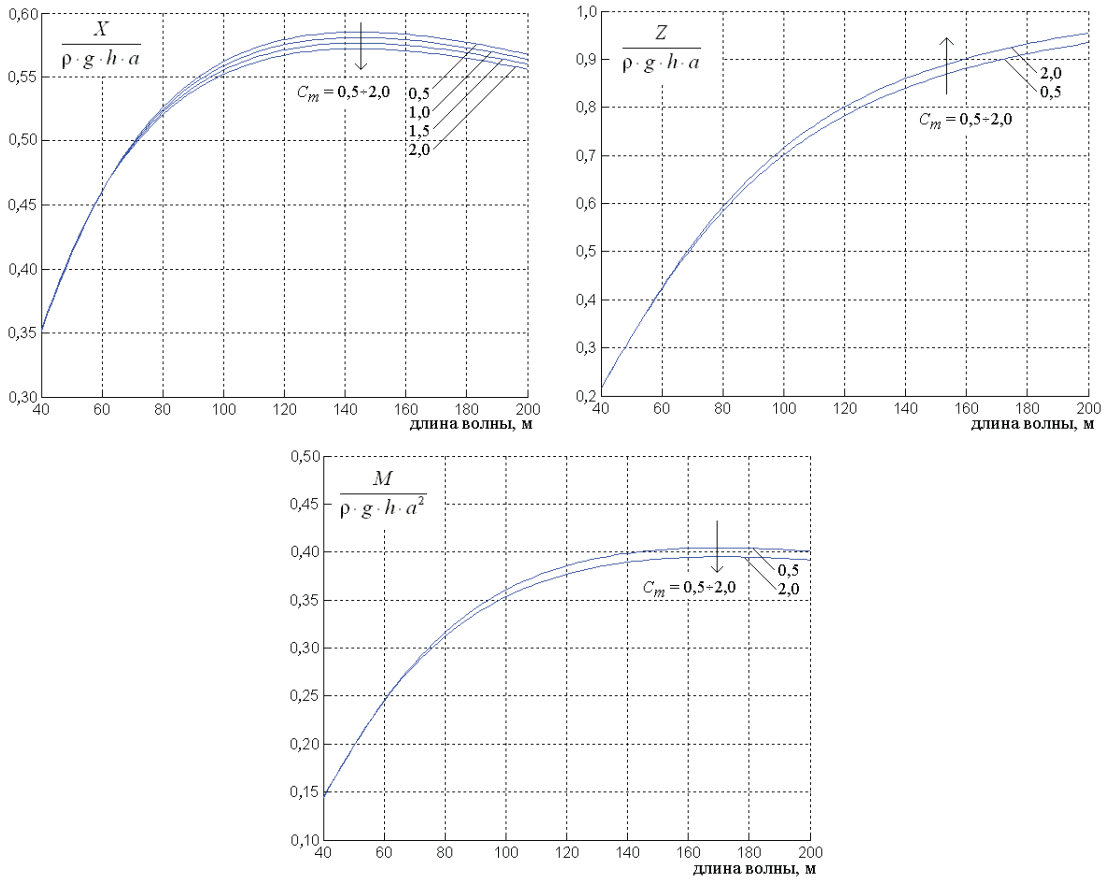


Рис. 13. Зависимость величин  $X$ ,  $Z$ ,  $M$  от значения  $C_m$  присоединенной массы стенки

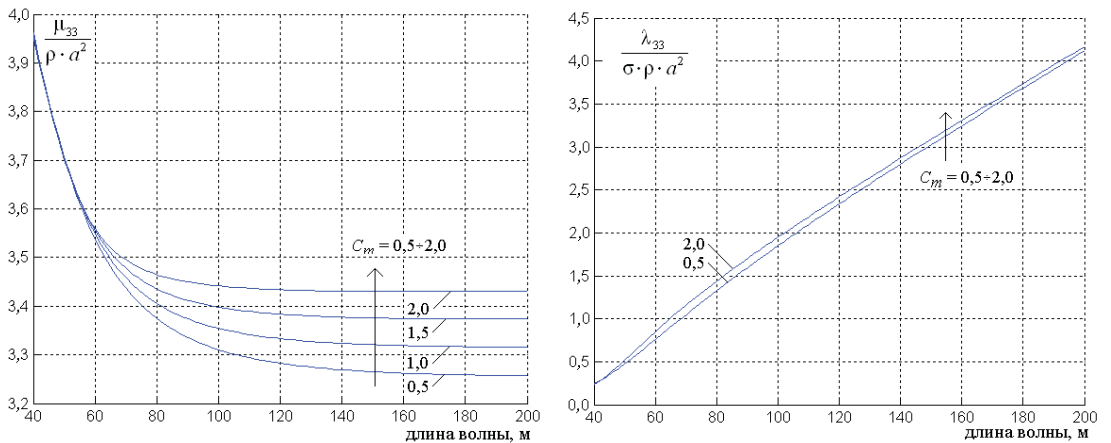


Рис. 14. Зависимость коэффициентов  $\mu_{33}$  и  $\lambda_{33}$  от величины  $C_m$  присоединенной массы стенки

Зависимость высоты установившегося волнения  $h_w$  от расстояния до левого борта судна (отдельно для составляющих волнения, обусловленных дифракционной задачей и задачей о качке) представлена на рисунке 15. Были выбраны следующие параметры расчетов:  $\lambda = 50$  м;

геометрия задачи -  $a = 15$  м;  $b = 2$  м;  $T = 5$  м;  $d = 15$  м;

параметры стенки -  $w = 1,0$  м;  $e = 0,1$ ;  $f = 2,0$ ;  $C_m = 1,0$ ;  
 количество членов рядов -  $N = 10$

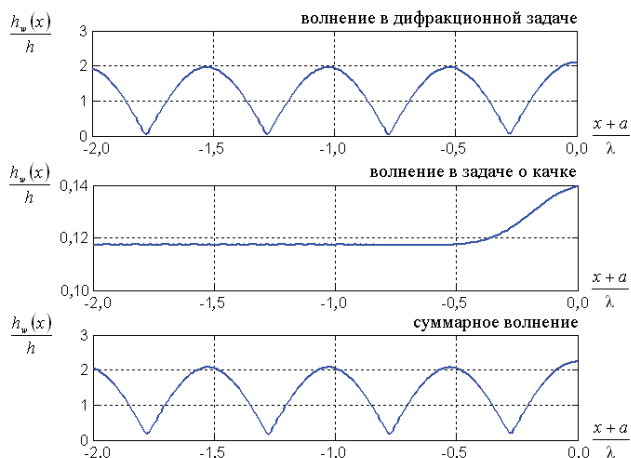


Рис. 15. Зависимость высоты установившегося волнения  $h_w$  от расстояния до левого борта судна

Зависимость значения составляющих  $X$  и  $Z$  возмущающей силы от числа членов рядов  $N$  приведены на рис. 16. Параметры волны равны  $h = 1,5$  м;  $\lambda = 50$  м; другие параметры:

геометрия задачи -  $a = 10$  м;  $b = 5$  м;  $T = 5$  м;  $d = 15$  м;  
 параметры стенки -  $w = 1,0$  м;  $e = 0,5$ ;  $f = 2,0$ ;  $C_m = 1,0$ .

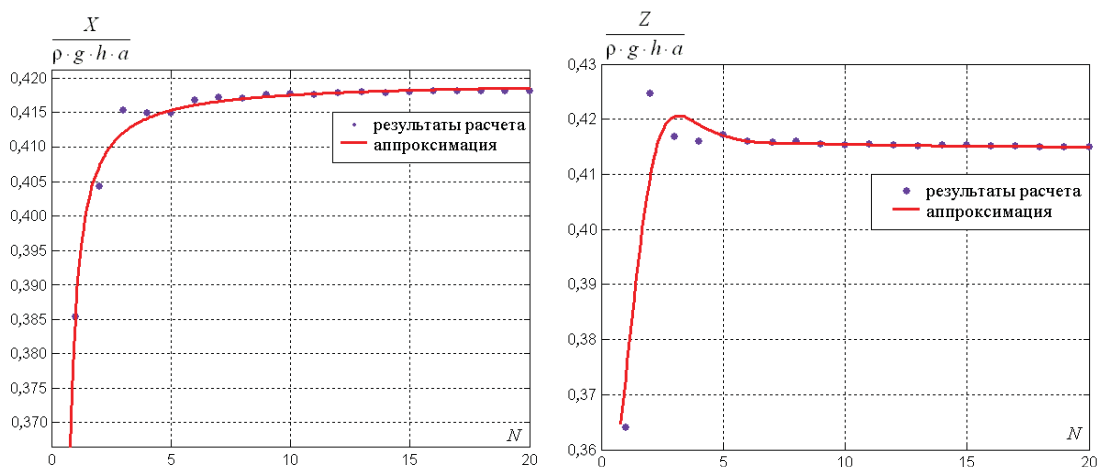


Рис. 16. Зависимость значения составляющих  $X$  и  $Z$  возмущающей силы от числа  $N$  слагаемых в рядах

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Хаскинд М.Д. Гидродинамическая теория качки корабля. М.: Наука, 1973. - 328 с.
- [2] Yu X. Diffraction of water waves by porous breakwaters // J. Waterways, Ports, Coastal Ocean Engineering. Div. ASCE, 1995. - Vol. 121 (6). - Pp. 275-282.
- [3] Ohkusu M. Ship motion in vicinity of a structure // Proc. Of the 1st Int. Conf. on Behavior of Offshore Structures. - The Norw. Inst. of Techn., 2-5 aug. 1974. - Vol. 1. - Pp. 284-306.
- [4] Vasyuk S.M., Maximov V.V., Nudner I.S., Puchkov V.S. To the problem of calculation of pitch of buoyant object moored to stationary and floating berth // International Symposium on Ship Hydrodynamics (ISSH) devoted to 85th anniversary of birthday of Abram M. Basin, St. Petersburg, 1995. - Pp. 238-244.

# ON INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR SYSTEMS OF PARABOLIC EQUATIONS

The initial boundary value problems for systems of two parabolic equations are studied when the conditions with respect to the time variable are given only for one of the unknown functions. The problems are considered in the case where along with the initial data for one of the functions either the value of the same function is given at the final moment of time or the integral of this function with respect to time is known. The existence and uniqueness of the solution to these problems are established.

## INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Let  $\Omega$  be a domain in  $\mathbf{R}^n$  with a smooth boundary  $\partial\Omega$ ,  $\bar{\Omega}$  is the closure of  $\Omega$ ,  $T$  is an arbitrary positive real number,  $Q_T = (0, T) \times \Omega$  and  $S_T = (0, T)$ . Throughout this paper we use the notation:  $\|\cdot\|_R$  and  $(\cdot, \cdot)_R$  are the norm and the inner product of  $\mathbf{R}^n$ , respectively;  $\|\cdot\|$  and  $(\cdot, \cdot)$  are the norm and the inner product of  $L^2(\Omega)$ , respectively;  $\|\cdot\|_j$  and  $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$  are the norm of  $W_2^j(\Omega)$  and the duality relation between  $W_2^j(\Omega)$  and  $W_2^{-j}(\Omega)$ , respectively,  $j \geq 1$ . We also denote by  $H^q(\bar{\Omega})$  the Holder space of functions dependent on the variables  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $q > 0$ .

Let  $M, L, B : W_2^1(\Omega) \rightarrow (W_2^1(\Omega))^*$  are linear differential operators of the form

$$M = -\operatorname{div}(\mathbf{M}(x)\nabla) + (\mathbf{m}, \nabla)_R + m(x)I, \tag{1.1}$$

$$L = -\operatorname{div}(\mathbf{L}(x)\nabla) + (\mathbf{l}(x), \nabla)_R + l(x)I, \tag{1.2}$$

$$B = -\operatorname{div}(\mathbf{B}(x)\nabla) + (\mathbf{b}(x), \nabla)_R + b(x)I, \tag{1.3}$$

respectively, where  $\mathbf{M}(x) \equiv (m_{ij}(x))$ ,  $\mathbf{L}(x) \equiv (l_{ij}(x))$  and  $\mathbf{B}(x) \equiv (b_{ij}(x))$  are matrices of functions,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ;  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{l}$  and  $\mathbf{b}$  are vector functions;  $m$ ,  $l$ ,  $b$  are scalar functions;  $I$  is the identical operator.

We assume that the following condition is fulfilled.

I.  $M$  and  $L$  are operators of elliptic type, that is, there exist positive constants  $m_k$  and  $l_k$ ,  $k=1, 2$ , such that

for any  $v \in W_2^1(\Omega)$ ,  $v = 0$  on  $\partial\Omega$ ,

$$m_1 \|v\|_1^2 \leq \langle Mv, v \rangle_1 \leq m_2 \|v\|_1^2, \tag{1.4}$$

$$l_1 \|v\|_1^2 \leq \langle Lv, v \rangle_1 \leq l_2 \|v\|_1^2.$$

In this paper we are studying the following problems.

**Problem 1.** For given functions  $g_k(x)$ ,  $f_k(t, x)$ ,  $b_k(t, x)$ ,  $k=1, 2$ ,  $s(x, p)$ ,  $u_0(x)$  and  $u_T(x)$  find the pair of functions  $\{u_1(t, x), u_2(t, x)\}$  satisfying the system of equations

$$u_{1t} + Mu_1 = g_1(x, U_1) + g_2(x, U_1)AU_2 + f_1, \tag{1.5}$$

$$u_{2t} + Lu_2 = Bu_1 + \sigma(x, u_1) + f_2, \quad (t, x) \in Q_T, \tag{1.6}$$

and the conditions

$$u_1|_{t=0} = u_0(x), \quad u_1|_{t=T} = u_T(x), \tag{1.7}$$

$$u_1|_{S_T} = \beta_1(t, x), \quad u_2|_{S_T} = \beta_2(t, x). \quad (1.8)$$

Here  $U_i(x) = \int_0^T u_i dt$ ,  $i=1,2$ .

We consider Problem 1 in two variants: a)  $A = I$ ; b)  $A$  is a linear differential operator of the second order.

Problem 2. For given functions  $f_i(t, x)$ ,  $\beta_i(t, x)$ ,  $i=1,2$ ,  $\mu(x)$  and  $\varphi(x)$  find the pair of functions  $\{u_1(t, x), u_2(t, x)\}$  satisfying the system of equations

$$u_{1t} + Mu_1 = Bu_2 + f_1, \quad (1.9)$$

$$u_{2t} + Lu_2 = f_2 \quad (t, x) \in Q_T, \quad (1.10)$$

the conditions

$$u_1|_{t=0} - u_1|_{t=T} = \mu(x), \quad U_1(x) = \varphi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (1.11)$$

and the boundary data (1.8).

Equation (1.1) is assigned to the loaded equations. In the literature, the term "loaded equations" is conventionally used for partial differential equations containing traces or values of certain functionals of the solutions. Among works closely related to the questions which we study here is the paper [1], where some classes of loaded parabolic equations were considered. Loaded equations also arise in reductions of some inverse problems to direct problems for parabolic and composite-type equations [1,2].

In Problem 2, the first relation (1.11) is a nonlocal condition which relates the values of solutions at the different moments of time. In [3,4], results on the solvability of some problems for parabolic equations with nonlocal data were obtained.

In addition to Problems 1 and 2 we consider two auxiliary problems for the linear parabolic equation

$$u_t + Lu = F(t, x) \quad (1.12)$$

with the operator  $L$  of the form (1.2), the boundary condition

$$u|_{S_T} = \beta(t, x) \quad (1.13)$$

and initial data

$$u|_{t=0} - u|_{t=T} = \mu(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (1.14)$$

or

$$\int_0^T u dt = \varphi(x) \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (1.15)$$

The existence and uniqueness of the solution to the problems (1.12) – (1.14) and (1.12), (1.13), (1.15) is guaranteed by the following theorems.

**Theorem 1.1.** *Let the assumptions 1 of the operator  $L$  be fulfilled. Let  $\mu \in L^2(\Omega)$ ,  $F \in L^2(0, T; W_2^{-1}(\Omega))$ ,  $\beta \in L^\infty(0, T; W_2^{1/2}(\partial\Omega))$ ,  $\beta_t \in L^2(S_T)$ . Then the problem (1.12) - (1.14) has a unique weak solution  $u$  in the class  $Y \equiv L^2(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  and the solution depends continuously on  $F$ ,  $\mu$  and  $\beta$ , i.e.*

$$\|u\|_Y \leq C \{ \|\mu\| + \|\beta\|_{L^\infty(0, T; W_2^{1/2}(\Omega))} + \|\beta_t\|_{L^2(S_T)} + \|F\|_{L^2(0, T; W_2^{-1}(\Omega))} \}$$

where the positive constant  $C$  depends on  $n$ ,  $T$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  and  $\text{mes}\Omega$ .

**Theorem 1.2.** *Let the assumptions 1 of the operator  $L$  be fulfilled,  $l_j(x) \in W_\infty^1(\Omega)$   $i, j = 1, 2, \dots, n$ ;  $l(x) \in (L^\infty(\Omega))^n$ ,  $l(x) \in L^\infty(\Omega)$  and  $\partial\Omega \subset C^2$ . Let  $F \in L^2(Q_T)$ ,  $\varphi \in W_2^2(\Omega)$ ,  $\beta \in L^\infty(0, T; W_2^{3/2}(\partial\Omega))$ ,*

$\beta_t \in L^2(S_T)$ . Then the problem (1.12) - (1.13), (1.15) has a unique weak solution  $u$  in the class  $Y$  and the solution depends continuously on  $F$ ,  $\mu$  and  $\beta$ , i.e.

$$\|u\|_Y \leq \tilde{C} \{ \|L\varphi\| + \|\beta\|_{L^\infty(0,T;W_2^{1/2}(\Omega))} + \|\beta_t\|_{L^2(S_T)} + \|F\|_{L^2(Q_T)} \}$$

where the positive constant  $\tilde{C}$  depends on  $n$ ,  $T$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  and  $\text{mes}\Omega$ .

Theorems 1.1 and Theorem 1.2 are reduced to the special cases of Theorems 3 and 7 of [3], respectively, by substitution of the function  $u$  with a function  $w + r$  in (1.12) - (1.15) where  $w$  is a new unknown function,  $Mr = 0$  and  $\rho|_{S_T} = \beta$ .

### THE PROBLEM WITH THE INITIAL AND FINAL CONDITIONS FOR $u_1$

In this section we are interested in finding the sufficient conditions for the existence and uniqueness of a solution to Problem 1.

First, we assume that  $A = I$  and the following condition is fulfilled.

II.  $m_{ij} \in H^{r+1}(\bar{\Omega}) \cap W_\infty^3(\Omega)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ,  $\mathbf{m} \in (H^r(\bar{\Omega})) \cap W_\infty^2(\Omega)^n$ ,  $m \in H^r(\bar{\Omega}) \cap W_\infty^2(\Omega)$ ,  $0 < r < 1$ ;  $l_{ij}, b_{ij} \in W_\infty^1(\Omega)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ,  $\mathbf{l}, \mathbf{b} \in (L^\infty(\Omega))^n$ ,  $l, b \in L^\infty(\Omega)$ .

In this case, by a solution of Problem 1 we mean the pair  $\{u_1, u_2\}$  of the class

$$V_1 = \{ \{v_1, v_2\} \mid v_1, v_{1t} \in L^2(0, T; W_2^4(\Omega)), v_2 \in L^2(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), v_{2t} \in L^2(0, T; W_2^{-1}(\Omega)) \}$$

which satisfies (1.5) - (1.8).

**Theorem 2.1.** Let the assumptions I, II be fulfilled and  $\partial\Omega \subset C^4$ . Let also

- (i)  $f_1 \in C^r([0, T]; W_2^2(\Omega) \cap H^r(\bar{\Omega}))$ ,  $f_{1t} \in C([0, T]; W_2^2(\Omega))$ ,  $f_{1tt} \in L^2(Q_T)$ ,  $u_0, u_T \in W_2^5(\Omega) \cap H^{r+2}(\bar{\Omega})$ ,  $\beta_1 \in C([0, T]; W_2^{7/2}(\partial\Omega)) \cap L^2(0, T; H^{r+2}(\partial\Omega))$ ,  $\beta_{1t} \in C([0, T]; W_2^{7/2}(\partial\Omega)) \cap L^2(0, T; H^r(\partial\Omega))$ ,  $\beta_{1tt}, \beta_{1ttt} \in L^2(0, T; W_2^{3/2}(\partial\Omega))$ ,  $0 < r < 1$ ,  $f_2 \in L^2(Q_T)$ ,  $\beta_2, \beta_{2t} \in L^2(0, T; W_2^{3/2}(\partial\Omega))$ ;
- (ii)  $g_i(x)$ ,  $i=1, 2$ , are twice continuously differentiable in  $\bar{\Omega}$ , there exists a constant  $\nu > 0$  such that  $|g_2(x)| \geq \nu$  for all  $(x, p) \in \bar{\Omega} \times (-\infty, +\infty)$ ;  $\sigma(x, p)$  is continuous in  $\bar{\Omega} \times (-\infty, +\infty)$  and  $\|\sigma(x, v)\| < +\infty$  for all  $v \in W_2^4(\Omega)$ .

Then Problem 1 has a unique solution  $\{u_1, u_2\} \in V_1$  and  $\mathbf{m} \in (H^r(\bar{\Omega})) \cap W_\infty^2(\Omega)^n$ .

*Proof.* We prove the theorem in two steps. In the first step we establish the existence and uniqueness of the solution to the problem (1.5), (1.7), (1.8) as an inverse problem of recovering an unknown source function  $U_2$ . The second step consists of finding  $u_2$  as the solution of the problem for (1.6) with the boundary data (1.8) and proving the uniqueness of  $u_2$  provided that  $u_1$  and  $U_2$  are known.

Step 1. Let us consider the problem (1.5), (1.7), (1.8). We integrate (1.5) with respect to  $t$  on  $[0, T]$  and divide the result by  $T$ . In view of (1.7) this yields

$$\delta u_1 + M\bar{u}_1 = g_1(x)U_1 + g_2(x)U_2 + \bar{f}_1 \tag{2.1}$$

where  $\delta u_1 = T^{-1}(u_T(x) - u_0(x))$  and  $\bar{v} = T^{-1} \int_0^T v dt$  for every  $v \in L^1(0, T)$ . Subtracting (2.1) from (1.5) we obtain

$$\bar{u}_{1t} + M\bar{u}_1 = f_1 - \bar{f}_1 + \delta u_1.$$

Introducing the function  $h$  as a solution of the problem  $Mh = 0$ ,  $h|_{\partial\Omega} = b_1$  and rewriting the last equality in terms of a new function  $w = u_1 - h + \bar{h}$  we are led to the equation

$$w_t + Mw = f_1 - \bar{f}_1 + \delta u_1 - h_t \equiv F_1(t, x). \tag{2.2}$$



From (1.7) and (1.8) it follows that

$$w|_{t=T} - w|_{t=0} = T\delta u_1 - h(T, x) + h(0, x) \equiv w_T(x), \quad (2.3)$$

$$w|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.4)$$

By Theorem 1.1, the problem (2.2) - (2.4) has a unique generalized solution  $w \in Y$  and

$$\|w\|_Y \leq C\{\|\delta u_1\| + \|F_1\|_{L^2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))}\}.$$

Let us prove that in the hypotheses of the theorem  $w \in C([0, T]; W_2^4(\Omega))$ . To do this we consider the iterative scheme

$$w_t^s + Mw^s = F_1(t, x), \quad (2.5)$$

$$w^s|_{t=0} = w^{s-1}|_{t=T} - w_T(x), \quad (2.6)$$

$$w^s|_{\partial\Omega} = 0, \quad s = 1, 2, \dots; \quad w^0 = 0. \quad (2.7)$$

By [5, p. 364], the solution  $w^s \in C^r([0, T]; H^{r+2}(\bar{\Omega}))$  and  $w_t^s \in C^r([0, T]; H^r(\bar{\Omega}))$ . Subtracting (2.5) for  $w^s$  from the same equation for  $w^{s+1}$  gives

$$w_t^{s+1} - w_t^s + Mw^{s+1} - Mw^s = 0. \quad (2.8)$$

We multiply (2.8) by  $M(w^{s+1} - w^s)$  in terms of the inner product of  $L^2(\Omega)$  and integrate by parts in the first term of the resulting equation. This yields

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle w^{s+1} - w^s, M(w^{s+1} - w^s) \rangle_1 + \|M(w^{s+1} - w^s)\|^2 = 0.$$

Multiplying this equation by  $e^{\alpha t}$  where  $\alpha > 0$  we obtain

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ e^{\alpha t} \langle w^{s+1} - w^s, M(w^{s+1} - w^s) \rangle_1 \right] + e^{\alpha t} \|M(w^{s+1} - w^s)\|^2 \\ & - \alpha e^{\alpha t} \langle w^{s+1} - w^s, M(w^{s+1} - w^s) \rangle_1 = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

In view of the ellipticity of the operator  $M$  there exists a constant  $m_3 > 0$  such that for any  $v \in W_2^2(\Omega)$

$$v|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$\|Mv\| \leq m_3 \|v\|_2. \quad (2.10)$$

Hence

$$\|M(w^{s+1} - w^s)\|^2 - \alpha \langle w^{s+1} - w^s, M(w^{s+1} - w^s) \rangle_1 \geq (m_3^2 - \alpha m_2) \|w^{s+1} - w^s\|_2^2. \quad (2.11)$$

Choosing  $\alpha < m_3^2 / m_2$  and integrating (2.9) with respect to  $t$  from 0 to  $\tau$ ,  $0 < \tau \leq T$ , we get

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \langle w^{s+1} - w^s, M(w^{s+1} - w^s) \rangle_1 + (m_3^2 - \alpha m_2) \int_0^\tau \|w^{s+1} - w^s\|_2^2 e^{-\alpha(\tau-t)} dt \\ & \leq \frac{1}{2} \langle w^s - w^{s-1}, M(w^s - w^{s-1}) \rangle_1 \Big|_{t=\tau} e^{-\alpha\tau} \end{aligned} \quad (2.12)$$

by (2.10). From (2.11) and (2.12) it follows that

$$\begin{aligned} & \langle w^{s+1} - w^s, M(w^{s+1} - w^s) \rangle_1 \Big|_{t=\tau} \leq e^{-\alpha\tau} \langle w^s - w^{s-1}, M(w^s - w^{s-1}) \rangle_1 \Big|_{t=T} \\ & \leq e^{-\alpha T(s-1)} \langle w^1, Mw^1 \rangle_1 \Big|_{t=T} \leq e^{-\alpha Ts} \langle w_T, Mw_T \rangle_1 \end{aligned}$$

and

$$\int_0^T \|w^{s+1} - w^s\|_2^2 e^{-\alpha(\tau-t)} dt \leq (m_3^2 - \alpha m_2)^{-1} e^{-\alpha T s} \langle w_T, M w_T \rangle_1. \quad (2.13)$$

for every  $s = 1, 2, \dots$ . Equation (2.8) and the last inequality enable to obtain the estimate for  $w_t^{s+1} - w_t^s$ . Namely,

$$\int_0^T \|w_t^{s+1} - w_t^s\|_2^2 e^{-\alpha(\tau-t)} dt \leq m_4 (m_3^2 - \alpha m_2)^{-1} e^{-\alpha T s} \langle w_T, M w_T \rangle_1. \quad (2.14)$$

Here the positive constant  $m_4$  depends on  $\max_{x \in \bar{\Omega}} \{ |m_{ij}(x)|, \|\mathbf{m}(x)\|_R, |m(x)| \}$ .

Under the hypotheses of the theorem  $w_t^s + M w^s \in W_2^2(\Omega) \cap H^r(\bar{\Omega})$  for every  $t \in [0, T]$ ,  $w_t^s + M w^s \in W_2^2(\Omega) \cap H^r(\bar{\Omega})$  and  $w^s(0, x), w^s(T, x) \in W_2^2(\Omega)$ . Moreover, the equation (2.5) is valid for all  $(t, x) \in \bar{Q}_T$ . Acting on (2.5) and (2.6) with the operator  $M$  we obtain the following equalities for function  $W^s = M w^s - F^1(t, x)$ :

$$W_t^s + M W^s = F_{1t}(t, x), \quad (2.15)$$

$$W^s \Big|_{t=0} = W^{s-1} \Big|_{t=T} - M w_T(x) + T \delta F_1 \quad (2.16)$$

where  $dF_1 = T^{-1}(F_1(T, x) - F_1(0, x))$ . From (2.5), (2.7) we have

$$W^s \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.17)$$

The problem (2.15) - (2.17) has a unique solution  $W^s \in L^2(0, T; W_2^2(\Omega))$ . Repeating the arguments led to (2.13) and (2.14) one can obtain estimates for  $W^s$ . Namely,

$$\int_0^T \|W^{s+1} - W^s\|_2^2 e^{-\alpha(\tau-t)} dt \leq (m_3^2 - \alpha m_2)^{-1} e^{-\alpha T(s-1)} \langle M w_T(x) - T \delta F_1, M(M w_T(x) - T \delta F_1) \rangle_1, \quad (2.18)$$

$$\int_0^T \|W_t^{s+1} - W_t^s\|_2^2 e^{-\alpha(\tau-t)} dt \leq m_4 (m_3^2 - \alpha m_2)^{-1} e^{-\alpha T(s-1)} \langle M w_T(x) - T \delta F_1, M(M w_T(x) - T \delta F_1) \rangle_1 \quad (2.19)$$

for every  $s = 1, 2, \dots$

Furthermore, differentiation (2.15) with respect to  $t$  gives

$$W_u^s + M W_t^s = F_{1u}(t, x).$$

By (2.15),

$$W_t^s \Big|_{t=0} = W_t^{s-1} \Big|_{t=T} - W_0(x)$$

where  $W_0(x) \equiv M^2 w_T - T \delta(F_{1t} + M F_1)$ . From (2.17) we have

$$W_t^s \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Repeating the arguments led to (2.18) and (2.19) we obtain the estimates

$$\int_0^T \|W_t^{s+1} - W_t^s\|_2^2 e^{-\alpha(\tau-t)} dt \leq (m_3^2 - \alpha m_2)^{-1} e^{-\alpha T(s-1)} \langle W_0, M W_0 \rangle_1, \quad (2.20)$$

$$\int_0^T \|W_u^{s+1} - W_u^s\|_2^2 e^{-\alpha(\tau-t)} dt \leq m_4 (m_3^2 - \alpha m_2)^{-1} e^{-\alpha T s} \langle W_0, M W_0 \rangle_1 \quad (2.21)$$

for every  $s = 1, 2, \dots$

The inequalities (2.13), (2.15), (2.18), (2.19), (2.20), (2.21) implies that the sequence  $w^s$  has a limit  $w \in L^2(0, T; W_2^4(\Omega))$  and  $w_t^s \rightarrow w_t$  in  $L^2(0, T; W_2^4(\Omega))$  as  $s \rightarrow \infty$ . Then  $w^s \rightarrow w$  in  $C([0, T]; W_2^4(\Omega))$  as  $s \rightarrow \infty$  which implies that there exist the traces  $w^s(0, x)$ ,  $w^s(T, x)$  in  $W_2^4(\Omega)$  and  $w^s(0, x) \rightarrow w(0, x)$ ,  $w^s(T, x) \rightarrow w(T, x)$  in  $W_2^4(\Omega)$  as  $s \rightarrow \infty$ . Passing to the limit in (2.5)-(2.6) we conclude that  $w$  satisfies equation (2.2) for almost all  $(t, x) \in Q_T$ , the data (2.3) for almost all  $x \in \bar{\Omega}$ . By (2.7), the boundary condition (2.4) also asserts for  $w$ .

Step 2. Let us come back to the problem (1.5) - (1.8). Using the definition of  $w$  and (2.2)-(2.3) we can now find  $u_1$ :

$$u_1 = w + u_0 - w(0, x) - h + h(0, x), \quad (2.22)$$

and express  $U_2$  from (2.1) in terms of  $u_1$  as

$$U_2 \equiv \int_0^T u_2 dt = (\delta u_1 + M\bar{u}_1 - g_1(x)U_1 - \bar{f}_1)g_2(x) \equiv \psi(x). \quad (2.23)$$

Thus, we obtain the problem for equation (1.6) on  $u_2$  with the conditions (1.8) and (2.23). By (2.22) and the smoothness of  $w$ , we conclude that  $u_1 \in C([0, T]; W_2^4(\Omega))$ ,  $\psi(x) \in W_2^2(\Omega)$ . According to Theorem 1.2 the problem (1.6), (1.8), (2.23) has the unique solution  $u_2$  belonging to the class  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega) \cap L^2(0, T; W_2^1(\Omega)))$  and  $u_{2t} \in L^2(0, T; W_2^{-1}(\Omega))$ . The theorem is proved.

Let us now consider Problem 1 with the operator  $A$  of the form

$$A = -\text{div}(\mathbf{A}(x)\nabla) + (\mathbf{a}(x), \nabla)_R + a(x)I$$

where  $\mathbf{A}(x) \equiv (a_{ij}(x))$  is a matrix of functions,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ;  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x)$  is a vector function;  $a(x)$  is a scalar function. We assume the following conditions to be fulfilled.

III.  $m_j, l_j, a_j, b_j \in W_\infty^1(\Omega)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ,  $\mathbf{m}, \mathbf{l}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in (L^\infty(\Omega))^n$ ,  $m, l, a, b \in L^\infty(\Omega)$

IV. There exist positive constants  $\alpha_k, k=1, 2$ , such that for any  $v \in W_2^2(\Omega)$ ,  $v|_{\partial\Omega} = 0$ ,

$$\alpha_1 \|v\|_1^2 \leq \langle Av, v \rangle \leq \alpha_2 \|v\|_1^2.$$

In this case, by a solution of Problem 1 we mean the pair  $\{u_1, u_2\}$  of the class

$$V_2 = \{ \{v_1, v_2\} \mid v_1, v_{1t} \in L^2(0, T; W_2^2(\Omega)), v_2 \in L^2(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), v_{2t} \in L^2(0, T; W_2^{-1}(\Omega)) \}.$$

**Theorem 2.2.** *Let the assumptions I, III, IV be fulfilled. Let also*

(iii)  $f_k, f_{1t} \in L^2(Q_T)$ ,  $u_0, u_T \in W_2^3(\Omega)$ ,  $\beta_k, \beta_{1t} \in L^2(0, T; W_2^{3/2}(\partial\Omega))$ ,  $\beta_{1t}, \beta_{2t} \in L^2(S_T)$ ,

(iv)  $g_i(x)$ ,  $i=1, 2$ , are twice continuously differentiable in  $\bar{\Omega}$ , there exists a constant  $\nu > 0$  such that

$|g_2(x)| \geq \nu$  for all  $(x, p) \in \bar{\Omega} \times (-\infty, +\infty)$ ;  $\sigma(x, p)$  is continuous in  $\bar{\Omega} \times (-\infty, +\infty)$  and  $\|\sigma(x, v)\| < +\infty$

for all  $v \in W_2^2(\Omega)$ .

Then the problem (1.5) - (1.8) has a unique solution  $\{u_1, u_2\} \in V$  and  $u_{1t} \in L^2(0, T; W_2^2(\Omega))$ .

*Proof.* Let us consider the problem (1.5) - (1.7). We integrate (1.5) with respect to  $t$  on  $[0, T]$  and divide the result by  $T$  again. In view of (1.6) this yields

$$\delta u_1 + M\bar{u}_1 = g_1(x)U_1 + g_2(x)AU_2 + \bar{f}_1. \quad (2.24)$$

Subtracting (2.24) from (1.5) and rewriting the last equality in terms of the function  $w$  we come to the problem (2.2) - (2.4). As was proved, this problem has a unique solution  $w \in C([0, T]; W_2^4(\Omega))$ ,  $w_t \in L^2(0, T; W_2^4(\Omega))$ , and  $w_{tt} \in L^2(Q_T)$ . Using the definition of  $w$  we find  $u_1$  and express  $U_2$  from (2.31) in terms of  $u_1$  as

$$U_2 = q(x) + A^{-1}\psi(x) \quad (2.25)$$

where  $q$  satisfies the equation  $Aq = 0$  and  $q|_{\partial\Omega} = \int_0^T \beta_2 dt$ . Thus, we obtain the problem for equation (1.7) on  $u_2$  with the conditions (1.8) and (2.25). In the hypotheses of the theorem  $q \in W_2^2(\Omega)$ ,  $u_1 \in C([0, T]; W_2^4(\Omega))$  and  $\psi(x) \in W_2^2(\Omega)$ . Hence  $q(x) + A^{-1}\psi(x) \in W_2^2(\Omega)$ . According to Theorem 1.2 the problem (1.6), (1.8), (2.25) has a unique solution  $u_2 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; W_2^{-1}(\Omega))$  and  $u_{2t} \in L^2(0, T; W_2^{-1}(\Omega))$ , which completes the proof.

### THE PROBLEM WITH THE NONLOCAL CONDITION FOR $u_1$

Let us now consider Problem 2. We are interested in finding the sufficient conditions for the existence and uniqueness of a solution to Problem 2. By a solution of Problem 2 we mean the pair  $\{u_1, u_2\}$  of the class

$$V_3 = \{ \{v_1, v_2\} \mid v_k \in L^2(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), v_{kt} \in L^2(0, T; W_2^{-1}(\Omega)), k = 1, 2 \}.$$

which satisfies (1.9) - (1.11).

We suppose that the operators  $M, L$  and  $B$  satisfy the following conditions instead of I and II.

V. The coefficients  $m_{ij}(x), l_{ij}(x), b_{ij}(x) \in W_\infty^1(\Omega)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ;  $\mathbf{m}(x), \mathbf{l}(x), \mathbf{b}(x) \in (L^\infty(\Omega))^n$ ,  $m(x), l(x), b(x) \in L^\infty(\Omega)$ .

VI. The operators  $M, L$  and  $B$  are of elliptic type, that is,  $M$  and  $L$  obey (1.3), (1.4) and there exist positive constants  $k_B, K_B$ , such that for any  $v \in W_2^1(\Omega)$ ,  $v = 0$  on  $\partial\Omega$ ,

$$k_B \|v\|_1^2 \leq \langle Bv, v \rangle_1 \leq K_B \|v\|_1^2.$$

**Theorem 3.1.** *Let the assumptions I, V, VI be fulfilled and  $\partial\Omega \subset C^2$ . Let also*

$$(v) \quad f_1 \in L^2(0, T; W_2^{-1}(\Omega)), \quad \mu \in L^2(\Omega), \quad \varphi \in W_2^2(\Omega), \quad \beta_1, \beta_2 \in L^2(0, T; W_2^{3/2}(\partial\Omega)); \quad \beta_{1t}, f_2 \in L^2(Q_T);$$

$a(x, p)$  is continuous in  $\bar{\Omega} \times (-\infty, +\infty)$  and  $\|a(x, v)\| < +\infty$  for all  $v \in W_2^1(\Omega)$ .

Then Problem 2 has a unique solution  $\{u_1, u_2\} \in V_3$ .

*Proof.* We prove the theorem in two steps again. In the first step we find  $u_2$  as a solution of the problem for the equation (1.11) with the boundary data (1.8) and an integral condition with respect to  $t$  and establish the uniqueness of  $u_2$ . The second step consists of proving the existence and uniqueness of  $u_1$  as the solution of the problem for (1.9) with the boundary data (1.9) and the first condition of (1.11) provided that  $u_2$  is known.

Step 1. Let us integrate (1.9) with respect to  $t$  from 0 to  $T$  and operate the result with the operator  $B^{-1}$  which exists by the assumption VI. This gives

$$\int_0^T u_2 dt = B^{-1} \left( \mu(x) + M\varphi(x) - \int_0^T f_1(t, x) dt \right). \quad (3.1)$$

By Theorem 1.2, the problem (1.8), (1.10), (3.1) has a unique solution  $u_2 \in Y$  and  $u_{2t} \in L^2(0, T; W_2^{-1}(\Omega))$ .

Step 2. We now consider the problem for (1.9) with the boundary data (1.9) and the first condition of (1.11). The right side  $Bu_2 + f_1$  of (1.9) is known and belongs to  $L^2(0, T; W_2^{-1}(\Omega))$ . By Theorem 1.1, this problem has a unique solution  $u_1 \in Y$  and  $u_{1t} \in L^2(0, T; W_2^2(\Omega))$ .

Thus the solution  $\{u_1, u_2\}$  of Problem 2 exists and is unique in the class  $V_3$ . Theorem is proved.

## REFERENCES

- [1] Cannon J. R. and Yin H. M. On a class of nonlinear nonclassical parabolic problems, *J. Differ. Equations*, V. 79. 1989. P.266-288.
- [2] Kozhanov A. I. Inverse problem and “loaded” composite type equations, *Mathematical Notes*. V. 76. 2004. P.784-795.
- [3] Shelukhin V.V. A problem with time-averaged data for nonlinear parabolic equations. *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*. [Siberian Math. J.] Vol. 32. 1991. P.154-165.
- [4] Shelukhin V. V. A variational principle in nonlocal-in-time problems for linear evolution equations, *Sibirsk. Mat. Zh.* [Siberian Math. J.]. V. 34. 1993. P.191-207.
- [5] Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'ceva N.N. *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*. Transl. Math. Mono., vol. 23 AMC, Providence, 1968; English transl. Nauka, Moskva, 1967.

## A CONSTRUCTION WEIGHTED PROJECTIVE PLANE OF ORDER 7 AND (2, 7 - 1)-QUASIGROUP

We introduce a notion of weighted projective planes which is a generalization of usual projective planes. We prove that a Frobenius group  $G$  of order 16 operates on a projective plane  $P$  of order 7 as a colineation group. Using this operation the plane  $P$  may be constructed. A weighted projective plane  $P'$  of order 7 is equivalent to a totally symmetric (2, 7 - 1)-quasigroup.

Key words: Projective plane, quasigroup, group, colineation, orbit

### INTRODUCTION

An incidence structure is a triple  $D = (V, B, I)$ , where  $V$  and  $B$  are disjoint sets and  $I \subseteq V \times B$ . The elements of  $V$  are called *points*, and the elements of  $B$  are called *blocks*. If  $A$  is a point of  $V$ , the set of all blocks incident with  $A$  is denoted by  $(A)$ . Thus

$$(A) = \{b : b \in B, A I b\}.$$

Moreover, for  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , the set of all the blocks incident with all the points  $A$  is denoted by  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ . Thus

$$(A_1, A_2, \dots, A_n) = \{b : b \in B, A I b \text{ for all } i \in N_n\},$$

where  $N$  is the set of all positive integers and  $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . Dually, for  $b, b_1, b_2, \dots, b_n \in B$ ,

$$(b) = \{A : A \in V, A I b\},$$

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) = \{A : A \in V, A I b \text{ for all } i \in N_n\}.$$

We consider only the incidence structures where distinct blocks have distinct sets of points. We identify each block  $b$  with the set  $(b)$  and identify the incidence relation with the membership relation  $\in$ .

### SOME DEFINITION AND RESULTS

**Definition 1.** A incidence structure  $P = (V, B, I)$  is called *projective plane* if and only if it satisfies the following axioms:

- (P. 1) Any two distinct points are joined by exactly one line.
- (P. 2) Any distinct lines intersect in a unique point.
- (P. 3) There exists a *quadrangle*, i.e. 4 points no three of which are on a common line.

The following theorem is proved in [1].

**Theorem 1.** Let  $P = (V, B, I)$  be a finite projective planes. Then there exists a natural number  $n$ , called the *order* of  $P$ , satisfying:

- a)  $|(A)| = |(g)| = n + 1$  for all  $A \in V$  and  $g \in B$ ;
- b)  $|V| = |B| = n^2 + n + 1$ .

The finite projective plane of order  $n$  will be denoted by  $S(2, n + 1, n^2 + n + 1)$ .

The following definition generalizes the notion of finite projective planes of order  $n$ .

**Definition 2.** A finite incidence structure  $P = (V, B, I)$  is called *weighted projective plane* with parameters  $n^2 + n + 1, n + 1, 1 \in N$ , if for any  $b \in B$  there is a mapping  $f_b : (b) \rightarrow N$ , if and only if it satisfies the following axioms:

$$(WD. 1) |V| = n^2 + n + 1;$$

$$(WD. 2) |(A, B)| = 1, \text{ for any two distinct points } A, B \in V;$$

$$(WD. 3) k_b = n + 1, \text{ for any block } b \in B, \text{ where:}$$

a) the image  $f_b(A)$  is denoted by  $t_{Ab}$ , and is called the *weight* of the point A in the block b,

b) for  $A \in V$ , its *weight* is  $t_A = \sum_{A \in b_i} t_{Ab_i}$ , and

c) for  $b \in B$ , the number  $k_b = \sum_{A \in b_i} t_{Ab_i}$  is called the *size* of the block b.

**Definition 3.** A weighted projective plane  $S^* = (V^*, B^*, \epsilon)$  is an *extension* of a weighted projective plane  $S = (V, B, \epsilon)$ , if  $V \subseteq V^*$  and for each  $b \in B$  there is  $b^* \in B^*$  such that  $(b) \subseteq (b^*)$ , and for each  $A \in (b)$ ,  $t_{Ab^*} = t_{Ab}$ .

**Definition 4.** An extension  $(V^*, B^*, \epsilon)$  of a weighted projective plane with parameters  $n^2 + n + 1, n + 1, 1$  defined by

$$a) V^* = V;$$

$$b) B^* = B \cup B^* \text{ where } B^* = \{ \{A^{n+1}\} : A \in V \}, \text{ and}$$

c) For each  $A \in V$ ,  $t_A = r + n + 1$   $A \in V$ , where r is the number of block in B containing A,

is called a *complete weighted projective plane* with parameters  $n^2 + n + 1, n + 1, 1$ , and is denoted by  $S^*(2, n + 1, n^2 + n + 1)$ .

Next we compare complete weighted projective plane  $S^*(2, n + 1, n^2 + n + 1)$  with the notion of totally symmetric  $(2, n - 1)$ -quasigroup given below.

**Definition 5.** Let Q be nonempty set, n and m positive integers, and

$$f : (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

a mapping from  $Q^n$  into  $Q^m$ . Then we say that  $Q(f)$  is an  $(n, m)$ -groupoid.

A  $(n, m)$ -groupoid  $Q(f)$  is said to be a  $(n, m)$ -quasigroup if and only if the following statement is satisfied:

(A). For each "vector"  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in Q^n$  and each injection  $\varphi$  from  $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$  into  $N_{n+m}$  there exists unique "vector"  $(b_1, b_2, \dots, b_{n+m}) \in Q^{n+m}$  such that  $b_{\varphi(1)} = a_1, \dots, b_{\varphi(n)} = a_n$  and

$$f(b_1, b_2, \dots, b_n) = (b_{n+1}, b_{n+2}, \dots, b_{n+m}).$$

In the paper [3] an  $(n, m)$ -quasigroup is interpreted as a  $(n, m)$ -quasigroup relation.

**Definition 6.** A  $(n + m)$ -ary relation  $\rho \subseteq Q^{n+m}$  is called  $(n, m)$ -quasigroup relation if and only if the following statement is satisfied:

(A). For each "vector"  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in Q^n$  and each injection  $\varphi$  from  $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$  into  $N_{n+m}$  there exists unique "vector"  $(b_1, b_2, \dots, b_{n+m}) \in Q^{n+m}$  such that  $b_{\varphi(1)} = a_1, \dots, b_{\varphi(n)} = a_n$  and

$$(b_1, b_2, \dots, b_{n+m}) \in \rho.$$

The following theorem is proved in [3].

**Theorem 2.** A  $(n + m)$ - groupoid  $(Q, f)$  is a  $(n, m)$ -quasigroup if and only if the  $(n + m)$ -ary relation  $\rho \subseteq Q^{n+m}$  defined by

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \rho \Leftrightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m})$$

is an  $(n, m)$ -quasigroup relation.

**Definition 7.** A  $(n, m)$ -quasigroup is called *totally symmetric*, if and only if

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}) \Leftrightarrow f(y_1, y_2, \dots, y_n) = (y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+m}).$$

for any  $(x_1, x_2, \dots, x_{n+m}) \in Q^{n+m}$  and any permutation  $y_1, y_2, \dots, y_{n+m}$  of  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . The  $(n + m)$ -ary relation  $\rho \subseteq Q^{n+m}$  in this case is called *totally symmetric*.

The following theorem is proved in [7].

**Theorem 3.** Every complete weighted projective plane  $S^*(2, n+1, n^2+n+1)$  defines a totally symmetric  $(2, n-1)$ -quasigroup relation  $\rho \subseteq V^{n+1}$ , where

$$\{A_1, A_2, \dots, A_{n+1}\} \in \rho \Leftrightarrow \{A_1, A_2, \dots, A_{n+1}\} \in B.$$

Conversely, any totally symmetric  $(2, n-1)$ -quasigroup relation  $\rho \subseteq V^{n+1}$  satisfying  $(A, A, \dots, A) = (A^{n+1}) \in \rho$  for any  $A \in V$ , defines a complete weighted projective plane  $S^*(2, k, n^2+n+1)$ , where

$$\{A_1, A_2, \dots, A_{n+1}\} \in B \Leftrightarrow \{A_1, A_2, \dots, A_{n+1}\} \in \rho.$$

### A CONSTRUCTION WEIGHTED PROJECTIVE PLANE OF ORDER 7 AND (2, 7 - 1)-QUASIGROUP

**Theorem 4.** A Frobenius group  $G$  of order 16 acts on a projective plane  $P$  of order 7 as a colineation group. Using this act the plane  $P$  may be constructed.

**Proof.** Let

$$G = \langle \rho, \alpha / \rho^8 = \alpha^2 = 1, \rho^\alpha = \rho^{-1} \rangle$$

be a Frobenius group of order 16 which acts on a projective plane  $P$  of order 7 as a colineation group. The plane  $P$  has  $7^2+7+1=57$  points and same lines. From  $57 = 8 \cdot 7 + 1$  and colineation  $\langle \rho \rangle$  acts semi-regular on a nonfixed points follows that  $\langle \rho \rangle$  has 7 orbits of length 8 and one orbit of length 1. We may set that

$$\rho = (\infty)(1_0, 1_1, 1_2, \dots, 1_7)(2_0, 2_1, 2_2, \dots, 2_7)(3_0, 3_1, 3_2, \dots, 3_7) \dots (7_0, 7_1, 7_2, \dots, 7_7)$$

where  $1_0, 1_1, 1_2, \dots, 1_7, 2_0, 2_1, 2_2, \dots, 2_7, 3_0, 3_1, 3_2, \dots, 3_7, \dots, 7_0, 7_1, 7_2, \dots, 7_7$  are all points of plane  $P$ .

From theorem of orbite follows that  $\langle \rho \rangle$  has same orbit structure of lines. We may set that

$$\rho = (\ell_\infty)(\ell_1, \ell_1\rho, \ell_1\rho^2, \dots, \ell_1\rho^7)(\ell_2, \ell_2\rho, \ell_2\rho^2, \dots, \ell_2\rho^7) \\ (\ell_3, \ell_3\rho, \ell_3\rho^2, \dots, \ell_3\rho^7) \dots (\ell_7, \ell_7\rho, \ell_7\rho^2, \dots, \ell_7\rho^7)$$

Where

$$\ell_\infty, \ell_1, \ell_1\rho, \ell_1\rho^2, \dots, \ell_1\rho^7, \ell_2, \ell_2\rho, \ell_2\rho^2, \dots, \ell_2\rho^7, \ell_3, \ell_3\rho, \ell_3\rho^2, \dots, \ell_3\rho^7, \dots, \\ \ell_7, \ell_7\rho, \ell_7\rho^2, \dots, \ell_7\rho^7$$

are all lines of plane  $P$ .

Let  $\ell_\infty$  be unique line fixed by  $\langle \rho \rangle$ . We may set that

$$\ell_\infty = \{1_0, 1_1, 1_2, \dots, 1_7\}.$$

Let  $\ell_1$  is a line through  $\infty$ . It is easy to see that  $\ell_1$  occurs at one point from each orbits of points. Without a loss of generality, we may set that

$$\ell_1 = \{\infty, 1_0, 2_0, \dots, 7_0\}.$$

Other 7 lines of orbit of lines  $\ell_1$  obtained by acting of  $\rho, \rho^2, \rho^3, \dots, \rho^7$  on a line  $\ell_1$ . The lines  $\ell_1$  and  $\ell_\infty$  through  $1_0$ . Other 6 lines  $\ell_2, \ell_3, \dots, \ell_7$  through  $1_0$  lie in 6 remaining different  $\langle \rho \rangle$ - orbits of lines in  $P$ . If constructed these lines then the remaining lines of planes  $P$  are obtained by acting of  $\rho, \rho^2, \rho^3, \dots, \rho^7$  on lines  $\ell_2, \ell_3, \dots, \ell_7$ . From statement

$$|\ell_i \cap \ell_1 \rho^k| = 1, \quad i = 2, 3, 4, 5, 6, 7, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

follows

$$\ell_i = \{1_0, 1_{i_1}, 2_{i_2}, 3_{i_3}, \dots, 7_{i_7}\}$$

where  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$  are (unnecessary different) numbers from the set  $\{2, 3, \dots, 7\}$ .

We consider acting the involution  $\alpha$  on a set points and set lines of plane  $P$ . The order of involution  $\alpha$  is even follows involution  $\alpha$  is elation. From  $\rho^\alpha = \rho^{-1}$  follows that the point  $1_0$  is a center and



the line  $\ell_1$  is axis of involution  $\alpha$ . Hence, involution  $\alpha$  fixes 8 lines  $\ell_\infty, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots, \ell_7$  and 8 points  $\infty, 1_0, 2_0, 3_0, \dots, 7_0$ . From  $57 = 2 \cdot 25 + 7$  follows  $\alpha$  has 7 orbits of length 1 (7 fixed points) and 25 orbits of length 2. If we write  $\alpha$  in a short way (writing only indices 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) we may set that

$$\alpha = (0)(1)(2, 7)(3, 6)(4, 5)$$

where (2, 7) denoted that  $2\alpha = 7$  from the same orbit of points, (3, 6) denoted  $3\alpha = 6$  from the same orbit of points, (4, 5) denoted that  $4\alpha = 5$  from the same orbit of points. From statement

$$\ell_i \alpha = \ell_i, \quad i = 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

follows that  $\ell_i, i = 2, 3, 4, 5, 6, 7$  are of type

$$\ell_i = \{1_0, i_1, a_2, a_7, b_3, b_6, c_4, c_5\}$$

Where  $i, a, b, c$  are pairwise different numbers from the set  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . We may set that

$$\ell_2 = \{1_0, 2_1, 3_2, 3_7, 4_3, 4_6, 5_4, 5_5\}.$$

Now we constructed lines  $\ell_i, i = 3, 4, 5, 6, 7$  which are of type

$$\ell_i = \{1_0, i_1, a_2, a_7, b_3, b_6, c_4, c_5\}.$$

From statement

$$|\ell_i \cap \ell_2 \rho^k| = 1, \quad i = 3, 4, 5, 6, 7 \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

follows that only two from numbers  $i, a, b, c$  are from the set  $\{2, 3, 4\}$  and other two are from the set  $\{5, 6, 7\}$ . From statement

$$|\ell_i \rho^s \cap \ell_j \rho^k| = 1, \quad i \neq j, \quad i, j = 3, 4, 5, 6, 7 \quad k, s = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

follows that the lines  $\ell_i$  and  $\ell_j, i \neq j$ , have exactly two common pair of numbers  $i, a, b, c$ . Using these statements for the lines  $\ell_i, i = 3, 4, 5, 6, 7$  we obtain following unique solution for the lines:

$$\ell_3 = \{1_0, 3_1, 3_2, 3_7, 5_3, 5_6, 6_4, 6_5\}$$

$$\ell_4 = \{1_0, 4_1, 4_2, 4_7, 6_3, 6_6, 7_4, 7_5\}$$

$$\ell_5 = \{1_0, 5_1, 5_2, 5_7, 7_3, 7_6, 2_4, 2_5\}$$

$$\ell_6 = \{1_0, 6_1, 6_2, 6_7, 2_3, 2_6, 3_4, 3_5\}$$

$$\ell_7 = \{1_0, 7_1, 7_2, 7_7, 4_3, 4_6, 5_4, 5_5\}$$

The Theorem is proved.

Let  $P = (V, B, \in)$  be projective plane of order 7 constructed in the theorem. The weighted projective plane  $P^* = (V^*, B^*, \in)$ , where  $V^* = V^*$ ,  $B^* = B \cup B^*$  where  $B^* = \{A^8 : A \in V\}$  is a complete weighted projective plane of order 7. The relation  $\tau \subseteq V^{7+1}$  defined by

$$(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_{7+1}) \in \tau \Leftrightarrow \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_{7+1}\} \in B \text{ or}$$

$$A_1 = A_2 = A_3 \dots = A_7 = A_{7+1},$$

is a totally symmetric  $(2, 7 - 1)$ -quasigroup relation satisfying the condition  $(A, A, A, A, A, A, A)$

$= (A^{7+1}) \in \tau$  for all  $A \in V$ . The number of point is  $|V| = 7^2 + 7 + 1 = 57$ , the number of blocks is

$$|B^*| = 7^2 + 7 + 1 + 31 = 57 \text{ and } t_A = 8 + 8 = 16.$$

## CONCLUSION

This paper presents the results obtained by acting a colineation group on a set points and set lines of plane P which exists. Similar acting of a colineation group on a set points and set lines of plane P whose question of existence is open, can be studied.

## REFERENCES

- [1] Beth, T., Jungnickel, D., Lenz, H.: Design theory, Manheim, Wien, Zurich, 1985.
- [2] Čupona, Ğ., Stojaković, Z., Ušan, J.: On finite multiquasigroups, Publ. Inst. Math. (Beograd) 20 (43) 1981, 53-59.
- [3] Čupona, Ğ., Stojaković, Z., Ušan, J.: Multiquasigroups and some related structures, Prilozi MANU I/1, Skopje, 1980.
- [4] Dimovski, D., Mandak, A.: Incidence structures with n-metrics, Zb. Rad. Fil. Fak. (Niš) 6 (1992), 151-155.
- [5] Dimovski, D., Mandak, A.: Weighted block designs and Steiner systems, Novi Sad J. Math. Vol. 29, No.2 (1999), 163-169.
- [6] Lenz, H.: Vorlesungen uber projective geometrije, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1965.
- [7] Mandak, A.: On weighted block designs, Proc. Math. Conf. (Priština, 1994) 21-25.
- [8] Mandak, A.: Multiquasigroups and weighted projective planes, Kragujevac J. Math. 30 (2007) 211-219.
- [9] Ušan, J.:  $\langle Nn, E \rangle$ -seti s  $(n + 1)$ -rastojaniem, Rew. Res. Fac. Sci. Univ. Novi Sad Ser. Math, 17 (2) (1989), 65-87.

# NUMERICAL SIMULATION OF FLOWS IN ROTATION DETONATION ENGINE

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ РЕАГИРУЮЩИХ ГАЗОВЫХ СМЕСЕЙ В ДЕТОНАЦИОННОМ ДВИГАТЕЛЕ

Two mathematical models were used for numerical simulation of flows of reactive gas mixes: the simplified mathematical model of two-phase chemical reaction and model based on the full system of gas dynamics equations accompanied with the system of kinetics equations. The state equations for mix components are set in tabular form. The gas mix was assumed to be non viscous. Transition to characteristic variables of full system of the equations for any number of gas components is carried out for real tabular equations of state. Also transition to dimensionless gas dynamics unknowns, constants of kinetics and tables constants of the equations of state is carried out. Numerical simulation of flows in the combustion chambers of two configurations of detonation engines was carried out.

### МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

При численном моделировании течений реагирующих смесей в камерах сгорания детонационных двигателей при отдельной подаче топлива и окислителя необходимо учитывать непостоянный по времени и пространству состав смеси, что означает изменение содержания энерговыделяющих компонент не только за счет химических реакций, но и за счет конвекции. Для моделирования детонации и горения в смесях водород-воздух использовались две математические модели: система уравнений газовой динамики дополненная полной системой уравнений кинетики и упрощенная двухстадийная модель [1], включающая индукционный период и последующий период реакции. Газ предполагался невязким.

Система уравнений для полной модели может быть представлена в следующей интегральной форме:

$$d/dt \int_V \bar{Q} dV + \oint_S \bar{n} F dS + \Phi = 0 \quad (1)$$

где  $\bar{Q} = (\rho, \bar{m}, \bar{p}, \rho c_i), i = 1, \dots, n$  - вектор консервативных переменных длины  $i+4$ ,  $c_i = \rho_i / \rho$  - удельные плотности компонент газовой смеси,  $\Phi = (0, 0, 0, 0, \rho f_i)$  - источниковый член, вектор потоков в нормальном к грани контрольного объема направлении может быть представлен в виде

$F = (\bar{m}, \bar{m} \cdot \bar{m} / \rho + P, \bar{m}(e + p) / \rho, \bar{m} \bar{B})$ , где  $P = \rho R_b T \sum_i \frac{c_i}{\mu_i}$ ,  $e = R_b T \sum_i \frac{c_i}{\mu_i} (\gamma - 1) + \bar{V}^2 / 2 + \sum_i c_i h_i$ , давление и энергия конечного объема,  $\sum_i c_i h_i$  - внутренняя энергия химических реакций.

Уравнения, описывающие химические реакции, можно представить в виде:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} A_i = \sum_{i=1}^n \beta_{ij} B_i, j = 1, \dots, M$$

где  $M, N$  - число реакций и компонент смеси, соответственно,  $\alpha_{ij}, \beta_{ij}$  - стехиометрические коэффициенты прямой и обратной реакций. Скорости изменения концентраций компонент смеси определяются в соответствии с гипотезой Аррениуса:

$$f_i = \frac{dc_i}{dt} = \sum_{j=1}^M (\beta_{ij} - \alpha_{ij}) w_j(\bar{c}, T), w_j(\bar{c}, T) = k_f(T) \prod_{i=1}^n c_i^{\alpha_{ij}} - k_b(T) \prod_{i=1}^n c_i^{\beta_{ij}} \quad (2)$$

<sup>1</sup> Moscow aviation institute, Moscow, Russia

$$k_{f,b} = A_{f,b} T^{I_{f,b}} \exp(-E_{f,b} / RT).$$

Использовалась схема окисления водорода из 9 химических реакций с выбором значений коэффициентов аналогичных [2].

Существенным составным элементом TVD и ENO-алгоритмов является переход к характеристическим переменным. При этом либо консервативные переменные в дельта форме умножаются на матрицу левых собственных векторов, к полученным характеристическим переменным применяется разностный алгоритм и вычисленные по алгоритму потоки умножаются на матрицу правых собственных векторов, либо, что с вычислительной точки зрения эквивалентно, приращение вектора потока в направлении нормали к грани записывается в виде разложения по характеристическим волнам (метод Roe-Pike'a):

$$\Delta F = \sum_{k=1}^m \Delta_{i+1/2} W_k \tilde{\lambda}_k r_k, \dots \quad (3)$$

где  $\Delta W_k$  - интенсивность соответствующей характеристической волны. Учитывая, что:

$$F_L + \sum_{\tilde{\lambda}_k \leq 0} \Delta_{i+1/2} W_k \tilde{\lambda}_k r_k = F_R + \sum_{\tilde{\lambda}_k \geq 0} \Delta_{i+1/2} W_k \tilde{\lambda}_k r_k$$

для расчета потока через грань контрольного объема получается соотношение

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2} (F_L + F_R) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \Delta_{i+1/2} W_k | \tilde{\lambda}_k | r_k$$

Здесь  $\vec{r}_k$ ,  $\vec{L}_k$  - собственные правые и левые векторы матрицы  $A(\vec{Q})$ ,  $\Delta \vec{W} = \vec{L} \Delta \vec{Q}$  и для нахождения  $\Delta W$  достаточно воспользоваться равенством  $\Delta \vec{W} \vec{R} = \Delta \vec{Q}$ , где

$$\Delta \vec{Q} = (\Delta \rho, \Delta(\rho U), \Delta(\rho V), \Delta E, \Delta(\rho c_1), \dots, \Delta(\rho c_n))^T, i = 1, n, \dots$$

Система правых собственных векторов  $\vec{r}_k$  якобиана  $\partial F_{i+1/2} / \partial U$  потока через координатную грань  $j$  системы (1) может быть выбрана в виде:

$$\vec{r}_1 = (0, 0, 1, V, 0, \dots, 0)^T, \vec{r}_2 = (1, U, V, \omega, 0, \dots, 0)^T, \vec{r}_3 = (1, U + a, V, H + Ua, c_1, \dots, c_n)^T, \quad (4)$$

$$\vec{r}_4 = (1, U - a, V, H - Ua, c_1, \dots, c_n)^T, \vec{r}_5 = (0, 0, 0, h_1, 1, 0, \dots, 0)^T,$$

$$\vec{r}_6 = (0, 0, 0, h_2, 0, 1, 0, \dots, 0)^T, \vec{r}_n = (0, 0, 0, h_n, 0, 0, \dots, 1)^T,$$

$$\vec{\lambda} = (U, U, U + a, U - a, U, \dots, U)$$

где  $U = \vec{V} \cdot \vec{n}$ ,  $V = \vec{V} \cdot \vec{\tau}$  - нормальная грани, через которую считается поток, и касательная к этой грани компоненты скорости, соответственно. Обозначая компоненты  $\Delta \vec{W} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n)$  решаем для определения  $\Delta \vec{W} = \vec{L} \Delta \vec{Q}$  систему уравнений  $\Delta \vec{W} \vec{R} = \Delta \vec{Q}$ :

$$\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \Delta \rho;$$

$$U \alpha_2 + (U + a) \alpha_3 + (U - a) \alpha_4 = \Delta(\rho U);$$

$$\alpha_1 + V \alpha_2 + V \alpha_3 + V \alpha_4 = \Delta(\rho V); \quad (5)$$

$$V \alpha_1 + \omega \alpha_2 + (H + Ua) \alpha_3 + (H - Ua) \alpha_4 + \sum_{i=1}^n \alpha_6 h_i = \Delta(E);$$

$$c_i \alpha_3 + c_i \alpha_4 + \alpha_i = \Delta(\rho c_i), i = 1, n;$$

Система (5) имеет достаточно простой вид и решается последовательной заменой переменных,

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= (\Delta\rho(H - U^2 - \sum_{i=1}^n c_i h_i) + \Delta(\rho U)U + \sum_{i=1}^n h_i \Delta(\rho c_i) - \bar{E}) / \omega; \\
\alpha_4 &= ((U + a)\Delta\rho - \Delta(\rho U) - a\alpha_2) / 2a; \\
\alpha_3 &= -(U - a)\Delta\rho + \Delta(\rho U) - a\alpha_2) / 2a; \\
\alpha_1 &= \Delta(\rho V) - V\Delta\rho \\
\alpha_{i+4} &= \Delta(\rho c_i) - c_i(\Delta\rho - \alpha_2), i = 1, n; \\
\bar{E} &= \Delta E - V(\Delta(\rho V) - V\Delta\rho),
\end{aligned} \tag{6}$$

аналогичные выражения могут быть выписаны для трех пространственных переменных.

Таким образом получены формулы для перехода к характеристическим переменным в случае произвольного числа компонент газовой смеси. Для учета реальных уравнений состояния компонент смеси газов в алгоритме были предусмотрены следующие модификации.

Показатель адиабаты рассчитывался в соответствии с классической формулой зависимости от степеней свободы в молекулах компонент:

$$\gamma = \sum_{i1} 5c_i / 7 + \sum_{i2} 5c_i / 3 + \sum_{i3} 4c_i / 3, \tag{7}$$

где  $i1, i2, i3$  число двухатомных, одноатомных и многоатомных компонент газовой смеси.

Вычисление температуры на каждом временном шаге по известным значениям консервативных переменных проводилось с учетом зависимости удельных энтальпий образования от времени по итерационной схеме:

$$P = (\gamma - 1)(\rho e - \rho \bar{V}^2 / 2 + \sum_i \rho_i h_i(T_n), T_{n+1} = P / \rho R_B \sum_i \frac{c_i}{\mu_i}. \tag{8}$$

В соответствии с [3] для учета реальных уравнений состояний газа параметр  $\omega$  для вычисления правого собственного вектора  $\vec{i}_2$  вычислялся по формуле  $\omega = H - \rho u^2 / (\partial P / \partial i)$ , где  $i$  - внутренняя энергия газовой смеси (для идеальных газов  $\omega = a^2 / (\gamma - 1)$ ).

При стандартном для TVD ENO схем осреднения Roe для вычисления потоков на гранях кроме газодинамических величин проводилось аналогичное осреднение для значений концентраций компонент и величина показателя адиабаты вычислялась по осредненным значениям концентраций в соответствии с (7).

Ввиду высоких скоростей при возникновении детонации и жесткости системы дифференциальных уравнений кинетики (2) для обеих математических моделей проводилось обезразмеривание, подобное предложенному в [1]. Характерными значениями величин выбирались для давления -  $\rho_0 \cdot q$ , для температуры  $q / R$ , где  $q, R$  - удельная энтальпия образования воды и газовая постоянная сухого воздуха при нормальных условиях, для времени -  $l / \sqrt{q}$ , ( $l$  - характерная длина), для скорости звука и скорости газа -  $\sqrt{q}$ . Удельные энтальпии образования компонент обезразмеривались на  $q$ . Энергия активации и предэкспоненциальный фактор в формулах Аррениуса (2) - на  $q$  и  $\sqrt{q}$ , соответственно.

В качестве второй модели для численного моделирования течений реагирующих смесей водород-воздух использовалась упрощенная двухстадийная модель [1], включающая индукционный период и последующий период реакции. Газ предполагался невязким.

Эта модель с двухстадийной реакцией может быть описана следующим образом. Система уравнений газовой динамики для идеального газа и упрощенные уравнения кинетики могут быть пред-

ставлены в интегральной форме (1) со следующими значениями величин:  $\vec{Q} = (\rho, \bar{m}, \rho e, \rho \beta, \rho \alpha)$  - вектор консервативных переменных,  $\bar{\alpha} = 1 / \tau$  параметр индукции обратный к времени индукции,  $\beta$  - объемная плотность реагирующей компоненты,  $\Phi = (0, 0, 0, 0, \rho w_\beta, \rho w_\alpha)$  - источниковый член, вектор потоков в нормальном к грани контрольного объема направлении может быть представлен в виде  $F = (\bar{m}, \bar{m} \cdot \bar{m} / \rho + P I, \bar{m}(e + p) / \rho, \bar{m} \vec{B})$ , где  $P = \rho RT, e = RT / (\gamma - 1) + \bar{V}^2 / 2 + \beta q$ , давление и энергия конечного объема,  $q$  - энергия реакции. Для описания скоростей изменения кинетических переменных используется гипотеза Аррениуса:

$$w_\alpha = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{-1}{\tau_{ind}} = -k_1 \rho \exp(-E_1 / RT); \quad (9)$$

$$w_\beta = \frac{d\beta}{dt} = \begin{cases} -k_2 P^2 \{ \beta^2 \exp(-\frac{E_2}{RT}) - (1 - \beta)^2 \exp(-\frac{E_2 + q}{RT}) \}, & \alpha = 0; \\ 0, & \alpha > 0, \end{cases}$$

Рассматриваемая модель обладает многими недостатками и одним существенным достоинством - простотой численной реализации, что определяет ее широкое использование. Существенным недостатком представляется отсутствие механизма моделирования изменения уравнения состояния в фазе индукции. В этой фазе происходит образование значительной объемной доли одноатомных радикалов, которое должно отражаться как на значении  $\gamma$  так и на значении плотности и давления, определяемых уравнением состояния  $P / \rho = RT / \mu$ . Для водородно-воздушных смесей с отдельной подачей топлива различие значений молярной массы  $\mu$  также существенно для правильного описания процесса.

Обе математические модели дополняются заданием следующих краевых условий. Условия в кольцевых соплах, являющихся важной составной частью детонационного двигателя определяются параметрами соответствующих сопел Лавала. Для давления на выходе сопла Лавала с отношением площади выходного сечения к площади критического  $S / S_* = \lambda$  и значениями газодинамических параметров в ресивере  $\rho_m, P_m$  значения расчетных давлений  $P', P''$  в сверхзвуковом и дозвуковом режимах будут корнями уравнения:

$$(P / P_m)^{1/\gamma} (1 - (P / P_m)^{(\gamma-1)/\gamma})^{1/2} = (2 / (\gamma + 1))^{1/(\gamma-1)} ((\gamma - 1) / (\gamma + 1))^{1/2} / \lambda. \quad (10)$$

При вдуве газа через сопло Лавала в камеру с нестационарным противодействием (кольцевые сопла изображены на Рис. 1 а также обозначены цифрами 4,5,6 на Рис3) справедливы следующие краевые условия [5]:

$$u=0 \text{ при } P_m < P_p';$$

$$P = P_p \text{ при } P' < P_p < P_m';$$

$$P = P', u = u_{\max} \sqrt{1 - (P / P_m)^{(\gamma-1)/\gamma}}, \rho = \rho_m (P / P_m)^{1/\gamma} \text{ при } P'' < P_p < P_m \quad (11)$$

$$\rho u S = \rho_* u_* S_*, \gamma P / (\gamma - 1) \rho + u^2 / 2 = u_{\max}^2 / 2 \text{ при } P_p < P''.$$

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Проведено численное моделирование течений в двух типах детонационных двигателей. С использованием математической модели полных уравнений кинетики для описания окисления водорода с помощью 9 реакций в осесимметрической постановке рассчитывался детонационный цикл в двигателе Левина - Тарасова [4]. С использованием упрощенной двухстадийной модели Левина - Маркова [1] численно моделировалось в трехмерной постановке течение в ротацион-

ном двигателе Ждана - Буковского [5]. Расчеты проводились на основе численного алгоритма [6], основанного на схеме Хартена [7]. Целью численного моделирования являлось получение в расчетах долговременного процесса детонации.

а) Моделирование течения в двигателе Левина - Тарасова.

Пульсирующий детонационный двигатель работает на основе использования энергии периодически возникающей детонационной волны. Различные виды устройств были предложены в последние два десятилетия, одним из таких устройств является двигатель, предложенный в [4] (Рис. 1, а). Струя стехиометрической смеси газов поступает через кольцевое сопло в полусферическую камеру-резонатор. После фокусировки струи в окрестности оси симметрии происходит образование ударной волны и ее отражение от сферической границы резонатора. Дифракция и фокусировка такой ударной волны инициирует детонационную волну и ее последующий выход из камеры резонатора в затопленное пространство. При этом происходит временное запираение кольцевого сопла Лавалю. После выхода детонационной волны процесс повторяется. Преимуществом этой конструкции является отсутствие движущихся механических частей, (периодический вбрызг топлива в камеру сгорания обусловлен значениями давления в камере)

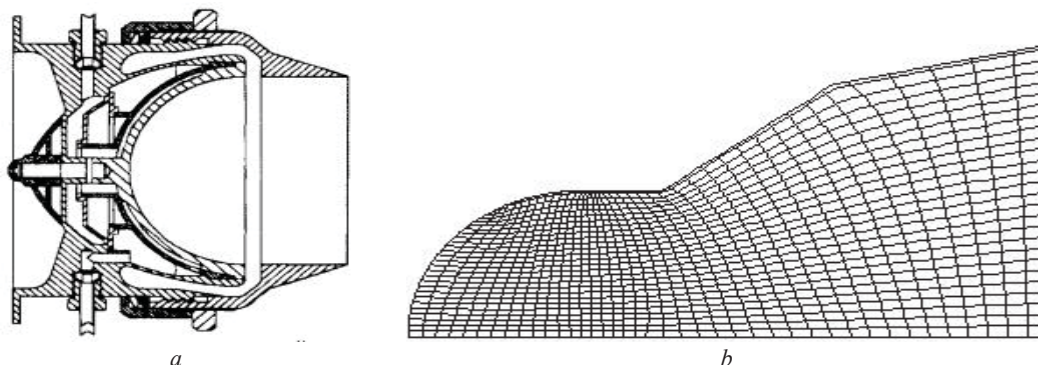


Рис. 1. Схема резонатора двигателя Левина-Тарасова [4] - (а). Расчетная сетка для соответствующей расчетной области, включающей резонатор и часть затопленного пространства (б).

Два типа течений наблюдалось при проведении расчетов с различными отношениями значений давлений в реакторе и резонаторе и параметров сопла Лавалю: выход на стационарный режим после нескольких тактов колебаний и периодический режим. Во втором случае максимальные значения температуры и давления, соответствующие возникновению детонационной волны отмечались в вихревой области за кольцевой струей, а не вблизи оси симметрии. Рис. 2, (б).

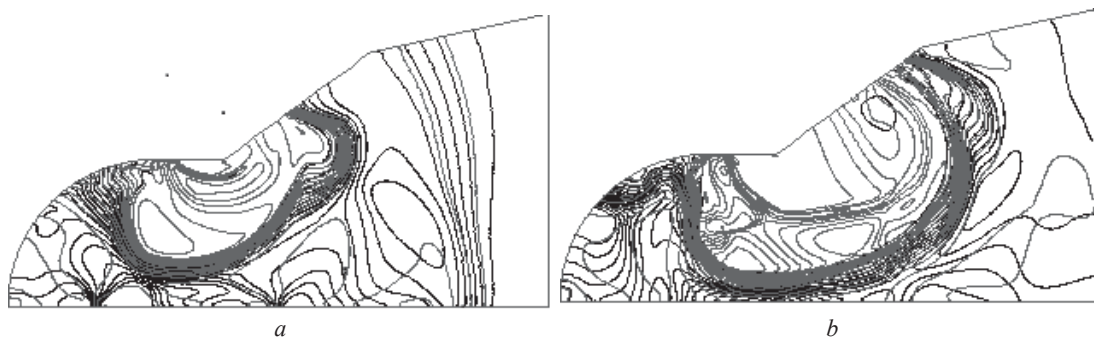


Рис. 2. Изолинии плотности (черные) и изолинии температуры (серые) в начальные момент цикла работы двигателя (а) и в момент образования детонационной волны (б).

## б) Двигатель Ждана - Буковского.

В [5] предложена компоновка спиновое двигателя с отдельной подачей подготовленного воздуха и горючей компоненты с образованием ротационной детонационной волны не на цилиндрической поверхности, а на конусе.

При конструировании такого вида двигателей могут быть оптимизированы, в частности, такие показатели, как смешение топлива и подаваемого сжатого воздуха, временные и пространственные параметры инициации детонационной волны, давление и плотность смеси и концентрация горючей компоненты на поверхности конуса, тяга двигателя. Последний параметр должен существенно увеличиться при переходе от цилиндрической конструкции к конической. Ясно, что и варьирование формы полости, изображенной на Рис. 3 может существенно повлиять на указанные параметры.

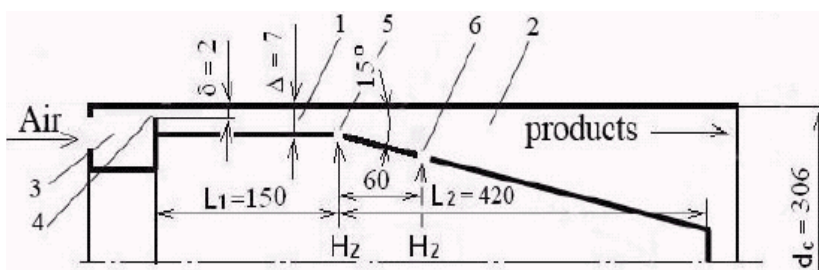


Рис. 3. Схема спиновое импульсного детонационного двигателя из [5].

В экспериментах [5] установка состоит из двух областей: кругового цилиндрического канала (цифра 1, Рис. 3) и кругового канала с конической внутренней границей (цифра 1, Рис. 3). Детонация инициируется взрывом алюминиевой фольги, расположенной в начале области 2. Целью экспериментов является получение в установке долговременной спиновой детонационной волны.

## ПРОВЕДЕНИЕ РАСЧЕТОВ

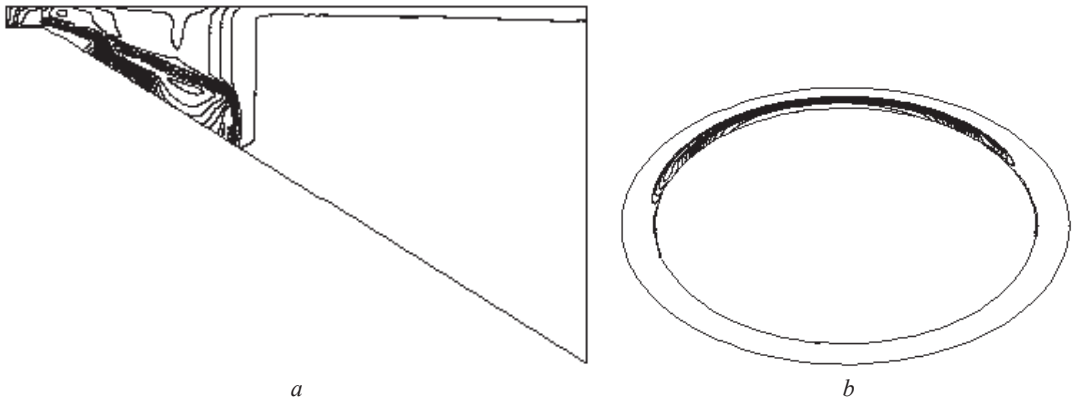
Первоначально расчет осуществлялся в три стадии: 1) двумерный расчет на установление течения идеального газа (воздуха) в конструкции; 2) двумерный расчет на установление вбрызга через кольцевое сопло Лавала водорода и образования реагирующей смеси; 3) трехмерный расчет инициации спиновой детонационной волны, распространяющейся в азимутальном направлении. Однако, с учетом физической постановки задача от расчета на установление первых двух стадий было решено отказаться, в последующем расчет проводился в два этапа:

1. расчет двумерного осесимметричного взаимодействия ударной волны, выходящей с границы областей 1 и 2 и струи, выходящей из кольцевого сопла 5, Рис. 1 (Рис. 2, а,б).
2. расчет трехмерной спиновой детонации с использованием в качестве начальных условий предыдущего расчета и заданием в начальный момент спиновой детонационной волны непосредственно за кольцевым соплом 5.

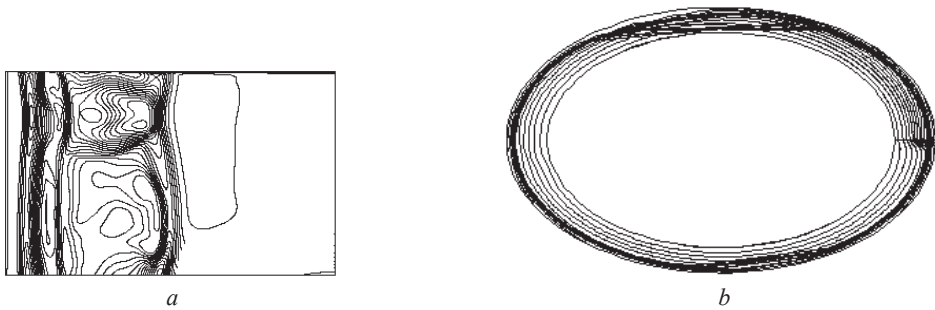
Для этапа 1 проводились двумерные расчеты с моделированием выхода течения из области 1 ударной волной 1 с интенсивностью  $M_{уд.в.} = 1.3-1.8$  и критическим числом кольцевого сопла, через которое выходит водород равным 9 и давлением водорода в ресивере  $P_2 = 1.3P_u$  (где  $P_u$  - давление за ударной волной 1).

На втором этапе взрыв алюминиевой фольги моделировался ударной волной интенсивности детонационной волны с безразмерным числом Маха  $M_{det.shock} = 4.8$ , первоначально инициируемой в азимутальном направлении и занимающей небольшой объем вблизи нижней конической границы области 2 ( $I < 20$ ,  $20 < J < 40$ ,  $20 < K < 40$ )ю Результаты расчетов представлены картинками изолиний плотности в проекциях на координатные поверхности для последовательных моментов времени.

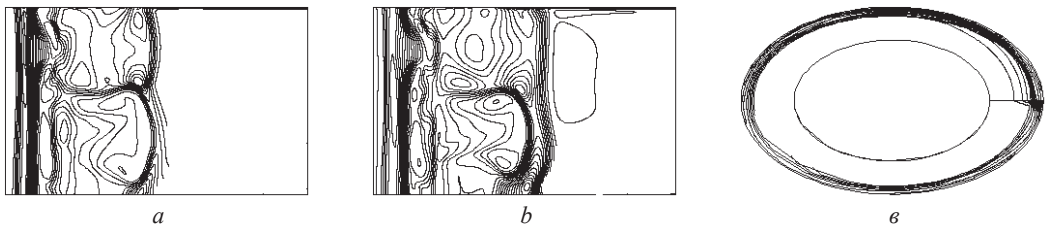




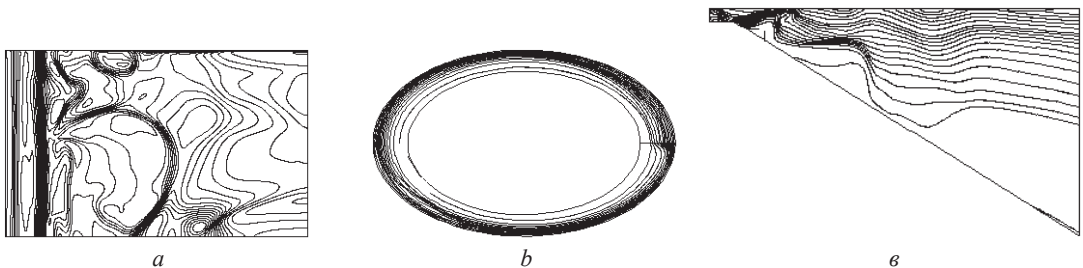
**Рис. 4.** Изолинии плотности в расчетной области. В начальный период процесса, (а) - в меридиональной плоскости наблюдается распространяющаяся детонационная волна, первоначально заданная вблизи конической поверхности, (б) - поперечное сечение видно положение распространяющейся по кольцевой области волны детонации.



**Рис. 5.** Изолинии плотности в расчетной области. Спиновая детонационная волна прошла по всей окружности, встретилась в задней границей и движется дальше, одновременно область детонации распространяется вниз по течению к выходу из области 2 (см. схему двигателя на Рис. 3).



**Рис. 6.** Дальнейшее распространение спиновой детонационной волны



**Рис. 7.** Изолинии плотности в расчетной области. Образование ячеистой структуры детонации

В расчетах наблюдалось азимутальное распространение детонационной волны и образование в области догорания водорода ячеистых структур, подобных ячейкам детонации.

Результаты расчетов подтверждают применимость математической модели [1] для численного моделирования течений и качественной оценки характеристик двигателя [5].

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Левин В.А., Марков В.В. Возникновение детонации при концентрированном подводе энергии. Физика горения и взрыва, Т.11, стр.623.
- [2] Liberman M.A., Ivanov M.F., Valyev D.M., Combust. Sci. and Tech. 2006, V.178, 1613.
- [3] Glaister P. An Approximation Linearised Riemann Solver for the Three-Dimensional Euler Equations for Real Gas Using Operator Splitting J. Of Comp. Phys., 1988, V.77, pp 361-383.
- [4] Levin V.A., Nechaev Y.N., Tarasov A.I., Control of detonation processes. Ed. G. Roy. Moscow, Elex-KM Publishers 197-201, 2000.
- [5] Zhdan SA, Bykovskii F.A, Vedernikov F.F. Mathematical modeling of a rotating detonation wave in a hydrogen-oxygen mixture. Combustion. Explosion and Shock Waves. 2007, 43(4): 449-459.
- [6] Мартюшов С.Н. Расчет двух нестационарных задач дифракции на основе явной TVD схемы Хартена. Вычислительные технологии Том 1, № 2 Новосибирск, 1996, стр. 82-89.
- [7] Harten A A high resolution scheme for the computation of weak solutions of hyperbolic conservation laws. - J. of Comp. Phys., 1983, v.49, p.357-393.

## NUMERICAL SIMULATION OF VISCOUS DIFFRACTION ON FREE MOVING BODY

### РАСЧЕТ ВЯЗКОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ОБТЕКАНИЯ СВОБОДНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ТЕЛА

*Specific of the problem of non stationary flow near the flying body consist of the fact, that movement of the body under influence of non stationary displacing force changes the problem itself. Problem of diffraction of shock wave on the sphere in shock tube was numerically investigated on the basis of Navie-Stocks equation.*

#### ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННОГО АЛГОРИТМА

Использовалась модель вязкого газа в предположении ламинарности течения. Для моделирования в рамках метода конечного объема система уравнений Навье-Стокса рассматривалась в интегральной форме:

$$d/dt \int_V \bar{Q} dV + \oint_S \bar{n} F dS + \oint_S \bar{n} F_{vis} dS = 0; \bar{Q} = (\rho, \bar{m}, e); F_{vis} = (\tau_{ij}, k \cdot grad T + \tau_{ij} \cdot \bar{u}), \quad (1)$$

где  $\tau_{ij} = \mu(\nabla \bar{u} + \nabla \bar{u}^T - 2/3 \cdot div \bar{u} \bar{I})$ ,  $k = \mu \gamma / Pr / (\gamma - 1)$  где,  $T$  - температура,  $P$  - давление,  $\tau_{ij}$  - тензор вязких напряжений.  $\bar{U}$  - скорость,  $k$  - коэффициент теплопроводности,  $\mu$  - коэффициент динамической вязкости,  $\bar{n}$  - вектор нормали к поверхности,  $Pr$  - число Прандтля.

Для вычисления невязких потоков использовалась схема Хартена:

$$\bar{F}_{j+1/2} = 1/2(\bar{F}_j + \bar{F}_{j+1} + \sum_{l=1}^m \bar{R}_{j+1/2}^l [1/2 \Psi(a_{j+1/2}^l)(g_j^l + g_{j+1}^l) - Q(a_{j+1/2}^l + \gamma_{j+1/2}) \alpha_{j+1/2}^l]) \quad (2)$$

где  $\alpha_{j+1/2}^l = \bar{L}_{j+1/2}^l (\bar{U}_{j+1} - \bar{U}_j)$ ,  $\bar{\alpha}_{j+1/2}$  - вектор характеристических переменных в дельта форме,  $a_{j+1/2}^l, \bar{R}_{j+1/2}^l, \bar{L}_{j+1/2}^l$  собственные числа и соответствующие им собственные правые и левые векторы матрицы Якоби  $A = \partial \bar{F} / \partial \bar{Q}$ , вычисленные для средней точки грани  $j + 1/2$  (значения функций, описывающих разностный алгоритм опустим для краткости). Значения газодинамических величин на гранях определяются осреднением Roe:

$$\tilde{\rho}_{j+1/2} = \sqrt{\rho_j \rho_{j+1}}, K = \sqrt{\rho_j} / (\sqrt{\rho_j} + \sqrt{\rho_{j+1}}), \quad (3)$$

$$u, v, h, i, c = Ku, v, h, i_j + (1 - K)u, v, h, i_{j+1},$$

$h = \gamma P / (\gamma - 1) \rho + \bar{V}^2 / 2$  -энтальпия,  $\bar{V} = (u, v)$  - вектор скорости,  $i$  - внутренняя энергия. Остальные газодинамические величины на грани вычисляются из этих.

Нормальная к грани проекция тензора вязкого потока размерности 3 из уравнений (1) может быть представлены в виде:

$$F_{vis} = \mu \cdot A \hat{Q}_{vis} \cdot \bar{n}, \quad (4)$$

$$\hat{Q}_{vis} \bar{n} = (\bar{b}, l), \bar{b} = \tau_{ij} \bar{n}, l = k grad T \bar{n}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ u & v & 1 \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup> Moscow aviation institute, Moscow, Russia

Таким образом, компоненты вектора скорости определяются по (3) и для вычисления вязких потоков необходимо найти аппроксимацию на гранях контрольного объема величин  $\nabla \vec{u}$  и  $gradT$ . Для вычисления этих величин вначале рассчитаем значения  $\tau_{ij}$ ,  $gradT$  в центрах ячеек. Для этого применим теорему Гаусса-Остроградского к объему расчетной ячейки:

$$\begin{aligned} gradT &= (\bar{S}_{j+1/2}^j \cdot T_{ij+1/2} - \bar{S}_{j-1/2}^j \cdot T_{ij-1/2} + \bar{S}_{i+1/2}^i \cdot T_{i+1/2,j} - \bar{S}_{i+1/2}^i \cdot T_{-+1/2,j}) / V_{ij} \\ \nabla \vec{u}_{ij} &= (\bar{S}_{j+1/2}^j \cdot \vec{u}_{ij+1/2} - \bar{S}_{j-1/2}^j \cdot \vec{u}_{ij-1/2} + \bar{S}_{i+1/2}^i \cdot \vec{u}_{i+1/2,j} - \bar{S}_{i+1/2}^i \cdot \vec{u}_{-+1/2,j}) / V_{ij}, \\ \nabla \vec{u}_{ij}^T &= (\vec{u}_{ij+1/2} \cdot \bar{S}_{j+1/2}^j - \vec{u}_{ij-1/2} \cdot \bar{S}_{j-1/2}^j + \vec{u}_{i+1/2,j} \cdot \bar{S}_{i+1/2}^i - \vec{u}_{-+1/2,j} \cdot \bar{S}_{i+1/2}^i) / V_{ij}, \\ div \vec{u} \vec{I} &= ((\bar{S}_{j+1/2}^j, \vec{u}_{ij+1/2}) - (\bar{S}_{j-1/2}^j, \vec{u}_{ij-1/2}) + (\bar{S}_{i+1/2}^i, \vec{u}_{i+1/2,j}) - (\bar{S}_{i+1/2}^i, \vec{u}_{-+1/2,j})) \vec{I} / V_{j+1/2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\vec{S} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} n_1 u_1 & n_1 u_2 \\ n_2 u_1 & n_2 u_2 \end{pmatrix}$ ,  $(\vec{S}, \vec{u}) = n_1 u_1 + n_2 u_2$ ,

Значения компонент скорости на гранях определены по формулам (3).

На втором шаге значения  $\nabla \vec{u}$  и  $gradT$  на грани также определяются осреднением Roe, аналогично (3), при этом учитывается влияние газодинамических величин в ячейках с большей плотностью на параметры в ячейках с меньшей плотностью. По полученным величинам на гранях по формуле (4) вычисляются значения вязких потоков. Другой возможностью вычисления  $F_{vis}$  на гранях является определение этих потоков осреднением их значений, вычисленных по (4) для центров ячеек.

## АППРОКСИМАЦИЯ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

Одной из проблем построения численных алгоритмов для уравнений Навье-Стокса является проблема постановки краевых условий на теле. Для вычисления потоков в системе (1) требуется определение на поверхности тела давления  $P$  и нормальных к поверхности компонент  $\nabla u$  и  $gradT$ .

Используемые в некоторых алгоритмах процедуры экстраполяции решения нормальной проекции уравнения количества движения или его производной по нормали не имеют ясного физического смысла. В то же время целью численного моделирования в ряде задач (в том числе и в настоящей работе) является оценка величины воздействия на обтекаемое тело сил трения. Для таких задач погрешность задания краевых условий на теле определяет пригодность или непригодность алгоритма в целом.

В настоящей работе предлагается следующая последовательность задания краевых условий на теле.

Значения  $\nabla \vec{u}$  вычисляются с использованием условий прилипания и экстраполяции изнутри расчетной области. Для вычисления  $\nabla \vec{u}$  используем следующую процедуру: построим у поверхности тела вспомогательную ячейку половинного размера, оператор градиента для которой равен  $\nabla \vec{u}_{3/4} = (\nabla \vec{u}_1 + \nabla \vec{u}_{1/2}) / 2$ , откуда:

$$\begin{aligned} \nabla \vec{u}_{1/2} &= 2\nabla \vec{u}_{3/4} - \nabla \vec{u}_1 = 2(\bar{S}_{1/2} \vec{u}_1 + \bar{S}_{j+1,3/4} \vec{u}_{j+1/2,3/4} - \bar{S}_{j,3/4} \vec{u}_{j-1/2,3/4}) / V_{1/2} - \\ &-(\bar{S}_{1,j}^i (\vec{u}_{2,j} + \vec{u}_{1,j}) / 2 + \bar{S}_{1,j+1}^j (\vec{u}_{1,j+1} + \vec{u}_{1,j}) / 2 - \bar{S}_{1,j}^j (\vec{u}_{1,j} + \vec{u}_{1,j-1}) / 2) / V. \end{aligned} \quad (6)$$

Вычисление давления и плотности на поверхности тела проводилось в два этапа.

На первом этапе в качестве начального приближения использовалась одномерная схема Годунова, а именно значения давления и плотности определялись как решение задачи об отражении от

поверхности тела одномерной ударной волны либо простой волны разрежения:

$$P_{1/2} = \begin{cases} P_1 + (\gamma + 1)\rho U_n^2 / 4 + \sqrt{(P_1 + (\gamma + 1)\rho U_n^2 / 4)^2 - P_1(\gamma + 1)\rho U_n^2 / 2}, & u_n = (\vec{V} - U)\vec{n} \geq 0 \\ P(1 + (\gamma - 1) / 2 \cdot u_n / \sqrt{\gamma P / \rho})^{2\gamma/(\gamma - 1)} - u_n < 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\rho_{1/2} = \rho_1 \frac{(\gamma - 1)P_1 + (\gamma + 1)P_{1/2}}{(\gamma + 1)P_1 + (\gamma - 1)P_{1/2}}$$

По плотности и давлению вычислялись значения температуры и  $gradT$  на теле. В случае волны разрежения в (7) эти значения не пересчитывались.

В случае ударной волны в соответствии с [6] использовались соотношения на ударной волне в вязком газе, а именно по значениям, вычисленным по (7) определялись на теле  $(dT/dn)_{1/2}$   $(dV/dn)_{1/2}$ ,  $V = 1/\rho$ , а по ним уточнялись значения плотности и давления за вязкой ударной волной:

$$P_{1/2} = P_1 + W^2 / (V_{1/2} - V_1) + \frac{4}{3} \mu \frac{dV_{1/2}}{dn} \cdot W / (V_{1/2} - V_1); \quad (8)$$

$$(V_{1/2} - V_1) = V_1 - \left[ \frac{2k(\gamma - 1) \frac{dT_{1/2}}{dn} / D + ((\gamma + 1)P_1 + (\gamma - 1)P_{1/2})}{((\gamma - 1)P_1 + (\gamma + 1)P_{1/2})} - 1 \right],$$

где  $W = \vec{U} \cdot \vec{n}$  - проекция скорости тела на нормаль,  $D$  - скорость ударной волны, вычисленная по (7)

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФРАКЦИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА СВОБОДНОЙ СФЕРЕ В УДАРНОЙ ТРУБЕ.

Одним из современных методов визуализации в физических экспериментах в аэродинамике является VIP - технологии (Visualisation Image Processing). В экспериментальных установках, основанных на этой технологии модели обдуваются потоком, содержащим мелкие (порядка 1 мкм) частицы одинакового размера. Полученные цифровые изображения обрабатываются с помощью программ, использующих методы распознавания образов и получают с их помощью значения газодинамических параметров в потоке. При этом существенным является знание эмпирических зависимостей коэффициентов  $C_D$  и  $C_p$  частиц от чисел Маха и Рейнольдса. В связи с этим задача численного моделирования нестационарного вязкого обтекания свободной сферы малого радиуса имеет непосредственной практическое значение. При этом, несмотря на кажущуюся простоту задачи и распространенность, достаточно точные результаты на сегодняшний день не получены.

Параметры движения твердой частицы, находящейся в потоке за ударной волной, зависят от относительной скорости между частицей и потоком. До тех пор, пока скорость частицы не сравняется со скоростью потока за ударной волной, скорость частицы относительно потока будет меняться, и движение частицы будет неустановившимся. При экспериментах в ударной трубе траектория частицы может быть достаточно точно зафиксирована и ее  $C_D$  определено по данным траектории следующим образом.

Уравнение движения твердой частицы в потоке газа имеет вид:

$$\frac{d\vec{U}_p}{dt} = \vec{g} + \frac{3}{4} \frac{\rho_g}{\rho_p} \frac{C_D}{\varphi} |\vec{U}_g - \vec{U}_p| (\vec{U}_g - \vec{U}_p), \quad (9)$$

где  $\vec{U}_p$ ,  $D$  и  $\rho_p$  есть скорость твердой сферы, ее диаметр и плотность, соответственно.  $\vec{U}_g$   $U_g$  и  $\rho_g$  - скорость и плотность газа, соответственно.

Как было показано в работе Igra, Takayama [5] в соответствии с уравнением (9) коэффициент смещающей силы частицы и соответствующее число Рейнольдса могут быть выражены следующим образом.

$$C_D = \frac{4}{3} \varphi \frac{\rho_p}{\rho_g} \frac{\left(\frac{du_p}{dt}\right)^2}{(u_g - u_p)^2 \left[ \left(\frac{du_p}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_p}{dt} - g\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (10)$$

$$Re_p = \frac{\rho_g |\vec{U}_g - \vec{U}_p| \varphi}{\mu_g} = \frac{\rho_g \varphi}{\mu_g} (u_g - u_p) / \frac{du_p}{dt} \cdot \left[ \left(\frac{du_p}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_p}{dt} - g\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

где  $u$  и  $v$  - компоненты вектора скорости  $\vec{U}$  в  $x$  и  $y$  направлениях. Соответственно,  $g$  - ускорение силы тяжести и  $\mu_g$  - коэффициент вязкости газа. Аналогично, число Маха сферы выражается через относительную скорость:

$$M_p = |\vec{U}_g - \vec{U}_p| / \sqrt{\gamma RT} = (u_g - u_p) / \frac{du_p}{dt} \cdot \left[ \left(\frac{du_p}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_p}{dt} - g\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} / \sqrt{\gamma RT} \quad (12)$$

где  $R$  - газовая постоянная.

В последующих вычислениях коэффициент  $C_D$  определялся по значениям безразмерного коэффициента  $C_p$ . Скорость движущейся сферы при прохождении ударной волны  $\vec{v} = (0, 0, W_n)$  вычисляется по значению смещающей силы в направлении оси трубы  $z$ :

$$S_{n+1} = S_n + \Delta t \cdot W_n, \quad W_{n+1} = W_n + \Delta t \cdot a, \quad a = F_z / m_{sphere}, \quad (13)$$

$$F_z = - \oint_{S_{sphere}} \vec{n} (P - P_o) dS \cdot \vec{I}_z, \quad \vec{I}_z = (0, 0, 1)$$

## РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Проведены расчеты для сферы размером 1 мм ( $Re=0.0004$ ) на интервале времени  $10^{-5}$  сек, захватывающем сам процесс дифракции. Для этого интервала можно пренебречь возникающей турбулентностью.

На Рис. 1 изображены изолиниями плотности (а) для числа Маха ударной волны 1.3 и расчетная сетка (b) типа C (изображена каждая 5 координатная линия).

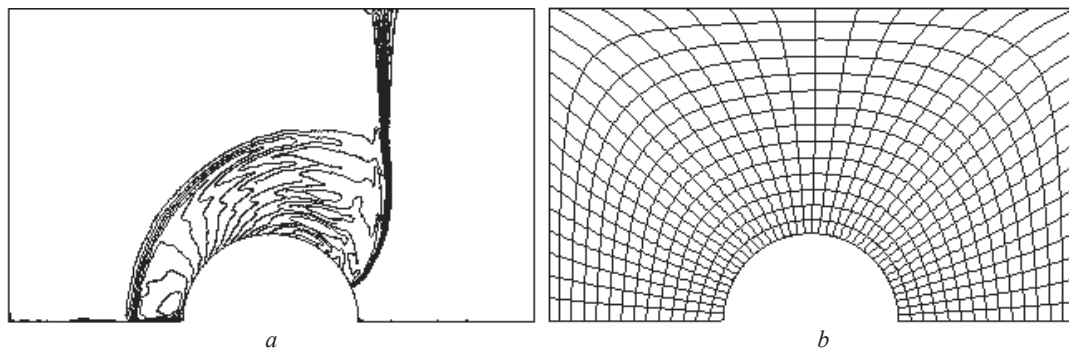


Рис. 1. Начальная стадия дифракции, Маховское отражение ударной волны от сферы (а) и расчетная сетка размерности  $70 \times 300$  (b).

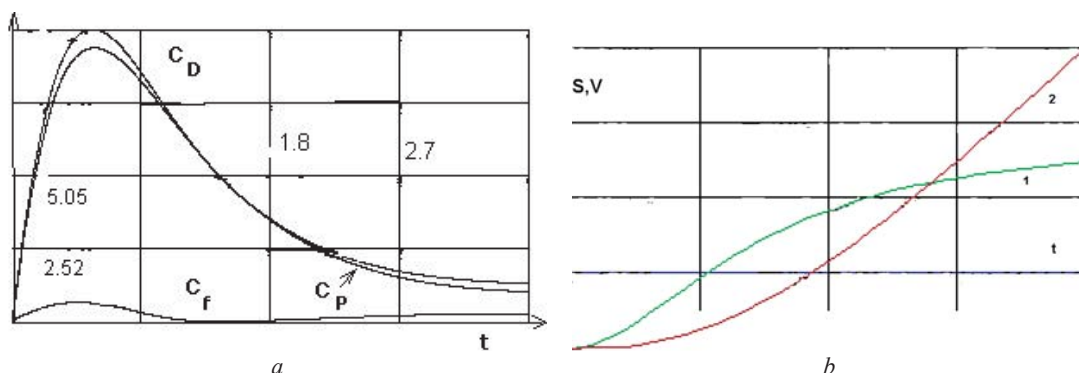


Рис. 2. Распределение  $C_D$  (линия 1),  $C_p$  (линия 2) и коэффициента трения  $C_f$  от времени (а) и зависимость скорости сферы и пройденного пути от времени (б)

На Рис. 2,(а) приведены графики зависимости  $C_D$  (линия 1),  $C_p$  (линия 2) и коэффициента трения  $C_f$  от времени. Различие кривых 1 и 2 показывает влияние силы трения, постоянное расстояние между ними говорит о наличии ненулевого ускорения для всего рассматриваемого интервала времени.

На Рис. 2(б) приведены графики распределение скорости сферы (кривая 1) и длины траектории (кривая 2) от времени. Монотонный рост скорости на всем интервале соответствует различию вязкого и невязкого течений ( для модели невязкого газа после прохождения ударной волны по сфере скорость становится постоянной). Это различие определяет существенное увеличение длины траектории малых частиц по сравнению с большими частицами и резкое сокращение длины траектории движения частицы с увеличением их размера (неработоспособность VIP - технологий для частиц, несоответствующего качества по размеру).

Сравнение результатов расчетов данными экспериментов [4,5] показывают применимость использования численного алгоритма для расчета исследуемого класса течений.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

В рамках метода конечного объема с использованием TVD-схемы второго порядка точности разработан алгоритм расчета нестационарных вязких ламинарных течений газа.

Для методов конечного объема определены краевые условия на теле для вязкого ламинарного течения газа.

Проведено численное моделирование дифракции ударной волны на свободной сфере в ударной трубе.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мартюшов С.Н.. Вычисл. технологии. 1997. Т.2, № 6, С. 53-60.
- [2] Vinokur M. . J. of Comp. Phys. 1989.V. 81 pp.1-52.
- [3] Волков К.Н. Выч. методы и программ.-2004. Т.6, № 1. с.47-64.
- [4] Tanno H., Itoh K., Saito T., Abe A., Tokayama K. Shock Waves n.13, pp. 191-200, 2003.
- [5] Igra O., Tokayama K., Proc. Ro. Soc. London a.- 1993-V.442.-p.231.
- [6] Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика. Т.VI. Гидродинамика. М. 2001, 736 с

## DEVELOPMENT AND INTEGRATION OF INTELLIGENT, AGENT-BASED AND CLOUD COMPUTING IN SMART GRID

### СОЗДАНИЕ И ИНТЕГРАЦИЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ, АГЕНТНЫХ И ОБЛАЧНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В SMART GRID

---

*Smart Grid is one of the current trends in world energy sector. Its implementation involves the integration of high-tech infrastructure of power systems, and the application of modern information technology (IT). Currently the focus is on improving the existing technological infrastructures, without which it is impossible to effective use of modern IT. This article discusses the development and use in intelligent energy system (IES) such technologies as intelligent, agent-based and cloud computing, including the subject of cybersecurity, as well as the concept of Big Data. The methods and techniques are discussed which were tested previously by team, headed by the author, to research the problems of energy security. It is proposed to extend the scope of their application and to consider them as a basis for development of IES IT-infrastructure.*

---

#### ВВЕДЕНИЕ

Smart Grid, или «умные энергетические системы» - одна из современных тенденций развития энергетики. Ее реализация предполагает интеграцию как высокотехнологичной инфраструктуры энергетических систем, так и применение современных информационных технологий (ИТ). В настоящее время основное внимание уделяется усовершенствованию существующих технологических инфраструктур, без которого невозможно эффективное применение современных ИТ. В статье рассматриваются проблемы разработки и применения в интеллектуальных энергетических системах (ИЭС) таких технологий, как интеллектуальные, агентные и облачные вычисления, в том числе с учетом кибербезопасности, а также концепции Big Data (больших данных). Рассматриваются методы и технологии, апробированные ранее коллективом, возглавляемым автором, для исследований проблем энергетической безопасности. Предлагается расширить область их применения и рассмотреть их как основу для создания ИТ-инфраструктуры ИЭС.

#### SMART GRID - ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Одной из тенденций развития мировой энергетики является создание концепции и внедрения

технологий Smart Grid - «умных энергетических систем» [1]. Основными достигнутыми результатами должны стать наблюдаемость, контролируемость, автоматизация управления электроэнергетической системы (ЭЭС), обеспечивающие её высокую надёжность и высокие экономические показатели работы. Наиболее полно общую функционально-технологическую идеологию этой концепции, по-видимому, отражает сформулированное IEEE определение Smart Grid как концепции «полностью интегрированной, саморегулирующейся и самовосстанавливающейся электроэнергетической системы, имеющей сетевую топологию и включающей в себя все генерирующие источники, магистральные и распределительные сети и все виды потребителей электрической энергии, управляемые единой сетью информационно-управляющих устройств и систем в режиме реального времени».

В отличие от западной концепции, ориентированной в первую очередь на потребителя (умные дома, гибкие тарифы и т.д.) в нашей стране разработка интеллектуальных электроэнергетических систем инициируется сетевым оператором (федеральной сетевой компанией - ФСК), при этом внимание концентрируется на этапах генерации и транспорта электроэнергии. В связи с этим в нашей стране

---

<sup>1</sup> Melentiev Energy System Institute of SB PAS, Irkutsk, Russia



энергетиками используется термин «интеллектуальные электроэнергетические системы с активно-адаптивной сетью» (ИЭС ААС) [2]. В последнее время Институтом систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН (одним из лидеров в разработке концепции ИЭС ААС) предложена и развивается идея создания интегрированных интеллектуальных энергетических систем (ИЭС), которые объединяют электроэнергетические системы, системы нефте и газоснабжения, а также системы тепло- и хладоснабжения. Это предполагает объединение разрозненных систем в единый технологический комплекс, обеспечивающий реализацию новых функциональных возможностей, применение более совершенных технологий в эксплуатации и создание интегрированных централизованно-распределенных систем с координированным управлением режимами и активным участием потребителей в процессе энергоснабжения.

Иначе говоря, интеллектуальная энергетическая система предусматривает интеграцию энергетических систем с новыми коммуникационными технологиями и целостной многоуровневой автоматизированной системой управления.

Очевидно, что успешная реализация этой концепции требует повышенного внимания к проблемам как современных информационных технологий (ИТ), так и к проблемам кибербезопасности, поскольку усложнение современных информационно-телекоммуникационных технологий увеличивает уязвимость создаваемых систем [3, 4].

## **ОБЩИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗВИТИЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ИТ**

В России работы по тематике Smart Grid (ИЭС ААС) сейчас ведутся преимущественно в области совершенствования технологических основ электроэнергетики. В то же время, очевидно, что необходим новый подход к решению проблемы интеллектуальной и информационной поддержки принятия решений при моделировании и управлении режимами в активно-адаптивных электрических сетях. Этот подход должен интегрировать как интеллектуальные

методы, так и методы, основанные на численных расчетах, в последнем случае необходимо решать задачу реинжиниринга унаследованных программных комплексов. Кроме того, необходимо создание новой технологии работы, которая позволяла бы интеграцию, помимо программных комплексов (ПК) для решения расчетных задач, новых методов интеллектуальной поддержки принятия решений и их интеграции с традиционными ПК. Кратко проблемы в области ИТ характеризуются следующим:

- Необходимо развитие информационных и коммуникационных технологий, позволяющих создать качественно новые системы мониторинга и управления энергетическими системами.
- Ограниченный диапазон предложений в данном сегменте со стороны ИТ-поставщиков: решения зарубежных разработчиков довольно дороги, качественных отечественных разработок недостаточно или они просто отсутствуют.
- В то же время использование зарубежных разработок может рассматриваться как одна из угроз кибербезопасности [4].

Энергетиками используется следующая классификация интеллектуальных систем [5]. Системы называют интеллектуальными, если:

- в их составе есть аппаратные решения в виде микропроцессоров (интеллектуальный датчик, интеллектуальный исполнительный привод и т.д.);
- в них используются методы и технологии искусственного интеллекта (ИИ): экспертные системы, искусственные нейронные сети, генетические алгоритмы, аппарат нечеткой логики и т.п.
- системы имеют несколько целей функционирования (или умеют генерировать эти цели), выбирая самую подходящую цель в зависимости от окружающей среды, умеют прогнозировать поведение окружающей среды и свое собственное состояние.

С точки зрения ИТ, использования датчиков для сбора информации недостаточно для повышения «интеллектуальности» системы. При использовании методов искусственного интел-

лекта не всегда анализируется целесообразность их применения и, как правило, не анализируется эффективность их использования. Наиболее привлекательным является последний класс систем, которые называют «системами с целеполаганием», но, к сожалению, примеры промышленных образцов таких систем в нашей стране отсутствуют [7].

Одними из основных задач с точки зрения ИТ при создании Smart Grid являются:

- Сбор, передача и обработка потоков данных.
- Разработка программных комплексов нового поколения (распределенных, обменивающихся информацией или использующих общие информационные ресурсы).
- Разработка интеллектуальных компонентов поддержки принятия решений при управлении режимами [3].

К сожалению, большинство используемых в энергетике программных комплексов перешли в категорию унаследованного программного обеспечения. Учитывая, что основным при создании интеллектуальных энергетических систем декларируется мультиагентный подход, для использования существующих ПК необходимо выполнение следующих этапов:

1. реинжиниринг унаследованных программных комплексов;
2. реализация программных комплексов как интеллектуальных агентов;
3. интеграция программных комплексов (взаимодействие агентов в сети) [3].

Несмотря на существующие достижения в области создания мультиагентных систем [6], каждая из них является пока скорее результатом программистского искусства, методики тиражирования для применения их в разных предметных областях отсутствуют.

Говоря о концепции построения интегрированных систем на принципах интеллектуального управления, к основным элементам интеллектуальной управляющей инфраструктуры относят следующие [5]:

- Виртуализация и сервис-ориентированная архитектура (SOA).

- Интегрированный комплекс информационных ресурсов (GRID Computing).
- Облачные вычисления и программное обеспечение как сервис (Cloud Computing and Software as a Service)

При этом отмечается, что эффективное применение подобных интеллектуальных управляющих систем возможно только в соответствующих технологических инфраструктурах, требованиям которых реальные инфраструктуры отечественной энергетики не полностью соответствуют. В то же время использование современных информационных технологий увеличивает уязвимость создания интеллектуальных энергетических систем с точки зрения кибербезопасности.

### **КОНЦЕПЦИЯ ИТ-ИНФРАСТРУКТУРЫ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

С учетом сложившейся ситуации коллективом, возглавляемым автором, предложена концепция ИТ-инфраструктуры интеллектуальных энергетических систем, основанная на авторской фрактальной стратифицированной модели и предусматривающая выделение трех базовых слоев: 1) фрактального онтологического пространства знаний в области функционирования и развития энергетических систем; 2) интеллектуальной многоагентной среды (корпоративного облака) для поддержки принятия решений при управлении режимами электроэнергетических систем (ЭЭС); 3) распределенной инструментальной среды, интегрирующей сервисы, на основе авторских прототипов, для семантического моделирования и поддержки принятия решений в ИЭС.

Кроме того, предложено рассмотреть в качестве одного из претендентов для использования в ИЭС концепцию Big Data (Больших Данных) [8], которая может быть более подходящей, чем Grid-компьютинг, учитывая недостаточность телекоммуникаций и необходимость обработки больших объемов данных. По прогнозам, объем обрабатываемых данных при установке необходимого количества датчиков может возрасти в 600 и более раз. BigData - данные большого объема, обработка которых затруднительна в приемлемое время

доступными средствами. Эта концепция включает серию подходов, инструментов и методов обработки структурированных и неструктурированных данных огромных объёмов и значительного многообразия для получения воспринимаемых человеком результатов, эффективных в условиях непрерывного прироста, распределения по многочисленным узлам вычислительной сети и альтернативных традиционным системам управления базами данных

Предложенная концепция ИТ-инфраструктуры интеллектуальных энергетических систем опирается на разработанные ранее авторские методы построения ИТ-инфраструктуры для поддержки междисциплинарных исследований в области энергетики, включающей интеллектуальную, информационную и вычислительную инфраструктуру, интегрируемые с помощью Репозитария [9]. Совместно с энергетиками проработаны вопросы организации информационной инфраструктуры, предложена общая схема организации информационных потоков при мониторинге и управлении режимами интеллектуальной электроэнергетической системы (ЭЭС) [10].

Фрактальное онтологическое пространство знаний в области развития и функционирования энергетических систем разрабатывается на основе авторской фрактальной стратифицированной модели (ФС-модели), включающей слои однотипных информационных объектов и их отображений из любого слоя в каждый при условии сохранения инварианта. Фрактальное онтологическое пространство знаний рассматривается как основа информационной инфраструктуры ИЭС. Разработана методика использования ФС-модели при построении онтологического пространства знаний об интегрированных интеллектуальных энергетических системах. На первом этапе строится метаонтология, описывающая все области знаний, входящие в онтологическое пространство. Далее строятся метаонтологии для каждой области знаний, например, метаонтология интегрированных ИЭС, описывающая онтологии интегрируемых систем энергетики. На следующем этапе строятся онтологии этих энергетических систем, которые, в свою очередь, могут рассматриваться как метаонтологии, если тре-

буется более детальное описание этих систем, вплоть до онтологий отдельных объектов энергетической. Таким образом, фрактальный подход рассматривается как методологический, позволяющий использовать одни и те же способы, приемы и методы при построении разномасштабных онтологий, представляющих знания о предметных областях с разной степенью детальности. Онтологии, в свою очередь, рассматриваются как информационные объекты разной степени детальности, образующие соответствующие слои (уровни декомпозиции), поддерживаемые инструментальными средствами описания (представления) знаний. Переход от одного слоя к другому осуществляется с помощью отображений, поддерживаемых инструментальными средствами управления знаниями. Определены требования к интерфейсу для работы с фрактальным онтологическим пространством знаний и инструментальным средствам его построения [11].

При организации информационной инфраструктуры ИЭС предложено использовать принципы сетцентричности и ситуационной осведомленности для поддержки принятия решений в интеллектуальных энергетических системах. Сетцентричность - принцип организации систем управления, позволяющий реализовать режим ситуационной осведомлённости благодаря формированию и поддержанию единой для всех ярусов управления целостной, контекстной информационной среды (предлагается использовать в качестве такой среды информационную инфраструктуру и методы ее построения, о которых говорилось выше). Ситуационная осведомленность, или *Situational Awareness*, представляет собой «чувственное восприятие элементов обстановки в (едином) пространственно-временном континууме, осознанное восприятие их значения, а также проецирование их в ближайшее будущее» [12]. Ситуационная осведомленность базируется на новом подходе к визуализации геопространственных данных, получившем в нашей стране название «неогеография» (нами используется термин 3D-визуализация).

Реализация принципа сетцентричности позволяет решить проблему непрерывной и высокоточной актуализации данных для всех ярусов управления. При этом важнейшим ус-

ловием успешной поддержки принятия решений является использование одного и того же, не фрагментированного по какому либо признаку информационного образа реальной ситуации всеми ярусами системы управления. При реализации режима ситуационной осведомленности формирование такого информационного образа осуществляется с применением технологии 3D-визуализации.

В соответствии с ФС-моделью разработано математическое описание необходимой при реализации принципа сетцентричности единой информационной среды как информационного пространства данных и знаний, включающего слои: исходных данных и знаний, данных и знаний для обоснования решений, геоданных для визуализации решений, слои данных и знаний для выработки и реализации решений. Построены отображения из любого слоя в каждый (9 типов отображений) и определены необходимые инструментальные средства для поддержки описаний и отображений данных и знаний [13]. Реализован геокомпонент для 3D-визуализации в энергетике, проверена его работоспособность на примере решения ряда энергетических задач [14].

### **АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРИМЕНЕНИЯ СОВРЕМЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ИЭС С УЧЕТОМ ТРЕБОВАНИЙ КИБЕРБЕЗОПАСНОСТИ**

В ходе анализа выявлено, что применение современных информационных технологий несет новые риски, например:

- Повышенная сложность сети повышает количество уязвимостей для потенциальных атак и непреднамеренных ошибок.
- Сети, взаимосвязанные с другими сетями, которые также могут занимать несколько «умных» доменов сети, увеличивают вероятность каскадных аварий.
- Большое количество взаимосвязей программных компонентов увеличивает уязвимость программного кода, что упрощает злоумышленникам внедрение в программный код вредоносного кода и уязвимостей.
- По мере увеличения узлов сети увеличивается и число точек входа в систему для

злоумышленников.

- Использование новейших технологий - это новые риски.

Так, в разработанной концепции ИЭС ААС России широко декларируется мультиагентный подход к построению системы управления энергосистемами, но не уделяется достаточное внимание тому, что мультиагентная система управления энергосистемой будущего должна обеспечивать надежное и безопасное функционирование и управление и не должна становиться «слабым звеном» энергетики. Проблема надежности и безопасности мультиагентной системы управления (МСУ) состоит в первую очередь в противоречии между основными принципами организации МСУ (ее открытости к большим потокам разнородных данных от разнородных источников и возможности подключения новых типов агентов) и требованиями по безопасности работы системы управления, в первую очередь, по отношению к намеренным кибератакам.

Таким образом, МСУ является принципиально уязвимой с точки зрения кибербезопасности, и необходимы новые способы обеспечения ее безопасности и устойчивости по отношению к некачественным и недружественным данным. Для этого она должна быть защищена по отношению к возможным кибератакам и уметь эффективно работать в условиях поступления сверхбольших потоков данных разного качества и достоверности. В противном случае уязвимая система управления станет причиной крупных техногенных аварий.

Все вышесказанное относится и к облачным вычислениям [15]. Основная уязвимость облачных вычислений - необходимость удаленного хранения пользовательских данных и отсутствие гарантий безопасности данных.

Представляется, что частичное снижение рисков может быть достигнуто при ориентации на отечественные технологии. В связи с этим нами рассматриваются как претенденты два варианта отечественных разработок. Первый - инструментально-технологическая среда CLAVIRE, разработка национального исследовательского университета Информационных технологий, механики и оптики (ИТМО), г. Санкт-Петербург

[16]. CLAVIRE реализует облачные технологии второго поколения, особенностями которых являются: создание композитных приложений, интеллектуальная поддержка поиска и применения сервисов, динамическое управление производительностью сервисов, гибкая интеграция с системами реального времени. Композитные приложения строятся на базе существующих программ (например, таких, как проблемно-ориентированные приложения, выделенное хранилище данных или общедоступный Web-сервис), дополненных новой функциональностью и объединенных с помощью единого интерфейса. Главное заключается в том, что пользователь получает совершенно прозрачный доступ к информации независимо от сложности среды ее хранения. CLAVIRE включает интеллектуальный конструктор для разработчика приложений, автоматизированные средства встраивания прикладных пакетов, что позволяет интегрировать локальное программное обеспечение и сервисы в рамках облачной инфраструктуры, а также средства защиты композитных приложений: защиту от нелегитимного пользователя и некорректных действий легитимного пользователя.

Второй претендент - платформа, реализованная как комплекс программных средств (облачных сервисов), разработанный в лаборатории интеллектуальных систем Института автоматики и процессов управления (ИАПУ) ДВО РАН (Владивосток). Эта платформа позволяет создавать и сопровождать профессиональные виртуальные облачные среды на основе декларативного подхода с включением в процесс разработки экспертов предметной области. Предложена технология проектирования и сопровождения профессиональных виртуальных сред с использованием разработанных программных средств. Разработанные виртуальные среды и программные средства для их разработки и сопровождения доступны для использования на платформе IACPaaS (Intellectual Applications, Control and Platform as a Service) как облачные сервисы [17].

В настоящее время выполняется сравнение этих платформ, с целью формирования рекомендаций по их использованию при разработке архитектуры и принципов построения

интеллектуальной многоагентной среды как облака и технологии ее применения для поддержки принятия решений при моделировании и мониторинге режимов ЭЭС.

Возможные решения по организации взаимосвязи агентов отрабатывались в ходе разработки, под руководством автора, мультиагентной системы по оцениванию состояний ЭЭС с учетом структурной и функциональной декомпозиции [18]. Рассматривались возможности организации связей между агентами с использованием оригинальных средств событийного моделирования, а также возможности использования онтологий при разработке мультиагентной системы с позиций ODA (Ontology Driven Architecture - архитектуры, управляемой онтологиями).

При разработке архитектуры и принципов построения интеллектуальной многоагентной среды для семантического моделирования и поддержки принятия решений в ИЭС, в качестве основы предложено использовать методы построения и архитектуру интеллектуальной ИТ-среды, разработанную авторами ранее для поддержки принятия решений в исследованиях и обеспечении энергетической безопасности (ЭБ). Интеллектуальная ИТ-среда интегрирует инструментальные средства для онтологического, когнитивного и событийного моделирования [19], для моделирования с помощью Байесовских сетей доверия (БСД-моделирования) [20] и геокомпонент для 3D-визуализации [14]. Предлагается применить двухуровневую технологию поддержки принятия решений, отработанную в исследованиях ЭБ, для поддержки принятия решений в ИЭС: на первом уровне выполняется качественный анализ ситуации и выбирается вариант ее развития, а на втором выполняются детальные расчеты для обоснования предлагаемого решения с использованием традиционных программных комплексов [21].

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

При реализации концепции Smart Grid в России возникает ряд проблем. Автор сосредотачивает внимание на проблемах применения в интеллектуальных энергетических системах современных информационных технологий, в первую очередь, интеллектуальных, агентных

и облачных вычислений, а также концепции Big Data - больших данных. Существует противоречие между необходимостью применения современных ИТ и их уязвимостью с точки зрения кибербезопасности. Обращается внимание на необходимость как развития и применения отечественных разработок, так и на усиление работ в области обеспечения кибербезопасности критически важных инфраструктур, одной из которых является энергетика. Предлагается использовать методы и технологии, разработанные под руководством автора и апробированные в исследованиях энергетической безопасности, для создания ИТ-инфраструктуры интеллектуальных энергетических систем.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Результаты, представленные в статье, получены при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ № 13-07-00140, № 12-07-00359, гранта Программы Президиума РАН № 229, а также грантов интеграционных проектов СО РАН № 145, СО РАН и НАН Беларуси №18.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кобец Б.Б., Волкова И.О. Инновационное развитие электроэнергетики на базе концепции Smart Grid / М.: ИАЦ Энергия, 2010. 208 с.
- [2] Воропай Н.И. Интеллектуальные электроэнергетические системы: концепция, состояние, перспективы // Автоматизация и ИТ в энергетике. №3. 2011. С. 11-16.
- [3] Массель Л.В. Проблема построения интеллектуальных и программных компонентов Smart Grid и подход к ее решению на основе агентной технологии / Материалы XL Международной конференции «Информационные технологии в науке, образовании, телекоммуникации и бизнесе» // Приложение к журналу «Открытое образование», Украина, Крым, 2012. С. 22 - 25.
- [4] Массель Л.В. Использование современных информационных технологий в Smart Grid как угроза кибербезопасности энергетических систем России / Труды Международной конференции «Кибербезопасность-2013». Украина, Киев: Институт специальной связи и защиты информации НТУ Украины «КПИ», 2013. С. 56-65.
- [5] Егоров А.А. Интеллектуальная энергетика: мифы и реальность // Автоматизация и ИТ в энергетике. №3. 2011. С. 17-22.
- [6] Рассел С., Норвиг П. Искусственный интеллект: современный подход, 2-е издание.: Пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. 1408 с.
- [7] Массель Л.В. Интеллектуализация поддержки принятия решений при моделировании и управлении режимами в Smart Grid // Интеллектуализация обработки информации: Труды 9-й Международной конференции. Черногория, Будва, 2012. С. 692-695.
- [8] Майер-Шеренберг В., Кеннет Кукьер. Большие данные. Революция, которая изменит то, как мы живем, работаем и мыслим. М.: «Манн, Иванов и Фербер». 2013.
- [9] Копайгородский А.Н., Массель Л.В. Методы, технологии и реализация хранилища данных и знаний для исследований энергетики / Вестник Южно-Уральского государственного университета, №4 (221), 2011, серия «Математическое моделирование и программирование», вып. 7. С. 47-55.
- [10] Массель Л.В., Колосок И.Н., Гурина Л.А. Обработка информационных потоков при мониторинге и управлении режимами интеллектуальных электроэнергетических систем / Вестник ИрГТУ . №2 (73). 2013. С. 30-35.
- [11] Массель Л.В., Ворожцова Т.Н, Копайгородский А.Н., Макагонова Н.Н., Скрипкин С.К. Применение онтологий в исследованиях и поддержке принятия решений в энергетике / Знания-Онтологии-Теория (ЗОНТ-13). Том 2. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2013. С. 29-38.
- [12] Endsley, M.R. (1997) The Role of Situation Awareness in Naturalistic Decision Making. In C. Zambock & G. Klein (Eds.), Naturalistic Decision Making (pp. 269-284). Mahwah, NJ: LEA
- [13] Массель Л.В., Иванов Р.А., Массель А.Г. Моделирование этапов принятия решений на основе сетевцентрического подхода / Вестник ИрГТУ . №10 (81). 2013. С. 16-22.
- [14] Иванов Р.А. Методика 3D-визуализации для поддержки принятия решений в энергетических исследованиях // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2013. №1(37). С. 116-121.
- [15] Риз Дж. Облачные вычисления. Спб: BHV, 2011. 288 с.
- [16] Бухановский А.В. и др. CLAVIRE: перспективная технология облачных вычислений второго поколения // Известия высших учебных заведений // Приборостроение. 2011. № 10. С. 7-13.
- [17] Грибова, В.В., Клещев А.С. и др. Облачная платформа для разработки и управления интеллектуальными системами // Материалы международной научно-технической конференции OSTIS-2011. Минск: БГУИР. С. 5-14
- [18] Гальперов В.И., Колосок И.Н., Массель Л.В., Пальцев А.С. Разработка мультиагентной системы для оценивания состояний ЭЭС с учетом структурной и функциональной декомпозиции // Информационные и математические технологии в науке и управлении / Труды XVIII Байкальской Всероссийской конференции «Информационные и математические технологии в науке и управлении». Часть III. Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2013. С. 231-234.
- [19] Массель Л.В., Массель А.Г. Семантические технологии на основе интеграции онтологического, когнитивного и событийного моделирования / Материалы III международной научно-технической конференции «OSTIS-2013» Беларусь, Минск: БГУИР, 2013. С. 247-250.

- [20] Массель Л.В., Пяткова Е.В. Применение байесовских сетей доверия для интеллектуальной поддержки исследований проблем энергетической безопасности. Вестник ИргТУ. №2. 2012. С. 8-13
- [21] Массель Л.В., Массель А.Г. Интеллектуальные вычисления в исследованиях направлений развития энергетики // Известия Томского политехнического университета. 2012. Т. 321. № 5. Управление, вычислительная техника и информатика. С. 135-141.

## ICT MARKET ANALYSIS DATA CONCERN INTEROPERABILITY WITH FOCUS ON CONCEPTUAL BARRIERS

---

*In order to improve and enable efficient interaction between education, research and innovation in the ICT area, referred to as a „knowledge triangle“, this paper propose the novel idea of introducing the market analysis and placing it in this triangle centre. Data collected from the ICT market, considered as „knowledge confirmed on the market as reality“, are analyzed from the point of triangle participants needs. The main challenge lies in numerous data sources and heterogeneity. The interoperability problem is analyzed, using barrier driven methodology and focusing on conceptual barriers, which are concerned with syntactic and semantic incompatibilities of information to be exchanged.*

---

### INTRODUCTION

In the last decades, science and technology have experienced an impressive advance. The new markets and/or the new products, such as new technologies, services or skills emerged. There is no doubt that the contribution of the ICT sector to GDP and employment has become more and more important (OECD 2001). The Lisbon agenda can be seen as the embodiment of a common model of socio-economic development, or a “world script”, with an emphasis on science based innovation as the engine of economic development and education as a necessary investment in human capital. This script is contained in core political buzzwords such as “knowledge-based economy”, “the Knowledge Institution”, and “the New Economy” [1]. The Lisbon Strategy aims at developing Europe into one of the strongholds of the new knowledge economy through the “Knowledge Triangle”, whose nodes are higher education, research, and innovation.

Even though Europe is strong in ICT research, it lags behind other regions in turning research results to practice that is so-called innovation paradox. One of the numerous visible initiatives to overcome this paradox is the one that comes from EIT ICT Labs aiming to facilitate the integration of **the “Knowledge Triangle”** three sides: higher education, research and business. **EIT ICT Labs** is one of the first Knowledge and Innovation Communities set up by the European Institute of Innovation and Technology, as an initiative of the European Union.

The reasoning behind the proposed model development is in line with Nunamaker, Chen et al. (1990) who classify design science in Information Society as applied research that applies knowledge to solve practical problems. Problem-solving finding was carried out by adopting the barrier driven approach, aiming to detect and overcome the spotted barriers on every stage of designing process.

At the first stage of the model design in this paper, the overall business and technology framework was described with three main characteristics, which are considered as barriers to overcome. The first, *industry clockspeed*, is characteristic essentially driven by technological change and competition. The term is coined by Charles Fine (1998), showing that different industries and segments of them have their own pace of change in the life cycles of their products, production processes, structural makeup and CEO tenure. The second characteristic of today’s business landscape is its *complexity*. According to Hodgson (2003), capitalism naturally leads to more complexity expressed as growing diversity of interactions between human beings and between people and their technology. At last, according to Wytenburg (2001, p.118) that “the greater the degree of complexity in an environment is, the more various, dynamic, and unpredictable are those situations”, the growing *uncertainty* appeared as the third characteristic. Like every conceptualization, the business model concept aims at representing reality in a structured, simplified and understand-

---

<sup>1</sup> Mineco-Computers, Belgrade, Serbia



able way, which could eventually help to better adapt to changes and to be better prepared for the future [2].

This paper is based on proposed novel concept, accomplished by innovation of the “Knowledge Triangle” in the ICT area. Innovation of “ICT Knowledge Triangle”, achieved by insertion of ICT market into its centre, enables the feedback among market, business, education and research. In the process of modeling the innovated ICT “Knowledge Triangle”, the focus is on modeling the ICT market analysis, with respect to the whole concept.

Due to the nature of ICT market analysis business process, which is primarily dealing with data and information, semantic interoperability based on ontologies approach is adopted [3].

Further research focused on registry model that relies on modern concepts of data structuring

based on ontologies. Chosen concept requires creating domain ontology for particular area of ICT market analysis [4]. Following, in this paper, is presentation and description of the model architecture for semantic data integration for ICT market analysis.

**MODEL FOR DATA INTEGRATION**

Solution development accomplished through barrier driven methodology resulted in adoption of combined approach. Consequently, both the integration of the existing information stored in relational database and MS Office Word and Excel files (“bottom up” approach) and developing new database are included (“top down” approach). Developing new database requires creating domain ontology. Proposed model is presented in the Figure 1 below:

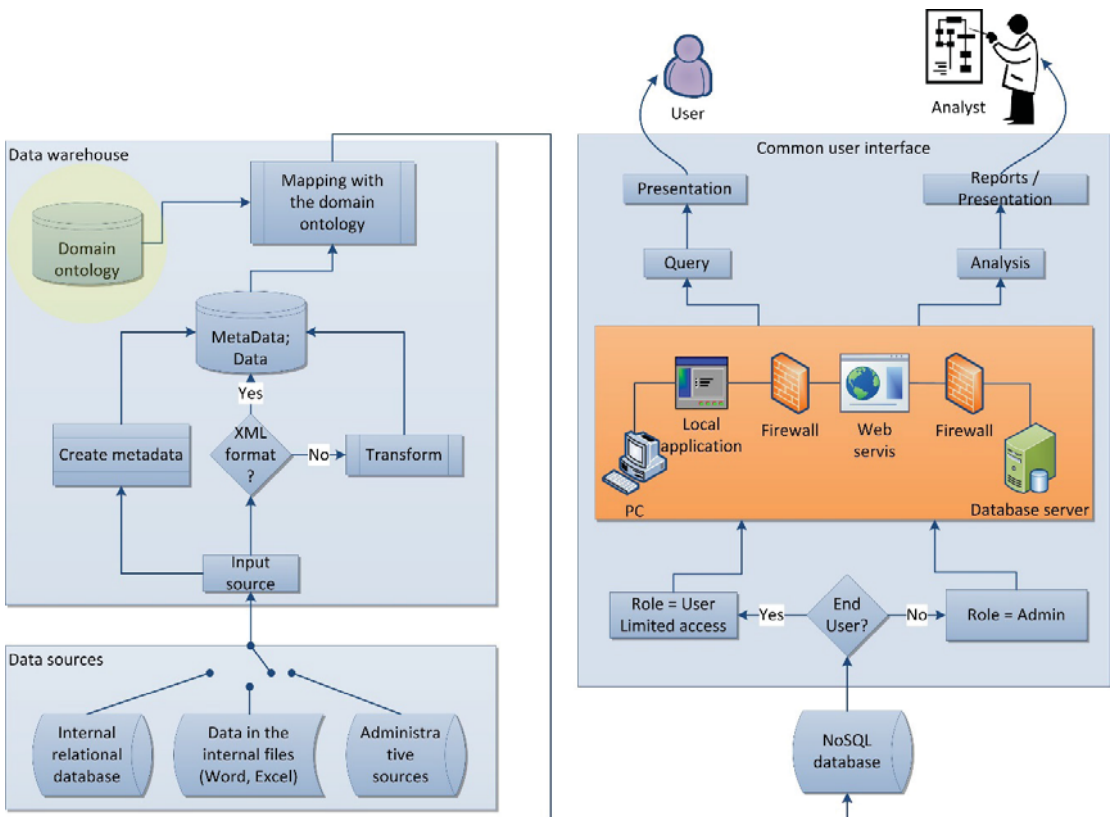


Fig. 1. Model for Data Integration

Three main layers can be distinguished from the picture: Data Sources, Data Warehouse and Common User Interface. Separated NoSQL database is

the “output” for data warehouse and the “input” for the common user interface and presentation level.

- **Data Sources** - In the proposed model, the main spotted barrier was incompatibility of existing data sources, so the sources are classified into three groups: Relational database; MS Office Word and Excel files and administrative sources (Serbian Business Registers Agency -SBRA, Statistical Office of Republic of Serbia, National Bank of Serbia - NBS). Each source group is analyzed separately.
- **Data** - The first requirement for any data integration is syntactic interoperability [5]. To achieve compatibility on heterogenic data, format for each data source is checked. XML format is proposed as standardized and commonly used format that is both human-readable and machine-readable. After this step, data from all existing sources are stored in a common database in XML format.
- **Data Warehouse** - is a collection of data which is organized to enable easy analysis, extraction, merge or other use of data for better understanding data essence. This data are called "information data" in the contrary to the operational data in transactional (usually relational) databases. Two steps are accomplished to obtain "information data": (1) metadata creation for each source and storing in the common database together with XML data and (2) mapping the data from common database with the domain ontology for ICT market analysis.
- **Metadata** - or data about data include description of data elements (data types, data attributes, domain description, names, size and allowed values); data about data sources and data warehouse, authorizations for data access, business rules, etc. Metadata are the key for obtaining accurate, consistent information and for the system maintenance.
- **NoSQL Database (proposed Graf Database)** - People that are coming from traditional IT environment are used to idea of storing data in hierarchical (as XML) or relational Data Base (MySQL, MS SQL). In most cases, this concept is assuming that some elements are of more importance than the others are. Graf concept, and thus the Graf Database, consists of resources (nodes) in relation with other resources (nodes), irrelevant to their particular

importance.

- **User interface** - enables user to access data which are stored at local hosted NoSQL database in the model architecture on Figure 1. In the proposed model user data access is enabled through Web services.
- **Analysis and presentation** - NoSQL database is the starting point for different types of data analysis, as the results of data analysis should be delivered to the users. Access to data is enabled through the Web services. Although different type of users require different analytical and presentation tools, they can access the same, common database. The predefined *user role* defines the authorization level for accessing data. The basic analytical level is when user creates his own queries over data. From the existing categories of e-commerce applications [6] following are planned for the proposed model:
  - *Applications for reporting* - enable statistical and parametrized reports.
  - *Ad hoc queries and reporting* - enable user the highest level of interaction with data through offering number of techniques for data selection and navigation. *Applications for analysis* - also support ad hoc data search, but enabling realization of much complex multidimensional queries (with time/vendor/ buyer/product/ dimension).

## SEMANTIC DATA INTEGRATION IN THE PROCESS OF ICT MARKET ANALYSIS

Unlike other technologies, which are dealing with data structure, the semantic technologies put the accent on understanding data. *W3C Semantic Web* is defined as Web of data, which is providing unique framework for sharing data among applications, entities and community [7].

Many authors suggest different definitions of Semantic Web. Some of the new theories consider Semantic Web as a web of information that can be used for operational work [8] and even more, Semantic Web technologies fit for solving the open-ended problems.

From two main distinguished approaches toward integration of semantic data interoperability and classification of semantic interoperability models

[9], so-called *material integration - Data Warehouse* and *decentralized "all to one"* semantic interoperability model, are adopted for the purpose of the proposed model for ICT market analysis. This integration approach and semantic interoperability

model secure ontology mapping rules that include semantic and concepts of all present sources, while integration logic is distributed. Dimensions of proposed integration model are presented in the Table 1.

**Table 1.** Dimensions of proposed integration model

Dimension of B2B integration	Dimension value	
Common NoSQL Database	Database hosted on the local server	
Common NoSQL DB Ownership	Ownership of Database creator	
Application types for user interface	Windows application; Web applications	Vertical Portal
Realization of application integration	Web Services and Service Oriented Architecture	
Permission to access data	Limited access search and query (role: user)	Unlimited access (role: Administrator)
The way of using data	Query; data analysis, generating reports, without storing data in database	
Periodicity	Arbitrary, when needed; ad hoc	

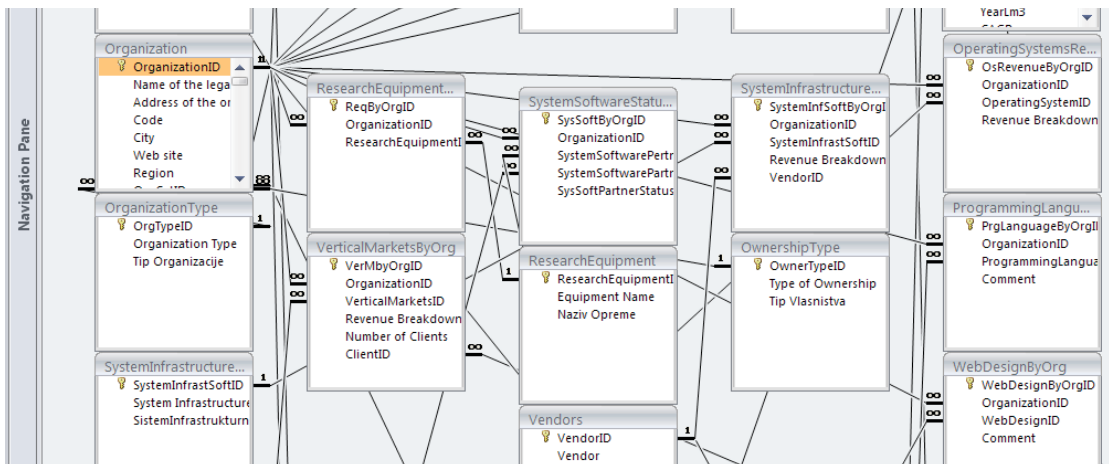
**ANALYSIS OF DATA AND DATA SOURCES FOR ICT MARKET RESEARCH**

Data sources are analyzed from the point of detected barrier: source dissimilarity.

Existing sources are divided into 3 characteristic groups: relational DB, files, and administrative sources. Data analysis includes understanding the present data state, precise data definition, data

architecture. The whole analysis is conducted from the point of data application, where data structure, logical and physical data model and data definition are necessary to have.

The example of existing relational database structure is relationships among tables on the Figure 2, while the Figure 3 presents the fields structure of the particular table *Organization*.



**Fig. 2.** Relationships among tables

**PROCESS OF DESIGNING DOMAIN ONTOLOGY**

The ontologies are explicit formal specifications of the terms in the domain and relations among them (Gruber 1993). The Artificial-Intelligence literature

contains many definitions of ontology [10] [11]; many of these contradict one another. For the purposes of this paper an ontology is a formal explicit description of concepts in a domain of discourse

(*classes* (sometimes called *concepts*)), properties of each concept describing various features and attributes of the concept (*slots* (sometimes called *roles* or *properties*)), and restrictions on slots (*facts* (sometimes called *role restrictions*)). Ontology together with a set of individual instances of classes constitutes a *knowledge base*. In reality, there is a fine line where the ontology ends and the knowledge base begins. Ontologies has been moving from the realm of Artificial-Intelligence laboratories to the desktops of domain experts and become common on the World-Wide Web.

Field Name	Data Type	
OrganizationID	AutoNumber	
Name of the legal entity	Text	
Address of the organisation	Text	
Code	Text	
City	Text	
Web site	Text	
Region	Text	
OrgCatID	Number	
OrgTypeID	Number	
NACE code	Text	
Full time Employees	Number	
Full time Female Employees	Number	
Year of Establishment	Text	
Registry Number	Text	
VAT No	Text	
OwnerTypeID	Number	
History of the organisation	Memo	
Organisation Structure and Key	Memo	
Description of organisation's a	Memo	
Research and Development ac	Memo	
NoEmployees Total	Number	2.1 Human: Staff Breakdown
In-House Development	Number	
Service	Number	
Sales	Number	
Other	Number	
Employed programers	Number	2.2 Employees programers
Programers on contract	Number	
Number senior RD staf	Number	2.3 Researcher & Developpe
Number of junior RD staf	Number	
Employees Certifications	Memo	
Company Certifications	Memo	
Existing expertise	Memo	
Major Infrastructure Research	Memo	
Calculation Base	Number	Base to calculate % - source
Total revenue from export	Number	SECTION 4: Financial resour

General	
Field Size	Long Integer
New Values	Increment
Format	
Caption	
Indexed	Yes (No Duplicates)
Smart Tags	
Text Align	General

Fig. 3. Fields structure for the table Organization

Ontology defines a common vocabulary for researchers who need to share information in a domain. It includes machine-interpretable definitions of basic concepts in the domain and relations among them. The main reasons for developing ontology are: (1) to share common understanding of the structure of information among people or software agents (Musen 1992; Gruber 1993); (2) to enable reuse of domain knowledge; (2) to make domain assumptions explicit; (3) to separate do-

main knowledge from the operational knowledge (McGuinness and Wright 1998); (4) to analyze domain knowledge.

Basic questions for creation of ICT market analysis ontology and corresponding answers are:

- Which domain should ontology cover? - Domain of ICT market analysis (additional specification of the ICT market area is needed).
- For what purpose will ontology be used? - For faster and semantically rich data analysis in the process of ICT market analysis (and for the other entities in "ICT Knowledge Triangle")
- What type of questions should ontologies answer? - Who? What? How much? sells/buys or offers/requires from products, services, expertise, skills, etc. (information needed for innovated "ICT Knowledge Triangle" members)
- Who will use and maintain the ontology database? At the beginning the analytical enterprise will use and maintain the ontology and ideally - anyone who would find it useful or interesting.

The questions that should keep in mind, too, are: does ontology contain enough information to answer assumed questions? Do the answers require some particular level of detail?

In semantic modeling, the following are important terms: *Vocabulary* - A collection of terms given a well-defined meaning that is consistent across contexts and *Ontology* - Allows you to define *contextual relationships* behind a defined vocabulary. It is the cornerstone of defining a knowledge domain. A formal syntax for defining ontologies is OWL (Web Ontology Language) [12], which is an extension to RDFS (RDF Schema) [13].The primary purpose of ontology is to classify things in terms of semantics, or meaning. In OWL, this is achieved by using *classes* and *subclasses*, *instances* of which in OWL are called *individuals*.

Diagram for the process of designing domain ontology for ICT market analysis, based on the methodology for creating ontology from Stanford university [14] is presented in the Figure 4.

In the proposed method for designing domain ontology the combined approach is accepted, which overcomes the barriers resulting from dif-

ferent sources. Combined approach specifies the most generalized, „top-level” concepts as *classes* and define all the belonging subclasses (*top-down* approach). Proposed model starts from creating most generalized concepts - classes such as: *Business\_Entity*, *Portfolio*, *Human\_Resources*. In the next step the class hierarchy (subclasses) is created like *Business\_Entity/Seller*; *Business\_Entity/Finances*; *Business\_Entity/General\_Data* OR *Human\_Resources/Ekspertise*, *Human\_Resources/Education\_Level* or *Portfolio/Goods*, *Portfolio/Services*. At the same time, the most specialized classes (instances) are identified at the lowest conceptual level and afterwards upper classes created, as for example, for the particular software *MS\_Office\_Excel\_2013/Microsoft/Brand/Application\_Software/Software* OR *HP1120/HP/Brand/Hardware/Portfolio/Business\_Entity*.

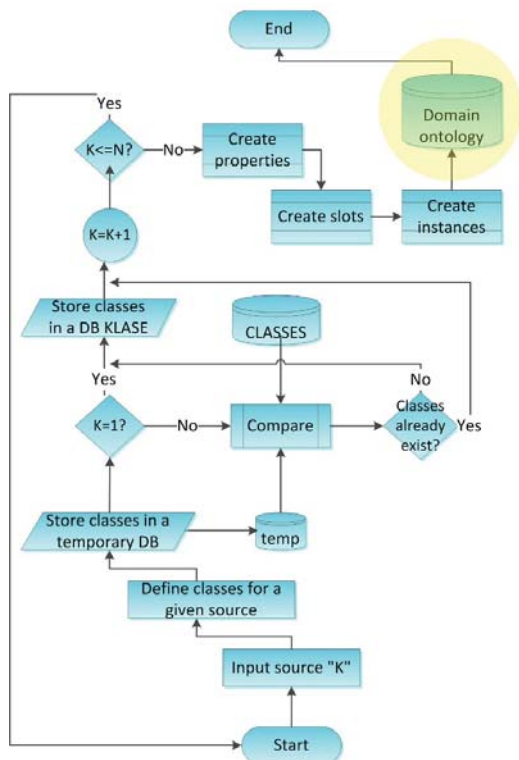


Fig. 4. Diagram for the process of designing domain ontology

As seen from the diagram above, for each source input the set of classes and subclasses is created. At the end of the process, all the classes, which describe every input source, should exist.

After creating all the classes and their hierarchy subclasses the next step is *defining properties*. *Class properties* or *slots* are descriptions of the internal structure of concepts, as the classes alone will not provide enough information to answer the competency questions. All subclasses of a class inherit the slot of that class. Then the *facets* of the slots are defined.

Slots can have different facets describing the value type, allowed values, the number of the values (cardinality), and other features of the values the slot can take.

A value-type facet describes what types of values can fill in the slot (more common value types are: String, Number, Boolean, Enumerated, Instance).

## CONCLUSION

Successful commercialization involves a number of critical factors such as links between technological discoveries and opportunities, demonstration of technology, resources and equity, market acceptance and selection of proper business development. The market analysis is seen as being a powerful tool for self-assessment, which helps to identify the most promising approach from amongst several possible technologies. Market is the most realistic check of sustainable growth and development through testing and selecting present needs for goods, services and skills, and creating new demands. It suggests direction for innovation and research as well as skill and education profile requirements that are in line with market needs and trends.

Understanding the role and importance of knowledge and innovation in the modern society, the presented work starts with the innovation of “ICT Knowledge Triangle” and focuses on the process of ICT market analysis. Relying on modern concepts of data structuring based on ontologies, this paper presents the model of architecture based on semantic data integration. This model requires creation of domain ontology for ICT market analysis. The procedure for creating domain ontology presented in this paper relies on methodology for creating ontology from Stanford University.

The proposed novel concept has advantages for the few main reasons: it is practical, it is pragmatic, it is not expensive, it does not include extra governance (and extra money for governance and

supervision bodies) as it simply joins and connects existing resources (enabling efficient and understandable communication). It is simple in the concept. The realization can start from the simple model and develop in accordance to the reality providing the market feedback to all "ICT Knowledge Triangle" members.

## REFERENCES

- [1] Meyer, J. W. (2000). Globalization - Sources and effects on national states and societies. *International Sociology*, 15(2), 233-248.
- [2] A. Osterwalder, "The Business Model Ontology A Proposition in a Design Science Approach", These, Universite de Lausanne, 2004.
- [3] M. M. Matijević, M. D. Matijević, "Semantička interoperabilnost u procesu istraživanja tržišta informacionih i komunikacionih tehnologija", XIII Međunarodna konferencija *E-trgovina* 2013, Srbija, Palić, 24.-26. april 2013.
- [4] M. M. Matijević, M. D. Matijević, Svetlana Jevremović, "Semantička interoperabilnost podataka u istraživanju IKT tržišta zasnovana na ontologijama", Zbornik radova *Infotech*, Aranđelovac, 2013.
- [5] Kim H. Veltman, "Syntactic and Semantic Interoperability: New Approaches to Knowledge and the Semantic Web", Initially written for Dublin Core Meeting in 2000 which rejected the article. Published: *The New Review of Information Networking*, vol. 7, 2001.
- [6] Bogdanović, Z., Despotović M., Miloradović N., Radenković B., *Poslovna inteligencija u e-obrazovanju*, Etran 2007, Igalo 2007.
- [7] W3C, "W3C Semantic Web," 2011. [Online]. <http://www.w3.org/standards/semanticweb/>
- [8] N. Shadbolt, W. Hall, and T. Berners-lee, "The Semantic Web Revisited," *IEEE Intelligent Systems*, vol. 21, no. 3, pp. 96-101, May 2006.
- [9] G. Vetere, M. Lenzerini, "Models for semantic interoperability in service-oriented architectures", *IBM Systems Journal*, 44(4), pp. 887-903, 2005.
- [10] M. Uschold, M. Gruninger, "Ontologies: Principles, Methods and Applications" *Knowledge Engineering Review*, 11 (2), 93-136, 1996.
- [11] T. C. Jepsen, "Just What Is an Ontology, Anyway?," *IT Professional*, vol. 11, no. October, pp. 22-27, 2009.
- [12] G. Antoniou and F.V. Harmelen, "Web Ontology Language: OWL", Presented at *Handbook on Ontologies*, 2004, pp.67-92.
- [13] W3C, "RDF Schema," 2004. [Online]. Available: <http://www.w3.org/2001/sw/wiki/RDFS>.
- [14] N. F. Noy, D. L. McGuinness, "Ontology Development 101: A Guide to Creating Your First Ontology", *Knowledge Systems Laboratory*, Stanford University, CA, 2001.

## RESTORATION OF THE WAVE EVALUATION THROUGH GIVEN PRESSURE INSIDE THE LIQUID IN FRAME OF THIRD-ORDER SURFACE WAVE THEORY

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВОЗВЫШЕНИЯ ВОЛНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПО ЗНАЧЕНИЯМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ В ТОЛЩЕ ЖИДКОСТИ В РАМКАХ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ТРЕТЬЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

---

*In our study, we examined both theoretically and experimentally the ability to restore the elevation of the free surface, using the data for the pressure within the fluid in the case of nonlinear periodic waves. We have seen how the wave surface elevation restores using two different third approximations of Stokes theory of waves on water. We compared obtained numerical results with experimental data. Results of analysis show clearly that theoretical results describe satisfactory the physics of the problem.*

---

### ВВЕДЕНИЕ

При решении многочисленных задач гидродинамики, проектировании гидротехнических сооружений, исследовании имеющихся условий в акваториях, как правило, необходимо знать основные кинематические и динамические характеристики волнового режима в заданных точках акваторий. Среди них - высота волны, ее период, длина волны, горизонтальные и вертикальные составляющие волновой скорости на различных глубинах, давление внутри жидкости.

Измерение перечисленных характеристик в натуральных условиях и в условиях физического моделирования имеет ряд особенностей. Как правило, гидродинамическое давление в жидкости может быть измерено с достаточно высокой точностью. Опытное определение ординат возвышения свободной поверхности, более трудоемко, особенно в натуральных условиях, и, как правило, осуществляется непрямыми методами.

В связи с этим возникает инженерная задача о восстановлении возвышения свободной волновой поверхности по опытным данным о гидродинамическом давлении на глубине. Для решения данной задачи необходимо создание адекватной математической модели, надежно увязывающей указанные величины между собой.

### АКТУАЛЬНОСТЬ

Задача восстановления возвышения свободной поверхности по значениям гидродинамического давления для коротких волн получила свое инженерное решение [1]. Однако, для подтверждения достоверности предложенных в [1] методов необходима их дополнительная верификации в условиях защищаемых акваторий для глубин до 30 метров. Так как в настоящее время в прибрежной зоне осуществляется строительство большого числа сооружений, требуется надежный учет характеристик волн, проникающих на акватории.

Непосредственное измерение высоты периодических волн на поверхности воды в условиях открытых акваторий по многим причинам затруднено. Как правило, выполняют измерения колебаний давления в толще воды на фиксированной глубине, поскольку такое измерение легче организовать и выполнить. Для того чтобы по показаниям датчика давления определить, какой

---

1 Saint-Petersburg State University, St. Petersburg, Russia

2 23th State Marine Design Institute, Branch of the 31th GPISS, St. Petersburg, Russia

3 St. Petersburg State Polytechnical University, St. Petersburg, Russia

высоты прошла волна на поверхности воды, необходимо иметь надежные формулы для пересчета, связывающие его показания с возвышением свободной поверхности жидкости.

В данной работе рассмотрена возможность использования для этих нужд теории Стокса распространения волн. Решение задач гидродинамики в ее рамках отыскивается в виде функциональных рядов, получаемых разложением по малому параметру. При практическом применении теории Стокса осуществляется замена точного решения (представленного в виде бесконечного ряда) его приближением заданного порядка (ряды представляются в виде суммы конечного числа их членов). Наибольшее распространение получили модели первого и третьего порядков.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Разложение в ряд в рамках теории Стокса может быть выполнено не единственным образом [5]. В настоящей работе рассмотрена задача восстановления высоты волны на поверхности воды по измеренному размаху давления на глубине, осуществляемого в рамках двух разных приближений третьего порядка.

Используются следующие исходные положения. Известны значения размаха гидроволнового давления  $\Delta p$  на фиксированной известной глубине  $z$ , известен период волны  $T$ , известна полная глубина  $d$  толщи воды. Требуется определить высоту волн  $h$  в рамках третьего приближения к стоксовой теории. Такая постановка задачи соответствует практической ситуации косвенных измерений высоты волн  $h$  на поверхности жидкости по результатам прямых измерений размаха гидродинамического давления  $\Delta p$  на фиксированной глубине  $z$ . Величину периода  $T$  легко получить из показаний того же датчика давления.

Принятые обозначения представлены на рисунке 1.

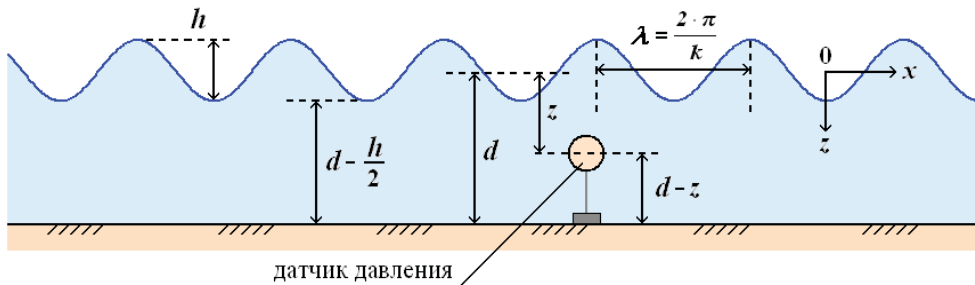


Рис. 1. Принятые обозначения модели волн на поверхности жидкости.

Для приближений стоксовой теории распространения волн на поверхности воды, как правило, используются разложения в ряд по степеням величины  $kh$  [6] (крутизна волны), где  $h$  - высота волны,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  - волновое число,  $\lambda$  - длина волны.

Первое приближение (линейное) к стоксовой теории хорошо известно [1]. Из него могут быть получены следующие простые формулы для описания взаимосвязи между  $h$  и  $\Delta p$ :

$$\Delta p = 2 \rho g \varepsilon \frac{ch k (d - z)}{ch k d}, \quad (1)$$

$$h = 2 \varepsilon, \quad (2)$$

где  $\rho$  - плотность жидкости,  $g$  - ускорение свободного падения,  $d$  - полная глубина в месте установки датчика давления,  $\varepsilon = \frac{h}{2}$  - амплитудный множитель.

В уравнении (1) содержатся две неизвестные величины - волновое число  $k$  и малый параметр  $\varepsilon$ . Чтобы определить их, необходимо задать еще одно уравнение. Для этого используется дисперсионное соотношение, имеющее для приближения первого порядка следующий вид:



$$T^2 g k \operatorname{th} kd = 4 \pi^2. \quad (3)$$

Поскольку период волны  $T$  полагается известным, из уравнения (3) может быть определено значение  $k$ , а затем из уравнения (1) - значение  $\varepsilon$ . Таким образом, будет найдено значение высоты волны  $h$ .

Задачу о восстановлении высоты волны  $h$  по показаниям размаха гидродинамического давления  $\Delta p$  на глубине можно считать обратной задачей. При небольших измеренных значениях  $\Delta p$ , в ситуации, когда их погрешности значительны, задача может стать плохо определенной, поэтому расчеты в рамках соотношений (1)-(3) требуется выполнять аккуратно и с учетом неопределенности исходных данных; в противном случае результаты могут оказаться недостоверными.

Третье приближение [2] к стоксовой теории добавляет к правым частям выражений (1)-(3) уточняющие слагаемые. Взаимосвязь между значениями  $h$  и  $\Delta p$  в его рамках определена соотношениями

$$\Delta p = \rho g \left[ 2 \varepsilon \frac{ch k (d-z)}{ch k d} + \frac{3}{4} \frac{\varepsilon^3 k^2}{sh^2 k d \cdot sh 2 k d} \left[ \frac{13-4ch^2 k d}{4 sh^2 k d} ch^2 3k(d-z) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{3} (8ch^4 k d - 8ch^2 k d + 3) ch k (d-z) - 2ch 3k (d-z) \right] \right], \quad (4)$$

$$h = 2\varepsilon \left[ 1 + \frac{\varepsilon^2 k^2}{64 sh^6 k d} (32 ch^6 k d + 32 ch^4 k d - 76 ch^2 k d + 39) \right]. \quad (5)$$

Дисперсионное уравнение в рамках третьего приближения [2] принимает вид

$$T^2 g k \left( 1 + \frac{8 ch^4 kd - 8 ch^2 kd + 9}{16 sh^4 kd} a^2 k^2 \right)^2 \operatorname{th} kd = 4 \pi^2. \quad (6)$$

В уравнение (6), в отличие от дисперсионного соотношения (3) линейной модели, входит, помимо волнового числа  $k$ , также и малый параметр  $\varepsilon$ . Таким образом, для определения значений  $k$  и  $\varepsilon$  в рамках третьего приближения необходимо искать совместное решение уравнений (5) и (6). Подстановка полученных результатов в формулу (4) дает значение высоты волны  $h$ .

В работах [3, 4] были представлены результаты расчетов, выполненных по указанным приближениям к стоксовой теории, и их сравнение с результатами лабораторного эксперимента по синхронному измерению давления в толще жидкости с измерением профиля волны на ее поверхности.

В работе [5] отмечено, что приближения к стоксовой теории распространения волн по поверхности жидкости, подобные представленному уравнениями (4)-(6), получаются разложением в ряды по малому параметру  $kh$ , для которого величина волнового числа  $k$  полагается константой, не зависящей от порядка модели, что не вполне справедливо. Действительно, разрешив уравнения (6) и (3) относительно  $k$ , при одних и тех же значениях  $T$ ,  $d$  и  $\varepsilon$ , мы получим разные результаты.

В связи с этим обстоятельством, авторами работы [5] было построена математическая модель третьего приближения к стоксовой теории распространения волн по поверхности жидкости, в которой в качестве малого параметра выбрана величина  $k_0 h$ , где  $k_0$  - волновое число линейной теории, вычисляемое из дисперсионного уравнения (3). Данная модель имеет такой же порядок точности, что и модель [2], однако предполагает иной порядок вычислений. Действительно, в ее рамках не требуется решение системы уравнений: модель [5] представляет собой систему разделенных соотношений, когда каждое уравнение содержит только одно неизвестное. Величина  $k_0$  определяется из уравнения (3), а затем, по известной зависимости, осуществляется расчет добавки третьего приближения. В вычислительном плане эта особенность предоставляет определенные преимущества. Сравним теперь результаты восстановления высоты волны  $h$  по известной величине  $\Delta p$  размаха гидродинамического давления на глубине в рамках упомянутых теорий [2] и [5].

## РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

На рис. 2 приведена зависимость коэффициента пересчета размаха давления в высоту волны на поверхности жидкости от величины  $k d$ , полученная в рамках модели [2] и опубликованная в работе [4]. Поскольку сравнение проводится с опытными данными, полученными по результатам измерений, выполненным с погрешностью, на рисунке приведены интервалы неопределенности для результатов расчета, методика построения которых представлена в работе [4]. Для тех же опытных данных на рис. 3 приведены результаты расчетов в рамках модели [5].

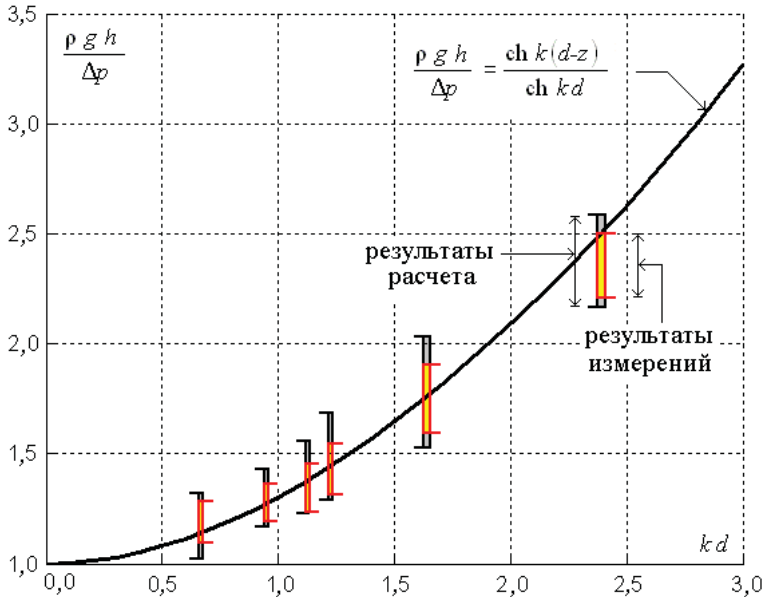


Рис. 2. Результаты измерений и расчетов высоты волны  $h$  по размаху гидродинамического давления  $\Delta p$  в рамках модели [2] третьего порядка

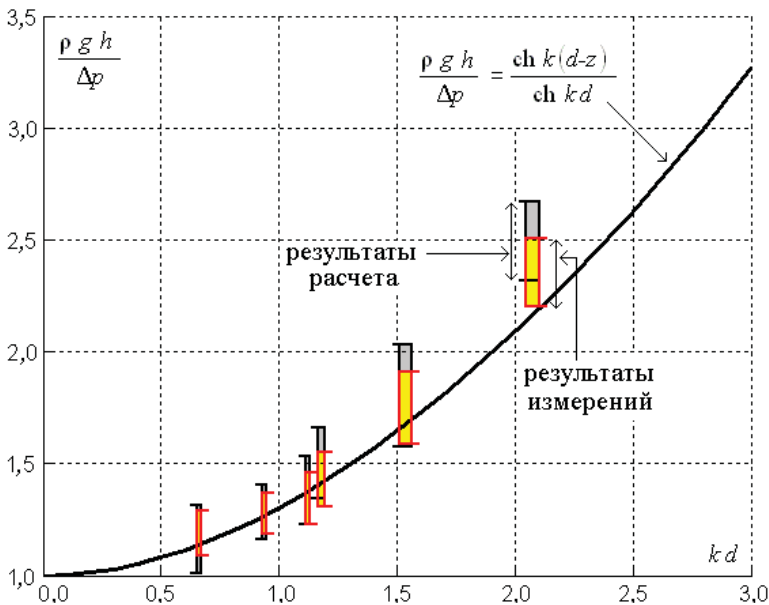


Рис. 3. Результаты измерений и расчетов высоты волны  $h$  по размаху гидродинамического давления  $\Delta p$  в рамках модели [5] третьего порядка

Рисунки 2 и 3 выполнены в одинаковом масштабе. Видно, что модель [5] предоставляет сходные с моделью [2] результаты в области длинных волн и волн средней длины ( $kd < 1,5$ ). Однако при больших значениях величины  $kd$  расхождение становится существенным. Причиной тому являются разные способы вычисления волнового числа, соответствующего третьему приближению. Из данных рисунков 2 и 3 видно, что результаты расчетов по модели [2] лучше согласуются с опытными данными, чем результаты модели [5].

Таким образом, несмотря на явные преимущества в вычислительном плане, модель [5] уступает в достоверности предоставляемых результатов расчета модели [2], использование которой оказывается более предпочтительным.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] U.S. Army Corps of Engineers, Coastal Engineering Manual (CEM), Engineer Manual 1110-2-1100 Part II, Chapter 1 - Water waves mechanics, U.S. Army Corps of Engineers. - Washington, DC (in 6 vol.), 2002.
- [2] Алешков Ю.З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. - Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. - 196 с.
- [3] Maximov V.V., Nudner I.S., Semenov K.K., Titova N.D. Restoration of the surface wave elevation through given pressure inside the liquid // Geophysical Research Abstracts. V. 15, EGU2013-3659, 2013. - Vienna: EGU General Assembly 2013.
- [4] Максимов В. В., Нуднер И. С., Семенов К. К., Титова Н. Д. Вычислительные аспекты расчетов в рамках математической модели волн на поверхности тяжелой жидкости // Математические методы в технике и технологиях - ММТТ-26 [текст]: сб. трудов XXVI Междунар. науч. конф.: в 10 т. - Т. 9. Секция 11 (Саратов) / под общей ред. А. А. Большакова. - Нижний Новгород: Нижегород. гос. техн. ун-т, 2013. - С. 160-163.
- [5] Chang H.-K., Liou J.-C. Fixed-frequency Stokes wave expansion // Ocean Engineering. V. 33, 2006. - P. 417-424.

## MULTILAYER DIGITAL MAP OF TOPLICA REGION

In this paper we present our exploration of geographical and archeological sites in Toplica region, a southern district of Serbia. Our survey which lasted a decade, resulted in a detailed digital 3D map having seven layers. In addition to the most important geographical entities there are depicted all known objects in this region related to the national cultural heritage. By use of GPS tracking, the geographical coordinates of these objects are collected and roads which lead to these sites were recorded. As a final product, the multilayer 1:100000 to 1:50000 interactive digital maps are produced, with all layers individually recorded. We also discuss the origin of Toplica valley, the central part of Toplica region. By studying the shape of the Toplica valley, we also stated the hypothesis that it was created mostly under the action of the Coriolis effect caused by the flow of Toplica river.

**Keywords:** Digital map, GPS tracking, Toplica District, Geographical data, Cultural heritage, Coriolis effect.

### INTRODUCTION

Digital multilayer map of Toplica region is a result of the project *Geography and archeological objects of Toplica region*. We started the project in autumn 2002 and it is still running. Toplica region is an area with rich geomorphology and it has many archeological and historical sites, some of them dating 5000 years B.C. Until the appearance of this project, there were no similar or coherent and systematic undertakings of this kind. This was the main reason why we started the project. An alike map would be Google map. However, Google map lacks many features and details which our map has. For example, our digital map has seven thematic layers. As far as we know, there is no similar digital map of this region, particularly with this number of information and layers. The first coauthor was responsible for the organization of expeditions and collecting data on terrain, while the second one built and designed the map.

In order to better understand the position of Toplica region and its historical value, we give some basic facts about this area and people who lived or live there.

**Geographical position of Toplica region.** Toplica valley is located in the southern part of Serbia. On the South, Toplica borders with the Serbian province Kosovo and Metohija. It is situated between the mountains, with peaks high up to 2000 meters, that border the valley. Through the valley passes the river having the same name *Toplica*

and the Toplica valley lies in the middle of the basin of the river Toplica. This region occupies about 2230 km<sup>2</sup>.



Fig. 1. Position of Toplica region in Serbia

**Ethnic groups in Toplica.** Toplica region was inhabited since the ancient times and many tribes and ethnic groups were living or spent some time there: Avars, Celts, Dardans, Roman people, Byzantines, Turks and of course Slavic people. With Turks coming in this region, many other ethnic

1 Faculty of Mathematics, Belgrade, Serbia

2 Faculty of Science and Mathematics, Kosovska Mitrovica, Serbia

groups mostly of Islamic religion settled Toplica. Some parts of the town of Prokuplje are still carrying the names according to these ancient people; for example “Čerkez mala”, according to Adyge people from Caucasus region. Most of these ethnic groups follow the withdrawal of Turks from Serbia in the second part of the 19<sup>th</sup> c.

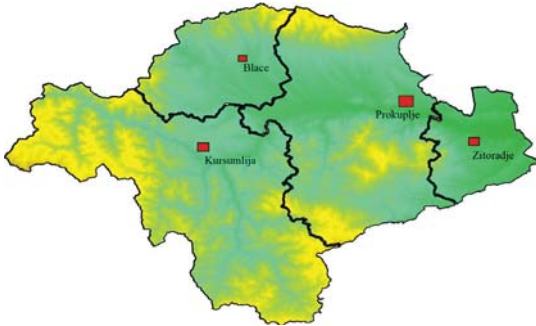


Fig. 2. Map of Toplica region

With the deliberation of Toplica from Ottomans, people from still occupied parts of Balkan came to Toplica. So at the end of the 19<sup>th</sup> century beside Serbs, the main population, there were Aromanians, Greeks, Jewish people, Shopi and Montenegrins, see Rudić [13]. Each of this ethnic groups added to the diversity of folk customs and the ways of living. Today, most of these ethnic groups are assimilated into Serbs.

**BASIC PROPERTIES OF THE MAP**

The basic scale of our digital map is 1:50000. It is built using data collected by portable GPS devices and existing topographical maps drawn to the same scale. We also used HGT elevation files what gave the map capabilities for 3D viewing. We have

organized many expeditions in Toplica since 2002 and we collected many geographical and other data. For example, almost all archeological and sacral places are noted and processed from about of one hundred in the whole region. We were on the road in this region altogether more than 3500 km and 70 days. During these journeys beside geographical data, we took several thousands of photos. Our survey resulted in a large interactive map of Toplica region covering geophysical and geographical data, settlements, roads, hydrography, archeological sites and cultural monuments. All known objects in this region related to archeological, sacral and historical sites are depicted. For example, the positions of archeological sites and sacral objects are noted, from the Neolithic period to the modern times. By means of GPS tracking, the geographical coordinates (in Universal Transverse Mercator coordinate system 34x with Hermannsogel datum as the reference point) of these objects are collected and roads going to these sites are recorded. We used WGS 84 as terrestrial reference system and geodetic datum. As a final product, the multilayer 1:10000 to 1:50000 interactive digital maps are produced, with all the layers individually recorded. The metadata related to these sites are also included. For example, all the roads are classified into six categories, following their importance and quality.

The rest of the metadata are related to the existing settlements, communication system and hydrography in this region. The map has very large resolution, up to 10 meters. The length of depicted roads on the map is totaling more than 3000 km. We designed and produced the map us-

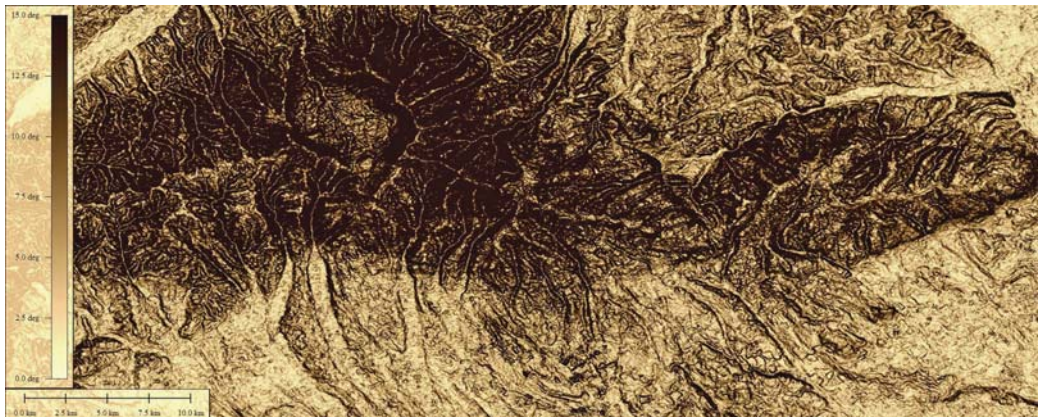


Fig. 3. Embossed gradient map of Toplica region generated by our digital map

ing software GeoMedia (version 6.1) and Global-Mapper (version 13). The map is vectorized and has many useful functionalities. It has 2D and 3D views and can be zoomed, rotated and viewed under desirable angles. Appropriate layers, one or more, can be made visible on demand of the user. We applied one novelty in creating this digital map. Namely, we used the software Global Mapper for creating 3D grid format of the map from a digitized copy of a planar map. In fact, we used its advanced functionality to build the 3D grid from the contour lines on a planar map. After applying this software tool, we obtained the 3D grid which consisted from the points having not only geographical latitude and longitude, but altitude as well. It appears that this process of transforming contour lines into the set of elevated points is rather precise, exactly as much as the original map is accurate. In our case, the precision is about three meters. The accuracy was an important parameter for later faithful presentation on the map of other entities, such as rivers, roads and buildings.

#### MAP LAYERS

As already mentioned, the map has seven layers. One or arbitrary choice of layers can be displayed at a time. Some manipulation with layers is possible, as cropping, coloring and statistics extraction. The total amount of data is about 450 Gb. We have the following layers.

**Road layer.** All roads are represented into vectorized form and they are sorted into six categories. Even some paths are depicted which lead to some important places out of roads. The total length of the roads is 3034 km. Classified into categories, their lengths are: 1st category 98 km, 2nd category 323 km, 3rd category 523 km, 4th category 534

km, 5th category 1102 km and the 6th category 466km. This layer allows to separate and categorize the roads according to their archeological and historical significance.

**Hydrography layer.** Watercourses are classified according to their hydrological and hydraulic importance. Therefore, they are categorized into four categories. The main river Toplica which belongs to Black Sea basin is the only river of the 1st category in this region. The total length of the river Toplica is 136 km. However, only 102 km is presented on the map, the total length of this river inside the Toplica region. According to our measurement, the total length of all hydrological objects in Toplica region is about 705 km.

**Settlements layer.** All existing settlements in Toplica region is presented in this layer. The main places there are the town of Prokuplje, the town of Kuršumljija, the town of Blace and the village of Žitoradje. They are administrative centers of four counties into which the district of Toplica is divided. The total number of settlements in Toplica region is 401, while the total area of the whole region is 2230 km<sup>2</sup>.

**Layer of archeological sites.** Probably this is the most important and most valuable layer of the map. There are at least 102 recorded archeological and historically important sites, some of them older than 6000 years. They are almost uniformly distributed over the whole region. Some of the objects have 3D representation on the map. We shall describe later this later in more details.

**3D Layer.** The map can be viewed in 3D. This view is based on three coordinates: x and y are geographical latitudes and longitudes, while z-coordinate represents elevation (the height above sea level). The total area of the 3D enveloping surface

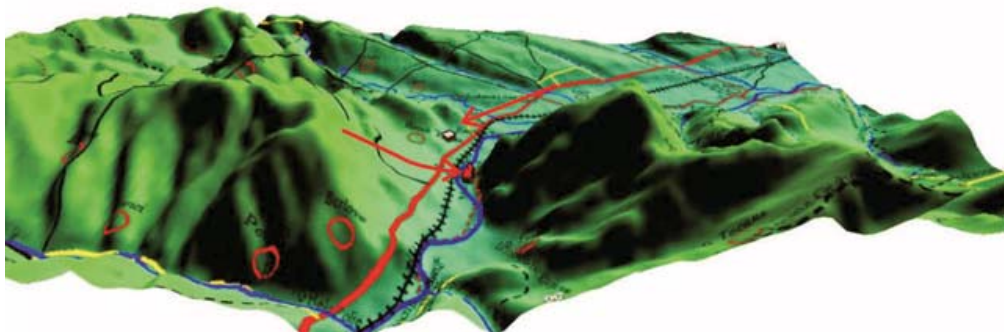


Fig. 4. The position of the two buildings on the map.

is about 11000 km<sup>2</sup> in contrast to 2230 km<sup>2</sup> of flat area of the region. This data witnesses the complexity of the geomorphology of Toplica region. Particular objects, such as monasteries, have 3D models and they are included in the map.

**Communications.** Besides roads, other types of transportation infrastructures are presented, such as town streets and railway. For example, the total length of streets in the town of Prokuplje is about 86 km, while the total length of railway through the Toplica district is 65 km.

**Layer of undefined entities.** Here we put everything else what does not belong to the previous six layers. There are about 370 such entities.

### TOPLICA VALLEY AND ITS ORIGIN

The central part of Toplica region is Toplica valley which stretches from Kuršumljia to Prokuplje. The total length of the valley is about 35 km and it is wide between 2 and 5 km. On the southern rim of the valley, from the west to the east, flows the river Toplica. The total length of the river is 136 km and according to some authors it appeared ten millions years ago, but without explicit explanation how it emerged. The valley is flat, without significant difference in the sea level heights between foothills of the northern and southern rims. It is located beneath the slopes of the mountain Jastrebac. Obviously, the shape of the valley is modeled by the activity of the river, so we may classify it as fluvial.

Due to the rivers flow from the west to the east, the Coriolis force acts to the south. The right bank of the river coincides with the southern rim of the valley and in average it is much higher than the left rim. Particularly the right bank is higher where the river flows faster, therefore on those parts where the Coriolis effect is stronger. The flatness of the valley, the position of Toplica river in the valley and the difference between the heights of the left and right rims of the valley give enough good evidences to the hypothesis that the valley was created mainly under the action of the Coriolis effect caused by the flow of Toplica river.

### ARCHEOLOGICAL OBJECTS DEPICTED ON THE MAP

We started the project with the primary goal to record all archeological, historical and sacral sites in Toplica region. Hereof, the most complete layer on the map is the archeological one. The oldest culture found there is named *Starčevačka* (Starčevo culture) and is dating 5000 years B.C. Toplica obtained its name in the 7<sup>th</sup> c, when the Slavic people began to settle the Balkans Peninsula. Through Toplica passed many important roads, for example the medieval caravans from Dubrovnik to the East were passing through this area. One entrance in the town of Prokuplje is still carrying the name "Carina" (Custom), denoting the ancient place where once traders had to pay custom. Many other archeological sites there



Fig. 5. 3D view of Toplica region

show that the Toplica region has rather important historical and cultural heritage.

All archeological and sacral objects in Toplica region which we visited and explored during our expeditions are presented on our map. In surveying this region, we discovered several archeological sites not yet mentioned in the literature. We included them on the map, too. Here is a short extract of the most important sites from this list.



Fig. 6 and 7. Figurines found at the archeological site in the village of Pločnik

**Neolithic archeological site in the village of Pločnik.** This site is located at the bank of Toplica River on the half way from Prokuplje to Kuršumljia. This archeological complex is part of the Vinča culture, or Starčevo culture, flourished from 5500 to 4000 BC on wide territories of Balkan. Pločnik archeological site dates from the Early Neolithic period from 5500 to 4700 BC and it spreads on about 120 hectares. The asrtcrafts found there witnes that the people who there lived, knew about trade, hand-

crafts, art and metallurgy. More than 60 different forms of wonderful pottery and wonderful figurines were found there.

The Pločnik archeological site was discovered in 1927 by Miodrag Grbić, curator of The National Museum in Belgrade. Today, Julka Kuzmanović-Cvteković, the curator of the National museum in Prokuplje is very meritorius for exploration and popularization of this archeological site.

**Roman thermae.** These remains of Roman bath are dating about the 3<sup>rd</sup> c. A.C. This is another archeological site near the village of Pločnik, located just few hundreds of meters from the Neolithic archeological site. It is believed that Roman soldiers were coming there for rest and curing.



Fig. 8. Roman thermae

**Saint Procopius church in the town of Prokuplje.** This church is built in the 10<sup>th</sup> c. and it is one of the oldest churches in Serbia, Nearby, there is a small church, also called the Latin Church since it was used for the religious service by the members of Dubrovnik (Republic of Ragusa) colony which existed in Prokuplje in 16<sup>th</sup> and 17<sup>th</sup> centuries.

**Endowments of Stefan Nemanja in the Kuršumljia region.** This place is known for its monasteries and churches in the town of Kuršumljia, the first capital of the Nemanjić Dynasty. There are St Nicolas` monastery and Virgin Mary monastery, the first Nemanjić endowments. Nearby is the Holy Trinity Church, built in the beginning of the 20<sup>th</sup> c.

**The Monastery of Saint Nicholas** is built between 1160 and 1166 together with the nearby Monastery of Virgin Mary. These monasteries are the first endowments of Stefan Nemanja, the founder of Nemanjić Dynasty. It is located on a plateau above Kuršumljia and is oriented to the estuary where the river Banjska flows into the Toplica.



Nemanja's coming to the power and building of the monastery are correlated. Namely, building of this monastery produced the conflict between Nemanja and his three brothers. In this conflict Nemanja won and he became in 1166 the great prefect and the absolute ruler of Serbia. In the courtyard of the monastery, Nemanja built his palace and Kuršumlija became the seat of his prefecture. So, Kuršumlija became the first capital of Nemanja Dynasty.

After the Great Migration of Serbs in 1690, the monastery is deserted. Then started ruination of the church and the whole complex. However, the monastery was most destroyed just before the depart of Ottomans from Serbia, in the second half of the 19<sup>th</sup> c. The restoration of the monastery church began immediately after the Second World War. It is interrupted few times and ended in 2003. The Monastery architecture is under the influence of two styles. Byzantine influence is quite observable. For example, there is a similarity with the church Saint Sophia in Istanbul (Constantinople) and other churches there, e.g. Vlacherna gate (Holy Sanctuary of the Mother of God at Vlacherna, Istanbul). Also, there are some Romanic elements. Porch with two turrets looks similar to the St. Triphon Catedral in Kotor. The master who built the church is unknown, but some authors believe that it is the same one who built the St. Triphon Catedral in Kotor. This monastery represents beginning of the Rascian style (Raška style) in Serbian Middle Age architecture.



Fig. 9. Monastery St. Nicholas

**The Monastery of Virgin Mary** is the first endowment of Stefan Nemanja. Nemanja built this mon-

astery after meeting in Niš with Byzantine emperor Manojlo Komnino about 1159, according to an evidence of his son Stefan the First Crowned. Stefan says that it is founded like nunnery that was ruled by Nemanja's wife Ana, called Saint Anastasia.

Monastery church is built on the place of early-byzantine church from the 6<sup>th</sup> c. This church is single among all Middle Age buildings, not only Serbian but Armenian, Coptic and Macedonian too. Monastery precedes the Rascian style period. Architecturally it stands quite separately as a special and enigmatic type of building. Some authors have founded similarity with the old models of Persian and Egyptian sacral architecture. After the Great Migration of Serbs in 1690, the monastery was deserted. Today, we can see just mystic ruins consisting of rests of external walls and parts of wall iconostasis. Frescos are completely destroyed. Kanitz wrote [5] about their existence and wealth.



Fig. 10. Monastery of Virgin Mary

**Other sites.** We list some of the most important archeological and sacral places and objects in Toplica region which we explored during our expeditions. Their geographical coordinates are also presented. The accuracy of geographical coordinates is about 10 meters.

1. Church of St' Ilias, village Draguša (N43°16.3918' E021°22.4296' )
2. Fort in Pridvorica, Kurvin grad (N43°21.8684' E021°19.0052' )
3. Monastery of Ajdanovac (N43°20.8692' E021°22.8898' )
4. Church of St Prokopije (N43°13.8241' E021°34.9800' )

5. Latin Church, Prokuplje  
(N43°13.8607' E021°34.9647')
6. Latin Church, village Glasinac  
(N43°12.1813' E021°42.0564')
7. Roman thermal springs  
(N43°13.8099' E021°34.9899')
8. Church St Mina  
(N43°10.2868' E020°58.6012')
9. Church St Nikola  
(N43°08.3933' E021°16.6102')
10. Log-cabin church of Saint Lazar  
(N43°08.7300' E021°15.7957')

## CONCLUSION

The layers of the presented digital map depicts most of the geographical, archeological and sacral objects in Toplica region, about 450 Gb of data. Besides the geographical entities, such as geographical coordinates and roads to these objects, it also contains other valuable information such as pointers to related photos, texts and dating. We believe that this map, particularly when implemented for Internet use, will be useful for further study of historically and geographically very interesting Toplica region.

## REFERENCES

- [1] D. G. Avramović, D.C. Mirković, Hram Svetih Arhangela i Mihaila i Gavrila u Toplici (The temple of St. Angels Michael and Gabriel in Toplica), Parish of Kondželj, Kondžel, 2000.
- [2] S. Dimitrijević, Dubrovačka trgovina u Leskovcu i okolini i uloga dubrovačke kolonije u Prokuplju (Dubrovnik trading in Leskovac and vicinity and the role of Dubrovnik colony in Prokuplje), preprint in [2] from "Naše stvaranje", Leskovac, 1955.
- [3] S. Dimitrijević, Das Neolithikum in Syrmien, Slawonien und Nordwestkroatien - Einführung in den Stander Forschung, Archaeologica Iugoslavica X, Belgrade, 1969, p 39-76.
- [4] M. Jocić, Древно Прокупље, (Ancient Prokuplje), Library of National Museum of Toplica in Prokuplje, Prokuplje, 2007.
- [5] F. Kanitz, Serbien - historisch-ethnographische Reisestudien, Leipzig, 1868.
- [6] J. Kuzmanović - Cvetković, Prokuplje, grad Svetog Prokopija (Prokuplje, the town of St. Procopius), National Museum of Toplica, Prokuplje, 1998.
- [7] M. Maksimović - Damjan, Hronika Kosanica (Kosanica Chronicles), Opštinski odbor SUBNOR-a Kuršumlije, Kuršumlija, 1996.
- [8] P. Marjanović, Toplički ustanak 1917. godine (Toplica Uprising in 1917), National Museum of Toplica, Prokuplje, Prokuplje, 2003.
- [9] P. D. Marjanović, Топлица кроз векове (Toplica trough Ages), National Museum of Toplica, Prokuplje, 2008.
- [10] G. Marković, editor, group of authors, Spomeničko nasleđe Srbije (The monumental heritage of Serbia), Republic office for protection of cultural heritage, Beograd, 2007.
- [11] D. Miljković, Распеће вечности - цркве и манастири Куршумлијске области (The crucifixion of eternity - churches and monasteries of Kuršumlija District), private edition, Niš, 1998.
- [12] M. Perović, Топлички устанак (Toplica Uprising), Kultura, Belgrade, 1988.
- [13] V. Rudić, Становништво Прокупља (Population of Prokuplje), SASA, Belgrade, 1992.
- [14] M. Stanojević, Туристичке вредности Топличког краја (Tourist values of Toplica region), PhD thesis defended at the University of Priština, 2001, printed in extenso in Ekonomika, vol. XLVII, Niš, 2001.
- [15] M. Šegan, M. Milovanović, The monuments and sites of Toplica district of Serbia in Digital catalogue of cultural monuments, Paper presented at CIDOC2012 - Enriching Cultural Heritage, Helsinki, Finland, June 10-14, 2012.
- [16] S. Terzić, editor, Kuršumlija kroz vekove (Kuršumlija trough the ages), Proc. Sci. Conf. Prolom Banja, 2000, Historical Institute of SASA, Belgrade 2000.
- [17] M. Vasić, D. Marinković, Proc. Prokuplje u Praistoriji, Antici i Srednjem veku (Prokuplje in prehistory, Antiquity and Middle Age), Prokuplje 1995, Archeological Institute Belgrade, 1999.
- [18] A. Valjarevic , PhD Thesis, Cartographic method in digitized river network generalization of Kosovo and Metohia, Nis, 2012
- [19] A. Valjarević, Ž. Mijajlović, 3D Grid Map of Toplica Region, HUMBOLDT KOLLEG, Digitization of Heritage in Science, Sofia, 2013
- [20] eMonuments project of the Mathematical Institute in Belgrade, <http://spomenicikulture.mi.sanu.ac.rs>
- [21] Pločnik archeological site at <http://www.panacomp.net/>
- [22] Virtual library of Faculty of Mathematics in Belgrade, <http://elibrary.matf.bg.ac.rs>.

## INTEGRAL EQUATIONS OF LOVE'S TYPE AND APPLICATIONS

In this paper we consider some methods for solving Fredholm integral equations of the second kind

$$f(x) + \frac{s}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{d}{d^2 + (x-y)^2} f(y) dy = g(x), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

where  $f(x)$  is the unknown function,  $k(x,y) = k(x-y) = d/(d^2 + (x-y)^2)$  is the so-called difference kernel, with  $d > 0$ ,  $s = \pm 1$ , and  $g(x)$  is a given function. This quasi-singular kernel has two complex conjugate poles  $x \pm id$ , which approach to the real axis when  $d \rightarrow 0+$ . There are many methods in the literature for this kind of equations, which are known as integral equations of Love's type. The simplest case with  $g(x) = 1$  is appeared in an electrostatic problem analysed first time by Eric Russell Love [Quart. J. Mech. Appl. Math. **2** (1949), 428-451]. Beside numerical solutions, we propose also fast approximate analytic solutions of this type of equations and give applications in an electrostatic problem with a coaxial symmetry.

### INTRODUCTION

In 1949 Eric Russell Love (1912-2001) described the electrostatic potential in space, generated by a condenser consisting of two parallel equal circular plates of the radius  $R$  separated by a distance  $h$  (see Fig. 1.1). Taking a normalization so that  $h = Rd$ , it can be considered with dimensionless variables as two unit disks, where  $d$  is a distance between them.

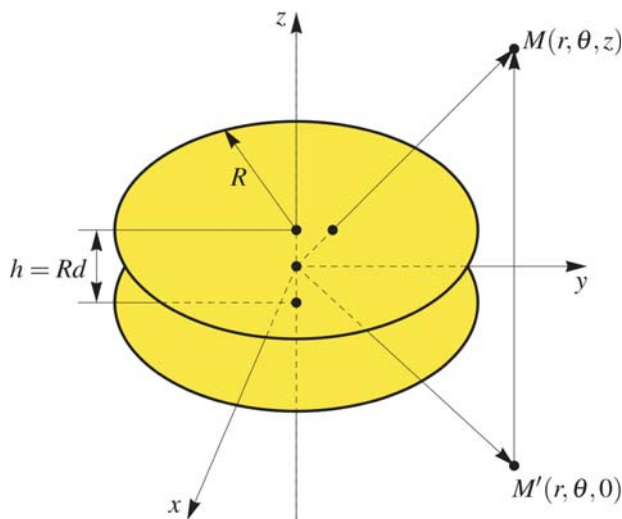


Fig. 1.1. Electrostatical system of two parallel equal circular plates

Supposing the equal and opposite potentials at these disks, e.g., the upper at  $V = +1$  and the lower one at  $V = -1$ , and the potential at infinity being taken as zero, E. Love in [1] (Theorem 1) used a coaxial symmetry of this electrostatical system and proved that the potential in an arbitrary point  $M(r, \theta, z)$  in the space  $\mathbb{R}^3$ , outside the circular plates, can be expressed in the form

$$V(r, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + \left(z - \frac{1}{2}d + ix\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + \left(z + \frac{1}{2}d + ix\right)^2}} \right\} f(x) dx,$$

<sup>1</sup> Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts, Belgrade, Serbia

where both square roots in the previous integral have positive real part and  $f(x)$  is the unique solution of the following Fredholm integral equation of the second kind

$$f(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{d}{d^2 + (x-y)^2} f(y) dy = 1, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (1.1)$$

He also proved that there exists a unique, continuous, real and even solution  $f(x)$  of this integral equation on the closed interval  $[-1, 1]$ . We call this equation as *Love's first integral equation*.

For the corresponding equation with the sign +, i.e. when  $s = 1$  in

$$f(x) + \frac{s}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{d}{d^2 + (x-y)^2} f(y) dy = 1, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (1.2)$$

we say that it is *Love's second integral equation*. In the case when the potentials of the plates in Fig. 1.1 are equal in magnitude and sign (suppose both are positive), then for the potential  $V(r, z)$  in an arbitrary point  $M(r, \theta, z)$  in  $\mathbb{R}^3$ , outside the circular plates, a similar formula holds, where only the sign - between two terms on the right-hand side should be replaced by the + sign.

An approximative analytic solution of (1.1), in the case  $d = 1$ , was given by Love [2],

$$f(x) \approx f_L(x) = 1.919200 - 0.311717x^2 + 0.015676x^4 + 0.019682x^6 - 0.000373x^8.$$

Recently, Norgren & Jonsson [3] have calculated the capacitance of the circular parallel plate capacitor by expanding the solution of Love's integral equation (1.1) into a Fourier cosine series. For some other approaches see [4]-[7]. In 2010, A.S. Kumar [8] presented a method for finding an analytical solution of Love's integral equation, based on the so-called Boubaker polynomials expansion scheme (BPES) [9]. However, in his approach a serious mistake has appeared.

In this paper we give an account on some very efficient methods of Nyström type for numerical solving the general Fredholm integral equations of the second kind (FK2), based on recent progress in the weighted polynomial interpolation (see Mastroianni & Milovanović [10] and [11]), as well as a method for getting approximations of Love's equations in an analytic form (Milovanović & Joksimović [12]). The paper is organized as follows. In Section 2 we give some preliminaries and basic facts on this class of integral equations. Sections 3 and 4 are devoted to the previous mentioned methods, and finally in Section 5 some numerical examples are presented.

## PRELIMINARIES AND BASIC FACTS

Integral equations appear in many fields including continuum and quantum mechanics, kinetic theory of gases, optimization and optimal control systems, communication theory, potential theory, geophysics, electricity and magnetism, biology and population genetics, mathematical economics, queueing theory, etc. Most of the boundary value problems involving differential equations can be converted to integral equations. There are also some problems that can be expressed only in terms of integral equations. Here, we are interested only in Fredholm integral equations of the second kind on a finite interval  $[-1, 1]$ ,

$$f(x) + \mu \int_{-1}^1 k(x, y) f(y) w(y) dy = g(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (2.1)$$

where  $k(x, y)$  is the kernel,  $w(y)$  is a given weight function,  $g(x)$  is a known function,  $\mu$  is a real parameter, and  $f(x)$  is a unknown function. In the case of Love's equations (1.2),  $k(x, y)$  is the so-called *difference kernel*

$$k(x, y) = k(x - y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{d}{d^2 + (x - y)^2}, \quad d > 0,$$

which has two complex conjugate poles  $x \pm id$ . As we can see these poles approach the real axis when  $d \rightarrow 0^+$ , and therefore the kernel is quasi-singular. Letting

$$(Kf)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{d}{d^2 + (x-y)^2} f(y) dy,$$

the operator form of Love's integral equations (1.2) is  $f \mp Kf = (I \mp K)f = g$  where  $I$  denotes the identity operator, and  $K$  is compact with

$$\|K\|_{\infty} = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \frac{1}{d} < 1.$$

It is clear that  $\|K\|_{\infty}$  tends to one when  $d \rightarrow 0^+$ .

## NYSTRÖM INTERPOLANTS FOR FK2

There are several computational approaches to the solution of general Fredholm equations of the second kind, e.g., classical methods, projection-variation and Nyström methods, iteration methods, etc. (cf. Atkinson [13], Kythe & Puri [14]). Sometimes, these methods are developed for specific type of kernels, so that for singular equations there are some special methods (cf. Prössdorf & Silbermann [15]). The most of methods lead to a system of equations, but very often the condition number of the corresponding matrix is very large! The solution can be done in a polynomial form, as a piecewise polynomial, spline, etc. In this section we give a type of Nyström interpolants for solving Fredholm integral equations on the finite interval  $[-1, 1]$  with respect to the Jacobi weight function  $v^{\alpha, \beta}(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ , with parameters  $\alpha, \beta > -1$ . This is based on a new approach in the weighted polynomial interpolation (see Mastroianni & Milovanović [10] and [11]).

The basic idea is to take another Jacobi weight  $v^{\gamma, \delta}(x) = (1-x)^{\gamma}(1+x)^{\delta}$ , with parameters  $\gamma$  and  $\delta$ , such that  $0 \leq \gamma < 1 - \alpha$  and  $0 \leq \delta < 1 - \beta$ , and to consider the solution of the Fredholm integral equation (2.1) in the following space

$$C_{v^{\gamma, \delta}} = \left\{ f \in C^0((-1, 1)) : \lim_{x \rightarrow \pm 1} (fv^{\gamma, \delta})(x) = 0 \right\}, \quad \|f\|_{C_{v^{\gamma, \delta}}} = \|fv^{\gamma, \delta}\|_{\infty}.$$

The convergence of Nyström interpolants is connected with *best error weighted approximation* of the function  $f$  in the space  $C_{v^{\gamma, \delta}}$  by polynomials of degree at most  $n$ ,

$$E_n(f)_{v^{\gamma, \delta}} = \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n} \|(f - P_n)v^{\gamma, \delta}\|_{\infty}.$$

We approximate the integral operator

$$(Kf)(x) = \mu \int_{-1}^1 k(x, y) f(y) w(y) dy$$

by a discrete operator  $K_n$ , using the *Gauss-Jacobi* quadrature formula, i.e.,

$$(K_n f)(x) = \mu \sum_{k=1}^n \lambda_k(v^{\alpha, \beta}) k(x, x_k) f(x_k),$$

where  $x_k$  are zeros of the (orthonormal) Jacobi polynomial  $p_n(v^{\alpha, \beta})$  and  $\lambda_k(v^{\alpha, \beta})$ ,  $k = 1, \dots, n$ , are the corresponding Christoffel numbers. Then, FK2 reduces to  $(I + K_n)f_n = g_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , wherefrom, by multiplication with  $v^{\gamma, \delta}$ , and taking the collocation points  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , we get the following system of  $n$  linear equations

$$\sum_{k=1}^n \left[ \delta_{i,k} + \mu \frac{v^{\gamma, \delta}(x_i)}{v^{\gamma, \delta}(x_k)} k(x_i, x_k) \lambda_k(v^{\alpha, \beta}) \right] a_k = g(x_i) v^{\gamma, \delta}(x_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

where  $a_k = f_n(x_k) v^{\gamma, \delta}(x_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , are unknowns. If for a sufficiently large  $n$ , this system admits the unique solution  $(a_1^*, \dots, a_n^*)$ , then we construct the Nyström interpolant

$$f_n^*(x) = g(x) - \mu \sum_{k=1}^n k(x, x_k) \frac{\lambda_k(v^{\alpha, \beta})}{v^{\gamma, \delta}(x_k)} a_k^*, \quad n = 1, 2, \dots$$

This system of equations is well-conditioned. Namely, if its matrix we denote by  $V_n$ , then for each  $n$

we can prove that  $\text{cond}(V_n) \leq \text{cond}(I + K_n) < \text{const}$  (see [11]). Moreover, if the kernel  $k(x, y)$  and the function  $g(x)$  are in the space  $C_{\nu, \gamma, \delta}$ , under some additional conditions (see [11]), we can prove the convergence of the sequence  $\{f_n^*(x)\}_n$  to the solution  $f^*(x)$  in terms of *best error approximation*, i.e.,

$$\|f^* - f_n^*\|_{C_{\nu, \gamma, \delta}} \leq C \left\{ \|f\|_{C_{\nu, \gamma, \delta}} \sup_{|x| \leq 1} \nu^{\gamma, \delta}(x) E_{n-1}(k_x) + \sup_{|x| \leq 1} \nu^{\gamma, \delta}(x) \|k_x\|_{\infty} E_{n-1}(f) \right\}_{\nu, \gamma, \delta}.$$

We mention also that the Nyström method can be used for weakly singular kernels (for details see [11]).

### APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTIONS FOR LOVE'S INTEGRAL EQUATIONS

As we mentioned in Section 1, A.S. Kumar [8] tried to apply the Boubaker polynomials expansion scheme for finding an analytical solution of Love's integral equation, but his method has a severely flawed. Otherwise, solutions to several applied physics problems are based on the BPES (cf. [16]), using only the subsequence  $\{B_{4m}(x)\}$  of these polynomials, which satisfy the relation

$$B_{4(m+1)}(x) = (x^4 - 4x^2 + 2)B_{4m}(x) - \beta_m B_{4(m-1)}(x), \quad m \geq 1,$$

with  $B_0(x) = 1$  and  $B_4(x) = x^4 - 2$ , where  $\beta_0 = 0$ ,  $\beta_1 = -2$ , and  $\beta_m = 1$  for  $m \geq 2$ . Otherwise, these polynomials are very similar to Chebyshev polynomials; their three-term recurrence relation is  $B_{n+1}(x) = xB_n(x) - B_{n-1}(x)$ ,  $n = 2, 3, \dots$ , where  $B_0(x) = 1$ ,  $B_1(x) = x$ ,  $B_2(x) = x^2 + 2$ . In [12] we gave several new properties of Boubaker polynomials, including their zero distribution, and presented an application to Love's integral equations (for some other procedures see [17] and [18]).

Since the solution of Love's equation (1.2) is an even function on  $[-1, 1]$ , we try to find it in the set of all algebraic polynomials of degree  $2n$  as a linear combination of Boubaker polynomials  $B_0, B_2, \dots, B_{2n}$ , i.e.,

$$f_{2n}(x) = \sum_{m=0}^n c_m B_{2m}(x). \tag{4.1}$$

Then, putting it in (1.2) we obtain

$$\sum_{m=0}^n c_m B_{2m}(x) + \frac{s}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{d}{d^2 + (x-y)^2} \sum_{m=0}^n c_m B_{2m}(y) dy = 1,$$

i.e.,

$$\sum_{m=0}^n \left( B_{2m}(x) + \frac{s}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dB_{2m}(y)}{d^2 + (x-y)^2} dy \right) c_m = 1.$$

Since the solution of Love's equation is an even function on  $[-1, 1]$ , we can take  $n+1$  mutually different nonnegative points in  $[0, 1]$  as collocation points  $\tau_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Thus, for  $x = \tau_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , we get a system of linear equations for determining the coefficients  $c_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} a_{0,0}c_0 + a_{0,1}c_1 + \dots + a_{0,n}c_n &= 1, \\ a_{1,0}c_0 + a_{1,1}c_1 + \dots + a_{1,n}c_n &= 1, \\ &\vdots \\ a_{n,0}c_0 + a_{n,1}c_1 + \dots + a_{n,n}c_n &= 1, \end{aligned}$$

with the matrix  $A_n = [a_{k,m}]_{k=0, m=0}^{n,n}$ , where

$$a_{k,m} = B_{2m}(\tau_k) + \frac{s}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dB_{2m}(y)}{d^2 + (\tau_k - y)^2} dy, \quad k, m = 0, 1, \dots, n,$$

and  $s$  takes  $-1$  and  $+1$  for first and second Love's equation, respectively.

In this approach we need the integrals

$$J_{2m}(x, d) = (KB_{2m})(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{d}{d^2 + (x-y)^2} B_{2m}(y) dy, \quad m \geq 0.$$

Using the recurrence relation

$$B_{2m+2}(x) = (x^2 - a_m)B_{2m}(x) - b_m B_{2m-2}(x), \quad m \geq 0,$$

where  $a_0 = b_1 = -2$  and  $a_m = 2, b_{m+1} = 1, m \geq 1$ , we can obtain the corresponding recurrence relation for the integrals  $J_{2m} = J_{2m}(x, d)$  in the form

$$J_{2m+2} + (d^2 + a_m - x^2)J_{2m} + b_m J_{2m-2} = \frac{2d}{\pi} I_{2m} + \frac{xd}{\pi} \left\{ B_{2m}(1) \log \frac{d^2 + (1-x)^2}{d^2 + (1+x)^2} + K_{2m} \right\},$$

where

$$J_0(x, d) = \frac{1}{\pi} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{1-x}{d} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{x+1}{d} \right) \right],$$

$$J_2(x, d) = \frac{1}{\pi} \left[ 2d + (2 - d^2 + x^2) \tan^{-1} \left( \frac{x+1}{d} \right) - 2xd \tanh^{-1} \left( \frac{2x}{d^2 + x^2 + 1} \right) + (d^2 - 2) \tan^{-1} \left( \frac{x-1}{d} \right) + x^2 \tan^{-1} \left( \frac{1-x}{d} \right) \right]$$

and

$$I_{2m} = \int_0^1 B_{2m}(y) dy, \quad K_{2m} = K_{2m}(x, d) = \int_0^1 \log \frac{d^2 + (x+y)^2}{d^2 + (x-y)^2} B'_{2m}(y) dy.$$

It is easy to prove that

$$I_{2m} = \frac{6}{2m-1} \sin \left( \frac{(4m+1)\pi}{6} \right) + \frac{2}{2m+1} \cos \left( \frac{(2m+1)\pi}{3} \right).$$

On the other side, the integral  $K_{2m}$  can be expressed as a linear combination of the integrals (see [12])

$$S_k = S_k(x, d) = \int_0^1 \log \frac{d^2 + (x+y)^2}{d^2 + (x-y)^2} y^{2k-1} dy, \quad k \in \mathbb{N}.$$

## NUMERICAL EXAMPLES

In this section we present some results for first Love's equation (1.1), obtained using the previous method (Section 4), with the positive zeros of the Chebyshev polynomial  $T_{2n+2}(x)$ , i.e.,

$$\tau_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

as collocation points. All computations were performed in Mathematica, Ver. 9.0.1.0, on MacBook Pro Retina, OS X 10.9.2.

The obtained coefficients  $c_m = c_m^{(n)}$  in approximation  $f_{2n}(x)$  given by (4.1), for  $n = 1, 2, 3, 4$ , are presented in Table 5.1. The corresponding expansions (in power form) are

**Table 5.1.** Coefficients in approximation  $f_{2n}(x)$  for  $n=1,2,3,4$

$c_m^{(n)}$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$n = 1$	2.47659519	-0.2807209050			
$n = 2$	2.63988705	-0.3201403668	0.04005435		
$n = 3$	2.53975466	-0.2766963025	0.04573868	0.012093154	
$n = 4$	2.46662496	-0.2641585212	0.01602553	0.000730762	-0.00565549

$$f_2(x) \approx 1.915152 - 0.280721x^2,$$

$$f_4(x) \approx 1.919498 - 0.320140x^2 + 0.0400543x^4,$$

$$f_6(x) \approx 1.919071 - 0.312976x^2 + 0.02155237x^4 + 0.01209315x^6,$$

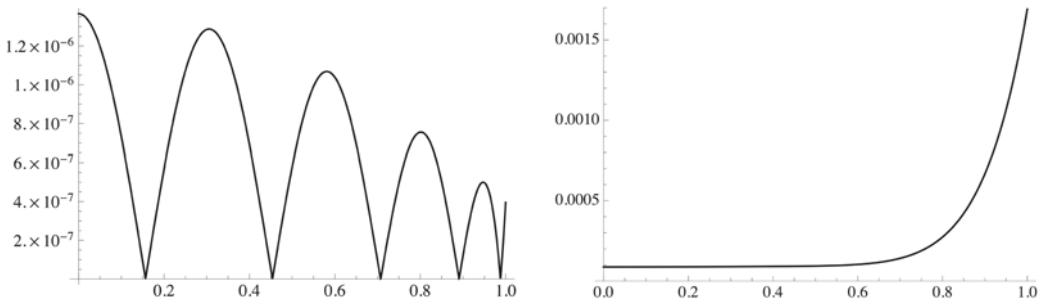
$$f_8(x) \approx 1.919029 - 0.311595x^2 + 0.014564x^4 + 0.0233527x^6 - 0.00565549x^8.$$

Maximal relative errors of the previous approximate solutions, including ones for  $n = 5$  and  $n = 6$ , as well as for Love's solution  $f_L(x)$ , are presented in Table 5.2, where we used as the exact solution the one obtained by an efficient method for solving Fredholm integral equations of the second kind [1]. Alternatively, we can also use  $f_{16}(x)$  as  $f(x)$ . Numbers in parentheses indicate decimal exponents.

**Table 5.2.** Maximal relative errors of the approximate solutions

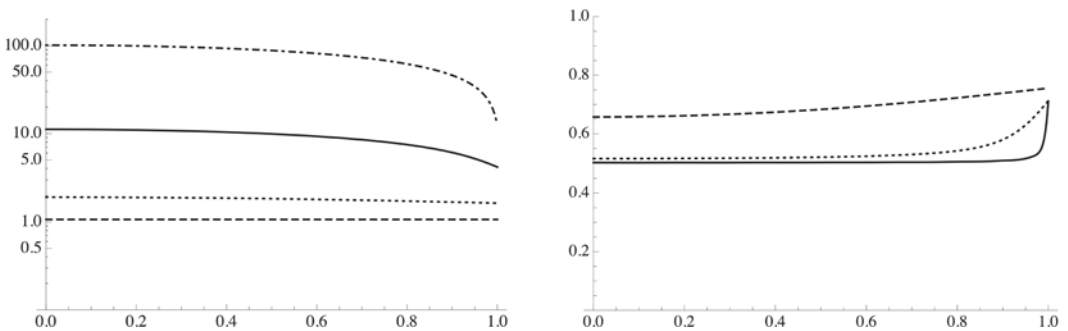
Approximation	$f_L$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
Relative errors	1.69(-3)	3.21(-3)	2.43(-4)	2.78(-5)	1.37(-6)	2.91(-7)	9.65(-9)

Also, graphs of the relative errors  $|(f_{2n}(x) - f(x))/f(x)|$  and  $|(f_L(x) - f(x))/f(x)|$  are displayed in Figure 5.1. Notice that the both approximate solutions  $f_8(x)$  (for  $n = 4$ ) and  $f_L(x)$  are polynomials of the same degree eight.



**Fig. 5.1.** Relative errors of the approximate solutions of degree eight  $f_8(x)$  (left) and  $f_L(x)$  (right)

The solutions  $f_8(x)$  for different values of the distance  $d$  ( $d = 10$ ,  $d = 1$ ,  $d = 1/10$ , and  $d = 1/100$ ) are presented in Figure 5.2.



**Fig. 5.2.** (left) The solutions of first Love's equation as log-plots for  $d = 10$  (dashed line),  $d = 1$  (dotted line),  $d = 1/10$  (solid line), and  $d = 1/100$  (dot-dashed line); (right) The solutions of second Love's equation for  $d = 1$  (dashed line),  $d = 1/10$  (dotted line) and  $d = 1/100$  (solid line)

In the case when  $d \rightarrow \infty$ , the solution of first Love's equation (1.1) tends to the constant  $f(x) = 1$ . For example, in the case  $d = 10$ , the first two solutions are

$$f_2(x) \approx 1.067734116 - 0.00065980x^2,$$

$$f_4(x) \approx 1.067734911236 - 0.00066617763x^2 + 6.3737080810 \cdot 10^{-6}x^4$$



with maximal relative errors on  $[-1,1]$ , 7.40(-7) and 1.79(-9), respectively.

Finally, using the expression for  $V(r,z)$  (see Section 1) we can calculate and plot the equipotential lines (see Figure 5.3 for two cases  $d=1$  and  $d=1/10$ ).

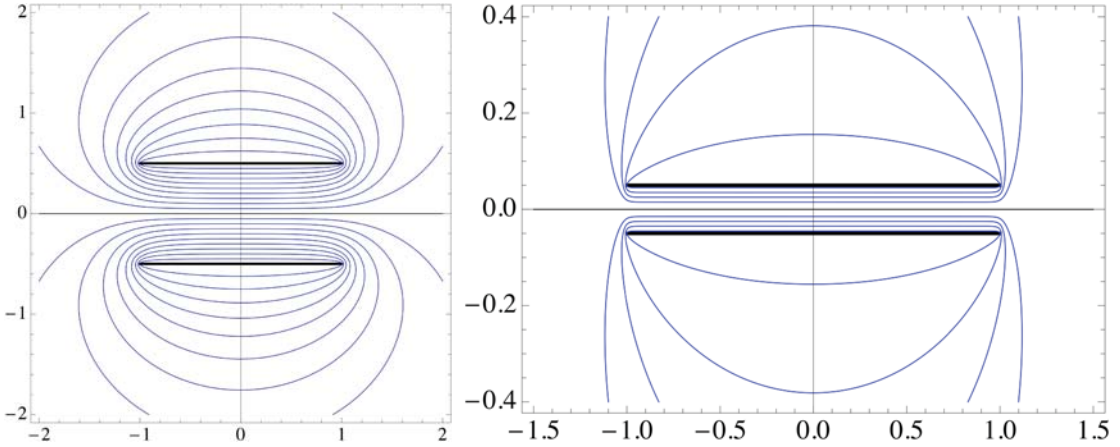


Fig. 5.3. Equipotential lines for  $\pm V = 0.1(0.1)0.9$  when  $d=1$  (left) and for  $\pm V = 0.3(0.2)0.9$  when  $d=1/10$  (right)

The corresponding results for second Love's integral equation can be obtained in a similar way. The solutions for different values of the distance  $d$  ( $d=1$ ,  $d=1/10$ , and  $d=1/100$ ) are presented in Figure 5.2 (right). A problem in approximation can appear when  $d \rightarrow 0^+$  (cf. [19]). Namely, in that case we have

$$(Kf)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{d}{d^2 + (x-y)^2} f(y) dy \rightarrow f(x), \quad d \rightarrow 0^+$$

which means that for  $-1 < x < 1$ , the solution  $f(x)$  of second Love's equation is nearly equal to  $\frac{1}{2}$ , but at the endpoints  $f(\pm 1) \approx \frac{3}{4}$ . Thus, in this case with small parameter  $d$  some difficulties in approximation, especially by polynomials, have appeared. An efficient procedure for a very small value of the parameter  $d$  in this equation has recently been introduced by Pastore in [20].

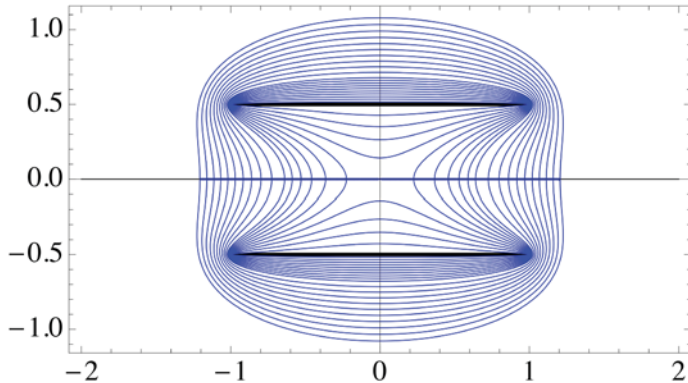


Fig. 5.4. Equipotential lines for  $V=0.70(0.02)0.88$  and  $V=0.90(0.01)0.99$  when  $d=1$

Finally, in Figure 5.4 we presented equipotential lines for the electrostatic system when the potentials of the both plates are  $V=\pm 1$  and  $d=1$ .

#### ACKNOWLEDGEMENTS

The author was supported in parts by the Serbian Ministry of Education, Science and Technological Development (No. #174015).

## REFERENCES

- [1] Love E.R., The electrostatic field of two equal circular co-axial conducting disks. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **2** (1949), pp. 428-451.
- [2] Love E.R., The potential due to a circular parallel plate condenser. *Mathematika* **37** (1990), pp. 217-231.
- [3] Norgren M., Jonsson B.L.G., The capacitance of the circular parallel plate capacitor obtained by solving the Love integral equation using an analytic expansion of the kernel. *Progress In Electromagnetics Research, PIER* **97**, 2009, pp. 357-372.
- [4] Hutson V., The circular plate condenser at small separations. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **59** (1963), pp. 211-224.
- [5] Chew W.C., Kong J.A., Asymptotic formula for the capacitance of two oppositely charged discs. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **89**, no. 2 (1981), pp. 373-384.
- [6] Carlson G.T., Illman B.L., The circular disk parallel plate capacitor. *Amer. J. Phys.* **62**, No. 12 (1994), pp. 1099-1105.
- [7] Reich, E., E.R. Love's integral equation for the circular plate condenser. *ANZIAM* **46** (2004), pp. 85-93.
- [8] Kumar A.S., An analytical solution to applied mathematics-related Love's equation using the Boubaker polynomials expansion scheme. *J. Franklin Inst.* **347** (2010), pp. 1755-1761.
- [9] Boubaker K., Boubaker polynomials expansion scheme (BPES) solution to Boltzmann diffusion equation in the case of strongly anisotropic neutral particles forward-backward scattering. *Annals of Nuclear Energy* **38** (2011), pp. 1715-1717.
- [10] Mastroianni G., Milovanović G.V., *Interpolation Problems - Basic Theory and Applications*. Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 2008.
- [11] Mastroianni G., Milovanović G.V., Well-conditioned matrices for numerical treatment of Fredholm integral equations of the second kind. *Numer. Linear Algebra Appl.* **16** (2009), pp. 995-1011.
- [12] Milovanović G.V., Joksimović D., Properties of Boubaker polynomials and an application to Love's integral equation. *Appl. Math. Comput.* **224** (2013), pp. 74-87.
- [13] Atkinson K.E., *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*. Cambridge Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [14] Kythe P.K., Puri P., *Computational Methods for Linear Integral Equations*. Birkhäuser, Boston - Basel - Berlin, 2002.
- [15] Prössdorf S., Silbermann B., *Numerical Analysis for Integral and Related Operator Equations*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1991.
- [16] B. Karem Ben Mahmoud, Temperature 3D profiling in cryogenic cylindrical devices using Boubaker polynomials expansion scheme (BPES), *Cryogenics* **49** (2009), 217-220.
- [17] Elliott D., A Chebyshev series method for the numerical solution of Fredholm integral equations, *Computer J.* **6** (1) (1963), 102-112.
- [18] Fox L., Goodwin E.T., The numerical solution of non-singular linear integral equations, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A* **245** (1953), pp. 501-534.
- [19] Monegato G., Palamara Orsi A., Product formulas for Fredholm integral equations with rational kernel functions, In: *Numerical Integration, III Oberwolfach, 1987, Internat. Schriftenreihe Numer. Math.*, Vol. 85, pp. 140-156, Birkhäuser, Basel, 1988.
- [20] Pastore P., The numerical treatment of Love's integral equation having very small parameter, *J. Comput. Appl. Math.* **236**, no. 6 (2011), pp. 1267-1281.

# THE PROGRAMMING LANGUAGE MATLAB AS A FUNCTION OF DIGITAL STEGANOGRAPHY TECHNOLOGY

---

*This paper describes a technique by which messages can be hidden within digital media using MATLAB programming language. Steganography is exactly maintaining the confidentiality and privacy of critical information and protecting them from potential sabotage, theft or unauthorized access.*

*Despite the large number of steganography carriers and methods provided by digital technology, images, audio, and video are still the most common and the most appropriate digital carriers, and there is the largest number of steganography techniques developed for them.*

*Keywords: stenography, MATLAB, engineering, program, functions*

---

## INTRODUCTION

There is a large number of different techniques through which messages can be hidden within digital media. One way is exploiting of unused parts of files or unallocated memory space for storing secret data which can also be directly accessed. Small quantities of data may be hidden within the unused parts of the header files. If partition is not visible in standard conditions, then there are some tools which at the same time can allow full access. Although there are many steganografskih holders and the most popular method will be described in the rest of this paper.

## SYSTEMS BASED ON THE SUBSTITUTION

The basic principle of the system based on the the substitution is the replacement of redundant parts of the image with secret data. For understanding of this principle it is very important knowledge of the steganographic holder structure, and we give a brief description of the RGB (Red-Green-Blue) systems. Within the RGB system, each color is represented by the relative intensities of each of the three existing components, red, green and blue.

Each RGB component is determined by a single octet, ie. a series of 8 bits, so the value of the intensity of each of the three colors can range from 0 to 255. Since the RGB system contains three components, this method of presentation, we get the 24-bit scheme which supports 16,777,216 unique colors.

Most of today's applications for processing and displaing images described supports 24-bit scheme, but allows the use of 8-bit scheme to save the image size. Such a scheme actually also uses 24-bit color pixels, but additionally has a palette that specifies color used in the image. Each pixel is coded with 8 bits, where is that value indicated by the records desired color in the palette. Therefore, this method limits the number of used colors in the image at 256 for 8-bit display color index in the palette. 8-bit pattern is typical for GIF (Graphics Interchange Format) image formats which are generally considered a lossless image compression.

## SUBSTITUTION OF MINIMUM IMPORTANT BITS

Substitution of minimum important bits (of the least significant bit substitution; LSB substitution) is the most common steganography technique used in steganography work with multimedia files. The term "minimum important bit" is associated with the numerical importance of the bits in the octet. The bit of maximum importance is with the highest arithmetic value (12810), and the bit of minimum importance is with the lowest arithmetic value (110). Change of minimum bits has importance effect in all octets that make up a multimedia file. The described principle is even more effective due to the fact that the

---

<sup>1</sup> Faculty of Teacher Education, Leposavic, Serbia

human optical composition is not sensitive enough for Recognising these changes in color. The idea steganographic techniques substitution bits least importance is based on breaking the secret messages on bits which are then kept in place for at least important bits in selected octets. As a simple example of LSB substitution is shown hiding the letter 'G' in the next series of bytes:

```
10010101 00001101 11001001 10010110
00001111 11001011 10011111 00010000
```

The letter 'G' is the ASCII (American Standard Code for Information Interchange) standard recorded as a binary string 01000111. These 8 bits are written to the position of the least important bits in the original set of bytes:

```
10010100 00001101 11001000 10010110
00001110 11001011 10011111 00010001
```

In the mentioned example actually changed only half the bits of the least importance. LSB substitution is steganographic techniques whose application is often not so simple. In fact, if a set of bytes into which is inserted through secret messages will choose the easy way, for example, a series of adjacent bytes in the beginning of the file, it is very likely that this part of the images have different statistics from the rest of the image, and as such will draw attention to themselves and compromise the secrecy of the hidden messages. Therefore, the set target octet often defined by a method of random selection as one of the factors that make detection steganografskih messages extremely complicated. Followed an example of hiding one image to another, using the given algorithm. Data is a MATLAB function. Display functions LSBHiding:

```
function [Stego, Perceivig] = LSBHiding (Holder, Hidden, n)
% Hiding photos of N bits of minor importance Bearer
Stego = uint8(bitxor(bitand(Carrier, bitcmp(2^n - 1, 8)) , bitshift(Hidden, n - 8)));
Iscitana = uint8(bitand(255, bitshift(Stego, 8 - n)));
```



Fig. 1. Holder: cat.bmp



Fig. 2. Hidden Picture: viktory.bmp

```
Sova = imread('cat.bmp', 'bmp');
Pobeda = imread('viktory.bmp', 'bmp');
n = 4;
[Stego, Ekstrahovana] = LSBHiding (cat, viktory, n);
figure, imshow(Stego)
figure, imshow(Ekstrahovana)
```

Calling functions in Matlab, LSBHiding display the results

LSB substitution shows good results in working with black and white images. If you hide data within 2 bits of least importance, the human eye still does not see the difference. Unfortunately, the LSB substitution is sensitive to the slightest operations on images, such as compression or remove some parts of the image. For example, converting GIF or BMP steganographic files in JPEG format, and converting back to the original format may destroy the information in the least important bits. LSBHiding is formed using the built-in MATLAB functions bitand, ther and bitshift. The other two technics that will be presented hereafter are less able to rely on the Matlab as environment.



Fig. 3. Stegano



Fig. 4. Extracted

## **SORTING PALLETS**

Many of the images use color palettes used in the image. Palettes, of course, contain only a subset of the entire color space in 24-bit display, and every color in the palette was presented with a 24-bit vector that defines the RGB values of the color index, i.e. the location of the pallet. This index is stored within each pixel images and use it to determine the appropriate color pixels. The first step in the implementation of this steganographic techniques is making copies of the original color palette and change of location in the new color palette. The new color scheme is determined by the colors that are close to the RGB system, are in near range. Then applies a standard LSB substitution, that will at least importance within each pixel is replaced by bit secret messages. At the end of the respective RGB colors identified in the original pallet, so its index in the original array is used as the new value of the pixel.

## **DOMAIN TRANSFORMATIONS**

Transformation domain in steganography technique is based on hiding data using mathematical functions. Mathematical functions are used in compression algorithms. The basic principle is to insertion bits of secret messages to place the least importance coefficients. Specifically, the JPEG image format used discrete cosine transform (discrete cosine transform - DCT) coding instead of individual pixels. Photo split into 8x8 blocks for each component of the RGB system. The goal is to find blocks in which the amount of changes of the low pixels to the entire block is replaced by a discrete cosine transform coefficients. If the amount of change is too high, the block is divided into 8x8 smaller blocks until the amount of the change is not low enough. JPEG format is considered a image compression with losses. The Image is not quite identical to its original image which is obtained with conversion. JPEG steganography as bearer performed change the relation of these coefficients instead of bits in the LSB substitution.

## **MASKING AND FILTERING**

Masking and filtering techniques are typically used only on 24-bit black and white images. They are also used to insert a digital watermarking. In the work with JPEG images this technique is more appropriate than LSB substitution. Image processing is used in the protection against losing insert information.

## **MODELS OF EXTENDED SPECTRUM**

Models spread spectrum signal using a wide range. The message that the input signal is a narrow spectrum. Secret data is spread across parts of the carrier having the greatest importance, and thus make it difficult its detection and jamming. These models are based on the fact that small distortions in the picture or sound files discover the hardest parts of the carriers carry the highest energy. This is a very popular technique in the field of digital watermark.

## **BINARY IMAGE**

Binary images (i.e data obtained by fax) contain a certain amount of redundancy in the distribution of black and white pixels. Simple LSB substitution does not give good results with these images, but it is

possible to take advantage of their redundancy and insert the secret information by using the number of black pixels in a specific part of the image.

## CHANGING PIXELS

The most effective technique is the technique of changing pixels. This technique changes the ASCII value of a certain number of pixels. Each pixel has its own 3 octets, for all three colors at a time. If instead some of the color entries ASCII value of the characters in this pixel, the content of the image would change, but the human eye would not have objected if using appropriate image. Followed display of MATLAB functions that serve to hide and later reading the string from the image, according to a key agreed.



Fig. 5. The holder of hidden information in a given example

```
function hide (length, string, image)
% NI = new image
% string = of information that inserts
% nameImages = picture behind which hide

I=imread(image);
[n,m,t]=size(I);
s=uint8(string);
s=[s 0];
s=uint8(s);

slika=I;
br=0;
for i=1:n
for j=1:m
if (rem(i+j,25)==0 & rem(i,21)==0 & rem(j,14)==0)
if (br==duzina)
break;
end
br=br+1;
slika(i,j,1)=s(br);
slika(i,j,2)=s(br);
slika(i,j,3)=s(br);
end
end
```

```

end
imwrite (picture, 'slika.bmp');
impixelinfo (imshow (image))
end

```

Example of changing pixels - display function code

Hiding (22, 'The Legend of Johnny Cash', 'Diablo.bmp')



Fig. 6. Stego

```

unction record = read (length, image)
%function which we read hidden information
%string it is in what we record read
%image is an image from which we read
I=imread(image);
[n,m,t]=size(I);
picture=I;
br=0;
record=[];
for i=1:n
    for j=1:m
        if (rem(i+j,25)==0 & rem(i,21)==0 & rem(j,14)==0)
            if (br==duzina)
                break;
            end
            br=br+1;
            record =[ record picture(i,j,1)];
        end
    end
end
end
record =char(record);
end

```

## CONCLUSION

Steganography has a highly efficient and powerful techniques that allow people to protected and hidde communication. Combined with cryptography, an additional layer of security to protect the informa-tion. Steganographic technology is very simple to use, and extremely difficult to detect. In recent years, steganography was the subject of many discussions related to its abuse, especially in terrorist activities.

In the past years, steganography has been the subject of many discussions related to its abuse, especially in terrorist activities. So in many legal authorities is growing concern about the use of steganography to share illegal material via multimedia files on websites. Steganalysis a much younger discipline of steganography. Today there are different stego methods by which we can successfully detect and prevent such criminal activities.

On the other hand, there are many advantages of using steganography in legal context, such as digital watermarking to determine ownership of copyright or safer methods of storing important and confidential information, therefore, in future more intensive development of the technology and the wide application possibilities.

Matlab has big opportunities for graphical data, vectors and matrices, and the notation and print these diagrams. There are high-level functions for 2D and 3D data visualization, image processing, animation.

## REFERENCES

- [1] Wikipedija, <http://en.wikipedia.org/wiki/Steganography>
- [2] Steganography & Digital Watermarking, <http://www.jjtc.com/Steganography>
- [3] <http://www.studentskisvet.com/include/template/stampa.php>
- [4] <http://www.securityfocus.com/infocus/1684>
- [5] <http://www.petitcolas.net/fabien/steganography/>
- [6] <http://www.tech-faq.com/steganography.shtml>
- [7] <http://os2.zemris.fer.hr>



## RESEARCH OF OWN VIBRATIONS FOR ONE HYBRID SYSTEM OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS

### ИССЛЕДОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ДЛЯ ОДНОЙ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

*In work the boundary value problem for one class of hybrid systems of the differential equations is considered. Such class the hybrid system of the differential equations takes place at the description of dynamics of mechanical systems with the concentrated and distributed parameters, representing an elastic core with the fixed edges and attached on it by means of springs solid bodies. As theoretical bases of research uniform approach to creation of the frequency equations of such systems is offered.*

#### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При исследовании механических колебаний элементов различных конструкций, деталей и механизмов во многих случаях расчетными схемами исследования является твердое тело (или система твердых тел) соединенное упругими связями со стержнем [1-6]. Для вывода уравнений движения систем используется вариационный принцип Гамильтона, который справедлив, как для систем с сосредоточенными, так и для систем с распределенными параметрами. Полученные на основании принципа Гамильтона, уравнения движений таких механических систем являются гибридными системами дифференциальных уравнений. Под гибридными системами дифференциальных уравнений понимается система дифференциальных уравнений, состоящая из обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

Рассмотрим гибридную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} A\ddot{z} + Bz + C(Dz - \bar{u}) = 0, \\ k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + b \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) = \sum_{i=1}^m q_i (d^i z(t) - u(x, t)) \delta(x - a_i), \end{cases} \quad (1)$$

где  $z(t)$  -  $n$  - мерная вектор-функция;  $u(x, t)$  - скалярная функция;  $\bar{u}(t)$  -  $m$  - мерная вектор-функция с компонентами  $u(a_1, t), \dots, u(a_m, t)$ ;  $A, B$  - заданные, постоянные  $n \times n$  - матрицы;  $C$  - заданная, постоянная  $n \times m$  - матрица;  $D$  - заданная, постоянная  $m \times n$  - матрица;  $d^i$  -  $n$  - мерный вектор, составленный из строк матрицы  $D$ ;  $k, b, a_i, q_i, (i = \overline{1, m})$  - заданные постоянные, причем  $0 \leq a_i \leq l$ ; штрих  $()'$  - здесь и ниже операция транспонирования.

На функцию  $u(x, t)$  наложены граничные условия, соответствующие условиям, накладываемым на правый и левый конец стержня. В случае жесткой заделки эти граничные условия имеют вид

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0. \quad (2)$$

Отметим, система (1)-(2) является общей математической моделью механических систем, представляющих собой упругий стержень с закрепленными краями и прикрепленными на нем с помощью упругих связей системой твердых тел, соединенных между собой упругими связями.

Введем понятие обобщенного решения гибридной системы дифференциальных уравнений (1), удовлетворяющей краевым условиям (2).

<sup>1</sup> East-Siberian state university of technology and management, Ulan-Ude, Russia

<sup>2</sup> Buryat branch of Siberian state university of telecommunication and information, Ulan-Ude, Russia

Для этого рассмотрим множество вектор-функций

$$K = \left\{ (y(\cdot), v(\cdot, \cdot)) : y(\cdot) \in C_{\infty, [0, T]}^n, v(\cdot, \cdot) \in C_{\infty, D}^2 \right\}, \quad (3)$$

где  $D = \{(x, t) \in R^2 : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$  - прямоугольник.

Потребуем, чтобы любая вектор-функция из множества функций  $K$  удовлетворяла условиям

$$\begin{aligned} y(0) &= y(T) = 0, \\ v(x, 0) &= v(x, T) = 0, \\ v(0, t) &= v(l, t) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(l, t) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Введенные вектор-функции назовем основными.

**Определение 1.** Вектор-функцию  $z(\cdot) \in C_{2, [0, T]}^n$ , скалярную функцию  $u(\cdot, \cdot) \in C_{4, 2, D}^2$  назовем обобщенным решением краевой задачи (1)-(2), если для любой основной вектор-функции  $(y(\cdot), v(\cdot, \cdot)) \in K$  имеет место тождество

$$\int_0^T (A\ddot{z} + Bz + C(Dz - \bar{u}), y(t)) dt + \iint_D \left( k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \sum_{i=1}^m q_i (d^{i'} z(t) - u(x, t)) \delta(x - a_i) \right) \cdot v(x, t) dx dt = 0.$$

2. Вспомогательная краевая задача.

Подставив в систему (1)  $z(t)$ ,  $u(x, t)$  в виде

$$z(t) = Z \sin \omega t, \quad u(x, t) = V(x) \sin \omega t,$$

где  $\omega$  - собственная частота,  $Z$  -  $n$ -мерный вектор амплитуд колебаний масс,  $V(x)$  - амплитуда колебаний точек упругого стержня, после преобразований получим

$$(-\omega^2 A + B + CD)Z - C\bar{V} = 0, \quad (5)$$

$$-\omega^2 kV(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} = \sum_{i=1}^m q_i (d^{i'} Z - V(x)) \delta(x - a_i), \quad (6)$$

где  $\bar{V}$  -  $m$ -мерный вектор с компонентами  $V(a_1), \dots, V(a_m)$ .

В силу граничных условий (2) функция  $V(x)$  должна удовлетворять условиям

$$V(0) = V(l) = 0, \quad \frac{dV}{dx}(0) = \frac{dV}{dx}(l) = 0. \quad (7)$$

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу (6)-(7).

**Определение 2.** Скалярную функцию  $V(\cdot) \in C_{4, [0, T]}$  назовем обобщенным решением краевой задачи (6)-(7), если для любой компоненты  $v(\cdot, \cdot)$  основной вектор-функции  $(y(\cdot), v(\cdot, \cdot)) \in K$ , имеет место тождество при любом  $t \in [0, T]$

$$\int_0^l \left( -\omega^2 kV(x) + b \frac{d^4 V(x)}{dx^4} - \sum_{i=1}^m q_i (d^{i'} Z - V(x)) \delta(x - a_i) \right) \cdot v(x, t) dx = 0.$$

**Теорема 1.** При любых значениях  $\omega$  и  $Z$  функция

$$V(x) = \sum_{i=1}^m G_i(x - a_i) q_i (d^{i'} Z - V(a_i)) \quad (8)$$

является обобщенным решением краевой задачи (6)-(7), где функции  $G_i(x)$ ,  $(i = 1, \dots, m)$  обобщенные решения уравнения

$$-\omega^2 kG_i(x) + b \frac{d^4 G_i(x)}{dx^4} = \delta(x), \quad (i = 1, \dots, m), \quad (9)$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$\begin{cases} G_i(-a_i) = G_i(l - a_i) = 0, \\ \frac{dG_i}{dx}(-a_i) = \frac{dG_i}{dx}(l - a_i) = 0, \end{cases} \quad (i = 1, \dots, m) \quad (10)$$

**Доказательство:** Для функции (8) справедливость выполнения краевых условий (7) непосредственно следует из краевых условий (10) для функций  $G_i(x)$ ,  $(i = 1, \dots, m)$ .

В том, что (8) является решением уравнения (6) убедимся непосредственной подстановкой (8) в исходное уравнение (6).

Для этого представим (8) в виде

$$V(x) = \sum_{i=1}^m \int_0^l \left( G_i(x - \xi) q_i (d^{i'} Z - V(\xi)) \delta(\xi - a_i) \right) d\xi. \quad (11)$$

Подставим (11), в левую часть уравнения (6), умножив на  $v(x, t)$  из класса основных функций, проинтегрируем по  $x$  в пределах от 0 до  $l$ . Далее меняя порядок интегрирования и учитывая (9), получим

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left\{ \int_0^l \sum_{i=1}^m \left[ \left( -k\omega^2 G_i(x - \xi) + b \frac{d^4 G_i(x - \xi)}{dx^4} \right) q_i (d^{i'} Z - V(\xi)) \delta(\xi - a_i) \right] d\xi \right\} \cdot v(x, t) dx = \\ & = \sum_{i=1}^m \int_0^l \left[ q_i (d^{i'} Z - V(\xi)) \delta(\xi - a_i) \cdot \int_0^l \left( -k\omega^2 G_i(x - \xi) + \frac{d^4 G_i(x - \xi)}{dx^4} \right) v(x, t) dx \right] d\xi = \\ & = \sum_{i=1}^m \int_0^l \left[ q_i (d^{i'} Z - V(\xi)) \delta(\xi - a_i) \cdot \int_0^l v(x, t) \delta(x - \xi) dx \right] d\xi = \\ & = \sum_{i=1}^m \int_0^l \left[ q_i (d^{i'} Z - V(\xi)) v(\xi, t) \delta(\xi - a_i) \right] d\xi = \sum_{i=1}^m \left[ q_i (d^{i'} Z - V(a_i)) v(a_i, t) \right]. \end{aligned}$$

Аналогично, подставив (11) в правую часть уравнения (6), после преобразований получим

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left[ \sum_{i=1}^m q_i (d^{i'} Z - V(x)) \delta(x - a_i) \right] v(x, t) dx = \\ & = \sum_{i=1}^m \int_0^l q_i (d^{i'} Z - V(x)) \delta(x - a_i) v(x, t) dx = \sum_{i=1}^m \left[ q_i (d^{i'} Z - V(a_i)) v(a_i, t) \right], \end{aligned}$$

то есть в результате проделанных преобразований, левая и правая части исходного уравнения тождественно совпадают. Таким образом, выражение (8) является решением уравнения (9) в обобщенном смысле. *Теорема доказана.*

Для нахождения функций  $G_1(x), G_2(x), \dots, G_m(x)$ , входящих в (8) имеем  $m$  краевых задач для уравнения

$$-\omega^2 k G(x) + b \frac{d^4 G(x)}{dx^4} = \delta(x), \quad (12)$$

с условиями (10).

Общее решение  $G(x)$  уравнения (12) можно найти в виде суммы общего обобщенного решения  $G_0(x)$  однородного уравнения

$$-\omega^2 k G(x) + b \frac{d^4 G(x)}{dx^4} = 0, \quad (13)$$

и некоторого обобщенного решения  $\tilde{G}(x)$  неоднородного уравнения (15), то есть

$$G(x) = G_0(x) + \tilde{G}(x). \quad (14)$$

Общее решение  $G_0(x)$  однородного уравнения (13) можно записать в виде

$$G_0(x) = c_1 S_1(\beta x) + c_2 S_2(\beta x) + c_3 S_3(\beta x) + c_4 S_4(\beta x),$$

где  $c_1, c_2, c_3, c_4$  - произвольные постоянные;  $S_1(\beta x), S_2(\beta x), S_3(\beta x), S_4(\beta x)$  - функции Крылова, которые определяются следующим образом

$$S_1(\beta x) = \frac{\operatorname{ch}(\beta x) + \cos(\beta x)}{2}, \quad S_2(\beta x) = \frac{\operatorname{sh}(\beta x) + \sin(\beta x)}{2},$$

$$S_3(\beta x) = \frac{\operatorname{ch}(\beta x) - \cos(\beta x)}{2}, \quad S_4(\beta x) = \frac{\operatorname{sh}(\beta x) - \sin(\beta x)}{2}.$$

Здесь  $\beta = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 k}{b}}$ . Отметим, что выражение для обобщенного решения  $G_0(x)$  совпадает с классическим решением.

Частное обобщенное решение  $\tilde{G}(x)$  неоднородного уравнения (12) можно определить в виде [6]

$$\tilde{G}(x) = \theta(x) \frac{k S_4(\beta x)}{b \beta^3}, \quad (15)$$

где  $\theta(x)$  - функция, определяемая следующим образом

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

## ЧАСТОТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для нахождения функций  $G_1(x), G_2(x), \dots, G_m(x)$ , согласно представлению (14), определим произвольные константы  $c_1, c_2, c_3, c_4$  из условий выполнения соответствующих граничных условий.

Далее, принимая в (8) последовательно значения  $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_m$ , получим систему линейных алгебраических уравнений относительно  $V(a_1), V(a_2), \dots, V(a_m)$

$$(1 + G_j(0)q_j V(a_j) + \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq j}}^m G_i(a_j - a_i)q_i V(a_i)) = \sum_{i=1}^m G_i(a_j - a_i)q_i d_i^j Z, \quad (j = 1, \dots, m). \quad (16)$$

Используя матричные обозначения, систему (16) можно записать в виде

$$M\bar{V} = NZ,$$

где  $M$  - матрица системы размерности  $m \times m$ :

$$M = \begin{pmatrix} 1 + G_1(0)q_1 & G_2(a_1 - a_2)q_2 & \dots & G_m(a_1 - a_m)q_m \\ G_1(a_2 - a_1)q_1 & 1 + G_2(0)q_2 & \dots & G_m(a_2 - a_m)q_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_1(a_m - a_1)q_1 & G_2(a_m - a_2)q_2 & \dots & 1 + G_m(0)q_m \end{pmatrix},$$

$N$  - матрица размерности  $m \times n$

$$N = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m G_i(a_1 - a_i)q_i d_1^i & \sum_{i=1}^m G_i(a_1 - a_i)q_i d_2^i & \dots & \sum_{i=1}^m G_i(a_1 - a_i)q_i d_n^i \\ \sum_{i=1}^m G_i(a_2 - a_i)q_i d_1^i & \sum_{i=1}^m G_i(a_2 - a_i)q_i d_2^i & \dots & \sum_{i=1}^m G_i(a_2 - a_i)q_i d_n^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^m G_i(a_m - a_i)q_i d_1^i & \sum_{i=1}^m G_i(a_m - a_i)q_i d_2^i & \dots & \sum_{i=1}^m G_i(a_m - a_i)q_i d_n^i \end{pmatrix},$$

$\bar{V}$  -  $m$  - мерный вектор с компонентами  $V(a_1), V(a_2), \dots, V(a_m)$ .

Таким образом, решение линейной системы алгебраических уравнений (16), представим в виде

$$\bar{V} = M^{-1}NZ \quad (17)$$

Подставив (17) в систему (5), получим систему линейных, однородных алгебраических уравнений относительно вектора амплитуд  $Z$

$$(-\omega^2 A + B + CD - CM^{-1}N) Z = 0 \quad (18)$$

Система (18) имеет ненулевые решения, если ее определитель равен нулю. Приравняв определитель системы (18) к нулю, получим уравнение собственных частот

$$\det\{-\omega^2 A + B + CD - CM^{-1}N\} = 0. \quad (19)$$

Отметим, уравнение собственных частот (19) является трансцендентным, содержащим периодические тригонометрические функции, а также монотонные гиперболические функции, в силу чего появляется бесконечный дискретный набор собственных частот.

### СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ, ПРЕДЛОЖЕННОГО ПОДХОДА

Для примера, рассмотрим механическую систему, состоящую из массы  $m$ , установленной с помощью двух пружин жесткости  $c_1$  и  $c_2$  на упругом стержне, длины  $l$  (рис. 1). Масса  $m$  может перемещаться поступательно в направлении оси  $Oz$  и совершать угловые отклонения  $\varphi$ . Перемещение точек стержня описывается функцией  $u(x, t)$ .

Полученные на основании принципа Гамильтона, для этой механической системы уравнения движений имеют вид

$$\begin{cases} m\ddot{z} + c_1(z - d_1\varphi - u(a_1, t)) + c_2(z + d_2\varphi - u(a_2, t)) = 0, \\ J_\varphi\ddot{\varphi} - c_1d_1(z - d_1\varphi - u(a_1, t)) + c_2d_2(z + d_2\varphi - u(a_2, t)) = 0, \\ \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = c_1(z - d_1\varphi - u(x, t))\delta(x - a_1) + c_2(z + d_2\varphi - u(x, t))\delta(x - a_2), \end{cases} \quad (20)$$

где  $J_\varphi$  - момент инерции твердого тела, относительно центра масс, при повороте на угол  $\varphi$ ;  $d_1$  - расстояние от центра масс до оси пружины, закрепленной в точке  $a_1$ ;  $d_2$  - расстояние от центра масс до оси пружины, закрепленной в точке  $a_2$ ;  $\rho$  - плотность материала стержня;  $F$  - площадь поперечного сечения;  $E$  - модуль упругости стержня;  $J$  - момент инерции поперечного сечения стержня относительно нейтральной оси сечения, перпендикулярной к плоскости колебаний.

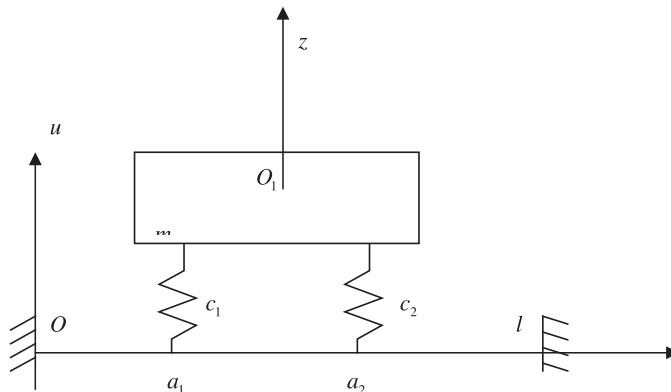


Рис. 1. Расчетная схема механической системы, состоящей из массы, установленной на упругом стержне

Система гибридных дифференциальных уравнений (20) принадлежит общему, рассмотренному

выше классу систем уравнений (1).

Применение предложенного подхода для построения частотного уравнения механической системы, описываемой уравнениями (20) привело к уравнению вида

$$\begin{aligned} &(-m\omega^2 + c_1 + c_2 - \alpha c_1 - \mu c_2)(-J_\varphi \omega^2 + c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2 + c_1 d_1 \gamma - c_2 d_2 \nu) = \\ &= (-c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_1 d_1 \alpha - c_2 d_2 \mu)(-J_\varphi \omega^2 + c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2 + c_1 d_1 \gamma - c_2 d_2 \nu), \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\mu_1 \beta_2 - \mu_2 \beta_1}{\Delta}, \quad \gamma = \frac{\nu_1 \beta_2 - \nu_2 \beta_1}{\Delta}, \quad \mu = \frac{\alpha_1 \mu_2 - \alpha_2 \mu_1}{\Delta}, \quad \nu = \frac{\alpha_1 \nu_2 - \alpha_2 \nu_1}{\Delta}, \\ \Delta &= \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1, \quad \alpha_1 = 1 + e_1 G_1(0), \quad \alpha_2 = e_1 G_1(a_2 - a_1), \\ \beta_1 &= e_2 G_2(a_1 - a_2), \quad \beta_2 = 1 + e_2 G_2(0), \\ \mu_1 &= e_1 G_1(0) + e_2 G_2(a_1 - a_2), \quad \mu_2 = e_1 G_1(a_2 - a_1) + e_2 G_2(0), \\ \nu_1 &= -e_1 d_1 G_1(0) + e_2 d_2 G_2(a_1 - a_2), \quad \nu_2 = -e_1 d_1 G_1(a_2 - a_1) + e_2 d_2 G_2(0), \\ e_1 &= \frac{c_1}{\rho F}, \quad e_2 = \frac{c_2}{\rho F}. \end{aligned}$$

Для проведения сравнительного анализа, с целью проверки адекватности предлагаемой методики получения собственных частот, был произведен расчет собственных частот согласно уравнению (21). Для этого были взяты данные из работы [7], в которой для получения собственных частот автором был использован метод допускаемых мод или форм, разработанный в [8]. Полученные им результаты сравнивались с результатами, полученными в работе [9], где авторы использовали аналитико-численно-комбинированный метод (АЧКМ) и метод конечных элементов (МКЭ).

Данные для стержня: модуль упругости  $E = 2,069 \times 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ , плотность материала стержня  $\rho = 15,3875 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , момент инерции поперечного сечения  $J = 3,0679 \times 10^{-7} \text{ m}^4$ , длина  $l = 1,0 \text{ m}$ . Для упруго присоединенной упругой системы: масса твердого тела  $m = 1,53875 \text{ kg}$ , момент инерции твердого тела относительно центра масс  $J_\varphi = 1,53875 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , жесткость пружин  $c_1 = c_2 = 6,34761 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ , координаты точек крепления пружин  $a_1, a_2$  соответственно, расстояния от точек крепления пружин до центра масс  $d_1 = 0,06667 \text{ m}$ ,  $d_2 = 0,13333 \text{ m}$  соответственно.

В таблице приведены результаты проведенного расчета согласно уравнению частот (23), а также результаты расчета тремя методами, приведенных в [7]. Из таблицы видно хорошее совпадение полученных результатов.

Таблица 1.

$\omega_i, \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$	АЧКМ	МКЭ	Подход Philip D. Cha [7]	Предлагаемый подход
$\omega_1$	273.8904	273.8565	273.8892	273.8564
$\omega_2$	1388.6244	1388.5937	1388.6073	1388.5914
$\omega_3$	2880.5511	2879.7694	2880.0323	2879.7628
$\omega_4$	4222.2172	4221.9181	4221.9610	4221.8472
$\omega_5$	7837.1068	7837.4548	7836.9696	7836.9522

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен единый подход к построению частотных уравнений для одного класса динамических систем, описываемой гибридной системой дифференциальных уравнений. Рассматриваемая система дифференциальных уравнений является общей математической моделью механических систем, представляющих собой упругий стержень с закрепленными краями и прикрепленными на нем с помощью упругих связей системой твердых тел, соединенных между собой упругими

связями. Сравнительный анализ численных расчетов, проведенных предложенным методом с расчетами проведенными другими способами, известными из литературы, показал достоверность и универсальность предлагаемого подхода.

## **БЛАГОДАРНОСТИ**

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 12-08-00309 а.

## **ЛИТЕРАТУРА**

- [1] Мижидон А.Д., Баргуев С.Г. О вынужденных колебаниях механической системы установленной на упругом стержне // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2004. №1. С.32-34.
- [2] Мижидон А.Д., Баргуев С.Г., Лебедева Н.В. К исследованию виброзащитной системы с упругим основанием. // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2009. №2(22). С. 13-203.
- [3] Баргуев С.Г., Мижидон А.Д. Определение собственных частот простейшей механической системы на упругом основании // Вестник Бурятского государственного университета. Выпуск 9. Математика и информатика. 2009. С. 58-66.
- [4] Баргуев С.Г., Елтошкина Е.В., Мижидон А.Д., Цыцыренова М.Ж. Исследование возможности гашения колебаний  $n$  масс, установленных на упругом стержне // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2010. №4(28). С.78-84.
- [5] Баргуев С.Г., Мижидон А.Д., Цыцыренова М.Ж. О пределах применимости классической схемы расчета собственных частот в виброзащитной системе с двумя защищаемыми объектами // Вестник Бурятского государственного университета. Выпуск 9. Математика и информатика. 2010. С. 135-144.
- [6] Мижидон А.Д., Баргуев С.Г. О собственных колебаниях механической системы каскадного типа, установленной на упругом стержне // Вестник Восточно-Сибирского государственного технологического университета. 2010. № 1 С. 26-33.
- [7] Philip D.Cha, Free vibrations of a uniform beam with multiple elastically mounted two-degree-of-freedom systems, Journal of Sound and Vibration 307 (2007) 386-392.
- [8] L.Meirovitch, Fundamental of Vibrations, McGraw-Hill Companies, New York, 2001.
- [9] J.-J. Wu, A.R. Whittaker, The natural frequencies and mode shapes of a uniform cantilever beam with multiple two-DOF spring-mass systems, Journal of Sound and Vibration 227(1999) 361-381.

## USE GEOINFORMATION TECHNOLOGIES FOR EMERGENCY RISK ESTIMATION ON WATER OBJECTS OF SIBERIA

### ГЕОИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ АНАЛИЗА РИСКОВ ЧРЕЗВЫЧАЙНЫХ СИТУАЦИЙ ВОДНЫХ СИСТЕМ СИБИРИ

---

*In this paper, the problem of estimation of natural and anthropogenic risks on the hydraulic structures and water objects of the Siberian region is considered. The authors propose the structure of spatial database that is used in Krasnoyarsk science center SB RAS for comprehensive decision making support in the territory safety management. Paper presents methods, technologies and tools of the spatial data analysis and cartographic data representation in territory management in the case of Krasnoyarsk krai.*

---

#### ВВЕДЕНИЕ

Сибирский регион, обладая обширной территорией, расположенной в различных климатических зонах, развитой сетью водных объектов, большим количеством гидротехнических сооружений (ГТС), подвержен широкому спектру природных чрезвычайных ситуаций (ЧС). Наиболее характерными из них являются весенне-летние паводки, аварии на малых ГТС, вызывающих затопления территорий, объектов и инфраструктуры [1]. Тенденция роста числа и масштабов природных опасностей обусловлена увеличивающейся вариабельностью гидрометеорологических характеристик на различных уровнях пространственной локализации [2].

Большое количество населенных пунктов Сибири, объектов промышленного и социально-бытового назначения, участков транспортных коммуникаций находятся в долинах рек, поэтому опасность их затопления находится на высоком уровне. Ежегодный ущерб от паводков территорий только для Красноярского края составляет более 50 млн. руб. Затопление строений, сопровождающееся длительным стоянием воды, приводит к снижению их капитальности. Затопления льда при вскрытии рек в северных территориях могут значительно переформатировать берега, привести к разрушениям инфраструктуры поселений. Смягчить последствия стихии, предотвратить значитель-

ные ущербы может комплексный подход к проведению предупредительных и оперативных противопаводковых мероприятий.

В 2012-2014 годах в Сибирском отделении РАН реализуется междисциплинарный интеграционный проект №42 «Природные и техногенные риски критически важных гидротехнических объектов, водохранилищ и водных систем Сибири», в рамках которого предусмотрено выполнение следующих работ:

- исследование гидрологического режима водных объектов, в том числе для зарегулированных рек;
- оценка вероятности затоплений территорий от разлива рек в период весеннего половодья, дождевых паводков, а также аварий на гидротехнических сооружениях;
- оценка экологических последствий чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера, прямых и косвенных ущербов затопления и разрушения объектов и инфраструктуры на рискоопасных территориях;
- формирование рекомендаций по снижению риска аварий и повышению защищенности рискоопасных территорий.

Данные работы требуют серьезных научных исследований, разработки новых методов оценки природных и техногенных рисков. Решение задач проекта осложняет слабая ги-

---

1 Institute Of Computational Modelling SB RAS, Krasnoyarsk, Russia

2 SDTB «Nauka» KSC SB RAS, Krasnoyarsk, Russia



дрологическая изученность рек Сибири, дефицит методик прогнозирования половодья, оценки параметров волн прорыва, ущербов чрезвычайных ситуаций, а также разобщённость данных, отсутствие межведомственного информационного обмена мониторинговыми и статистическими данными. Необходимо развитие технологий моделирования волн прорыва и зон затопления с использованием высокопроизводительных систем, картографического анализа, DataMining и др.

Зарубежные исследования риска водных систем с помощью геоинформационных технологий затруднительно использовать в условиях Сибири. Программы, моделирующие последствия затопления территорий различной природы (например, MIKE Датского метеорологического института и аналогичные им разработки для территорий Европы и Северной Америки) требуют большего количества исходных данных (профили створов, расходы воды, гидрографы на небольшом расстоянии друг от друга) [3, 4]. Кроме редкой сети и фрагментарности периодов гидрометеорологических наблюдений в азиатской части России, имеется ряд проблем, среди которых:

- уникальные географические особенности территорий (длительный период ледостава, суровые зимы, большая протяжённость и, соответственно, сток рек);
- зарегулированность основных рек Сибири (Обь, Енисей, Ангара), изменение их ледотермического режима и, как следствие, невозможность использования рядов гидрологических измерений до ввода в эксплуатацию гидроузлов;
- различие в законодательной базе и методиках оценки последствий ЧС (прямых, косвенных ущербов и др.), используемых в России и за рубежом.

Сложность работ по оценке и управлению рисками ЧС на объектах гидроэнергетики заключается в уникальности инженерно-технических решений и природно-географических характеристик размещения объектов.

Перечисленные проблемы обуславливают необходимость разработки информационных ресурсов, аналитических и управляющих

систем, используемых для оценки рисков водных систем и гидротехнических сооружений Сибирского региона. В работе представлены результаты работ по проекту на примере Красноярского края. Исследования включают математическое моделирование зон затопления различной природы и обоснование алгоритмов расчётов, создание электронных атласов опасностей и рисков, связанных с затоплением территорий, разработку средств динамического геомоделирования данных оперативного мониторинга территории.

## **ОБЪЕКТНЫЙ ПОДХОД К РАНЖИРОВАНИЮ ОПАСНОСТЕЙ**

Для определения перечня возможных опасностей, методов их оценки и приоритетности превентивных мероприятий по снижению рисков проведена классификация источников опасности и связанных с ними задач оценки и управления рисками. На основе этого спроектированы состав и структура информационных ресурсов, определены используемые технологии и требования к результатам работ. Основной акцент сделан на геоинформационные технологии, интегрирующие средства пространственного анализа данных и их визуализации, являющиеся основой современных методов анализа рисков чрезвычайных ситуаций.

Использование современных геоинформационных технологий и инфраструктуры пространственных данных для создания информационно-аналитических систем является одним из актуальных направлений повышения эффективности территориального управления. Это обусловлено адекватностью программного обеспечения ГИС характеру решаемых территориальных задач, возможностью использования пространственных данных и единой цифровой модели территории для принятия решений, их фиксации, отображения последствий. Единая цифровая модель территории, являясь системообразующим фактором, позволяет обобщать и агрегировать пространственные данные, поддерживать выбор и анализ управленческих решений. Следует также учитывать, что территориальная информация имеет геопропространственный характер и внедрение Интернет-, ГИС-технологий ускоряет

процесс интеграции физически разделённых, но тематически согласованных баз данных, делает их более доступными в административном управлении территориями, в том числе решения проблем безопасности [5].

Геоинформационные технологии практически безальтернативны при региональной детализации общих закономерностей пространственного распределения различных природных опасностей. Они дают возможность визуального отображения текущей природно-климатической ситуации, различных сценариев развития ситуации с одновременным анализом риск-факторов и характера их взаимосвязей [2].

Для комплексного использования различных гидрологических моделей, методов картографического анализа и визуализации данных введена следующая классификация источников природно-техногенных опасностей, характерных для водных систем Сибири.

1 Водные системы (природные источники рисков), для которых характерны следующие виды ЧС:

- затопление населённых пунктов и инфраструктуры территорий в результате высоких уровней воды (весеннее половодье, дождевые паводки);
- затопление (разрушение) объектов в результате заторов (зажоров) льда;
- гибель людей в результате ослабления льда на ледовых переправах и в период зимней рыбалки.

2 Гидротехнические сооружения как источники рисков природно-техногенного характера, таких как:

- образование волн прорыва в результате разрушения плотин прудов и водохранилищ (характерных, в основном, для ГТС IV класса);
- затопление территорий в результате разрушения защитных дамб;
- аномально большие расходы сбросов ГЭС (ГТС I класса), приводящие к затоплению объектов в нижних бьефах;
- низкие расходы сбросов гидроузлов, затрудняющие судоходство;

- аварии на ГТС I класса (относящиеся к классу маловероятных) в результате катастрофических паводков, сейсмособытий, нарушений условий эксплуатации этих критически важных объектов, приводящих к образованию масштабных волн прорыва, проблемам энергообеспечения промышленных объектов и территорий, и др.

3 Техногенные источники экологических рисков, среди которых:

- выход гидрохимических и бактериологических показателей проб воды за пределы нормативных значений;
- повышенное содержание радионуклидов в воде и донных отложениях;
- изменение состава ихтиофауны в результате строительства крупных гидроузлов, связанное как с повышением температуры воды в нижних бьефах ГЭС, так и с накоплением органических примесей в водохранилищах;
- загрязнением акваторий в результате разливов нефтепродуктов, затоплением судов и перевозимых по рекам грузов.

Для оценки последствий и вероятностей реализации перечисленных видов опасностей разработан комплекс расчётно-аналитических методов, использующих кризисные базы данных [6], аналитические модели OLAP [7], а также банк пространственных данных.

## **ОПИСАНИЕ СТРУКТУРЫ ТЕМАТИЧЕСКОГО БАНКА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДАННЫХ**

Банк пространственных данных (БПД), разработан с использованием ГИС ESRI ArcGIS 10.0. Состав БПД, используемый для оценки и управления рисками водных систем, показан на рисунке 1.

Банк содержит векторные и растровые слои, необходимые для проведения вычислительных операций и разработки различных карт. Векторные слои представляют собой данные топографической основы масштабов М1: 1 000 000, М1: 100 000 (для обзорных карт) и М1:25 000, М1:2 000 для детализированных карт оценки опасностей. Процесс создания новых тематических слоёв карт включает в себя геокодирование, математическое моделирование, оциф-

ровку растровых материалов с последующей географической трансформацией (привязкой). При загрузке в БПД, векторные данные приведены к единой картографической проекции в соответствии с требованиями к картографической информации [8]. Атрибутивные данные

практически всех векторных слоёв дополнены характеристиками из баз данных, содержащих статистическую и мониторинговую информацию общедоступного и ведомственного характера.

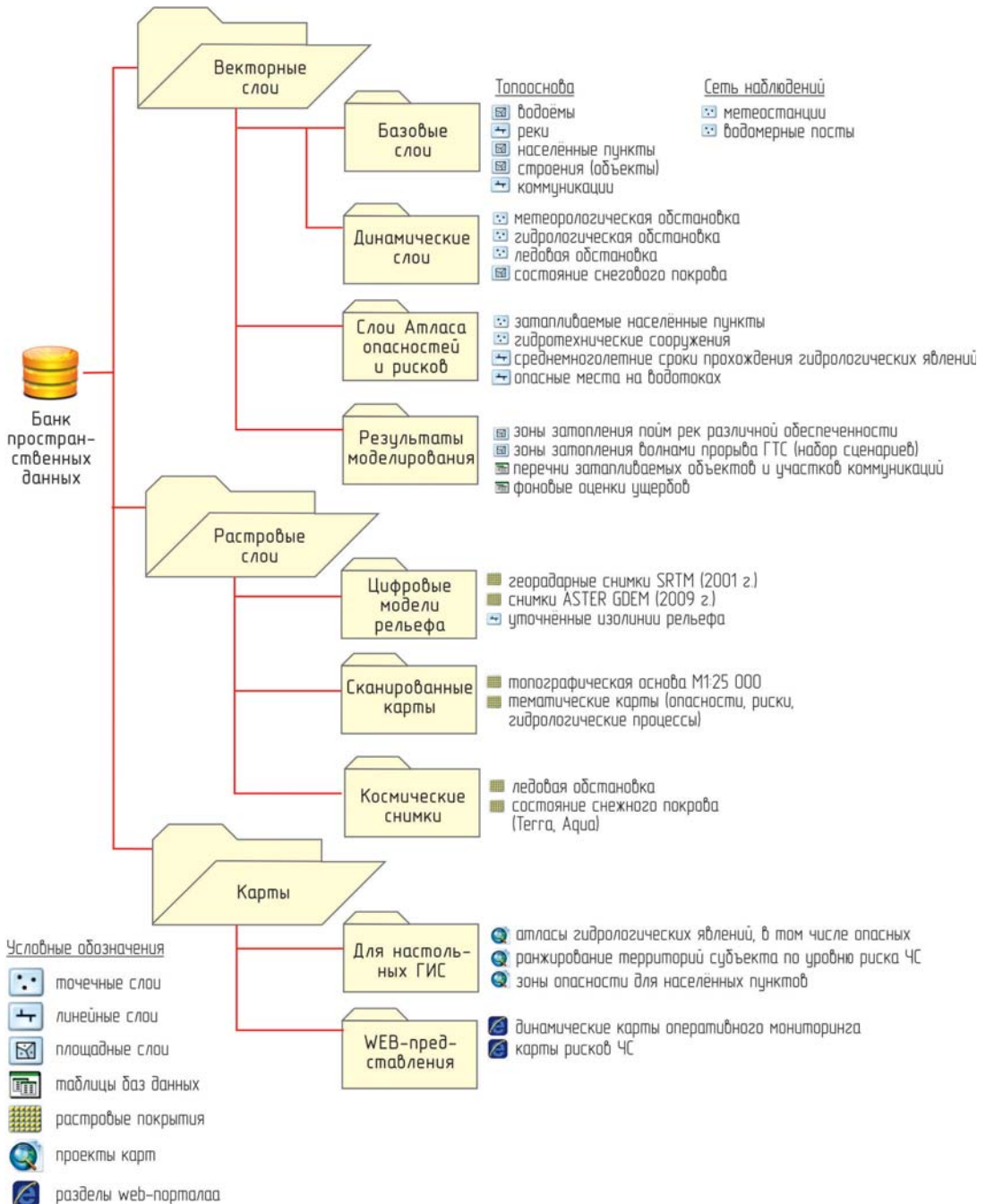


Рис. 1. Структура банка пространственных данных

Динамические слои являются представлением данных оперативного мониторинга, формируемыми на основе базовых слоев (топографической основы и сети наблюдений). При загрузке пакета данных оперативных наблюдений по какой-либо обстановке происходит пространственная привязка данных к местоположению пунктов наблюдений и визуализация результатов измерений в виде числовых значений (уровни воды, температура воздуха, количество осадков и др.) или символов (суточное изменение уровней воды, ледовые явления, направление и скорость ветра).

Результаты моделирования зон затопления представляют собой площадные слои, иллюстрирующие подъём уровня воды на определённую высоту. Расчётная модель учитывает уклон поверхности водотока, наличие притоков, тип события (разлив реки, затор льда, прорыв плотины и пр.). Точность расчёта определяется качеством цифровых моделей рельефа и составляет примерно один метр. Для получения более точных оценок степени возможного затопления территорий необходимо проведение детальной топографической съёмки с использованием наземных средств и летательных аппаратов, в том числе беспилотных.

На основе результатов моделирования с помощью методов картографического анализа сформированы перечни затопляемых объектов (строений, дорог, объектов жизнеобеспечения и инфраструктуры). Из-за дефицита статистического материала расчёт ущербов и количества пострадавшего населения проведён по методикам фоновой оценки, допускающей, что жители равномерно распределены по территории населённого пункта и количество пострадавших пропорционально затопленной части поселения. С появлением детализированных данных по застройке всех населённых пунктов с характеристиками строений и уточнённых сведений переписи населения Красноярского края появилась возможность более точной оценки последствий половодья различной обеспеченности. Таким образом, характеристики населённых пунктов дополнены сведениями о количестве объектов, затопляемых при различных уровнях воды, оценкой численности пострадавшего населения и примерным размером ущербов. Для отображения

зон затопления на среднемасштабных картах затопляемые населённые пункты сгруппированы по бассейнам крупных рек (гидрологическим районам), что позволяет оценить последствия прохождения волны паводка в целом.

Поскольку таблицы с результатами расчётов имеют пространственную привязку, построены картограммы Красноярского края с выделением муниципальных районов и населённых пунктов по различным характеристикам рисков (вероятности, масштабам последствий и т.д.). Кроме того, с использованием векторных и растровых слоёв банка пространственных данных построено большое количество тематических карт, используемых в территориальном управлении безопасностью на уровне субъектов и муниципальных образований, в научных и аналитических исследованиях, для иллюстрации оперативной и прогнозируемой обстановки на web-порталах.

Приведём классификацию карт рисков водных систем по целевому назначению с описанием методов их разработки и используемых информационных ресурсов. Аналогичная классификация для карт экологического риска предложена И.Ф. Петровой в работе [9].

*Карты вероятности возникновения неблагоприятных гидрологических процессов* построены на основе данных статистики чрезвычайных ситуаций, связанных с затоплениями территорий. Поскольку каталог событий содержит информацию о последствиях чрезвычайных событий, выраженную в денежном эквиваленте (ущерб), то аналогично картам вероятности и повторяемости процесса или явления разработаны *карты распределения ущербов от ЧС и других событий*.

*Карты риска как возможности возникновения неблагоприятного процесса или явления* строятся обычно на непродолжительное время (сезон, неделю и менее) и иллюстрируют средние и краткосрочные прогнозы, выпускаемые перед началом паводкового сезона. Например, по распределению запасов воды в снеге, толщины льда на реках и фонового прогноза температур определяются максимальные уровни воды при прохождении весеннего половодья. Интеграция гидрологических прогнозов с данными по инфраструктуре территории (распо-

ложением населённых пунктов, дорог, ЛЭП и других объектов в поймах рек или с нижних бьефов аварийных гидротехнических сооружений) положена в основу карт распределения рисков затопления территорий и предварительной оценки ущербов на прогнозируемый период.

В качестве примера карт *риска активности, интенсивности и категории неблагоприятного процесса и явления* можно привести карты участков водохранилищ ГЭС, подвергающихся берегопереработке и оползневым процессам. Мониторинг опасных процессов этого типа ведётся как наземными средствами (замеры, фотографирование), так и по данным космических снимков высокого разрешения (SPOT и Lansat, видимый диапазон).

*Карты риска как доли негативного компонента от общего и усреднённого показателя* строятся для потенциально опасных или социально значимых объектов по характеристикам их технического состояния, данных обследования и т.п. Например, карты риска образования волны прорыва в результате аварии на гидротехническом сооружении построены на основе данных о состоянии ГЭС, результатов расчётов параметров волны прорыва при реализации различных сценариев аварийных ситуаций, обеспеченности (вероятности) половодья, приводящего к переполнению водоёма или повышенным расходам водотока и инициирующего аварию. Масштаб карт М1:200 000 позволяет проиллюстрировать ситуацию в отдельном муниципальном образовании. Например, в районах активного ведения сельского хозяйства (Курагинский, Ермаковский и других) находится значительное количество гидротехнических сооружений, построенных в 1960-х годах и требующих капитального ремонта. Ранжирование этих объектов по степени опасности с учётом состояния плотин, водосбросных сооружений и возможных последствий аварий позволяет осуществить информационную поддержку мероприятий по ремонту сооружений, спуску прудов и водохранилищ, передаче бесхозных объектов на баланс местных администраций или других собственников.

Крупномасштабные *карты количественных показателей риска* для населённого пункта

выполняются в масштабах (М 1:10 000, М 1:2 000). Как правило, эти карты являются приложением к Планам действий по ликвидации чрезвычайных ситуаций на территории муниципального образования. Зоны затопления, полученные на основе моделирования для такого типа карт слишком грубы, поэтому их вид уточняется по данным натурных наблюдений и опросов местных жителей.

*Картограммы балльной оценки территорий* строятся на основе нормирования большого числа показателей к единой шкале. Все факторы, определяющие риск чрезвычайных ситуаций распределены по трём группам: показатели опасности, уязвимости и защищённости территории. Балльные оценки используются для ранжирования крупных площадных объектов - муниципальных образований, бассейнов рек. Количественная оценка, выраженная в баллах, достаточно субъективна, поскольку зависит от выбранных исследователями параметров, способов их математической обработки [10]. Для ранжирования территории Красноярского края по комплексному показателю опасности гидрологических процессов выделены пять риск-факторов, значения которых получены на основе данных оперативного мониторинга и статистики чрезвычайных ситуаций:

1. высокий уровень воды (максимальная продолжительность стояния высоких уровней воды, дней в году);
2. ледовые явления (комплексный показатель, в котором учитываются продолжительность ледостава, ледохода, вероятность заторных явлений при вскрытии рек),
3. частота паводков и количество населённых пунктов, подверженных затоплению;
4. количество гидротехнических сооружений и их техническое состояние;
5. количество ледовых переправ и продолжительность их работы.

Коэффициенты (шкала от 0.1 до 1.0), соотношенные с каждым фактором, отражают вклад этого фактора в обобщенный показатель риска для каждого муниципального образования. На основе полученных результатов построены картограммы степени уязвимости территорий

к опасным гидрологическим явлениям. Для проведения комплексного анализа опасностей используется система OLAP-GIS, интегрирующая технологии оперативного анализа данных с геоинформационной системой представления результатов [11]. Компоненты системы встроены в программный интегратор Территориального центра мониторинга и прогнозирования ЧС Красноярского края. Это позволяет обновлять картограммы балльной оценки территорий при поступлении новых данных мониторинга гидрологической обстановки.

Для построения *динамических карт комплексного мониторинга оперативной обстановки* задействовано несколько технологий:

- консолидации данных разнородных источников (систем мониторинга);
- интегрированных хранилищ данных для представления первичной и агрегированной информации;
- OLAP - анализа для оперативного выявления опасностей, чрезвычайных ситуаций и их предвестников;
- Web-визуализации оперативных данных на общедоступной картографической основе [12].

Консолидация данных обеспечивает возможность автоматизации сбора и оперативной обработки информации, получаемой из разнородных и разобщенных источников, и формирования автоматически пополняемого консолидированного хранилища данных комплексного оперативного мониторинга обстановки.

Оперативный анализ данных (OLAP) обеспечивает нужный уровень агрегации данных, что особенно важно при использовании датчиков автоматического контроля обстановки, способных контролировать параметры в зависимости от настроек. Например, погодные условия с датчиков метеорологической информации обновляются каждые 15 минут. OLAP-модели, использующие для обработки данных справочники критических значений измеряемых параметров и архивные данные мониторинга, формируют динамические слои карт, которые затем отображаются на web-сайте либо в настольной ГИС.

На *картах экологических рисков* отображаются потенциальные источники чрезвычайных ситуаций: стационарные (порты, нефтебазы) и динамические (суда, перевозящие нефтепродукты и другие опасные вещества, источники радиоактивного и химического загрязнения акваторий, участки взрывных работ, связанных с ослаблением льда перед ледоходом и пр.). К этому же классу относятся карты динамики водных экосистем водохранилищ и других водоемов, разрабатываемые по результатам научно-исследовательских экспедиций, контроля качества вод и других природоохранных мероприятий.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Результаты работ по оценке и картографированию рисков ЧС позволят повысить эффективность территориального управления, снизить затраты на ликвидацию последствий затоплений различной природы и компенсацию ущербов. Например, планирование и реализация мероприятий по рыхлению льда на заторопленных участках рек с помощью взрывных работ осуществляется на основе моделирования обстановки на крупномасштабных лоцманских картах. Для контроля и надзора за состоянием ГТС разработано приложение, в основу которого также положена геоинформационная система [13].

Карты рисков использованы для обоснования инвестиционных проектов в области гидроэнергетики, добычи и транспортировки нефтепродуктов и других природных ресурсов. Они позволяют в наглядной форме визуализировать оценки степени воздействия эксплуатирующихся и проектируемых объектов на окружающую среду и население, а также синергетические эффекты природных и техногенных опасностей.

Результаты комплексного анализа природных и антропогенных рисков позволяют сделать также долгосрочные оценки экологической безопасности территории, провести районирование территорий Сибири для планирования новых видов природопользования и реализации мер, направленных на предотвращение возможных ущербов. Выполнение таких задач возможно только с использованием современ-

ных геоинформационных технологий.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Безопасность России. Правовые, социально-экономические и научно-технические аспекты. Региональные проблемы безопасности. Красноярский край. - М.: «Знание», 2001. - 576 с.
- [2] Невидимова О.Г., Янкович Е.П. Исследование природно-климатических опасностей с использованием ГИС-технологий // Геоинформационные технологии и математические модели для мониторинга и управления экологическими и социально-экономическими системами: монография. - Барнаул: Пять плюс, 2011. - С. 169-175.
- [3] Russ Johnson. A Case Study in Multiagency GIS for Managing a Large-Scale Natural Disaster. Global Risk Forum, Davos, Switzerland, 2008. - P. 288-292.
- [4] ArcGIS 9. Spatial Analyst. Руководство пользователя. ESRI, 2001. - 219 p.
- [5] Бычков И.В., Ружников Г.М., Хмельнов А.Е., Гаченко А.С. и др. Интеграция информационно-аналитических ресурсов и обработка пространственных данных в задачах управления территориальным развитием. ИДСТУ СО РАН. - Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2011. - 369 с.
- [6] Шокин Ю.И., Москвичев В.В., Ноженкова Л.Ф., Ничепорчук В.В. Кризисные базы данных для управления безопасностью территорий // Вычислительные технологии. 2011. Т.16. - №6. С.115-126
- [7] Коробко А.В., Пенькова Т.Г., Ничепорчук В.В. Оперативный аналитический контроль состояния объектов техносферы и окружающей среды Красноярского края на основе мониторинговых данных // Мониторинг. Наука и безопасность. №3 (11), 2013. С. 66-83.
- [8] Рекомендации по картографическому обеспечению МЧС России/ Нормативно-методические документы по вопросам организации выполнения научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ. Утверждены заместителем Министра МЧС России генерал-полковником А.П. Чуприяном. - М.: ВНИИ ГОЧС, 2008. - 69 с.
- [9] Петрова И.Ф. Проблемы отображения понятия «опасность» на экологических картах // Известия РАН. Серия географическая, 2008, №5. - с. 126-131.
- [10] Ничепорчук В.В., Ноженкова Л.Ф. Экспертная ГИС поддержки принятия решений паводкоопасных ситуациях для территорий Сибирского региона // Вестник Кемеровского государственного университета. - 2012. - № 4/2(52). - С. 97-104.
- [11] Ноженкова Л.Ф., Ничепорчук В.В., Марков А.А., Евсюков А.А. Система анализа данных мониторинга чрезвычайных ситуаций OLAP-GIS. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ №20111612987 от 14.04.2011 г.
- [12] Ноженкова Л.Ф., Ничепорчук В.В., Бадмаева К.В., Пенькова Т.Г., Коробко А.В., Евсюков А.А., Ноженков А.И., Марков А.А., Морозов Р.В., Есавкин С.Е. Система консолидации и анализа данных мониторинга чрезвычайных ситуаций в Красноярском крае // Проблемы безопасности в чрезвычайных ситуациях. - 2012. - №4. - С. 63-73.
- [13] Милькова И.А., Симонов К.В., Ничепорчук В.В., Бурцев А.А. Информационное обеспечение для решения задач безопасности ГТС / Проблемы информатизации региона. ПИР-2013: Материалы XIII Всероссийской научно-практической конференции / Под ред. Л.Ф. Ноженковой. - Красноярск: ИВМ СО РАН, 2013. - С. 219-226.

# THE ADDITIVE SECOND ORDER METHOD FOR SOLVING STIFF PROBLEMS

## АДДИТИВНЫЙ МЕТОД ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ ЗАДАЧ

---

*A method of accuracy order 2 has been constructed stiff additive systems of ordinary differential equations. An error estimate and control inequalities for computation accuracy have been obtained. The calculation results are given.*

---

### ВВЕДЕНИЕ

Для численного решения задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' = f(t, y), y(t_0) = y_0, t_0 \leq t \leq t_k \quad (1)$$

обычно применяются  $L$ -устойчивые методы. Здесь  $y$  и  $f$  - вещественные  $N$ -мерные вектор-функции,  $t$  - независимая переменная. В случае большой размерности задачи (1) для методов с неограниченной областью устойчивости общие вычислительные затраты фактически полностью определяются временем вычисления и декомпозиции матрицы Якоби системы (1). Во многих алгоритмах используется замораживание матрицы Якоби, то есть применение одной матрицы на нескольких шагах интегрирования. Это позволяет значительно уменьшить вычислительные затраты. Наиболее естественно это осуществляется в итерационных методах решения обыкновенных дифференциальных уравнений, где данная матрица не влияет на порядок точности численной схемы, а только определяет скорость сходимости итерационного процесса. Такой подход широко применяется при реализации полуявных и неявных методов типа Рунге-Кутты, многошаговых методов типа Адамса и Гира (см., например, [1]). Однако для безытерационных методов [2-4] вопрос о замораживании или какой-либо другой аппроксимации матрицы Якоби значительно более сложный. В таких методах матрица Якоби влияет на порядок точности численной схемы, и поэтому какие-либо ее возмущения могут приводить к потере порядка точности. Следует отметить, что безытерационные методы просты с точки зрения реализации на ЭВМ и, как следствие, привлекательны для многих вычислителей.

С другой стороны, задачу (1) можно записать в виде [5-6]

$$y' = [f(t, y) - By] + By, y(t_0) = y_0, t_0 \leq t \leq t_k, \quad (2)$$

где  $B$  есть некоторая аппроксимация матрицы Якоби. Предполагая, что вся жесткость сосредоточена в слагаемом  $By$ , выражение в квадратных скобках можно интерпретировать как нежесткую часть. Если при построении безытерационных методов учитывать этот факт, то такая постановка задачи позволяет, в частности, использовать в алгоритмах интегрирования замораживание матрицы Якоби, которая может вычисляться как аналитически, так и численно. Для некоторых задач в качестве матрицы  $B$  можно использовать симметричную часть матрицы Якоби или применять ее диагональную аппроксимацию.

Здесь построен четырехстадийный метод второго порядка точности, допускающий различные виды аппроксимации матрицы Якоби. Получены оценка ошибки и неравенство для контроля точности вычислений. Приведены результаты расчетов, подтверждающие работоспособность и эффективность алгоритма интегрирования.

---

<sup>1</sup> Institute of computational modeling SB RAS, Krasnoyarsk, Russia



## ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА ДЛЯ АВТОНОМНЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим задачу Коши для автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида

$$y' = \varphi(y) + g(y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_k, \quad (3)$$

где  $y$ ,  $\varphi$  и  $g$  - вещественные  $N$ -мерные вектор-функции,  $t$  - независимая переменная. Будем полагать, что вся жесткость сосредоточена в функции  $g(y)$ , а  $\varphi(y)$  есть нежесткая часть. Для численного решения (3) рассмотрим четырехстадийный метод вида

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^4 p_i k_i, \quad D_n = E - ahg'_n, \\ k_1 = h\varphi(y_n), \quad Dk_2 = h[\varphi(y_n) + g(y_n)], \quad Dk_3 = k_2, \quad (4)$$

$$k_4 = h\varphi(y_n + \beta_{41}k_1 + \beta_{42}k_2 + \beta_{43}k_3),$$

где  $E$  - единичная матрица,  $g'_n = \partial g(y_n)/\partial y$ ,  $k_i$  - стадии метода,  $a$ ,  $p_i$ ,  $\beta_{4j}$ ,  $1 \leq i \leq 4$ ,  $1 \leq j \leq 3$ , - числовые коэффициенты, определяющие свойства точности и устойчивости (4). Для исследования схемы (4) разложим стадии  $k_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , в ряды Тейлора по степеням  $h$  до членов с  $h^2$  включительно и подставим в первую формулу (4). Получим

$$y_{n+1} = y_n + (p_1 + p_2 + p_3 + p_4)h\varphi_n + (p_2 + p_3)hg'_n + \\ + (\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43})p_4h^2\varphi'_n\varphi_n + (\beta_{42} + \beta_{43})p_4h^2\varphi'_ng'_n + \\ + a(p_2 + 2p_3)h^2g'_n\varphi_n + a(p_2 + 2p_3)h^2g'_ng'_n + O(h^3),$$

где элементарные дифференциалы

$$\varphi_n = \varphi(y_n), \quad g_n = g(y_n), \quad \varphi'_n = \partial\varphi(y_n)/\partial y, \quad g'_n = \partial g(y_n)/\partial y$$

вычислены на приближенном решении  $y_n$ . Представление точного решения  $y(t_{n+1})$  в окрестности точки  $t_n$  в виде ряда Тейлора по степеням  $h$  имеет вид

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h(\varphi + g) + \frac{1}{2}h^2(\varphi'\varphi + \varphi'g + g'\varphi + g'g) + O(h^3),$$

где элементарные дифференциалы вычислены на точном решении  $y(t_n)$ .

Сравнивая полученные ряды до членов с  $h^2$  включительно при условии  $y_n = y(t_n)$ , получим условия второго порядка точности схемы (4), то есть:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1, \quad p_2 + p_3 = 1, \quad a(p_2 + 2p_3) = \frac{1}{2},$$

$$(\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43})p_4 = \frac{1}{2}, \quad (\beta_{42} + \beta_{43})p_4 = \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует

$$\beta_{41} = 0, \quad p_2 = \frac{4a-1}{2a}, \quad p_3 = \frac{1-2a}{2a}, \quad p_1 + p_4 = 0, \quad (\beta_{42} + \beta_{43})p_4 = \frac{1}{2}. \quad (5)$$

Исследуем устойчивость схемы (4). Применение тестового уравнения  $y' = \lambda y$  с комплексным числом  $\lambda$ ,  $\text{Re}(\lambda) < 0$ , в данном случае неправомерно, поскольку в этом случае теряется смысл в разделении правой части системы дифференциальных уравнений на жесткую и нежесткую часть. Поэтому в (3) положим  $\varphi(y) = \lambda_1 y$  и  $g(y) = \lambda_2 y$ , где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  есть произвольные комплексные числа, причем  $\text{Re}(\lambda_2) < 0$ . Смысл  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  - некоторые собственные числа матриц Якоби функций  $\varphi(y)$  и  $g(y)$ , соответственно.

Применяя (4) для решения задачи

$$y' = \lambda_1 y + \lambda_2 y, \quad y(0) = y_0, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

и обозначая  $x = h\lambda_1$  и  $z = h\lambda_2$ , имеем  $y_{n+1} = Q(x, z)y_n$ , где

$$Q(x, z) = \frac{1 + (1 - 2a)z + x + [-2ap_1 - ap_2 + (\beta_{42} + \beta_{43} - 2a)p_4]xz}{(1 - az)^2} + \\ + \frac{\frac{1}{2}x^2 - a\beta_{42}p_4x^2z + (a^2p_1 + a^2p_4 - a\beta_{42}p_4)xz^2 + (a^2 - ap_2)z^2}{(1 - az)^2}.$$

Необходимым условием  $L$ -устойчивости численной формулы (4) относительно функции  $g(y) = \lambda_2 y$  является выполнение соотношения  $Q(x, z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow -\infty$ . Из вида  $Q(x, z)$  следует, что это требование будет выполнено, если

$$p_2 = a, \quad \beta_{42} = 0.$$

В результате, учитывая (5), получим набор коэффициентов схемы (4) второго порядка точности

$$\beta_{41} = \beta_{42} = 0, \quad p_1 = -\frac{1}{2\beta_{43}}, \quad p_2 = a, \quad p_3 = 1 - a, \quad p_4 = \frac{1}{2\beta_{43}},$$

где  $\beta_{43}$  - свободный параметр, а коэффициент  $a$  есть корень уравнения

$$a^2 - 2a + \frac{1}{2} = 0.$$

Тогда функция устойчивости  $Q(x, z)$  схемы (4) имеет вид

$$Q(x, z) = \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + (1 - 2a)z + (1 - 2a)xz}{(1 - az)^2}.$$

Заметим, что если  $\varphi(y) \equiv 0$ , то схема (4) с полученными коэффициентами совпадает с  $L$ -устойчивым (2,1)-методом [7]

$$y_{n+1} = y_n + ak_2 + (1 - a)k_3,$$

функция устойчивости  $Q(0, z)$  которого имеет вид

$$Q(0, z) = \frac{1 + (1 - 2a)z}{(1 - az)^2},$$

а локальная ошибка  $\delta_n$  - следующий:

$$\delta_n = \left(a - \frac{1}{3}\right)h^3 g'^2 g + \frac{1}{6}h^3 g'' g^2 + O(h^4).$$

Уравнение  $a^2 - 2a + 0.5 = 0$  имеет два вещественных корня  $a_1 = 1 - 0.5\sqrt{2}$  и  $a_2 = 1 + 0.5\sqrt{2}$ . Выберем  $a = a_1$ , потому что в этом случае меньше коэффициент в главном члене локальной ошибки (2,1)-схемы. Если  $g(y) \equiv 0$ , то численная формула (4) вырождается в явный двухстадийный метод типа Рунге-Кутты вида

$$y_{n+1} = y_n + \left(1 - \frac{1}{2\beta_{43}}\right)k_1 + \frac{1}{2\beta_{43}}k_4.$$

Нетрудно видеть, что локальную ошибку  $\delta_n$  этой схемы можно записать в виде

$$\delta_n = \frac{1}{6}h^3 \varphi'^2 \varphi + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4\beta_{43}}\right)\varphi'' \varphi^2 + O(h^4).$$

Отсюда следует, что локальная ошибка явной формулы будет минимальной, если  $\beta_{43} = 2/3$ . Те-

перь окончательно имеем набор коэффициентов схемы (4) второго порядка точности, то есть

$$a = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \beta_{41} = \beta_{42} = 0, \beta_{43} = \frac{2}{3}, p_1 = -\frac{3}{4},$$

$$p_2 = a, p_3 = 1 - a, p_4 = \frac{3}{4}.$$

### КОНТРОЛЬ ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Контроль вычислений численной схемы (4) будем осуществлять с помощью метода первого порядка точности. С использованием стадий (4) можно построить семейство численных формул первого порядка вида

$$y_{n+1,1} = y_n + \sum_{i=1}^5 b_i k_i, \quad (7)$$

где  $k_i = hg(y_n)$ ,  $b_i$ ,  $1 \leq i \leq 5$ , - числовые коэффициенты. Применяя разложения стадий в ряды Тейлора, видим, что (7) будет иметь первый порядок точности, если

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1, b_2 + b_3 + b_5 = 1.$$

Тогда оценку ошибки  $\varepsilon_n$  схемы (4) можно вычислить по формуле

$$\varepsilon_n = y_{n+1} - y_{n+1,1}.$$

При выборе коэффициентов  $b_i$ ,  $1 \leq i \leq 5$ , можно руководствоваться различными соображениями. Если, например, в функции  $g(y)$  полностью сосредоточена жесткость задачи (3), что для многих задач (2) имеет место при  $B = \partial f(y)/\partial y$ , то имеет смысл выбрать набор коэффициентов  $b_1 = b_3 = b_4 = b_5 = 0$ ,  $b_2 = 1$  или  $b_1 = b_2 = b_4 = b_5 = 0$ ,  $b_3 = 1$ . Такой способ оценки ошибки успешно использовался при реализации (2,1)-метода с аналитическим вычислением матрицы Якоби.

Однако, если, например, в методе (4) используется диагональная аппроксимация матрицы Якоби, то для многих задач (3) функцию  $\varphi(y)$  нельзя считать нежесткой частью. В такой ситуации данная оценка может приводить к потере точности вычислений из-за возникающей неустойчивости явной части численной формулы (4). Исходя из этих соображений в (7) выбраны коэффициенты

$$b_1 = b_5 = 1, b_2 = b_3 = b_4 = 0.$$

В этом случае (7) преобразуется к виду

$$y_{n+1,1} = y_n + h[\varphi(y_n) + g(y_n)].$$

Как показывают расчеты, применение данной схемы в оценке приводит к более надежному контролю точности вычислений.

Подчеркнем важную особенность построенной оценки ошибки. В силу  $L$ -устойчивости схемы (4) следует, что для функции устойчивости  $Q(x, z)$  выполняется  $Q(x, z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow -\infty$ . Так как для точного решения

$$y(t_{n+1}) = e^{(x+z)} y(t_n)$$

задачи (6) выполняется аналогичное свойство, то естественным будет требование стремления к нулю оценки ошибки  $\varepsilon_n$  при  $z \rightarrow -\infty$ . Однако для построенной оценки имеем  $\varepsilon_n = O(z)$ . Поэтому с целью исправления асимптотического поведения, вместо  $\varepsilon_n$  рассмотрим оценки  $\varepsilon_n(j_n)$  вида

$$\varepsilon_n(j_n) = D^{1-j_n} \varepsilon_n, 1 \leq j_n \leq 3.$$

Нетрудно видеть, что в смысле главного члена, то есть первого члена при разложении ошибок в ряды Тейлора по степеням  $h$ , оценки  $\varepsilon_n$  и  $\varepsilon_n(j_n)$  совпадают при любом значении  $j_n$ , причем

$\varepsilon_n(3) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow -\infty$ . Теперь для контроля точности вычислений можно применять неравенство

$$\|\varepsilon_n(j_n)\| \leq \varepsilon \quad 1 \leq j_n \leq 3,$$

где  $\varepsilon$  - требуемая точность расчетов. Отметим, что применение  $\varepsilon_n(j_n)$  вместо  $\varepsilon_n$  не приводит к существенному увеличению вычислительных затрат. При  $z \rightarrow 0$  оценка  $\varepsilon_n(1) = \varepsilon_n$  правильно отражает поведение ошибки и нет смысла проверять при других значениях  $j_n$ . При резком увеличении шага поведение  $\varepsilon_n$  может оказаться неудовлетворительным, что проявляется в неоправданном уменьшении шага и повторных вычислениях решения. Поэтому при реализации алгоритма интегрирования неравенство для контроля точности используется следующим образом. При каждом фиксированном  $n$  выбирается наименьшее значение  $j_n$ , при котором выполняется неравенство. Если оно не выполняется ни при каком  $j_n$ , то шаг уменьшается и решение вычисляется повторно.

### ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА ДЛЯ НЕАВТОНОМНЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим задачу Коши для неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида

$$y' = \varphi(t, y) + g(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_k,$$

где  $y$ ,  $\varphi$  и  $g$  - вещественные  $N$ -мерные вектор-функции,  $t$  - независимая переменная. Далее снова будем предполагать, вся жесткость сосредоточена в функции  $g(t, y)$ , а  $\varphi(t, y)$  есть нежесткая часть. Для численного решения неавтономной задачи рассмотрим четырехстадийный метод вида

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \sum_{i=1}^4 p_i k_i, \quad D = E - ahg'_n, \quad k_1 = h\varphi(t_n, y_n), \\ Dk_2 &= h[\varphi(t_n, y_n) + g(t_n + ch, y_n)], \quad Dk_3 = k_2, \\ k_4 &= h\varphi(t_n + [\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43}]h, y_n + \beta_{41}k_1 + \beta_{42}k_2 + \beta_{43}k_3), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $E$  - единичная матрица,  $g'_n = \partial g(t_n, y_n) / \partial y$ ,  $k_i$  - стадии метода,  $c, a, p_i, \beta_{4j}, 1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 3$ , - числовые коэффициенты. Для исследования схемы (8) разложим стадии  $k_i, 1 \leq i \leq 4$ , в ряды Тейлора по степеням  $h$  до членов с  $h^2$  включительно. Подставляя эти ряды в первую формулу (8), получим

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + (p_1 + p_2 + p_3 + p_4)h\varphi_n + (p_2 + p_3)hg'_n + \\ &+ (\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43})p_4h^2\varphi'_m + c(p_2 + p_3)g'_m + \\ &+ (\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43})p_4h^2\varphi'_n\varphi_n + (\beta_{42} + \beta_{43})p_4h^2\varphi'_n g'_n + \\ &+ a(p_2 + 2p_3)h^2g'_n\varphi_n + a(p_2 + 2p_3)h^2g'_ng'_n + O(h^3), \end{aligned}$$

где элементарные дифференциалы

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \varphi(t_n, y_n), \quad g_n = g(t_n, y_n), \quad \varphi'_m = \partial\varphi(t_n, y_n) / \partial t, \quad g'_m = \partial g(t_n, y_n) / \partial t, \\ \varphi'_n &= \partial\varphi(t_n, y_n) / \partial y, \quad g'_n = \partial g(t_n, y_n) / \partial y \end{aligned}$$

вычислены на приближенном решении  $y_n$ . Представление точного решения  $y(t_{n+1})$  в окрестности точки  $t_n$  в виде ряда Тейлора по степеням  $h$  имеет вид

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h(\varphi + g) + \frac{1}{2}h^2(\varphi'_t + g'_t + \varphi'_\varphi + \varphi'_g + g'_\varphi + g'_g) + O(h^3),$$

где элементарные дифференциалы вычислены на точном решении  $y(t_n)$ .

Сравнивая полученные ряды до членов с  $h^2$  включительно при условии  $y_n = y(t_n)$ , получим условия второго порядка точности схемы (7), то есть:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1, \quad p_2 + p_3 = 1, \quad (\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43}) p_4 = \frac{1}{2},$$

$$c(p_2 + p_3) = \frac{1}{2}, \quad (\beta_{42} + \beta_{43}) p_4 = \frac{1}{2}, \quad a(p_2 + 2p_3) = \frac{1}{2}.$$

Отсюда сразу следует  $c = 0.5$ . Теперь рассуждая по аналогии с исследованием схемы (4), получим коэффициенты численной формулы (8), которые имеют вид

$$a = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \beta_{41} = \beta_{42} = 0, \quad c = \frac{1}{2}, \quad \beta_{43} = \frac{2}{3}, \quad p_1 = -\frac{3}{4},$$

$$p_2 = a, \quad p_3 = 1 - a, \quad p_4 = \frac{3}{4}.$$

Неравенство для контроля точности вычислений построим по аналогии со схемой (4), где в оценке  $\varepsilon_n$  используется приближение к решению, полученное методом второго порядка точности (8), и приближенное решение, вычисленное методом первого порядка вида

$$y_{n+1,1} = y_n + h \left[ \varphi(t_n, y_n) + g \left( t_n + \frac{1}{2}h, y_n \right) \right].$$

Выбор шага по точности осуществляется точно также, как и в случае автономной системы.

## АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ

Далее построенный алгоритм будем называть ASODE2. Замораживание матрицы Якоби, то есть применение матрицы  $D = E - ahg'_n$  на нескольких шагах интегрирования, проводилось по следующему правилу. Если матрица Якоби не пересчитывалась, то для сохранения устойчивости численной схемы величина шага интегрирования тоже не менялась. Попытка применения старой матрицы осуществлялась после каждого успешного шага интегрирования. Три причины приводили к размораживанию: 1) нарушение неравенства для контроля точности вычислений, 2) превышение количество шагов с замороженной матрицей числа  $q_f$ , 3) превышение прогнозируемого шага интегрирования последнего успешного шага в  $q_h$  раз.

Параметры  $q_f$  и  $q_h$  можно использовать для настройки метода на решение конкретных задач. Если  $q_f \rightarrow \infty$  и  $q_h \rightarrow \infty$ , то число шагов с одной матрицей Якоби возрастает. Если  $q_f = 0$  и  $q_h = 0$ , то замораживание матрицы не происходит. Поэтому в случае большой размерности системы обыкновенных дифференциальных уравнений имеет смысл выбирать  $q_f$  и  $q_h$  достаточно большими величинами. В приведенных ниже расчетах  $q_f = 20$  и  $q_h = 2$ .

Все рассматриваемые ниже примеры приводились к виду (2). Вычисления осуществлялись с требуемой точностью  $\varepsilon = 10^{-2}$ . Расчеты проводились на PC Intel(R) Core(TM) i7-3770S CPU@3.10GHz с двойной точностью. Схема (4) имеет второй порядок точности, и поэтому проводить с ее помощью расчеты с более высокой точностью нецелесообразно. В расчетах левая часть неравенства для контроля точности вычислялась по формуле

$$\|\varepsilon_n(j_n)\| = \max_{1 \leq i \leq N} \frac{|\varepsilon_n^i(j_n)|}{|y_n^i| + r},$$

где  $i$  - номер компоненты,  $r$  - положительный параметр. Если по  $i$ -й компоненте решения выполняется неравенство  $|y_n^i| < r$ , то контролируется абсолютная ошибка  $\varepsilon r$ , в противном случае - относительная ошибка  $\varepsilon$ . В расчетах параметр  $r$  выбирался таким образом, чтобы по всем компонентам решения фактическая точность была не хуже задаваемой. Ниже через is, if, idcs

и  $isol$  обозначены, соответственно, суммарное число шагов интегрирования, правых частей системы (1), декомпозиций матрицы Якоби и число обратных ходов в методе Гаусса.

Пример 1 [8].

$$\begin{aligned} y_1' &= -0.013y_1 - 1000y_1y_3, \quad y_2' = -2500y_2y_3, \\ y_3' &= -0.013y_1 - 1000y_1y_3 - 2500y_2y_3, \\ t &\in [0, 50], \quad y_1(0) = y_2(0) = 1, \quad y_3(0) = 0, \quad h_0 = 2.9 \cdot 10^{-4}. \end{aligned} \quad (9)$$

Решение задачи (9) осуществлялось методом (4) с диагональной аппроксимацией матрицы Якоби, то есть в численной формуле (4) использовалась диагональная матрица  $D_n$  с элементами  $d_{ii}$  на диагонали вида:  $d_{11} = -0.013 - 1000y_3$ ,  $d_{22} = -2500y_3$  и  $d_{33} = -1000y_1 - 2500y_2$ . Так как в этом случае вычислительные затраты метода (4) практически такие же, как и в явных методах, то сравнение эффективности проводилось с известным явным методом Мерсона [9] четвертого порядка. Для вычисления приближенного решения с точностью  $\varepsilon = 10^{-2}$  алгоритмом ASODE2 потребовалось 687 шагов, остальные затраты вычисляются из вида схемы (4). Для решения данной задачи методу Мерсона потребовалось 400 627 вычислений правой части.

В случае использования полной матрицы Якоби системы (9) алгоритму ASODE2 без замораживания матрицы Якоби для решения задачи (9) потребовалось 38 шагов, 38 декомпозиций матрицы Якоби и 108 обратных ходов в методе Гаусса, остальные затраты вычисляются из вида схемы (4). При расчетах с замораживанием матрицы Якоби вычислительные затраты следующие:  $is=98$ ,  $idec=15$ ,  $isol=288$ .

Пример 2 [8].

$$\begin{aligned} y_1' &= -55y_1 + 65y_2 - y_1y_2, \\ y_2' &= 0.0785(y_1 - y_2), \quad y_3' = \frac{1}{10}y_1, \\ t &\in [0, 500], \quad y_1(0) = y_2(0) = 1, \quad y_3(0) = 0, \quad h_0 = 2 \cdot 10^{-2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Решение задачи (10) осуществлялось методом (4) с диагональной аппроксимацией матрицы Якоби, причем  $d_{11} = -55 - y_3$ ,  $d_{22} = -0.0785y_3$  и  $d_{33} = 0$ . Приближенное решение с точностью  $\varepsilon = 10^{-2}$  алгоритмом ASODE2 вычислено за 4 953 шага. Для решения данной задачи методу Мерсона потребовалось 80 713 вычислений правой части.

В случае использования полной матрицы Якоби системы (10) алгоритму ASODE2 без замораживания матрицы Якоби потребовалось 81 шаг, 81 декомпозиция матрицы Якоби и 388 обратных хода в методе Гаусса. При расчетах с замораживанием матрицы вычислительные затраты следующие:  $is=338$ ,  $idec=24$ ,  $isol=1124$ .

Пример 3 ([8]).

$$\begin{aligned} y_1' &= 77.27 \left[ y_1 (1 - 8.375 \cdot 10^{-6} y_1 - y_2) + y_2 \right], \\ y_2' &= \frac{1}{77.27} \left[ y_3 - (1 + y_1) y_2 \right], \quad y_3' = 0.161 (y_1 - y_3), \\ t &\in [0, 360], \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 2, \quad y_3(0) = 3, \quad h_0 = 10^{-6}. \end{aligned} \quad (11)$$

Решение задачи (11) осуществлялось методом (4) с диагональной аппроксимацией матрицы Якоби, причем

$$d_{11} = 77.27 \left[ 1 - 1.675 \cdot 10^{-7} y_1 - y_2 \right], \quad d_{22} = -\frac{1}{77.27} (1 + y_1), \quad d_{33} = -0.161.$$

Приближенное решение с точностью  $\varepsilon = 10^{-2}$  алгоритмом ASODE2 вычислено за 19 964 шага.

Для решения данной задачи методу Мерсона потребовалось 2 3700 664 вычислений правой части. В случае использования полной матрицы Якоби системы (11) алгоритму ASODE2 без замораживания матрицы Якоби потребовалось 2 449 шагов, 2 652 декомпозиции матрицы Якоби и 6 964 обратных хода в методе Гаусса. При расчетах с замораживанием матрицы вычислительные затраты следующие:  $is=19\ 807$ ,  $idec=3\ 431$ ,  $isol=50\ 924$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный алгоритм интегрирования создавался для численного решения задач механики сплошной среды после дискретизации по пространству методом конечных элементов или с помощью конечных разностей. В этом случае в задаче (3) разделение на функции  $g(y)$  и  $\varphi(y)$  происходит естественным образом -  $g(y)$  есть симметричная часть, описываемая оператором дифференцирования второго порядка, а  $\varphi(y)$  есть несимметричная часть (конвективные слагаемые), описываемые оператором дифференцирования первого порядка.

При реализации численной формулы (4) необходимо дважды решать линейную систему алгебраических уравнений. В задачах механики сплошной среды эффективность алгоритма интегрирования может быть достигнута за счет специальных методов решения линейных систем с симметричной матрицей, которая во многих случаях положительно определена.

Схему (4) можно применять также для решения локально-неустойчивых задач, причем  $\varphi(y)$  в этом случае отвечает за собственные числа матрицы Якоби с положительными вещественными частями. В отличие от  $A$ -устойчивых или  $L$ -устойчивых методов, у которых область неустойчивости обычно небольшая и которые являются  $A$ -устойчивыми или  $L$ -устойчивыми не только в левой, но и в правой полуплоскости плоскости  $\{h\lambda\}$ , явные методы типа Рунге-Кутта являются неустойчивыми практически во всей правой полуплоскости и поэтому более предпочтительны при определении неустойчивого решения. Для локально-неустойчивых задач в ряде случаев разделение правой части системы обыкновенных дифференциальных уравнений на функции  $\varphi(y)$  и  $g(y)$  из физических соображений тоже не вызывает особых трудностей.

Приведенные результаты численных экспериментов не ориентированы на решение задач механики сплошной среды или локально-неустойчивых задач, а направлены на исследование возможностей алгоритма интегрирования при решении некоторых общепринятых тестовых примеров. Тестовые примеры выбирались таким образом, чтобы продемонстрировать разные нюансы работы алгоритма интегрирования. Если поведение алгоритма на нескольких тестовых задачах совпадало, то выбирался наиболее простой из них. Цель расчетов заключалась в проверке работоспособности алгоритма с переменным шагом и с замораживанием матрицы Якоби, надежности неравенства для контроля точности вычислений, а также в исследовании возможности расчетов с диагональной аппроксимацией матрицы Якоби. В последнем случае вычислительные затраты на шаг в явных методах и построенном алгоритме различаются незначительно. В частности из анализа результатов расчетов жестких задач следует, что в случае невозможности применения методов с неограниченной областью устойчивости, алгоритм (4) существенно эффективнее метода Мерсона - наиболее распространенного среди явных численных схем типа Рунге-Кутта.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00047).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир. 1999.
- [2] Rosenbrock H.H. General implicit processes for the numerical solution of differential equations. Computer J. №5. 1963. P.329-330.

- [3] Kaps P., Rentrop P. Generalized Runge-Kutta methods of order four with step size control for stiff ordinary differential equations. Numer. Math. №33. 1979. P.55-68.
- [4] Новиков Е.А., Шитов Ю.А., Шокин Ю.И. Одношаговые безытерационные методы решения жестких систем. ДАН СССР. Т. 301. №6. 1988. С.1310-1314.
- [5] Cooper G.J., Sayfy A. Additive Runge-Kutta Methods for Stiff Ordinary Differential Equations. Mathematics of Computation. V. 40. №161. 1983. P.207-218.
- [6] Новикова Е.А. Аддитивный метод третьего порядка для решения жестких неавтономных задач // Сибирский журнал индустриальной математики. Т. XIII. №1(41). 2010. С.84-94.
- [7] Новиков Е.А., Шорников Ю.В. Компьютерное моделирование жестких гибридных систем. Новосибирск: Изд-во НГТУ. 2012.
- [8] Новиков Е.А. Явные методы для жестких систем. Новосибирск: Наука. 1997.
- [9] Merson R.H. An operational methods for integration processes // Proc. Symp. on Data Proc. Weapons Research Establishment, Salisbury, Australia, 1957. P.329-330.



## ALGORITHMS INTEGRATING STIFF PROBLEMS ON HETEROGENEOUS NUMERICAL SCHEMES

### АЛГОРИТМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЖЕСТКИХ ЗАДАЧ НА НЕОДНОРОДНЫХ ЧИСЛЕННЫХ СХЕМАХ

---

*An  $L$ -stable (2,1)-method and an explicit two-stage Runge-Kutta type scheme are constructed, both schemes of order two. A numerical formula of order one is developed that is based on the stages of the explicit method and its stability interval is extended to 8. An integration algorithm of variable order and step is constructed that is based on the stages of the three schemes. The most effective numerical scheme is chosen for each step by means of stability control inequality. The results are given that confirm the effectiveness of the algorithm.*

---

#### ВВЕДЕНИЕ

При моделировании кинетики химических реакций, расчете электронных схем, электрических цепей и других важных приложениях возникает проблема численного решения задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Основные тенденции при построении численных методов связаны с расширением их возможностей для решения систем высокой размерности. Математические постановки практических задач постоянно уточняются, что приводит к росту размерности и к усложнению правой части системы дифференциальных уравнений. Сложность задач, возникающих в практике, опережает развитие вычислительной техники, что приводит к возрастающим требованиям к вычислительным алгоритмам.

Во многих случаях расчеты требуется проводить с невысокой точностью - порядка 1% и ниже, потому что измерение констант, входящих в правую часть системы дифференциальных уравнений, часто проводится достаточно грубо. Иногда такая точность расчетов является удовлетворительной с точки зрения поставленной цели. Известно, что порядок аппроксимации численной схемы следует сочетать с требуемой точностью расчетов. Поэтому ниже ограничимся рассмотрением методов не выше второго порядка.

Современные методы решения жестких задач, как правило, используют вычисление и обращение матрицы Якоби системы дифференциальных уравнений. В случае достаточно большой размерности системы эффективность численных методов фактически полностью определяется временем декомпозиции этой матрицы. Для повышения эффективности расчетов в ряде алгоритмов используется замораживание матрицы Якоби, то есть применение одной матрицы на нескольких шагах интегрирования [1]. Наиболее успешно этот подход применяется в алгоритмах на основе многошаговых методов [2].

Не вызывает эта проблема особых трудностей и при построении алгоритмов интегрирования на основе других численных схем, если в них стадии вычисляются с участием матрицы Якоби в некотором итерационном процессе. Хуже обстоит дело в алгоритмах интегрирования на основе известных безытерационных методов, к которым относятся методы типа Розенброка [3] и их различные модификации [1, 4-5]. Следует отметить, что безытерационные методы просты с точки зрения реализации. Однако в таких методах матрица Якоби влияет на порядок точности численной схемы, и поэтому возникают трудности с применением одной матрицы на нескольких шагах.

---

1 Institute of computational modeling SB RAS, Krasnoyarsk, Russia

2 Siberian federal university, Krasnoyarsk, Russia

Некоторым аналогом замораживания матрицы Якоби является применение в расчетах алгоритмов интегрирования на основе явных и  $L$ -устойчивых методов с автоматическим выбором численной схемы. В этом случае эффективность алгоритма может быть повышена за счет расчета переходного участка, соответствующего максимальному собственному числу матрицы Якоби, явным методом. В качестве критерия выбора эффективной численной формулы естественно применять неравенство для контроля устойчивости [6].

Здесь на основе явных методов типа Рунге-Кутты первого и второго порядков, а также  $L$ -устойчивого (2,1)-метода второго порядка построен алгоритм переменной структуры, в котором допускается замораживание как численной, так и аналитической матрицы Якоби. Приведены результаты расчетов, подтверждающие эффективность построенного алгоритма.

## L-УСТОЙЧИВЫЙ (2,1) -МЕТОД

В [4] для численного решения жестких задач

$$y' = f(y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_k, \quad (1)$$

где  $y$  и  $f$  - вещественные  $N$ -мерные вектор-функции,  $t$  - независимая переменная, предложен класс  $(m, k)$ -методов. С точки зрения реализации на ЭВМ  $(m, k)$ -методы столь же просты, как и схемы типа Розенброка. Однако в данном классе значительно проще решается проблема замораживания матрицы Якоби. В отличие от традиционных методов  $(m, k)$ -схемы описываются двумя постоянными:  $m$  - число стадий и  $k$  - количество вычислений правой части системы (1). Для решения (1) рассмотрим (2,1)-схему вида

$$y_{n+1} = y_n + p_1 k_1 + p_2 k_2, \quad D_n k_1 = hf(y_n), \quad D_n k_2 = k_1, \quad (2)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  - стадии метода,  $D_n = E - ahA_n$ ,  $E$  - единичная матрица,  $h$  - шаг интегрирования,  $A_n$  - некоторая матрица, представимая в виде

$$A_n = f'_n + hB_n + O(h^2),$$

$f'_n = \partial f(y_n)/\partial y$  - матрица Якоби системы (1),  $B_n$  - не зависящая от шага интегрирования произвольная матрица,  $a$ ,  $p_1$  и  $p_2$  - числовые коэффициенты. Использование матрицы  $A_n$  позволяет применять (2) с замораживанием как аналитической, так и численной матрицы Якоби [7]. В случае использования матрицы Якоби  $f'_{n-k}$ , вычисленной  $k$  шагов назад, имеем

$$B_n = -kf''_n f_n, \quad f''_n f_n = \frac{\partial^2 f(y_n)}{\partial y^2}.$$

Если матрица Якоби вычисляется численно с шагом  $r_j = c_j h$ , то элементы  $b_{n,ij}$  матрицы  $B_n$  имеют вид

$$b_{n,ij} = \frac{1}{2} c_j \frac{\partial^2 f_i(y_n)}{\partial y_j^2}$$

В расчетах шаг  $r_j$  выбирался по формуле

$$r_j = \max \{10^{-14}, 10^{-7} |y_j|\}.$$

Получим коэффициенты  $L$ -устойчивой численной схемы (2) второго порядка и построим неравенство для контроля точности вычислений. Разложение точного решения  $y(t_{n+1})$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $t_n$  до членов с  $h^3$  включительно имеет вид

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf + \frac{1}{2} h^2 f'f + \frac{1}{6} h^3 (f'^2 f + f''f^2) + O(h^4), \quad (3)$$

где элементарные дифференциалы вычислены на точном решении  $y(t_n)$ . Для нахождения коэф-

коэффициентов  $a$ ,  $p_1$  и  $p_2$  схемы (2) запишем разложения стадий  $k_1$  и  $k_2$  в ряды Тейлора в окрестности точки  $y_n$  до членов с  $h^3$  включительно и подставим в (2). Получим

$$y_{n+1} = y_n + (p_1 + p_2)hf_n + a(p_1 + 2p_2)h^2 f'_n f_n + a^2(p_1 + 3p_2)h^3 f''_n f_n + a(p_1 + 2p_2)h^3 B_n f_n + O(h^4), \quad (4)$$

где элементарные дифференциалы вычислены на приближенном решении  $y_n$ . Полагая  $y_n = y(t_n)$  и сравнивая (3) и (4) до членов с  $h^2$  включительно, получим условия второго порядка точности схемы (2), то есть

$$p_1 + p_2 = 1, \quad \beta p_2 = \frac{1}{2}.$$

Исследуем устойчивость численной формулы (2). Применяя ее к задаче

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y_0, \quad \operatorname{Re}(\lambda) < 0, \quad (5)$$

получим  $y_{n+1} = Q(x)y_n$ , где  $x = h\lambda$ , а функция устойчивости  $Q(x)$  имеет вид

$$Q(x) = \frac{1 + (p_1 + p_2 - 2a)x + a(a - p_1)x^2}{(1 - ax)^2}.$$

Тогда схема (2) будет  $L$ -устойчивой, если  $p_1 = a$ . Подставляя это соотношение в условия порядка, получим набор коэффициентов

$$p_1 = a, \quad p_2 = 1 - a,$$

где  $a$  определяется из условия  $L$ -устойчивости

$$a^2 - 2a + \frac{1}{2} = 0.$$

Сравнивая (3) и (4) до членов с  $h^3$  включительно получим, что локальная ошибка  $\delta_n$  численной схемы (2) имеет вид

$$\delta_n = h^3 \left[ \left( a - \frac{1}{3} \right) f''^2 f + \frac{1}{6} f'' f^2 - \frac{1}{2} B_n f \right] + O(h^4).$$

Уравнение  $a^2 - 2a + 0.5 = 0$  имеет два корня:  $a_1 = 1 - 0.5\sqrt{2}$  и  $a_2 = 1 + 0.5\sqrt{2}$ . Выберем  $a = a_1$ , так как в этом случае меньше коэффициент в главном члене  $(a - 1/3)h^3 f''^2 f$  локальной ошибки. Рассмотрим одновременно численную формулу типа Розенброка с двумя вычислениями функции  $f$  на каждом шаге

$$y_{n+1} = y_n + p_1 k_1 + p_2 k_2, \quad D_n k_1 = hf(y_n), \quad D_n k_2 = hf(y_n + \beta k_1). \quad (6)$$

Согласно [5] при  $\beta = a$  коэффициенты  $p_1 = a$  и  $p_2 = 1 - a$  обеспечивает второй порядок точности (6), а условие  $a^2 - 2a + 0.5 = 0$  - ее  $L$ -устойчивость. Из [5] следует, что численная формула (6) является одной из наиболее удачных среди методов типа Розенброка с двумя вычислениями правой части задачи (1) на шаге интегрирования. Локальная ошибка  $\delta_n^{roz}$  численной формулы (6) имеет вид

$$\delta_n^{roz} = h^3 \left[ \left( a - \frac{1}{3} \right) f''^2 f + \left( \frac{1}{6} + 0.5[1 - \sqrt{2}]a \right) f'' f^2 - a B_n f \right] + O(h^4).$$

Построенная здесь схема (2), также как и (6), обладает вторым порядком точности и  $L$ -устойчивостью, а их локальные ошибки различаются незначительно. В тоже время (2) требует на каждом шаге на одно вычисление функции  $f$  меньше (6) при прочих равных затратах, что делает ее предпочтительнее.

Контроль точности вычислений численной схемы (2) построим по аналогии [8]. Для этого введем обозначение

$$v(j_n) = D_n^{1-j_n} (k_2 - k_1),$$

где  $k_1$  и  $k_2$  вычисляются по формулам (2). Тогда согласно [8] для контроля точности вычислений на каждом шаге нужно проверять неравенство

$$\|v(j_n)\| \leq \varepsilon, \quad 1 \leq j_n \leq 2,$$

где  $\varepsilon$  - требуемая точность расчетов,  $\|\cdot\|$  - некоторая норма в пространстве  $R^N$ , а целочисленная переменная  $j_n$  выбирается наименьшей, при которой выполняется данное неравенство. Оценку максимального собственного числа  $w_{n,0} = h\lambda_{n,\max}$  матрицы Якоби системы (1), необходимую для перехода на явную формулу, оценим через ее норму по формуле

$$w_{n,0} = h \left\| \frac{\partial f(y_n)}{\partial y} \right\|.$$

Ниже данная оценка будет применяться для автоматического выбора численной схемы.

### МЕТОД ТИПА РУНГЕ-КУТТЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Теперь для решения задачи (1) рассмотрим явный метод типа Рунге-Кутты [9]

$$y_{n+1} = y_n + p_1 k_1 + p_2 k_2, \quad k_1 = hf(y_n), \quad k_2 = hf(y_n + \beta k_1). \quad (7)$$

Получим соотношения на коэффициенты метода (7) второго порядка точности. Для этого разложим стадии  $k_1$  и  $k_2$  в ряды Тейлора по степеням  $h$  до членов с  $h^3$  включительно и подставим в первую формулу (7). В результате получим

$$y_{n+1} = y_n + (p_1 + p_2)hf_n + \beta p_2 h^2 f'_n f_n + \frac{1}{2} \beta^2 p_2 h^3 f''_n f_n^2 + O(h^4),$$

где элементарные дифференциалы вычислены на приближенном решении  $y_n$ . Сравнивая данное выражение с (3) до членов с  $h^2$  включительно при условии  $y_n = y(t_n)$ , запишем условия второго порядка точности схемы (7), которые имеют вид

$$p_1 + p_2 = 1, \quad \beta p_2 = \frac{1}{2}.$$

При данных соотношениях локальная ошибка  $\delta_n$  метода (7) записывается следующим образом:

$$\delta_n = \frac{1}{12} h^3 [2f'^2 f + (2-3\beta)ff''] + O(h^4).$$

Построим неравенство для контроля точности вычислений. Для этого рассмотрим вспомогательную схему

$$y_{n+1,1} = y_n + k_1$$

первого порядка точности. С помощью идеи вложенных методов оценку ошибки  $\varepsilon_{n,2}$  метода второго порядка можно вычислить по формуле [8]

$$\varepsilon_{n,2} = y_{n+1} - y_{n+1,1} = p_2 (k_2 - k_1).$$

Для повышения надежности данной оценки выберем  $\beta = 1$ . Тогда стадия  $k_1$  вычисляется в точке  $t_n$ , а  $k_2$  - в точке  $t_{n+1}$ . Как показывают расчеты, использование информации в крайних точках шага приводит к более надежным вычислениям. При  $\beta = 1$  коэффициенты метода второго порядка определяются однозначно  $p_1 = p_2 = 0.5$ , а локальная ошибка и неравенство для контроля точности вычислений имеют, соответственно, вид

$$\delta_n = \frac{1}{12} h^3 (2f'^2 f - ff'') + O(h^4), \quad \frac{1}{2} \|k_2 - k_1\| \leq \varepsilon.$$

Теперь построим неравенство для контроля устойчивости (7) предложенным в [9] способом. Для этого рассмотрим вспомогательную стадию  $k_3 = hf(y_{n+1})$ . Заметим, что  $k_3$  совпадает со стадией

$k_1$ , которая применяется на следующем шаге интегрирования, и поэтому ее использование не приводит к дополнительным вычислениям правой части системы (1). Запишем стадии  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k_3$  применительно к задаче  $y' = Ay$ , где  $A$  есть матрица с постоянными коэффициентами. В результате получим

$$k_1 = Xy_n, \quad k_2 = (X + X^2)y_n, \quad k_3 = \left(X + X^2 + \frac{1}{2}X^3\right)y_n,$$

где  $X = hA$ . Легко видеть, что имеет место

$$k_2 - k_1 = X^2y_n, \quad 2(k_3 - k_2) = X^3y_n.$$

Тогда согласно [6] оценку максимального собственного числа  $w_{n,2} = h\lambda_{n,\max}$  матрицы Якоби системы (1) можно вычислить по формуле

$$w_{n,2} = 2 \max_{1 \leq i \leq N} \frac{|k_3^i - k_2^i|}{|k_2^i - k_1^i|}. \quad (8)$$

Интервал устойчивости схемы (7) второго порядка точности приблизительно равен двум. Поэтому для ее контроля устойчивости можно применять неравенство  $w_{n,2} \leq 2$ .

В случае применения данного неравенства для выбора шага следует учитывать грубость оценки (8), потому что вовсе не обязательно максимальное собственное число сильно отделено от остальных, в степенном методе применяется мало итераций и дополнительные искажения вносит нелинейность задачи (1). Поэтому контроль устойчивости используется как ограничитель на размер шага интегрирования. В результате прогнозируемый шаг  $h_{n+1}$  будем вычислять следующим образом. Новый шаг  $h^{ac}$  по точности определим по формуле  $h^{ac} = qh_n$ , где  $h_n$  есть последний успешный шаг интегрирования, а  $q$ , учитывая соотношение

$$k_2 - k_1 = O(h_n^2),$$

задается уравнением

$$q^2 \|k_2 - k_1\| = \varepsilon.$$

Шаг  $h^{st}$  по устойчивости зададим формулой  $h^{st} = dh_n$ , где  $d$ , учитывая соотношение  $w_{n,2} = O(h)$ , определяется из равенства  $dw_{n,2} = 2$ . Тогда прогнозируемый шаг  $h_{n+1}$  вычисляется по формуле

$$h_{n+1} = \max \left[ h_n, \min \left( h^{ac}, h^{st} \right) \right]. \quad (9)$$

Заметим, что формула (9) применяется для прогноза величины шага интегрирования  $h_{n+1}$  после успешного вычисления решения с предыдущим шагом  $h_n$  и поэтому фактически не приводит к увеличению вычислительных затрат. Если шаг по устойчивости меньше последнего успешного, то он уменьшен не будет, потому что причиной этого может быть грубость оценки максимального собственного числа. Однако шаг не будет и увеличен, потому что не исключена возможность неустойчивости численной схемы. Если шаг по устойчивости должен быть уменьшен, то в качестве следующего шага будет применяться последний успешный шаг  $h_n$ . В результате для выбора шага и предлагается формула (9). Данная формула позволяет стабилизировать поведение шага на участке установления решения, где определяющую роль играет устойчивость. Собственно говоря, именно наличие данного участка существенно ограничивает возможности применения явных методов для решения жестких задач.

## МЕТОД ТИПА РУНГЕ-КУТТЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Для численного решения задачи (1) рассмотрим схему вида

$$y_{n+1} = y_n + r_1 k_1 + r_2 k_2, \quad k_1 = hf(y_n), \quad k_2 = hf(y_n + k_1). \quad (10)$$

Заметим, что при  $r_1 = r_2 = 0.5$  численная формула (10) имеет второй порядок точности и совпадает с (7) с коэффициентами  $p_1 = p_2 = 0.5$ . Построим менее точную схему с максимальным интер-

валом устойчивости. Для этого применим (10) для решения скалярного тестового уравнения (5). Получим  $y_{n+1} = Q(x)y_n$ , где  $Q(x)$  имеет вид

$$Q(x) = 1 + (r_1 + r_2)x + r_2x^2, \quad x = h\lambda.$$

Требование первого порядка точности приводит к соотношению

$$r_1 + r_2 = 1,$$

которое ниже будем считать выполненным. Теперь выберем  $r_2$  таким образом, чтобы метод (10) имел максимальный интервал устойчивости. Для этого рассмотрим многочлен Чебышева

$$T_2(z) = 2z^2 - 1$$

на промежутке  $[-1, 1]$ . Проведем замену переменных, полагая

$$z = 1 - \frac{2}{\gamma}x.$$

Получим

$$T_2(x) = 1 - \frac{8}{\gamma}x + \frac{8}{\gamma^2}x^2,$$

при этом отрезок  $[\gamma, 0]$  отображается на  $[-1, 1]$ . Нетрудно показать, что среди всех многочленов вида

$$P_2(x) = 1 + x + c_2x^2$$

для  $T_2(x)$  неравенство  $|T_2(x)| \leq 1$  выполняется на максимальном интервале  $[\gamma, 0]$ ,  $\gamma = -8$ . Потребуем совпадения коэффициентов  $Q(x)$  и  $T_2(x)$  при  $\gamma = -8$ . Это приводит к соотношениям

$$r_1 + r_2 = 1, \quad r_2 = \frac{1}{8}.$$

В результате имеем коэффициенты

$$r_1 = \frac{7}{8}, \quad r_2 = \frac{1}{8}$$

метода первого порядка точности с максимальным интервалом устойчивости, локальная ошибка  $\delta_n$  которого имеет вид

$$\delta_n = \frac{3}{8}h^2 ff + O(h^3).$$

Для контроля точности численной формулы первого порядка будем использовать оценку локальной ошибки. Учитывая, что

$$k_2 - k_1 = h^2 f'_n f'_n + O(h^3)$$

и вид локальной ошибки, неравенство для контроля точности записывается в виде

$$\|k_2 - k_1\| \leq \frac{8}{3}\varepsilon,$$

где  $\|\cdot\|$  - некоторая норма в пространстве  $R^N$ ,  $\varepsilon$  - требуемая точность расчетов.

Построим неравенство для контроля устойчивости метода первого порядка. Для этого рассмотрим вспомогательную стадию  $k_3 = hf(y_{n+1})$ . Запишем  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k_3$  применительно к задаче  $y' = Ay$ , где  $A$  есть матрица с постоянными коэффициентами. В результате получим

$$k_1 = Xy_n, \quad k_2 = (X + X^2)y_n, \quad k_3 = \left(X + X^2 + \frac{1}{8}X^3\right)y_n,$$

где  $X = hA$ . Легко видеть, что имеют место соотношения

$$k_2 - k_1 = X^2y_n, \quad 8(k_3 - k_2) = X^3y_n.$$

Тогда согласно [6] оценку максимального собственного числа  $w_{n,1} = h\lambda_{n,\max}$  матрицы Якоби системы (1) можно вычислить по формуле

$$w_{n,1} = 8 \max_{1 \leq i \leq N} \frac{|k_3^i - k_2^i|}{|k_2^i - k_1^i|}.$$

Интервал устойчивости численной схемы (10) равен восьми. Поэтому для ее контроля устойчивости можно применять неравенство  $w_{n,1} \leq 8$ .

## АЛГОРИТМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ С АВТОМАТИЧЕСКИМ ВЫБОРОМ ЧИСЛЕННОЙ СХЕМЫ

На основе построенных явных методов первого и второго порядков точности легко сформулировать алгоритм переменного порядка и шага. Расчеты всегда начинаются методом второго порядка как более точным. Переход на схему первого порядка осуществляется при нарушении неравенства  $w_{n,2} \leq 2$ . Обратный переход на метод второго порядка происходит в случае выполнения неравенства  $w_{n,1} \leq 2$ . При расчетах по методу первого порядка наряду с точностью контролируется устойчивость, а выбор прогнозируемого шага производится по аналогии с методом второго порядка точности по формуле типа (9).

В случае использования схемы (2) формулировка алгоритма интегрирования также не вызывает трудностей. Нарушение неравенства  $w_{n,1} \leq 8$  вызывает переход на схему (2). Передача управления явным методам происходит в случае выполнения неравенства  $w_{n,0} \leq 8$ , где оценка  $w_{n,0}$  вычислена через норму матрицы Якоби.

Численную формулу (2) без потери порядка точности можно применять с замораживанием матрицы  $D_n$ . Отметим, что при замораживании матрицы Якоби величина шага интегрирования остается постоянной. Попытка замораживания матрицы  $D_n$  осуществляется после каждого успешного шага. Размораживание матрицы происходит в следующих случаях: 1) нарушение точности расчетов, 2) если число шагов с замороженной матрицей достигло заданного максимального числа  $i_h$ , 3) если прогнозируемый шаг больше последнего успешного в  $q_h$  раз. Числами  $i_h$  и  $q_h$  можно влиять на перераспределение вычислительных затрат. При значениях  $i_h = 0$  и  $q_h = 0$  замораживания матрицы не происходит, при увеличении  $i_h$  и  $q_h$  число вычислений правой части возрастает, а количество обращений матрицы Якоби убывает.

Норма  $\|\xi\|$  в левой части неравенства для контроля точности вычисляется по формуле

$$\|\xi\| = \max_{1 \leq i \leq N} \frac{|\xi_i|}{|y_n^i| + r},$$

где  $i$  - номер компоненты,  $r$  - положительный параметр. Если по  $i$ -й компоненте решения выполняется неравенство  $|y_n^i| < r$ , то контролируется абсолютная ошибка  $r\varepsilon$ , в противном случае - относительная ошибка  $\varepsilon$ .

Ниже построенный алгоритм переменного порядка и шага, а также с автоматическим выбором явной или  $L$ -устойчивой численной схемы будем называть RKMK2.

## РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Расчеты проводились на PC Intel(R) Core(TM) i7-3770S CPU@3.10GHz с двойной точностью. В расчетах параметр  $r$  выбирался таким образом, чтобы по всем компонентам решения фактическая точность была не хуже задаваемой. Расчеты проводились с точностью  $\varepsilon = 10^{-2}$ . Это связано с тем, что в построенном алгоритме применяются схемы низкого порядка точности, и поэтому данным методом осуществлять расчеты с более высокой точностью нецелесообразно.

Сравнение эффективности проводилось с известным методом Гира в реализации А. Хиндмарша DLSODE из коллекции ODEPACK [10]. Ниже через  $ifu$  и  $ija$  обозначены, соответственно, суммарное число вычислений правой части и количество декомпозиций матрицы Якоби задачи (1),

которые позволяют объективно оценить эффективность алгоритма интегрирования. В качестве тестового примера выбрана простейшая модель реакции Белоусова - Жаботинского [11]

$$\begin{aligned} y_1' &= 77.27(y_2 - y_1 y_2 + y_1 - 8.375 \cdot 10^{-6} y_1^2), \\ y_2' &= \frac{1}{77.27}(-y_2 - y_1 y_2 + y_3), \\ y_3' &= 0.161(y_1 - y_3), \\ t &\in [0, 300], \quad y_1(0) = y_3(0) = 4, \quad y_2(0) = 1.1, \quad h_0 = 2 \cdot 10^{-3}. \end{aligned} \quad (11)$$

Расчеты проводились с численной матрицей Якоби. Решение данной задачи алгоритмом RKMK2 вычислено с затратами  $\text{ifu} = 1\,214$  и  $\text{ija} = 65$ . При расчетах только по  $L$ -устойчивой схеме (2) затраты  $\text{ifu} = 926$  и  $\text{ija} = 88$ . Фактическая точность расчетов в конце интервала интегрирования не хуже задаваемой.

Решение (11) удалось вычислить явными методами переменного порядка и шага с затратами  $\text{ifu} = 2\,112\,678$ . Данная задача слишком жесткая для явных методов. Однако результаты расчетов приведены здесь с целью демонстрации принципиальной возможности применения явных методов для решения достаточно жестких примеров, которые на некоторых задачах большой размерности могут быть эффективнее  $L$ -устойчивых методов.

При расчетах программой DLSODE требуемая точность  $10^{-2}$  достигается при задаваемой точности  $10^{-4}$  с затратами  $\text{ifu} = 1\,129$  и  $\text{ija} = 107$ . При более высокой точности расчетов DLSODE эффективнее разработанного алгоритма. Это является следствием низкого порядка точности построенных численных формул.

При задаваемой точности  $10^{-2}$  алгоритм RKMK2 более чем в 1.5 раз эффективнее известного метода DLSODE по числу декомпозиций матрицы Якоби, в то время как количество вычислений правой части задачи (11) для программ RKMK2 и DLSODE различается незначительно. В случае большой размерности задачи (1) построенный алгоритм интегрирования по времени счета может быть эффективнее DLSODE.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построенный алгоритм RKMK2 предназначен для расчетов с небольшой точностью - порядка 1% и ниже. В этом случае достигается его максимальная эффективность. В RKMK2 с помощью признака можно задавать различные режимы расчета:

1. явными методами первого или второго порядков точности с контролем или без контроля устойчивости;
2. явными методами с переменным порядком и шагом;
3.  $L$ -устойчивым методом с замораживанием или без замораживания как аналитической, так и численной матрицы Якоби;
4. с автоматическим выбором численной схемы.

Все это позволяет применять данный алгоритм для решения как жестких, так и нежестких задач. При расчетах с автоматическим выбором численной схемы вопрос о том, является ли задача жесткой или нет, перекладывается на алгоритм интегрирования.

Использование неравенства для контроля устойчивости фактически не приводит к увеличению вычислительных затрат, потому что оценка максимального собственного числа матрицы Якоби системы (1) осуществляется через ранее вычисленные стадии и не приводит к росту числа вычислений правой части задачи (1). Такая оценка получается грубой. Однако применение контроля устойчивости в качестве ограничителя на рост шага позволяет избежать негативных последствий грубости оценки. Более того, в некоторых случаях это приводит к нестандартно высокому повы-



шению эффективности алгоритма.

На участке установления за счет контроля устойчивости старые ошибки стремятся к нулю, а новые невелики за счет малости производных решения. В некоторых случаях вместо оценки максимального собственного числа оценивается следующее по порядку. Шаг интегрирования становится больше максимально допустимого и с таким шагом осуществляется интегрирование до тех пор, пока не нарушается неравенство для контроля точности. Как правило, число таких шагов невелико. Однако величина шага может на порядок превышать максимальный шаг по устойчивости. После нарушения неравенства для контроля точности шаг уменьшается до максимально возможного. Такой эффект может повторяться многократно в зависимости от длины участка установления. В результате средний шаг интегрирования может превышать максимально допустимый.

Применение на участке установления явного метода первого порядка точности с расширенной областью устойчивости позволяет в 4 раза увеличить размер шага интегрирования по сравнению с явным методом второго порядка без увеличения вычислительных затрат. На переходных участках, где определяющую роль играет точность вычислений, более эффективным является метод второго порядка точности, хотя и с небольшой областью устойчивости. Комбинирование методов низкого и высокого порядков с помощью неравенства для контроля устойчивости позволяет повысить эффективность расчетов.

## **БЛАГОДАРНОСТИ**

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00047).

## **ЛИТЕРАТУРА**

- [1] Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир. 1999.
- [2] Byrne G.D., Hindmarsh A.C. ODE solvers: a review of current and coming attractions. J. of Comput. Physics. №70. 1987. P.1-62.
- [3] Rosenbrock H.H. Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations. Computer. №5. 1963. P.329-330.
- [4] Новиков Е.А., Шитов Ю.А., Шокин Ю.И. Одношаговые методы решения жестких систем. ДАН СССР. Т. 301. № 6. 1988. С.1310-1314.
- [5] Новиков Е.А., Шорников Ю.В. Компьютерное моделирование жестких гибридных систем. Новосибирск: НГТУ. 2012.
- [6] Новиков Е.А. Явные методы для жестких систем. Новосибирск: Наука. 1997.
- [7] Новиков Е.А., Шитов Ю.А. Алгоритм интегрирования жестких систем на основе  $(m,k)$ -метода второго порядка точности с численным вычислением матрицы Якоби. Красноярск. Препринт РАН. Сибирское отделение. ИВМ. № 20. 1988.
- [8] Демидов Г.В., Новиков Е.А. Оценка ошибки одношаговых методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Численные методы механики сплошной среды. Т. 16. №1. 1985. С.27-42.
- [9] Кнауб Л.В., Лаевский Ю.М., Новиков Е.А. Алгоритм интегрирования переменного порядка и шага на основе явного двухстадийного метода Рунге-Кутты. СибЖВМ. Т. 10. №2. 2007. С.177-185.
- [10] Hindmarsh A.C. ODEPACK, a systematized collection of ODE solvers. Lawrence Livermore National Laboratory. Preprint UCRL-88007. 1982.
- [11] Enright W.H., Hull T.E. Comparing numerical methods for the solutions of systems of ODE's. BIT. Vol.15. 1975. P.10-48.

## PERFORMANCE ANALYSIS OF WIRELESS COMMUNICATION SYSTEM IN ALPHA-KAPPA-MU ENVIRONMENT SUBJECTED TO SHADOWING

---

*In this paper simultaneous multipath fading and shadowing occurrence will be analyzed, through deriving novel composite Gamma long-time faded  $\alpha$ - $\kappa$ - $\mu$  fading distribution. First order statistical parameters will be obtained in the closed form, for this novel composite distribution, and capitalizing on them standard performance measures will be efficiently evaluated, graphically presented and discussed in the function of system parameters.*

---

### INTRODUCTION

Major drawbacks that arise in wireless communications are: multipath (short-term) fading, shadowing (long-term fading) and co-channel interference [1]. Short-time fading is caused by atmospheric ducting, ionosphere refraction, and reflection from various objects, so randomly delayed, reflected, scattered and diffracted signal components combine in constructive or destructive manner. Multipath fading causes short-term signal variations, and its influence on signal envelope is statistically modeled by various models, such are: Nakgami- $m$ , Ricean and Rayleigh model. However, these models assume a resultant homogenous diffuse scattering field. Moreover, surfaces are often spatially correlated and they characterize non-linear environment. It has been addressed to this phenomenon by using Weibull and  $\alpha$ - $\mu$  short-time fading models [2],[3]. Recently, [4] more general  $\alpha$ - $\kappa$ - $\mu$  model has been presented. It has been expressed in the function of three fading parameters, namely parameter  $\alpha$  related to the nonlinearity of the environment; parameter  $\mu$ , denoting the number of multipath clusters in the environment, and parameter  $\kappa$  defining to the ratio between the in-phase dominant component and the quadrature dominant component, respectively. As a general model it reduces to other models, as it special cases. The  $\kappa$ - $\mu$  fading model can be obtained from the  $\alpha$ - $\kappa$ - $\mu$  model by setting  $\alpha=2$ . Further, Nakagami- $m$  fading model can be obtained by setting  $\kappa=0$ . Similarly, Ricean fading model can be obtained by setting  $\mu=1$  in obtained  $\kappa$ - $\mu$  model. The  $\alpha$ - $\mu$  fading model can also be obtained from the  $\alpha$ - $\kappa$ - $\mu$  model by setting  $\kappa=0$ . Other fading models like Weibull, Rayleigh and One-Sided Gaussian are just singularities of above mentioned fading models. Observing  $\alpha$ - $\kappa$ - $\mu$  model, provides good spot for understanding wireless communication limitations.

Shadowing is the result of the topographical elements and other structures in the transmission path such as trees, tall buildings [5]. When multipath fading is superimposed on shadowing, the instantaneous composite multipath/shadowed signal should be analyzed at the receiver. This scenario often occurs in land-mobile satellite systems subjected to vegetative and/or urban shadowing. A few models have been proposed in literature for describing this phenomenon. Such are the  $\eta$ - $\mu$ /gamma [6], the  $\kappa$ - $\mu$ /gamma [7], the  $K$  [8], and the generalized- $K$  ( $KG$ ) [9] distribution models.

Starting from general the  $\alpha$ - $\kappa$ - $\mu$  distribution and Gamma shadowing model, closed-form PDF, CDF, and  $n$ -th order moments expressions, which have not been reported in the literature so far, will be introduced, for the newly presented composite distribution. That is another contribution of this work. Obtained mathematical form will allow simple performance analysis of wireless communication systems, operating in composite fading environments. This performance analysis will be also accompanied by graphically presented numerical results, which show the influence of various communication system parameters (fading and shadowing parameters), on the standard performance criterions.

---

<sup>1</sup> Faculty of Natural Science and Mathematics, Kosovska Mitrovica, Serbia

<sup>2</sup> Faculty of Electrical Engineering, Nis, Serbia

## SYSTEM MODEL

In order to superimpose the influence of multipath fading, modeled by general  $\alpha$ - $\kappa$ - $\mu$  distribution, with shadowing process modeled with Gamma distribution, for the first time in the literature, we will present in this section novel composite fading distribution. Namely, as multipath fading and shadowing simultaneously occur in wireless transmission, there is a need to derive general model which would accurately describe this composite random process. For the case when composite fading is observed, the average power of the multipath component,  $\Omega = E[R^2]$ , is also randomly varying process, which will be modeled in the following analysis with Gamma long-term fading model. Now, novel composite fading distribution can be obtained by averaging the short-time conditional RV process:

$$f_{R|\Omega}(R|\Omega) = \frac{\alpha\kappa^{\frac{1-\mu}{2}}(1+\kappa)^{\frac{1+\mu}{2}}\mu R^{\frac{\alpha(1+\mu)}{2}-1}}{\exp(\mu\kappa)\Omega^{\frac{1+\mu}{2}}} \exp\left(-\frac{\mu(1+\kappa)R^\alpha}{\Omega}\right) I_{\mu-1}\left(2\mu\sqrt{\kappa(1+\kappa)\frac{R^\alpha}{\Omega}}\right) \quad (1)$$

over slowly varying Gamma process, which has been shown to accurately approximate shadowing phenomena, described with [10]:

$$f_\Omega(\Omega) = \frac{\Omega^{c-1}}{\Gamma(c)\Omega_0^c} \exp\left(-\frac{\Omega}{\Omega_0}\right) \quad (2)$$

with  $c$  denoting the shaping parameter and  $\Omega_0 = E[\Omega]$ . By using the total probability theorem, after some mathematical manipulations the PDF of the novel composite distribution can be expressed in closed form as:

$$\begin{aligned} f_R(R) &= \int_0^\infty f_{R|\Omega}(R|\Omega) f_\Omega(\Omega) d\Omega \\ &= \sum_{p=0}^\infty \frac{2\alpha\mu^{(3p+\mu+c)/2} k^p (1+k)^{(p+\mu+c)/2} R^{\frac{\alpha(p+\mu+c)-2}{2}}}{\exp(\mu\kappa)\Gamma(p+\mu)p!\Gamma(c)\Omega_0^{(p+\mu+c)/2}} K_{(c-p-\mu)}\left(2\sqrt{\frac{\mu(1+k)R^\alpha}{\Omega_0}}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

with  $K_\nu(\cdot)$  denoting the modified Bessel function of second kind and order  $\nu$  [11, eq. (8.407/1)]. The convergence of expression (3) is rapid, since few terms should be summed for achieving 5th significant digit accuracy for various values of corresponding PDF parameters. Newly derived composite PDF is presented at Fig. 1 for various values of corresponding parameters. Let us now derive other first order statistical parameters for this composite fading distribution, namely CDF and  $n$ -th order moments. Capitalizing on (3), and by using the same mathematical transformations as in [12, eq. (03.04.26.0006.01)] and [13, eq. (26)], closed-form expression for CDF of the composite process can be presented in the form of:

$$\begin{aligned} F_R(R) &= \sum_{p=0}^\infty \frac{\mu^{(3p+\mu+c)/2} k^p (1+k)^{(p+\mu+c)/2} R^{(p+\mu+c)/2}}{\exp(\mu\kappa)\Gamma(p+\mu)p!\Gamma(c)\Omega_0^{(p+\mu+c)/2}} \\ &\times G_{1,3}^{2,1}\left[1-(p+\mu+c)/2, (c-p-\mu)/2, (p+\mu-c)/2, -(p+\mu+c)/2 \mid \frac{\mu(1+k)R}{\Omega}\right] \end{aligned} \quad (4)$$

where  $G_{m,n}^{p,q}\left[\begin{matrix} (a)_p \\ (b)_q \end{matrix} \mid x\right]$  stands for the Meijer's G-function [11, eq. (9.301)]. In a similar manner, expression for calculating  $n$ -th order moments, by using [11, (7.811/4)] can be presented in the rapidly converging form:

$$m_n = \int_0^{\infty} R^n p_R(R) dR = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\mu^{p-n/\alpha} k^p \Omega^{n/\alpha}}{\exp(\mu k) (1+k)^{n/\alpha} \Gamma(p+\mu) p! \Gamma(c)} \Gamma\left(c + \frac{n}{\alpha}\right) \Gamma\left(p + \mu + \frac{n}{\alpha}\right) \quad (5)$$

Various order moments in the function of nonlinearity parameter  $\alpha$  are presented at Fig. 3.

### RESULTS AND DISCUSSIONS

From Fig. 1, we can see that the change in the PDF and much more pronounced at higher values of the parameter  $\alpha$ , for constant values  $\mu$  and  $\kappa$ , respectively, the PDF has a higher maximum. When  $c$  parameter increases, the maximum PDF is reduced.

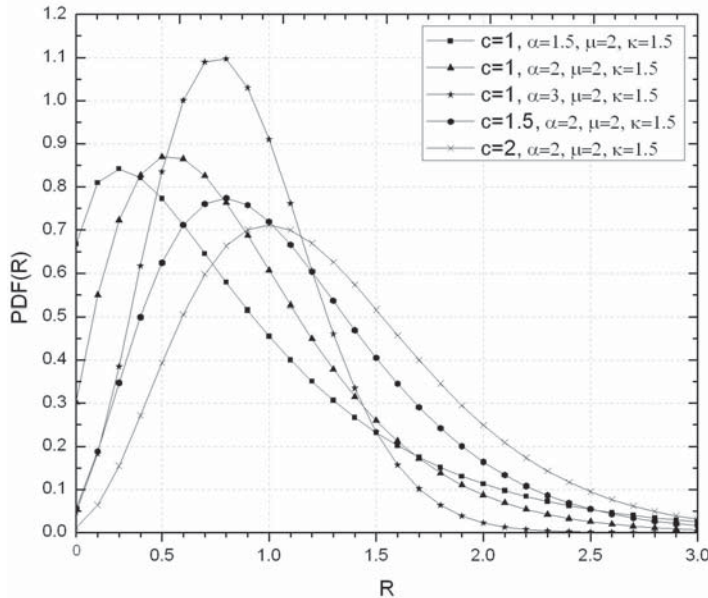


Fig. 1. PDF of  $\alpha$ - $\kappa$ - $\mu$ /gamma composite distribution for various values of corresponding parameters

From Fig. 2, we can see that moments of higher order deteriorate faster, compared to lower order moments with alpha parameter growth. Also for higher values of parameter  $c$  higher values of output moments are obtained as expected.

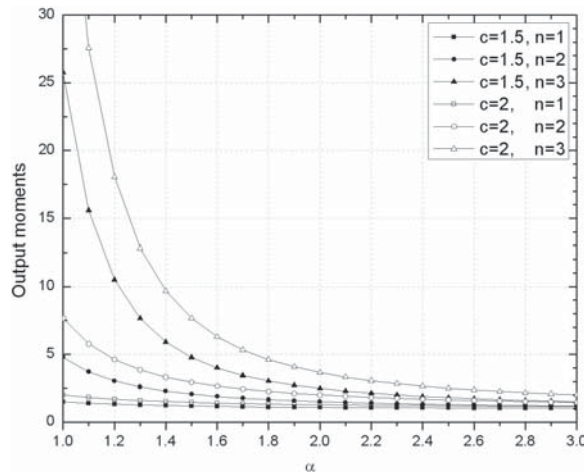


Fig. 2. Composite distribution  $n$ -th order moments in the function of non-linearity parameter  $\alpha$

Outage probability (OP) is performance measure, used to control the drawback level, and helping the designers of wireless communications systems to meet the QoS, and grade of service (GoS) demands [14]. OP can be defined as the probability of falling of combined envelope or signal-to-noise ratio (SNR) below given threshold, (protection ratio),  $\gamma$ .

$$P_{out} = P_R(\xi < \gamma) = \int_0^{\gamma} p_{\xi}(t)dt = F_{\xi}(\gamma) \quad (6)$$

Protection ratio depends on modulation technique and expected QoS.

General conclusion from Fig. 3 is that lower OP values are achieved, in the areas where  $\kappa$ ,  $\alpha$  and  $\mu$  parameters obtain higher values. Similarly when shadowing  $c$  parameter increases lower OP values are obtained at Fig. 3. This is because shadowing is less severe when  $c$  parameter has higher values. Performance improvement obtained with the usage of dual-branch SC diversity is visible, since for the same system parameter values, significantly lower OP values are reached.

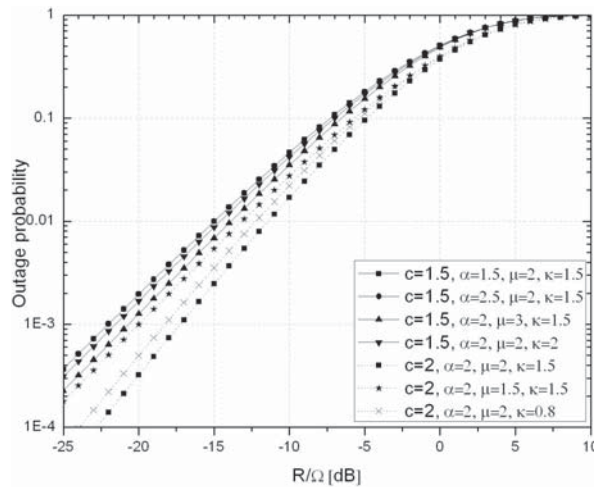


Fig. 3. Outage probability for various values of fading/shadowing parameters.

## CONCLUSIONS

Closed-form expressions for PDF and CDF and arbitrary order moments for novel composite  $\alpha$ - $\kappa$ - $\mu$ /gamma fading/shadowing model are derived. Some of the applications of obtained expressions, such as determining outage probability in composite fading environment are presented and discussed in the paper. Generality of derived expressions is evident, since observed models could be easily reduced to other already examined scenarios.

## REFERENCES

- [1] Panić, S. Fading and Interference **Mitigation** in Wireless Communications. CRC Press, USA, 2013
- [2] Sagias, N. C. and Karagiannidis G. K. Gaussian class multivariate Weibull distributions: Theory and applications in fading channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 51, issue 10, pp. 3608-3619, 2005.
- [3] Yacoub, M. D. The  $\alpha$ - $\mu$  distribution: A physical fading model for the Stacy distribution. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 56, issue 1, pp. 27-34, 2007.
- [4] Fraidenraich, G. and Yacoub, M. D. The  $\alpha$ - $\eta$ - $\mu$  and  $\alpha$ - $\kappa$ - $\mu$  fading distributions. in Proc. IEEE Ninth International Symposium on Spread Spectrum Techniques and Applications, 28-31 Aug. 2006, Manaus-Amazon, Brasil, pp. 16-20, 2006.
- [5] Simon, M.K. and Alouini, M.S. *Digital Communication over Fading Channels*, John Wiley & Sons, USA, 2000.
- [6] Sofotasios, P. C., Freear, S. The  $\eta$ - $\mu$ /gamma Composite Fading Model. *IEEE International Conference in Wireless Information Technology and Systems (ICWITS '10)*, Aug. 28 2010-Sept. 3 2010, Honolulu, HI, USA, vol. 2, pp. 872-877, 2010.
- [7] Sofotasios, P. C., Freear, S. The  $\kappa$ - $\mu$ /gamma Extreme Composite Distribution: A Physical Composite Fading Model. *IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC '11)*, Cancun, Mexico, 28-31 March, 2011.

- [8] Abdi A. and Kaveh, M. *K* distribution: an appropriate substitute for Rayleigh-lognormal distribution in fading-shadowing wireless channels. *Electronic Letters*, vol. 34, no. 9, pp. 851-852, 1998.
- [9] Bithas, P. S., Sagias, N. C., Mathiopoulos, P. T., Karagiannidis, G. K. and Rontogiannis, A. A. On the performance analysis of digital communications over Generalized-K fading channels. *IEEE Commun. Lett.*, vol. 5, no. 10, pp. 353-355. 2006.
- [10] Abdi A. and Kaveh, M. On the utility of the gamma PDF in modeling shadow fading (slow fading). in *Proc. IEEE Veh. Technol. Conf. (VTC'99)*, 16-20 May 1999, Houston, USA vol. 3, pp. 2308-2312, 1999.
- [11] Gradshteyn I. S. and Ryzhik, I.M. *Table of Integrals, Series, and Products*, 6th ed. New York: Academic Press. 2000.
- [12] The Wolfram Functions Site, 2013. [Online]. Available: <http://functions.wolfram.com>
- [13] Adamchik V. S. and Marichev O. I. The algorithm for calculating integrals of hypergeometric type functions and its realization in REDUCE system. in *Proc. Intern. Conf. Symbolic Algebraic Computation*, Tokyo, Japan, pp. 212-224, 1990.
- [14] Stefanovic, M., Milovic, D., Mitic A. and Jakovljevic, M. Performance analysis of system with selection combining over correlated Weibull fading channels in the presence of cochannel interference. *AEU - International Journal of Electronics and Communications*, Vol. 62, Issue 9, pp. 695-700. 2008.

## THEOREMS HARDY-ROGERS-TYPE IN K-METRIC SPACES

*The purpose of the present paper is to establish coincidence point theorem for two mappings and fixed point theorem for one mapping in K-metric spaces which satisfy contractive conditions of Hardy-Rogers type. Results generalize fixed point theorems from K-metric spaces to symmetric spaces and metric spaces. Two examples are given to illustrate the usability of results.*

### INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Let  $E$  be a real Banach space. A subset  $P$  of  $E$  is called a cone if and only if

- (a)  $P$  is closed, nonempty and  $P \neq \emptyset$ ;
- (b)  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a, b \geq 0$ , and  $x, y \in P$  imply  $ax + by \in P$ ;
- (c)  $P \cap (-P) = \{\emptyset\}$ .

Given a cone  $P \subset E$ , we define a partial ordering  $\leq$  with respect to  $P$  by  $x \leq y$  if and only if  $y - x \in P$ , while  $x < y$  will stand for  $y - x \in \text{int } P$  (interior of  $P$ ). A cone  $P \subset E$ , is called normal if there is a number  $K > 0$  such that for all  $x, y \in E$ ,

$$\theta \leq x \leq y \text{ implies } \|x\| \leq K\|y\|. \quad (1)$$

The least positive number satisfying the above inequality is called the normal constant of  $P$ . It is clear that  $K \geq 1$ . Most of ordered Banach spaces used in applications possess a cone with the normal constant  $K = 1$ , and if this is the case, proofs of the corresponding results are much alike as in the metric setting. If  $K > 1$ , this is not the case. We know that there exists ordered Banach space  $E$  with cone  $P$  which is not normal but with  $\text{int } P \neq \emptyset$ .

The cone  $P$  is called regular if every increasing sequence in  $E$  which is bounded from above is convergent. Every regular cone is normal, but the converse is not true.

**Definition 1.1.** Let  $X$  be a nonempty set. Suppose that the mapping  $d : X \times X \rightarrow E$  satisfies

- (d1)  $\theta \leq d(x, y)$  for all  $x, y \in X$  and  $d(x, y) = \theta$  if and only if  $x = y$ ;
- (d2)  $d(x, y) = d(y, x)$  for all  $x, y \in X$ ;
- (d3)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  for all  $x, y, z \in X$ .

Then  $d$  is called a cone metric on  $X$  and  $(X, d)$  is called a cone metric space.

**Definition 1.2.** Let  $(X, d)$  be a cone metric space. We say that  $\{x_n\}$  is

- (1) a Cauchy sequence if for every  $c$  in  $E$  with  $\theta < c$ , there is an  $N$  such that for all  $n, m > N$ ,  $d(x_n, x_m) < c$ ;
- (2) a convergent sequence if for every  $c$  in  $E$  with  $\theta < c$ , there is an  $N$  such that for all  $n > N$ ,  $d(x_n, x) < c$  for some fixed  $x$  in  $X$ .

A cone metric space  $X$  is said to be complete if every Cauchy sequence in  $X$  is convergent in  $X$ .

For the given cone metric space  $(X, d)$ , one can construct a symmetric space  $(X, D)$  where "symmetric"  $D : X \times X \rightarrow E$  is given by  $D(x, y) = \|d(x, y)\|$ . In the case when  $(X, d)$  is cone metric space with a normal cone  $P$ , then (1) implies

$$D(x, y) \leq K(D(x, z) + D(z, y)), \quad x, y, z \in X$$

$K$  is a normal constant of  $P$ .

<sup>1</sup> Faculty of Teacher Education in Prizren, Leposavic, Serbia

**Definition 1.3.** Let  $(X,d)$  be a cone metric space and  $P$  a cone with nonempty interior. Suppose that the mappings  $f, g : X \rightarrow X$  are such that the range of  $g$  contains the range of  $f$ , and  $f(X)$  or  $g(X)$  is a complete subspace of  $X$ . In this case we will say that the pair  $(f,g)$  is Abbas and Jungck's pair, or shortly AJ's pair.

**Definition 1.4.** Let  $f$  and  $g$  be self-maps of a set  $X$ . If  $\omega = f\omega = g\omega$  for some  $\omega$  in  $X$ , then  $\omega$  is called a coincidence point of  $f$  and  $g$ , and  $\omega$  is called a point of coincidence of  $f$  and  $g$ . Self-maps  $f$  and  $g$  are said to be weakly compatible if they commute at their coincidence point, that is, if  $f\omega = g\omega$  for  $\omega \in X$ , then  $f g \omega = g f \omega$ .

**Proposition 1.1.** Let  $f$  and  $g$  be weakly compatible self-maps of a set  $X$ . If  $f$  and  $g$  have a unique point of coincidence  $\omega = f\omega = g\omega$ , then  $\omega$  is the unique common fixed point of  $f$  and  $g$ .

## MAIN RESULTS

**Theorem 2.1.** Let  $(X,d)$  be a complete cone metric space,  $P$  a normal cone with normal constant  $K$ . Suppose that  $(f,g)$  is AJ's pair, and that there exist nonnegative constants  $a_i$ ,

$i = \overline{1,5}$  satisfying  $\sum_{i=1}^3 a_i + K(a_4 + a_5) < 1$  such that, for every  $x, y \in X$ ,

$$D(fx, fy) \leq a_1 D(gx, gy) + a_2 D(gx, fx) + a_3 D(gy, fy) + a_4 D(gx, fy) + a_5 D(gy, fx) \quad (2)$$

Then,  $f$  and  $g$  have a unique coincidence point in  $X$ . Moreover, if  $f$  and  $g$  are weakly compatible,  $f$  and  $g$  have a unique common fixed point.

**Proof.** Let  $x_0 \in X$  be arbitrary and let  $x_1 \in X$  be chosen such that  $y_0 = f(x_0) = g(x_1)$ . This can be done, since  $f(X) \subseteq g(X)$ . Let  $x_2 \in X$  be such that  $y_1 = f(x_1) = g(x_2)$ . Continuing this process, having chosen  $x_n \in X$ , we choose  $x_{n+1}$  in  $X$  such that  $y_n = f(x_n) = g(x_{n+1})$ . We have to show that

$$D(y_n, y_{n+1}) \leq \lambda D(y_{n-1}, y_n) \text{ for some } \lambda \in [0,1), n \geq 1. \quad (3)$$

From

$$\begin{aligned} D(y_n, y_{n+1}) &= D(fx_n, fx_{n+1}) \leq a_1 D(gx_n, gx_{n+1}) + a_2 D(gx_n, fx_n) + a_3 D(gx_{n+1}, fx_{n+1}) \\ &+ a_4 D(gx_n, fx_{n+1}) + a_5 D(gx_{n+1}, fx_n) \\ &= a_1 D(y_{n-1}, y_n) + a_2 D(y_{n-1}, y_n) + a_3 D(y_n, y_{n+1}) + a_4 D(y_{n-1}, y_{n+1}) \\ &+ a_5 D(y_n, y_n) \\ &\leq (a_1 + a_2 + Ka_4) D(y_{n-1}, y_n) + (a_3 + Ka_4) D(y_n, y_{n+1}), \end{aligned}$$

and from

$$\begin{aligned} D(y_{n+1}, y_n) &= D(fx_{n+1}, fx_n) \leq a_1 D(gx_{n+1}, gx_n) + a_2 D(gx_{n+1}, fx_{n+1}) + a_3 D(gx_n, fx_n) \\ &+ a_4 D(gx_{n+1}, fx_n) + a_5 D(gx_n, fx_{n+1}) \\ &= a_1 D(y_n, y_{n-1}) + a_2 D(y_n, y_{n+1}) + a_3 D(y_{n-1}, y_n) + a_4 D(y_n, y_n) \\ &+ a_5 D(y_{n-1}, y_{n+1}) \\ &\leq (a_1 + a_3 + Ka_5) D(y_{n-1}, y_n) + (a_2 + Ka_5) D(y_n, y_{n+1}), \end{aligned}$$

we obtain

$$2D(y_{n+1}, y_n) \leq (2a_1 + a_2 + a_3 + K(a_4 + a_5)) D(y_n, y_{n-1}) + (a_2 + a_3 + K(a_4 + a_5)) D(y_{n+1}, y_n),$$

that is,

$$D(y_{n+1}, y_n) \leq \lambda D(y_n, y_{n-1}), \quad \lambda = \frac{2a_1 + a_2 + a_3 + K(a_4 + a_5)}{2 - (a_2 + a_3 + K(a_4 + a_5))} < 1, \quad n = 1, 2, \dots$$



Further, (3) implies that

$$D(y_n, y_{n-1}) \leq \lambda D(y_{n-1}, y_{n-2}) \leq \dots \leq \lambda^{n-1} D(y_1, y_0). \quad (4)$$

Now we shall show that  $\{y_n\}$  is a Cauchy sequence. By the triangle inequality, for  $n > m$  we have

$$d(y_n, y_m) \leq d(y_n, y_{n-1}) + d(y_{n-1}, y_{n-2}) + \dots + d(y_{m+1}, y_m)$$

Hence, as  $P$  is a normal cone, we have

$$\begin{aligned} D(y_n, y_m) &= \|d(y_n, y_m)\| \leq K(\|d(y_n, y_{n-1}) + d(y_{n-1}, y_{n-2}) + \dots + d(y_{m+1}, y_m)\|) \\ &\leq K(\|d(y_n, y_{n-1})\| + \|d(y_{n-1}, y_{n-2})\| + \dots + \|d(y_{m+1}, y_m)\|) \\ &= KD(y_n, y_{n-1}) + KD(y_{n-1}, y_{n-2}) + \dots + KD(y_{m+1}, y_m). \end{aligned}$$

Now by (4), it follow that

$$\begin{aligned} D(y_n, y_m) &\leq K(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \dots + \lambda^m)D(y_1, y_0) \\ &\leq \frac{K\lambda^m}{1-\lambda} D(y_1, y_0) \rightarrow 0, \text{ as } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

From [1] follows that  $\{y_n\} = \{fx_n\} = \{gx_{n+1}\}$  is a Cauchy sequence. Since  $g(X)$  is complete, there exists a  $q$  in  $g(X)$  such that  $y_n \rightarrow q$  as  $n \rightarrow \infty$ . Consequently, we can find  $p$  in  $X$  such that  $g(p) = q$ . We shall show that  $f(p) = q$ . Substituting  $x = p, y = x_n$

in (2), we get

$$D(fp, fx_n) \leq a_1 D(q, q) + a_2 D(gp, fp) + a_3 D(gx_n, fx_n) + a_4 D(gp, fx_n) + a_5 D(gx_n, fp).$$

According to [1], it follows

$$\begin{aligned} D(fp, q) &\leq a_1 D(q, q) + a_2 D(q, fp) + a_3 D(q, q) + a_4 D(q, q) + a_5 D(q, fp) \\ &= (a_2 + a_5)D(fp, q) < D(fp, q), \end{aligned}$$

because  $a_2 + a_5 \leq \sum_{i=1}^3 a_i + K(a_4 + a_5) < 1$ . Now, if we suppose that  $fp \neq q$ , then we have a contradiction. Hence,  $gp = fp = q$ . We shall show that  $f$  and  $g$  have a unique point of coincidence. For this, assume that there exists another point of coincidence  $q_1 \neq q$  in  $X$  such that  $fp_1 = gp_1 = q_1$ . Now,

$$\begin{aligned} D(q, q_1) &= D(fp, fp_1) \leq a_1 D(gp, gp_1) + a_2 D(gp, fp) + a_3 D(gp_1, fp_1) + a_4 D(gp, fp_1) + a_5 D(gp_1, fp) = \\ &= a_1 D(q, q_1) + a_2 D(q, q) + a_3 D(q_1, q_1) + a_4 D(q, q_1) + a_5 D(q_1, q) = \\ &= (a_1 + a_4 + a_5)D(q_1, q) < D(q_1, q). \end{aligned}$$

As  $a_1 + a_4 + a_5 \leq \sum_{i=1}^3 a_i + K(a_4 + a_5) < 1$ , we get  $D(q, q_1) = 0$ , that is,  $q = q_1$ . From the Proposition 1.1, it follows that  $f$  and  $g$  have a unique common fixed point.

**Theorem 2.2.** Let  $(X, d)$  be a sequentially compact cone metric space,  $P$  a regular cone and  $f : X \rightarrow X$  a continuous mapping such that

$$d(fx, fy) < a_1 d(x, y) + a_2 d(x, fx) + a_3 d(y, fy) + a_4 d(x, fy) + a_5 d(y, fx) \quad (5)$$

for all  $x, y \in X, x \neq y$  where  $a_i \in [0, 1), i = \overline{1, 5}$  and  $\sum_{i=1}^5 a_i = 1$ . Then,  $f$  has a unique fixed point.

In order to prove Theorem 2.2., we shall need the following lemma.

**Lemma 2.1.** Let  $(X, d)$  be a cone metric space,  $f : X \rightarrow X$  a mapping satisfying (5) for all  $x, y \in X, x \neq y$  where  $a_i \in [0, 1), i = \overline{1, 5}$  and  $\sum_{i=1}^5 a_i = 1$ . Then

$$d(f^2x, fx) < d(x, fx), \text{ for each } x \in X \text{ with } x \neq fx.$$

**Proof.** Putting  $y = fx$  in (5), we have

$$\begin{aligned} d(fx, f^2x) &< a_1d(x, fx) + a_2d(x, fx) + a_3d(fx, f^2x) + a_4d(x, f^2x) + a_5d(fx, fx) \\ &\leq (a_1 + a_2 + a_4)d(x, fx) + (a_3 + a_4)d(fx, f^2x), \end{aligned}$$

that is,

$$d(fx, f^2x) < \frac{a_1 + a_2 + a_4}{1 - a_3 - a_4} d(x, fx). \quad (6)$$

By symmetry in (5), we have

$$d(fy, fx) < a_1d(y, x) + a_2d(y, fy) + a_3d(x, fx) + a_4d(y, fx) + a_5d(x, fy) \quad (7)$$

i.e., putting  $y = fx$  in (7), we obtain

$$\begin{aligned} d(f^2x, f^2x) &< a_1d(fx, x) + a_2d(fx, f^2x) + a_3d(x, fx) + a_4d(fx, fx) + a_5d(x, f^2x) \\ &\leq (a_1 + a_3 + a_5)d(x, fx) + (a_2 + a_5)d(fx, f^2x), \end{aligned}$$

that is,

$$d(f^2x, fx) < \frac{a_1 + a_3 + a_5}{1 - a_2 - a_5} d(x, fx). \quad (8)$$

If  $k = \min \left\{ \frac{a_1 + a_2 + a_4}{1 - a_3 - a_4}, \frac{a_1 + a_3 + a_5}{1 - a_2 - a_5} \right\} \in [0, 1)$ , then

$$d(fx, f^2x) \leq kd(x, fx) < d(x, fx). \quad (9)$$

**Proof of the Theorem 2.2.** First, if  $u$  and  $v$  are two different fixed points of  $f$ , according to (5), we have

$$\begin{aligned} d(u, v) &= d(fu, fv) < a_1d(u, v) + a_2d(u, fu) + a_3d(v, fv) + a_4d(u, fv) + a_5d(v, fu) \\ &= a_1d(u, v) + a_4d(u, v) + a_5d(u, v) = (a_1 + a_4 + a_5)d(u, v) < d(u, v). \end{aligned}$$

This is a contradiction.

Let  $x_0 \in X$ . We define the sequence  $x_n = f^n x_0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . If  $x_{n+1} = x_n$  for some  $n$ , then  $x_n$  is a fixed point of  $f$ . Suppose that  $x_{n+1} \neq x_n$  for each  $n$ . Then, we have

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(f^n x_0, f^{n+1} x_0) = d(f^{n-1} x_0, f^n x_0) \\ &< a_1d(f^{n-1} x_0, f^n x_0) + a_2d(f^{n-1} x_0, f^n x_0) + a_3d(f^n x_0, f^{n+1} x_0) \\ &\quad + a_4d(f^{n-1} x_0, f^{n+1} x_0) + a_5d(f^n x_0, f^n x_0) \\ &\leq a_1d(x_{n-1}, x_n) + a_2d(x_{n-1}, x_n) + a_3d(x_n, x_{n+1}) + a_4d(x_{n-1}, x_n) \\ &\quad + a_5d(x_n, x_{n+1}), \end{aligned}$$

that is,

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(f^{n+1} x_0, f^n x_0) = d(f^n x_0, f^{n-1} x_0) \\ &< a_1d(f^n x_0, f^{n-1} x_0) + a_2d(f^n x_0, f^{n+1} x_0) + a_3d(f^{n-1} x_0, f^n x_0) \\ &\quad + a_4d(f^n x_0, f^n x_0) + a_5d(f^{n-1} x_0, f^{n+1} x_0) \\ &\leq a_1d(x_{n-1}, x_n) + a_2d(x_n, x_{n+1}) + a_3d(x_{n-1}, x_n) + a_5d(x_{n-1}, x_n) \\ &\quad + a_5d(x_n, x_{n+1}), \end{aligned}$$

Now, we obtain

$$2d(x_n, x_{n+1}) < (2a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)d(x_{n-1}, x_n) + (a_2 + a_3 + a_4 + a_5)d(x_n, x_{n+1}),$$

i.e.

$$d(x_n, x_{n+1}) < \frac{2a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{2 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5} d(x_{n-1}, x_n) = \frac{a_1 + 1}{a_1 + 1} d(x_{n-1}, x_n) = d(x_{n-1}, x_n).$$

Hence, the sequence  $d_n = d(x_n, x_{n+1})$  is strictly decreasing bounded below by  $\theta$ . Since  $P$  is regular, there is  $d^* \in E$  such that  $d_n \rightarrow d^* (n \rightarrow \infty)$ . From the sequence compactness of  $(X, d)$ , there are subsequence  $\{x_{n_i}\}$  of  $\{x_n\}$  and  $x^* \in X$  such that  $x_{n_i} \rightarrow x^* (i \rightarrow \infty)$ . Since mappings  $f$  and  $f^2$  are continuous, we have

$$fx_{n_i} \rightarrow fx^* \text{ and } f^2x_{n_i} \rightarrow f^2x^*.$$

By using [1], we have

$$d(fx_{n_i}, x_{n_i}) \rightarrow d(fx^*, x^*) (i \rightarrow \infty) \text{ and } d(f^2x_{n_i}, fx_{n_i}) \rightarrow d(f^2x^*, fx^*) (i \rightarrow \infty)$$

It is obvious that

$$d(fx_{n_i}, x_{n_i}) = d_{n_i} \rightarrow d^* = d(fx^*, x^*) (i \rightarrow \infty) \text{ and}$$

$$d(f^2x_{n_i}, fx_{n_i}) = d_{n_i+1} \rightarrow d^* = d(f^2x^*, fx^*) (i \rightarrow \infty). \quad (10)$$

Now we shall prove that  $fx^* = x^*$ . If  $fx^* \neq x^*$ , then  $d^* \neq 0$ . From (10) and according to Lema 2.1., it follows

$$d^* = \lim_{i \rightarrow \infty} d_{n_i+1} = \lim_{i \rightarrow \infty} d(f^2x_{n_i}, fx_{n_i}) = d(f^2x^*, fx^*) < d(fx^*, x^*) = d^*.$$

We have a contradiction, so  $fx^* = x^*$ . That is,  $x^*$  is a fixed point of  $f$ . This completes the proof of Theorem 2.2.

## REFERENCES

- [1] Huang L.G, Zhang X. Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings, J. Math. Anal. Appl. 332 (2) (2007) 1468-1476.
- [2] Abbas M, Jungck G. Common fixed point results for noncommuting mappings without continuity in cone metric spaces, J. Math. Anal. Appl. 341 (2008) 416-420.
- [3] Ilić D, Rakočević V. Common fixed points for maps on cone metric space, J. Math. Anal. Appl. 341 (2008) 876-882.
- [4] Jungck G, Radenović S, Radojević S, Rakočević V. Common fixed point theorems for weakly compatible pairs on cone metric spaces, Fixed Point Theory Appl. 2009,13. Article ID 643840, doi:10.1155/2009/643840.
- [5] Kadelburg Z, Radenović S, Rosić B. Strict contractive conditions and common fixed point theorems in cone metric spaces, Fixed Point Theory Appl. 2009, 14. Article ID 173838, doi:10.1155/2009/173838.
- [6] Kadelburg Z, Radenović S, Rakočević V. A note on equivalence of some metric and cone metric fixed point results, Appl. Math. Lett. (2010) doi:10.1016/j.aml.2010.10.030.
- [7] Radenović S, Kadelburg Z. Quasi-contractions on symmetric and cone symmetric spaces, Banach J. Math. Anal. 5 (1) (2011) 38-50.
- [8] Nemytzki V.V. Fixed point method in analysis, Uspekhi Mat. Nauk 1 (1936) 141-174.
- [9] Edelstein M. On fixed and periodic point under contractive mappings, J. Lond. Math. Soc. 37 (1962) 74-79.
- [10] Djukić D, Paunović Lj, Radenović S. Convergence of iterates with error of uniformly quasi-Lipschitzian mappings in cone metric spaces, Kragujevac J. Math. Vol.35, 3(2011), 399-410.
- [11] Filipović M, Paunović Lj, Radenović S, Rajović M. Remarks on "Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of T-Kannan Contractive Mappings", Math. And Computer Modeling, vol. 54, Issue 5-6, September 2011, pages 1467-1472.

# OPTIMIZATION OF THE BOX SECTION OF THE MAIN GIRDERS OF THE BRIDGE CRANE BY USING THE METHOD OF LAGRANGE MULTIPLIERS

---

*The paper considers the problem of optimization of the box section of the main girder of the bridge crane for the case of placing the rail above the web plate. Reduction of the girder mass is set as the objective function. The method of Lagrange multiplier was used as the methodology for approximate determination of optimum dependences of geometrical parameters of the box section. The criterion of strength were applied as the constraint function. The analysis of the optimization results and the solutions was the basis for recommendations which are significant for designers during construction of cranes.*

---

## INTRODUCTION

The main task in the process of designing the carrying structure of the bridge crane is determination of optimum dimensions of the main girder box section. The mass of the main girder has the largest share in the total mass of the bridge crane, so it is very important to perform its optimization in order to reduce the total costs of manufacturing the whole carrying structure. That is the reason why the selection of the optimum shape and geometrical parameters which influence the reduction of mass and costs of manufacturing is the subject of research of a lot of authors ([2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [13], [14], [15] i [16]).

The analysis of cost structure for manufacturing metal structures made in [2], showed that the participation of material costs in the total costs is the largest (30-73) %, and that the other costs are lower.

Having in mind all the above mentioned results and conclusions, the aim of this paper is to define optimum values of geometrical parameters of the box girder cross-section that will lead to the reduction of its mass.

## MATHEMATICAL FORMULATION OF THE OPTIMIZATION PROBLEM

The task of optimization is to define geometrical parameters of the cross section of the girder as well as their mutual relations, which result in its minimum area. Minimization of the mass corresponds to minimization of the volume, i.e. the area of the cross section of the girder, where the given boundary conditions must be satisfied.

The optimization problem defined in this way can be given the following general mathematical formulation.

If  $\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  is vector of the given, and  $\vec{y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]$  is vector of variable parameters, then the objective function is expressed as  $F = F(\vec{x}, \vec{y})$ . Observed parameters have to satisfy the limitation equations also.

$$g_s(\vec{x}, \vec{y}) \leq 0, \quad s = 1, \dots, m. \quad (1)$$

The optimization task can be formulated in the following way: at defined vector of known parameters  $\vec{x}$ , there should be determined the responding values of variable parameters  $\vec{y}_o = \vec{y}_o(\vec{x})$ , where the objective function realizes the minimum

$$F_o = \min_{\vec{y}} F(\vec{x}, \vec{y}) = F_o(\vec{x}). \quad (2)$$

In this paper, variable parameters vector is  $\vec{y} = [b, h]$ , and the given parameters vector

---

<sup>1</sup> Faculty of mechanical and civil engineering, Kraljevo, Serbia

$\bar{x} = [Q, M_{cv}, M_{ch}, c, L, k_a, e_k, G_k \dots]$ , where:

- $b$  i  $h$  - the height and width of the girder,
- $Q$  - the carrying capacity of the crane,
- $M_{cv}$  i  $M_{ch}$  - the bending moments in the vertical and horizontal planes,
- $c$  - the coefficient of influence of the dead weight of the girder on the bending moment
- $L$  - the span of the crane,
- $k_a$  - the dynamic coefficient of crane load in the horizontal plane, [12],
- $e_k$  - the distance between the cab and the crane runway,
- $G_k$  - the mass of the crane cab.

The paper observes the following limitation:

$$g = \sigma_{\max} - \sigma_k \leq 0, \quad (3)$$

where:

$\sigma_{\max}$  - the maximum equivalent stress,

$\sigma_k$  - the permissible stress.

The Lagrange function is defined in the following way:

$$\Phi = A + \lambda \cdot g, \quad (4)$$

where the following must be fulfilled:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0; \frac{\partial A}{\partial b} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial b} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h} = 0; \frac{\partial A}{\partial h} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial h} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0; \Rightarrow g = 0. \quad (7)$$

## OBJECTIVE FUNCTION

The objective function is represented by the area of the cross section of the box girder (Fig. 1). The paper treats two optimization parameters ( $h$ ,  $b$ ). The wall thicknesses  $t_1$  and  $t_2$  (Fig. 1) are not treated as optimization parameters for the purpose of simplification of the procedure. Their values were adopted in accordance with the recommendations of crane manufacturers [1].

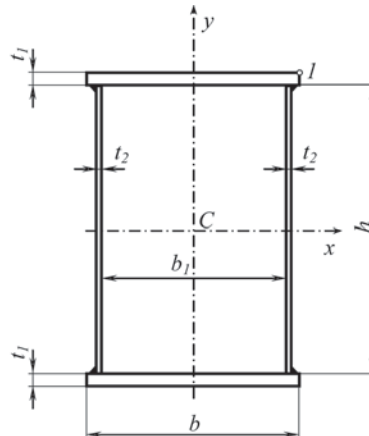


Fig. 1. The box section of the main girder of the bridge crane

The area of the cross section, i.e. the objective function, is:

$$A(h, b) = f(h, b) = 2 \cdot (e \cdot b \cdot h + h^2) / s, \quad (8)$$

where:

$e = t_1 / t_2$  - the ratio between thicknesses of plates at the flange and at the web,

$s = h / t_2$  - the ratio between the height and thickness of the plate at the web,

$k = h / b$  - the ratio between the height and width of the girder.

To know the optimal value of the ratio between the height and width of the girder  $k$  is of particular significance for the designer, especially in the initial design phase.

The expressions for the moments of inertia around the  $x$  and  $y$  axes are:

$$I_x = \frac{1}{6} \cdot \frac{h^4}{s} + \frac{1}{2} \cdot e \cdot b \cdot \frac{(s+e)^2}{s^3} \cdot h^3, \quad (9)$$

$$I_y = \frac{1}{6} \cdot e \cdot \frac{h}{s} \cdot b^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{s} \cdot \frac{(f \cdot b \cdot s + h)^2}{s^2}, \quad (10)$$

where:

$f = b_1 / b < 1$  - the ratio between the distance of web plates and the width of flange plates of the box girder.

Since the expressions for the moments of inertia ( $I_x, I_y$ ) and the section moduli ( $W_x, W_y$ ) are complex, it is common to take approximate values of expressions by neglecting the members of the lower order ([8], [9], [14], [15] i [16]):

$$I_x = \beta_x^2 \cdot h^2 \cdot A, \quad W_x = \alpha_x \cdot h \cdot A, \quad (11)$$

$$I_y = \beta_y^2 \cdot b^2 \cdot A, \quad W_y = \alpha_y \cdot b \cdot A, \quad (12)$$

where:

$\beta_x, \beta_y$  - the dimensionless coefficient of the moment of inertia for the  $x$  and  $y$  - axes,

$\alpha_x, \alpha_y$  - the dimensionless coefficient of the resistance moment of inertia for the  $x$  and  $y$  - axes.

The coefficients  $\beta_x$  and  $\alpha_x$  are obtained from the conditions of equality of the equation (9) and the expression (11):

$$\beta_x = \frac{1}{2 \cdot s} \cdot \sqrt{\frac{k \cdot s^2 + 3 \cdot e \cdot (s+e)^2}{3 \cdot (e+k)}}, \quad \alpha_x = \frac{2 \cdot s}{s+2 \cdot e} \cdot \beta_x^2. \quad (13)$$

Using the fact that  $s \gg e$  and  $s \gg k$  the coefficients with the form  $\beta_x$  and  $\alpha_x$  can be simplified:

$$\beta_x \cong \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{k+3 \cdot e}{3 \cdot (e+k)}}, \quad \alpha_x \cong \frac{k+3 \cdot e}{6 \cdot (e+k)}. \quad (14)$$

By repeating the procedure for the moment of inertia and the section moduli for the  $y$  - axis, the following values of coefficients are obtained:

$$\beta_y = \frac{1}{2 \cdot s} \cdot \sqrt{\frac{e \cdot s^2 + 3 \cdot k \cdot (f \cdot s + k)^2}{3 \cdot (e+k)}}, \quad \alpha_y = 2 \cdot \beta_y^2, \quad (15)$$

i.e. in a simpler form:

$$\beta_y \approx \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot f^2 + e}{3 \cdot (e+k)}}, \quad \alpha_y = \frac{3 \cdot k \cdot f^2 + e}{6 \cdot (e+k)}. \quad (16)$$

## CONSTRAINT FUNCTION

The maximum equivalent stress which occurs in the main girder of the bridge crane is at point 1 (Fig. 1).

The constraint function according to this criterion is:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{zV1} + \sigma_{zH1} = \frac{M_{VI}}{W_x} + \frac{M_{HI}}{W_y} \leq \sigma_k, \quad (17)$$

$$\sigma_k = f_y / \nu_1, \quad (18)$$

where:

$f_y$  - the minimum yield stress of the plate material,

$\nu_1$  - the factored load coefficient for load case 1.

The constraint function according to this criterion is:

$$g = g(h, b) = \frac{M_{cv} + c \cdot A}{\alpha_x \cdot h \cdot A} + \frac{M_{ch} + k_a \cdot c \cdot A}{\alpha_y \cdot b \cdot A} - \sigma_k \leq 0. \quad (19)$$

By eliminating the parameter  $\lambda$  from equations (5) and (6), we get:

$$\frac{\partial A}{\partial b} \cdot \frac{\partial g}{\partial h} = \frac{\partial A}{\partial h} \cdot \frac{\partial g}{\partial b}. \quad (20)$$

The corresponding partial derivatives are:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial b} &= - \left[ \frac{M_{cv}}{\alpha_x \cdot h} \cdot \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial A}{\partial b} + \frac{M_{ch}}{\alpha_y \cdot b} \cdot \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial A}{\partial b} + \frac{M_{ch}}{\alpha_y} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{b^2} + \frac{k_a \cdot c}{\alpha_y} \cdot \frac{1}{b^2} \right], \\ \frac{\partial g}{\partial h} &= - \left[ \frac{M_{cv}}{\alpha_x \cdot h} \cdot \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial A}{\partial h} + \frac{M_{cv}}{\alpha_x} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{h^2} + \frac{c}{\alpha_x} \cdot \frac{1}{h^2} + \frac{M_{ch}}{\alpha_y \cdot b} \cdot \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial A}{\partial h} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

By replacing the expression (21) in (20), after rearrangement, the following relation is obtained:

$$\frac{M_{cv} + c \cdot A}{\alpha_x \cdot h^2 \cdot A} \cdot \frac{\partial A}{\partial b} = \frac{M_{ch} + k_a \cdot c \cdot A}{\alpha_y \cdot b^2 \cdot A} \cdot \frac{\partial A}{\partial h}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial A}{\partial b} = 2 \cdot e \cdot h / s, \quad \frac{\partial A}{\partial h} = 2 \cdot (e \cdot b + 2 \cdot h) / s. \quad (23)$$

Using (19), we get:

$$\frac{M_{cv} + c \cdot A}{\alpha_x \cdot h \cdot A} + \frac{M_{ch} + k_a \cdot c \cdot A}{\alpha_y \cdot b \cdot A} = \sigma_k. \quad (24)$$

Using relations (5) and (23), we get the parameter value  $\lambda$  :

$$\lambda = \frac{A^2}{\frac{M_{cv}}{\alpha_x \cdot h} + \frac{M_{ch}}{\alpha_y \cdot b} + \frac{M_{ch} + k_a \cdot c \cdot A}{\alpha_y \cdot b^2} \cdot \frac{\partial A}{\partial b}} \cdot A. \quad (25)$$

From the equations system (22) and (24), it is necessary to find the optimal dimensions  $h$  and  $b$  by the given criterion, i.e. their relation  $k$ .

As the net weight moment is considerably smaller than the moment caused by active load, it can be written:

$$\frac{M_{cv} + c \cdot A}{M_{ch} + k_a \cdot c \cdot A} \approx \frac{M_{cv}}{M_{ch}}, \quad (26)$$

where now it is necessary to analyze this relation.

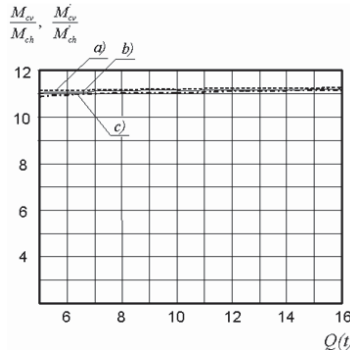


Fig. 2. Approximation of the ratio between bending moments in the vertical and horizontal planes

As  $e_k \approx 2,5 m$ , [12] is notably smaller than the crane span  $L$ , it is shown in diagram (Fig. 2) that the cabin influence is not of great significance for this analysis, where the driving class 2 is observed.

Now it can be written:

$$\frac{M_{cv}}{M_{ch}} \approx \frac{M'_{cv}}{M'_{ch}} = \frac{1}{k_a} \cdot \frac{R \cdot (L - e_1)^2}{R_h \cdot (L - e_1)^2} = \frac{1}{k_a} \cdot \frac{\psi \cdot Q + m_k}{Q + m_k} = \frac{\psi \cdot Q + m_o + K \cdot Q^\alpha}{Q + m_o + K \cdot Q^\alpha}, \quad (27)$$

where:

$K$  - the coefficient of influence of the classification class on the mass of the trolley,

$\psi$  - the dynamic coefficient of the influence of load oscillation in the vertical plane,

$\alpha$  - the coefficient of influence of the load mass on the mass of the trolley,

$m_o$  - the assumed mass of the trolley in the first approximation.

As we can see (Fig. 3), this relation depends both on capacity and driving class.

R/Rh

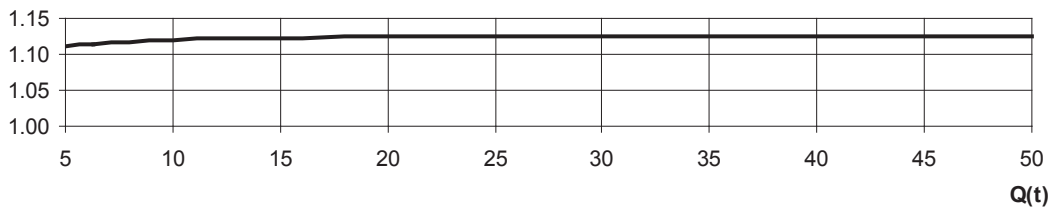


Fig. 3. The relationship between the load in the vertical and horizontal planes

If the relation (27) is shown by the functions:

$$\frac{M_{cv}}{M_{ch}} = \frac{1}{k_a} \cdot \frac{f_1(Q)}{f_2(Q)} = \frac{1}{k_a} \cdot \frac{\psi \cdot Q + m_o + K \cdot Q^\alpha}{Q + m_o + K \cdot Q^\alpha} = \frac{1}{k_a} \cdot c_1, \quad (28)$$

$$c_1 = \frac{R}{R_h} = \frac{f_1(Q)}{f_2(Q)} = \frac{\psi \cdot Q + m_o + K \cdot Q^\alpha}{Q + m_o + K \cdot Q^\alpha}, \quad (29)$$

and if it develops (29) into Taylor series, the expression (28) becomes,

$$\frac{M_{cv}}{M_{ch}} = \frac{1}{k_a} \cdot \frac{f_1(Q)}{f_2(Q)} \approx \frac{1}{k_a} \cdot \frac{f_1(Q_o) + (Q - Q_o) \cdot f_1'(Q_o)}{f_2(Q_o) + (Q - Q_o) \cdot f_2'(Q_o)}. \quad (30)$$

Now the expression (22) can be written in the following way:

$$\frac{M_{cv} + c \cdot A}{M_{ch} + k_a \cdot c \cdot A} \cdot \frac{\partial A}{\partial b} \approx \frac{M_{cv}}{M_{ch}} \cdot \frac{\partial A}{\partial b} = \frac{\alpha_x \cdot h^2}{\alpha_y \cdot b^2} \cdot \frac{\partial A}{\partial h}. \quad (31)$$



Corresponding partial extracts of the objective function (8), by the variables  $b$  and  $h$  read:

$$\frac{\partial A}{\partial b} = 2 \cdot e \cdot t_2, \quad \frac{\partial A}{\partial h} = 2 \cdot t_2. \quad (32)$$

Replacing relations (32) into (31), we finally get:

$$k_{op} = \sqrt{\frac{e \cdot \alpha_y \cdot M_{cv}}{\alpha_x \cdot M_{ch}}} = \sqrt{\frac{e \cdot \alpha_y \cdot c_1}{\alpha_x \cdot k_a}}. \quad (33)$$

When the relation  $k_{op}$  is known, from the limitation equation (19) the girder height is determined.

Objective function can be written in the following way.

$$A = \frac{2}{s} \cdot \left(\frac{e}{k} + 1\right) \cdot h^2. \quad (34)$$

From relations (19) and (34) we get:

$$h_{op}^3 - \frac{\left(\frac{c}{\alpha_x} + \frac{k_a \cdot c}{\alpha_y} \cdot k_{op}\right)}{\sigma_k} \cdot h_{op}^2 - \frac{s}{2} \cdot \frac{\left(\frac{M_{cv}}{\alpha_x} + \frac{M_{ch}}{\alpha_y} \cdot k_{op}\right)}{\sigma_k \cdot (e/k_{op} + 1)} = 0. \quad (35)$$

By solving the equation (35), we come to the wanted solution of optimal height. Optimal width is obtained by the expression:

$$b_{op} = h_{op} / k_{op}. \quad (36)$$

Limitation function can also be written in the following form:

$$A_{op} = A(h) \geq \frac{\frac{M_{cv}}{\alpha_x} + \frac{M_{ch}}{\alpha_y} \cdot k_{op}}{\sigma_k \cdot h - \frac{c}{\alpha_x} - \frac{k_a \cdot c}{\alpha_y} \cdot k_{op}}. \quad (37)$$

## NUMERICAL REPRESENTATION OF THE RESULTS OBTAINED

Using the expression (33) the optimum value of the parameter  $k$  according to the criterion of permissible stress is obtained as a function of the  $Q$  and  $k_a$  (Tab.1).

Using the expressions (8), (25), (35) and (36) the optimum values of the parameters  $h$ ,  $b$ ,  $A$  and  $\lambda$  according to the criterion of permissible stress are shown in Tab.2.

**Table 1**

$\frac{Q}{k_a}$	5	6,3	8	10	12,5	16
0,085	4,67	4,68	4,68	4,69	4,69	4,70
0,1	4,30	4,31	4,32	4,32	4,33	4,33
0,115	4,01	4,02	4,03	4,03	4,03	4,04

**Table 2**

	S235	S275	S355
$h$ (cm)	117,9	108,8	95
$b$ (cm)	27,2	25,1	21,9
$A$ (cm <sup>2</sup> )	173,1	158,8	138,9
$\lambda$	5,85	4,57	3,08

The expression (37) represents the objective function obtained from the constraint function according to the criterion of permissible stress and together with the objective function (34) it can be graphically represented. At the intersection of these curves, on the abscissa, there is an optimum height  $h$  for the constraint function according to the criterion of permissible stress. Figure 4 shows how the position of the intersection point changes depending on the selection of material (solid line for S235, dash line for S275 and dot line for S355).

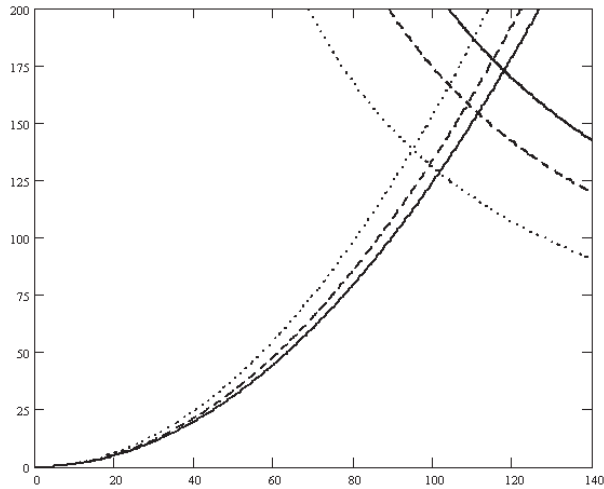


Fig. 4. Optimum values of the girder height and the objective function according to the strength

One of the main parameters figuring in the objective function (8) is slenderness  $s$ , defined as ([12]):

$$160 \cdot \sqrt{23,5 / f_y} < s \leq 265 \cdot \sqrt{23,5 / f_y} . \quad (38)$$

For initial analysis, the medium values can be adopted, so that for S235 we take the value  $s = 210$ . Other parameter values, at this stage, are:  $e = 1,33$ ,  $f = 0,85$ ,  $k_a = 0,1$ ,  $e_k = 2,3 m$ ,  $G_k = 15 kN$ . To perform the analysis, it is necessary to perceive the recommendations listed in the standard, but also those given by the crane producers [1]. Recommendation of Serbian crane producers is that the minimum width value  $b_1$  is  $b_1 > 30 cm$ , from which we get:

$$k \leq f \cdot h / 30 , \quad (39)$$

while the sheet metal stability condition of the upper belt, with appropriate transformations, is defined as:

$$k \geq \frac{s \cdot f}{65 \cdot e} \cdot \sqrt{23,5 / f_y} . \quad (40)$$

If we equate the expressions (7) and (37), we get the parameter dependency  $k$ , by hardness criterion:

$$k = F(s, e, h, M_{cv}, M_{ch}, \alpha_x, \alpha_y) . \quad (41)$$

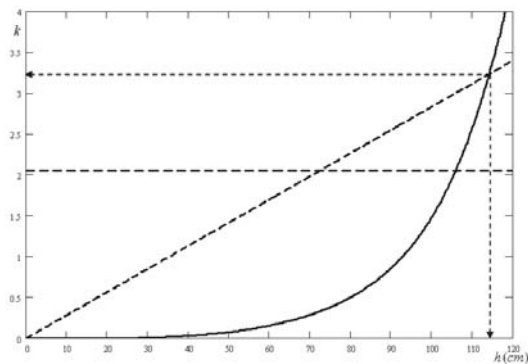


Fig. 5. Determination of the optimum value of the parameter  $k$  for the crane span  $L=18m$  and the carrying capacity  $Q=16t$

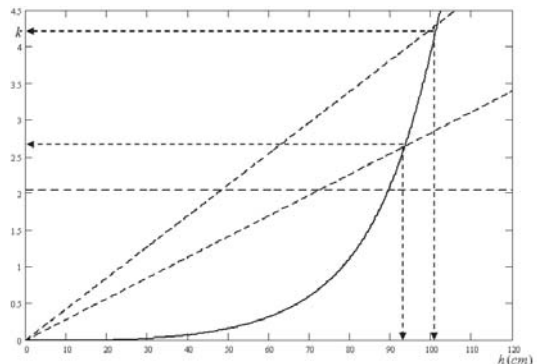


Fig. 6. Determination of the optimum value of the parameter  $k$  for the crane span  $L=15m$  and the carrying capacity  $Q=12,5t$

In diagrams (Fig. 5 and Fig. 6) are shown the obtained optimal geometric parameters for characteristic capacities and spans of two pillar bridge cranes. Thus performed procedure enables fast and effective

determining of optimal value of parameter  $k$  by critical function. Width value  $b_1$  does not influence the optimization procedure, but it influences the obtained values of optimization parameter  $k$  (Fig. 6).

## CONCLUSION

The paper defined optimum dimensions of the box section of the main girder of the bridge crane in an analytical form, by using the method of Lagrange multipliers according to permissible stress. The objective function is the minimum mass, i.e. the minimum area of the cross section. The results obtained may be of great use to the engineer-designer, particularly in the first phase of the design procedure when the basic dimensions of the main girder of the bridge crane, as its most responsible part, are defined.

Justification of applying the method of Lagrange multipliers was also shown because the optimization results were obtained in an analytical form, which allows drawing conclusions on the influence of certain parameters and directions of further research concerning the reduction of mass.

## REFERENCES

- [1] Catalogues, And as-built projects of Serbian crane manufacturers, IMK 14 Oct., MIN, ILR, 1996
- [2] Farkas J., Optimum design of metal structures, Akademiai KIADO, Budapest, 1984
- [3] Farkas J., Economy of Higher-Strength Steels in Overhead Travelling Cranes with Double-Box Girders, J. Construct, Steel Research 6: 285-301, 1986
- [4] Farkas J., Jármai K., Analysis and optimum design of metal structures, Balkema, Rotterdam, 1997
- [5] Farkas J., Simoes L.M.C., Jarmai K., Minimum cost design of a welded stiffened square plate loaded by biaxial compression, Structural and Multidisciplinary Optimization, 29:298-303, 2005
- [6] Farkas J., Structural optimization as a harmony of design, fabrication and economy, Structural and Multidisciplinary Optimization, 30:66-75, 2005
- [7] Farkas J., Jármai K., Snyman J.A., Global minimum cost design of a welded square stiffened plate supported at four corners, Structural and Multidisciplinary Optimization, 40:477-489, 2010
- [8] Gašić M., Savković M., Bulatović R., Petrović R., Optimization of a pentagonal cross section of the truck crane boom using Lagrange's multipliers and differential evolution algorithm, Meccanica. Online First 13 August 2010. doi:10.1007/s1 1012-010-9343-7
- [9] Gašić M., Savković M., Bulatović R., Optimization of trapezoidal cross section of the truck crane boom by Lagrange's multipliers and by differential evolution algorithm (de), Strojniški vestnik - Journal of Mechanical Engineering 57, 4:304-312, 2011
- [10] Jarmai K., Decision Support System on IBM PC for Design of Economic Steel Structures Applied to Crane Girders, Thin-Walled Structures, 10: 143-159, 1990
- [11] Jarmai K., Farkas J., Optimum cost design of welded box beams with longitudinal stiffeners using advanced backtrack method, Structural and Multidisciplinary Optimization, 21:52-59, 2001
- [12] JUS M.D1.050 (1968) Standards for cranes. Yugoslav Institute for Standardization, Beograd.
- [13] Pavlović G., Savković M., Zdravković N., Optimization of box-girder cross-section of the main bridge cranes according to the criteria of lateral stability (Optimizacija kutijastog poprečnog preseka glavnog nosača mosne dizalice prema kriterijumu bočne stabilnosti), IMK - 14 Research and Development (IMK - 14 Istraživanje i razvoj), (41), 4/2011
- [14] Savković M., Optimization of Complex Cross Sections of Structures of Autocrane Booms (Optimizacija složenih poprečnih preseka konstrukcija strele autodizalice). (IMK -14- Research and Development) IMK -14- Istraživanje i razvoj 20-21(1) pp. 41:45, 2005
- [15] Savković M., Gašić M., Čatić D., Nikolić R., Pavlović G., Optimization of the box section of the main girder of the bridge crane with the rail placed above the web plate, Structural and Multidisciplinary Optimization, DOI: 10.1007/s00158-012-0813-5, 2012
- [16] Šelmić R., Mijailović R., Optimization of trapezium cross-section in structures, Facta iniversitatis mechanical engineering, Niš, Vol. 1, N5/1998, pp. 555-564

## METHODOLOGY FOR EVALUATING CORPORATIVE WEB PRESENTATIONS PROPOSAL

---

*In this paper one proposal for evaluating the quality of companies web presentations is going to be presented. Reason for developing this work is connected with the increasing internet role and internet marketing in everyday business life. Very often, success of our business depends of our capacity to present that what you are doing on best way. The fact that internet to lose the distinction between small and large, those with the tradition and those who have just started working, and that communication with all stakeholders, the key factor that allows you to persist and find out in which direction to innovate, points to their corporate websites companies have approached very professionally. If the problem is viewed on this way, it is clear that in the era of knowledge the customers will attract one who satisfies of the finest users requirements and internet. At the end the evaluating of corporate websites quality of three major companies in the automotive industry is going to be done.*

---

### INTRODUCTION

It is well known that word marketing is anglo-saxon origin and that marketing was created when the supply exceeded demand. Thus, from the very beginning is related to competition, a match between rivals - who will be better aligned to the needs of its stakeholders. As a discipline, marketing is dealing with market issues, market needs and ways to meet those needs. Theory of marketing deals with the issues of the marketing company that needs to have the ability to meet the demands of the market on which our goods are sold. For this reason, the marketing function is similar in similar companies in the same branch of industry or business, and a very different from marketing organization in the companies in the different industry.

Internet marketing is a set of strategies and techniques which use internet as a channel for business communication to support general marketing goals realization in company.

Internet marketing is really kind of interactive direct marketing. This kind of marketing includes, kreative and tehcnical aspect of internet also, including design, development, ads and marketing in the convential way of speach. From classical aspect of marketing, it could be said that internet marketing is sum of activities which are used with a goal to direct the product and service flow, from producer to consumer ( user, byer, client) using internet as a channel of communication.

Marketing is not one promotion, but is a process, which includes: marketing investigation, strategic planning, goals definning, definning marketing strategy, doing marketing mix programm, marketing analysis, control and revision.

Tris paper is going to be dealing with defining model for investigation and analysing cooporative web sites. As example, the comparation of sites: Toyota, Nissan and Mitsubishi Motors is going to be presented.

### TERM COMPANY'S SITE AND ROLES FOR ITS DEVELOPMENT

Every site is building so it could satisfield one or more internet strategies. The main internet strategies are [1]:

1. Image building,
2. Providing information,
3. Acquiring new customers,
4. Sales over the internet,
5. Marketing and promotion of the company,
6. Delivery (products, services) and
7. Improving customer relationships.

### IMAGE BUILDING

Many potential buyers can meet our company for the first time on the internet. Therefore, the first impresion is very important ,which will be great if your website is professionally created. Important

---

<sup>1</sup> Technical Mechanical School of Applied Studies, Trstenik, Serbia

things to build the image via web are [1]:

- **Site design** should match the look of our visit, maps, and overall business documents (logo, slogan, company colors). This is called the principle of consistency,
- **Check if the site is 100% functional**, are all links working, or are open all pages correctly opening (the principle of functionality),
- **Customers and potential clients valuable time** should be respect, so slow “flash» animation and visual effects should be avoid, so as completely unnecessary visual effects (the principle of speed).
- Easy navigation should be allowed to visitors, it is desirable to find each information between 3 and 8 seconds. Each page should have a navigation menu. Be sure that Contact button is included on each page and in the case of larger sites is desirable and the search button (the principle of simple navigation).
- Potential customers must be provided with enough useful information - to educate more customers and help them to properly make the best decision and answer their questions (the principle of informativeness).
- Easy and simple contact with a potential customer should be enabled (or possibly from your other customers) - to achieve greater interactivity. This can be tried: contact form, search form for bid, form for your opinion-feedback (in the opinion of a potential client), the “tell a friend» poll visitors website and the like.

## GIVING INFORMATION

Another key internet strategy is: providing information to potential and current clients of the company. It is said that the *internet* is an information highway types (“Information Superhighway”), or pointing out that on the Internet “*Information is the King*” (“Content is the King”).

In general, more information on your site, the better is. But two assumptions must be observed and they are:

- a) Site is well organized (the information can easily be found, the navigation is easy and intuitive) and

b) Information is relevant to the population of the core activity of the company.

After all, it should be checked is it going to be useful to be found on your site [1]:

- company’s site,
- corporate brochure.
- Company News section, or the whole branch,
- Price list (if in a protected part of the site)
- Product catalog
- Annual report,
- Relevant links,
- Information about strategic partners
- Client’s advertising,
- Online library,
- Technical specifications,
- Purchase Order,
- Advices and recommendations,
- Photos (photos from last cocktail or a common set),
- Section “You ask - we answer» and
- Free book (downloadable e-book).

## TWENTY ADVICES FOR BETTER SITE

Next twenty things should not be found at [1]:

1. Undefined products and / or services,
2. Big pictures,
3. Welcome to the site - Wellcome,
4. Visit counters,
5. External links - especially in the starting side
6. Logos and banners representing the awards that have been received,
7. Spelling and grammatical errors,
8. Excessive use of words such as “we, us, me, my,» as the company name,
9. Name, location and so on.,
10. Frames,
11. “Under Construction» / “Site under construction» notice,
12. Broken links,
13. Images that are missing
14. Incomplete information about addresses and contact persons
15. Starting staranice that “scrolling endlessly»

16. Requirements for acceptance of cookies (cookies)
17. Free or Services which do not comply immediately,
18. Uncertain or unclear procedures when ordering products / services
19. Plug-ins, Java Script pop-ups and
20. Copied content.

currently available analysis of corporate websites of earlier mentioned companies. Each parameter will be scored from 1 to 5, and if we feel that some parameters are more important, they are marked with grades 5 to 10, and if a parameter does not exist it will be scored with 0. If a criterion is such that estimates the parameters that should not be on the site, then on the scale from 0 to 5, with grade 5 we will evaluate a situation that that parameter is not on site and a 0 giving when the site is full of it. For the purposes of this survey, the rating will be administered by the subjective opinion of researchers.

### DEFINING THE PARAMETERS FOR ANALYSIS

According to Section 2 the model for conducting the analysis of corporate websites of companies is defined. The table will be filled on the basis of the

**Table 1.** Parameters for Evaluating Quality of Company's Site

Parameters for assessing the quality of corporate websites		Scale:	Grade		
			Com 1	Com 2	Com 3
Content:	Catalogue	1 - 5			
	Pricelist				
	Company's Brochure				
	Business Report				
	On-line library				
	Technical Specification				
	Photos				
	Free Guidance with Instructions				
Funcionality:	Easy Navigation	1 - 10			
	Functionality				
	Availability of information				
	Selection " Newsi "				
	Advices and recommendations				
	"You are asking - we are answering"				
Site Design:	Link to Other Sites	1-10			
	Advertisements from other companies on site				
	Marketing i company promotion				
	Wisits counterering				
	Logo and banners				
Sales Tools:	Order Form	1 - 5			
	Sales through Internet				
	Protecting the on - line purchase				
Should not be found on the site:	Animations and Big Photos	0 - 5			
	Wellcome - as a greeting				
	Mistakes in Spelling and Grammar				
	In developeing stage				
	Missing Pictures				
	Uncompleted Informations				
	Pages Scrolling				
	Cookies				
	Unclear procedure during <ordering				
	Plug - in				
	Copied Files from other Sites				

## RESULTS ANALYSIS

To conduct research three companies from automobile industry are taken into consideration: Toyota, Nissan and Mutshubishi. These companies were taken because due to the Forbs list on which between 100 first companies are 10 from automobile industry. During last year this journal did ranking companies taking into consideration not only sales ( as during earliar years), but last year

set of parameters were tanken into account: sales, property i market value.Those chosen companies were placed on: 25<sup>th</sup>, 85<sup>th</sup> and 95<sup>th</sup> place.

In addition, we are going to see tabel with placed reviews done throuh different parameters. On that way we are going to try to find connection between the Forbs list and quality of company's site. We used links given in literature review for evaluation.

**Table 2.** Results from reviewed quality of companies sites

Parameters for assessing the quality of corporate websites		Scale:	Grade		
			Toyota	Nissan	Mitsubishi
Content:	Catalogue	1 - 5	5	0	2
	Pricelist		5	4	2
	Company's Brochure		5	5	0
	Business Report		1	0	1
	On-line library		0	0	0
	Technical Specification		5	5	3
	Photos		5	5	5
	Free Guidance with Instructions		5	4	3
Funcionality:	Easy Navigation	1 - 10	10	10	10
	Functionality		9	9	9
	Availability of information		8	9	7
	Selection " Newsi "		10	0	10
	Advices and recommendations		9	0	5
	"You are asking- we are answering "		5	7	10
Site Design:	Link to Other Sites	1-10	5	5	5
	Advertisements from other companies on site		8	5	5
	Marketing i company promotion		1	1	1
	Wisits counterung		0	0	0
	Logo and banners		10	10	10
Sales Tools:	Order Form	1 - 5	0	0	0
	Sales through Internet		0	0	0
	Protecting the on - line purchase		0	0	0
Should not be found on the site:	Animations and Big Photos	0 - 5	0	0	0
	Wellcome - as a greeting		5	5	5
	Mistakes in Spelling and Grammar		5	5	0
	In developeing stage		0	0	5
	Missing Pictures		5	5	5
	Uncompleted Informations		0	5	5
	Pages Scrolling		0	5	5
	Cookies		5	5	5
	Unclear procedure during <ordering		5	5	5
	Plug - in		5	5	5
	Copied Files from other Sites		5	5	5
<b>Total:</b>			<b>141</b>	<b>125</b>	<b>123</b>

Comparative analysis of corporate websites shows that the current position on the Forbes list may be linked to the quality of corporate websites and the internet is a place where buyers meet the most sensitive criteria.

Most points earned in this methodology belongs to Toyota, and we have few complaints like: missing online library, purchase orders, sales via the internet, but it is certainly one of the best corporate websites. Nissan site is functional at first glance, but with significantly fewer points than Toyota's site but it is certainly one of the best local corporate sites. Mitsubishi Motors website is very simple and less functional website, which are missing information, brochures, order forms, counters visit etc.

## CONCLUSION

This days, when internet is available in every home, company must have serious web site. Today, if you do not have web site, is the same like you do not exist. Therefore, using internet in all areas allows disappearance of differences between big and small companies and those with long tradition and those designed recently. You are visible, actual, interesting and good as quality your internet site is good.

## REFERENCES

- [1] <http://.wikipedia.org/wiki/Marketing>
- [2] <http://www.toyota-global.com/>
- [3] <http://www.nissan-global.com/>
- [4] <http://www.mitsubishi.com>
- [5] <http://www.toyota-tech.eu/>
- [6] <http://www.toyota.rs/innovation/hybrid.tmex>
- [7] <http://www.toyota.rs/innovation/safety.tmex>
- [8] <http://www.mitsubishi-motors.rs/press-clipping/video-mediji>
- [9] <http://www.mitsubishi-motors.rs/video/video-klipovi-2>
- [10] <http://www.mitsubishi-motors.rs/video/video-wrc-2>
- [11] <http://www.mitsubishi-motors.rs/video/video-offroad-2>



## REDUCTION IN MODELING OF DYNAMICS OF A ROTATING LAYER OF AN IDEAL ELECTRICALLY CONDUCTING INCOMPRESSIBLE FLUID WITH ALLOWANCE EFFECTS OF DIFFUSIONS OF MAGNETIC FIELD

РЕДУКЦИЯ В МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ СЛОЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ ДИФфуЗИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

---

*A system of nonlinear partial differential equations is considered that models perturbations in a layer of an ideal electrically conducting rotating fluid bounded by spatially and temporally varying surfaces with allowance for inertial forces and diffusions of magnetic field. The system is reduced to a scalar equation. The solvability of initial boundary value problems arising in the theory of waves in conducting rotating fluids can be established by analyzing this equation. Solutions to the scalar equation are constructed that describe small-amplitude wave propagation in an infinite horizontal layer and a long narrow channel.*

---

### ВВЕДЕНИЕ

Целью данной статьи является редукция системы уравнений с частными производными, моделирующей возмущение в слое идеальной электропроводной вращающейся жидкости с учетом диффузии магнитного поля, ограниченном поверхностями, изменяющимся в пространстве и во времени, с учетом инерционных сил.

Для полученных в результате редукции уравнений построены решения, описывающие распространение волн малой амплитуды в бесконечно протяженном по горизонтали слое и в узком длинном канале.

Если электропроводная жидкая среда находится в магнитном поле, то при ее гидродинамическом движении в ней возникают электрические токи. Эти токи изменяют магнитное поле. Но на токи в магнитном поле действуют силы, способные изменить характер движения среды. Следовательно, гидродинамическое движение и электромагнитные явления взаимосвязаны. Эта связь описывается совместной системой уравнений поля и уравнений движения жидкости. Согласно работам известного шведского физика и астрофизика Г. Альфвена связь между электромагнитными и гидродинамическими явлениями возрастает с увеличением линейного масштаба явления. Для крупномасштабных явлений эта связь может быть достаточно сильной. В частности, это относится, например, к недрам звезд и жидкому ядру Земли [1].

Вопросам о крупномасштабных движениях электропроводной жидкости посвящены работы [3]-[7], в которых рассматривалась модель, построенная в приближении быстрого вращения. В рамках этой теории в уравнении движения пренебрегается силой инерции. В результате отфильтровываются инерциальные, альфвеновские волны и волны Россби. Кроме того, в пределе быстрого вращения скорость  $v$  находится неоднозначно, а с точностью до слагаемого, представляющего собой геострофическую скорость. Последнее обстоятельство обусловлено тем, что геострофическая скорость не удовлетворяет магнитострофическому уравнению. Для преодоления указанных трудностей привлекаются вязкие силы и пренебрегается вязкостью, когда это допустимо.

В работах [8]-[11] исследовалась задача о крупномасштабных движениях электропроводной жидкости в слое между плоскостями  $z = 0$ ;  $z = d$  в магнитострофическом приближении с учетом вязких сил.

---

1 Saint Petersburg State University, St. Petersburg, Russia

2 National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics, St. Petersburg, Russia

В данном исследовании предполагается, что границы слоя не являются постоянными, а представляют собой поверхности, изменяющиеся в пространстве и во времени; кроме того, в уравнении движения учитываются инерционные силы.

### ДИНАМИКА ТОНКОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ СЛОЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим тонкий вращающийся с угловой скоростью  $\omega$  слой электропроводной несжимаемой жидкости, ограниченный снизу подвижным дном, заданным относительно отсчетного уровня  $z = 0$  поверхностью  $z = h_B(x, y, t)$ , с неизвестной функцией  $h_B(x, y, t)$ , а сверху - известной поверхностью  $Z(x, y)$ . Ось вращения жидкости совпадает с осью  $z$ , т.е.  $\omega = \omega \mathbf{k}$ .

Основные уравнения магнитной гидродинамики рассматриваемой задачи в проекциях на координатные оси имеют вид [1]:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( p + \frac{b^2}{2\mu} \right) + 2\omega v_y + \frac{1}{\mu\rho} \langle \mathbf{b}, \nabla b_x \rangle, \quad (1)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( p + \frac{b^2}{2\mu} \right) - 2\omega v_x + \frac{1}{\mu\rho} \langle \mathbf{b}, \nabla b_y \rangle, \quad (2)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( p + \frac{b^2}{2\mu} \right) - g + \frac{1}{\mu\rho} \langle \mathbf{b}, \nabla b_z \rangle, \quad (3)$$

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} - \langle \mathbf{b}, \nabla \rangle \mathbf{b} = \lambda \Delta \mathbf{b}, \quad (4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0, \quad (6)$$

где  $v_x, v_y, v_z$  - компоненты скорости жидкости,  $p$  - давление,  $\mathbf{g}$  - ускорение силы тяжести,  $\rho$  - плотность,  $b_x, b_y, b_z$  - компоненты магнитной индукции поля,  $\mu$  - магнитная проницаемость,  $\sigma$  - электропроводность среды,  $\omega$  - угловая скорость вращения слоя.

Введем в рассмотрение характерные масштабы изменения переменных в уравнениях (1)-(6):  $D$  - движения в вертикальном направлении (предполагается, что значение  $D$  равно средней глубине слоя жидкости  $h_B(x, y, t) - Z(x, y)$ ),  $L$  - движения в горизонтальном направлении,  $U$  - горизонтальной компоненты скорости,  $W$  - вертикальной компоненты скорости,  $B$  - горизонтальных компонент поля,  $H$  - вертикальной компоненты поля,  $T$  - временной и  $P$  - поля давления.

Для рассматриваемой задачи естественно предположение, что

$$\delta = \frac{D}{L} < 1.$$

Кроме того, в уравнении неразрывности (5) первое и второе слагаемые имеют порядок  $O\left(\frac{U}{L}\right)$ , поэтому порядок третьего слагаемого  $O\left(\frac{W}{D}\right)$  не больше  $O\left(\frac{U}{L}\right)$ . Следовательно,

$$W \leq O(\delta U).$$

Аналогично, оценивая порядки слагаемых уравнения соленоидальности (6), получим

$$H \leq O(\delta U).$$

Оценивая далее слагаемые в уравнениях (1)-(4), перейдем в этих уравнениях к безразмерным переменным. В результате получим

$$\frac{U}{T} \frac{dv_x}{dt} + \frac{U^2}{L} \langle \mathbf{v}, \nabla v_x \rangle = -\frac{1}{\rho L} \left( P + \frac{(1+\delta^2)B^2}{2\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( p + \frac{b^2}{2\mu} \right) + 2\omega U v_y + \frac{B^2}{L\mu\rho} \langle \mathbf{b}, \nabla b_x \rangle, \quad (7)$$

$$\frac{U}{T} \frac{dv_y}{dt} + \frac{U^2}{L} \langle \mathbf{v}, \nabla v_y \rangle = -\frac{1}{\rho L} \left( P + \frac{(1+\delta^2)B^2}{2\mu} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( p + \frac{b^2}{2\mu} \right) - 2\omega U v_x + \frac{B^2}{L\mu\rho} \langle \mathbf{b}, \nabla b_y \rangle, \quad (8)$$

$$\frac{\delta U}{T} \frac{dv_z}{dt} + \frac{\delta U^2}{L} \langle \mathbf{v}, \nabla v_z \rangle = -\frac{1}{\rho D} \left( P + \frac{(1+\delta^2)B^2}{2\mu} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left( p + \frac{b^2}{2\mu} \right) - g + \frac{\delta B^2}{L\mu\rho} \langle \mathbf{b}, \nabla b_z \rangle, \quad (9)$$

$$\frac{B}{T} \frac{db_x}{dt} + \frac{UB}{L} (\langle \mathbf{v}, \nabla b_x \rangle - \langle \mathbf{b}, \nabla v_x \rangle) = \frac{\lambda B}{L^2} \Delta b_x, \quad (10)$$

$$\frac{B}{T} \frac{db_y}{dt} + \frac{UB}{L} (\langle \mathbf{v}, \nabla b_y \rangle - \langle \mathbf{b}, \nabla v_y \rangle) = \frac{\lambda B}{L^2} \Delta b_y, \quad (11)$$

$$\frac{\delta B}{T} \frac{db_z}{dt} + \frac{\delta UB}{L} (\langle \mathbf{v}, \nabla b_z \rangle - \langle \mathbf{b}, \nabla v_z \rangle) = \delta \frac{\lambda B}{L^2} \Delta b_z, \quad (12)$$

Здесь и далее безразмерные переменные имеют прежние соответствующие обозначения.

В уравнениях (7) и (8) все слагаемые одного порядка, если динамическое, магнитное и кинетическое давления имеют один порядок:  $P \sim \frac{B^2}{\mu} \sim \rho U^2 \sim \frac{\rho U}{T}$ . В этом случае уравнения (1) и (2) без изменения используются для дальнейшего исследования.

Отношение конвективного члена в уравнениях индукции (10)-(12) к диффузионному члену, выраженное через характерную скорость жидкости  $U$  и характерную длину  $L$ , является безразмерным параметром  $\frac{LU}{\lambda}$ , который называют магнитным числом Рейнольдса. Оно характеризует

связь потока плазмы и магнитного поля. В лабораторных условиях обычно  $R_m < 1$ , и эта связь является слабой, тогда как в астрофизике, как правило  $R_m > 1$ , и эта связь сильная [1]. Уравнение индукции определяет поведение магнитного поля, если известна скорость, и это поведение существенным образом зависит от величины магнитного числа Рейнольдса  $R_m$ . В общем случае магнитные силовые линии частично переносятся потоком плазмы и частично диффундируют через нее.

Далее именно этот общий случай и будем рассматривать. Таким образом, примем  $R_m = 1$ , будем считать, что диффузионные члены имеют тот же порядок, что и конвективные.

Учет диффузионных членов необходим при изучении динамики волн более локального характера, т.е., когда  $L$  много меньше радиуса слоя, а также при очень великих масштабах времени  $T$ . Хотелось бы увидеть влияние диффузии магнитного поля на его генерацию. Сможет ли существовать такое поле сколь угодно длительное время, и будет ли оно существовать при отключении затравочного поля.

Оставляя в уравнении (9) только главные члены, получим

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( p + \frac{b^2}{2\mu} \right) = -\rho g,$$

откуда, интегрируя по  $z$ ,

$$p + \frac{b^2}{2\mu} = -\rho g z + C(x, y, t),$$

или, используя граничные условия  $p(x, y, h_B) = p_0$  и  $b(x, y, h_B) = b_0$ , где  $p_0$  и  $b_0$  - постоянные ве-

личины,

$$p + \frac{b^2}{2\mu} = p_0 + \frac{b_0^2}{2\mu} - \rho g(h_B + z). \quad (13)$$

Следствием линейной зависимости от  $z$  правой части выражения (13) является независимость от  $z$  горизонтального градиента гидромагнитного давления:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( p + \frac{b^2}{2\mu} \right) = -\rho g \frac{\partial h_B}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( p + \frac{b^2}{2\mu} \right) = -\rho g \frac{\partial h_B}{\partial y}.$$

Тогда и горизонтальные компоненты скорости и магнитного поля не зависят от  $z$ , в случае их независимости от  $z$  в начальный момент времени.

Предполагая последнее свойство выполненным, из уравнений (7) и (8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= 2\omega v_y + g \frac{\partial h_B}{\partial x} + \frac{1}{\mu\rho} \left( b_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + b_y \frac{\partial b_x}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 2\omega v_x + g \frac{\partial h_B}{\partial y} + \frac{1}{\mu\rho} \left( b_x \frac{\partial b_y}{\partial x} + b_y \frac{\partial b_y}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

и из уравнения (5), интегрируя по  $z$ ,

$$v_z(x, y, z, t) = -z \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \alpha(x, y, t),$$

где  $\alpha(x, y, t)$  - произвольная функция своих аргументов. С учетом равенства нулю нормальной компоненты скорости на твердой поверхности  $z = Z$  получаем

$$v_z(x, y, -Z, t) = -v_x \frac{\partial Z}{\partial x} - v_y \frac{\partial Z}{\partial y},$$

следовательно,

$$\alpha(x, y, t) = -v_x \frac{\partial Z}{\partial x} - v_y \frac{\partial Z}{\partial y} - Z \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right),$$

поэтому

$$v_z(x, y, z, t) = -(Z + z) \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) - v_x \frac{\partial Z}{\partial x} - v_y \frac{\partial Z}{\partial y}. \quad (14)$$

Аналогично, условие для  $v_z$  на поверхности  $z = h_B(x, y, t)$  имеет вид

$$v_z(x, y, -h_B(x, y, t), t) = -\frac{\partial h_B}{\partial t} - v_x \frac{\partial h_B}{\partial x} - v_y \frac{\partial h_B}{\partial y},$$

откуда, с учетом равенства (14),

$$\frac{\partial h_B}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h_B - Z)v_x] + \frac{\partial}{\partial y} [(h_B - Z)v_y] = 0.$$

Проинтегрируем, далее, уравнение (6) по  $z$ :

$$b_z(x, y, z, t) = -z \left( \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} \right) + \tilde{\alpha}(x, y, t),$$

где  $\tilde{\alpha}(x, y, t)$  - произвольная функция своих аргументов. На поверхности  $z = h_B(x, y, t)$  функция  $b_z$  удовлетворяет условию

$$b_z(x, y, -h_B, t) = b_{z_0}(x, y, t),$$

поэтому

$$\tilde{a}(x, y, t) = b_{z_0}(x, y, t) - h_B \left( \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} \right),$$

следовательно,

$$b_z(x, y, z, t) = -(h_B + z) \left( \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} \right) + b_{z_0}(x, y, t). \quad (15)$$

Краевое условие для  $b_z$  на поверхности  $z = Z(x, y)$  имеет вид

$$b_z(x, y, -Z, t) = b_{z_0}^{(e)}(x, y, t).$$

Из равенства (15) и последнего соотношения имеем

$$(h_B - Z) \left( \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} \right) + b_{z_0}^{(e)}(x, y, t) - b_{z_0}(x, y, t) = 0.$$

Таким образом, вследствие условия  $\delta < 1$  получим

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2\omega v_y + g \frac{\partial h_B}{\partial x} + \frac{1}{\mu\rho} \left( b_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + b_y \frac{\partial b_x}{\partial y} \right), \quad (16)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -2\omega v_x + g \frac{\partial h_B}{\partial y} + \frac{1}{\mu\rho} \left( b_x \frac{\partial b_y}{\partial x} + b_y \frac{\partial b_y}{\partial y} \right), \quad (17)$$

$$\frac{\partial h_B}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h_B - Z)v_x] + \frac{\partial}{\partial y} [(h_B - Z)v_y] = 0, \quad (18)$$

$$(h_B - Z) \left( \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} \right) + b_{z_0}^{(e)}(x, y, t) - b_{z_0}(x, y, t) = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial b_x}{\partial y} - b_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - b_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{R_m} \Delta_2 b_x, \quad (20)$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial b_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial b_y}{\partial y} - b_x \frac{\partial v_y}{\partial x} - b_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{1}{R_m} \Delta_2 b_y, \quad (21)$$

в которой, в сравнении с системой (7)-(12) меньшее число динамических уравнений, искомым функций (за счет исключения  $v_z$  и  $b_z$  из уравнений исходной системы) и независимых переменных (так как  $z$  не входит больше в явном виде в динамические уравнения). Искомые переменные  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $b_x$ ,  $b_y$ ,  $h_B$  являются функциями только  $x, y, t$ . В выражениях (14) и (15) функции  $v_z$  и  $b_z$  зависят от  $z$  линейно. В уравнениях (20) и (21)  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ . В дальнейшем изложении индекс у двумерного оператора Лапласа опускается.

К уравнениям (16)-(21) добавляются граничные условия непротекания через вертикальные границы рассматриваемой области и задание магнитного поля на них:

$$v_x \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}) + v_y \cos(\mathbf{n}, \mathbf{y}) = 0, \quad b_x = b_x^{(L)}, \quad b_y = b_y^{(L)}, \quad (x, y) \in L, \quad (22)$$

где  $\mathbf{n}$  - нормаль к горизонтальному сечению границы области.

## МАЛЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Введем функцию полной глубины  $H = h_B - Z$ . Пусть толщина жидкого слоя в состоянии покоя равна  $H_0(x, y, t)$ . Представим функцию  $H(x, y, t)$  в виде

$$H(x, y, t) = H_0(x, y, t) + \eta(x, y, t), \quad (23)$$

где  $\eta(x, y, t)$  - малое возмущение, характеризуемое неравенством  $\eta < H_0$ .

Для описания распространения малых возмущений применим стандартный в механике сплошных сред метод линеаризации системы дифференциальных уравнений, описывающих поведение среды. Будем искать решение системы (16)-(21) в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'(x, y, t), \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}'(x, y, t), \quad (24)$$

предполагая, что малые возмущения горизонтальной скорости  $\mathbf{v}'$ , горизонтального магнитного поля  $\mathbf{b}_0$  распространяются по некоторому стационарному однородному фону, описываемому постоянными величинами  $\mathbf{v}_0, \mathbf{b}_0$ . Рассмотрим случай  $\mathbf{v}_0 = 0$ .

Подставив (23) и (24) в уравнения (16)-(21) и сохранив члены только первого порядка малости по  $\mathbf{v}', \mathbf{b}', \eta$ , получим систему уравнений

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} - \alpha v_y = g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{\mu \rho} \left( b_{0x} \frac{\partial b_x}{\partial x} + b_{0y} \frac{\partial b_x}{\partial y} \right), \quad (25)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + \alpha v_x = g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{\mu \rho} \left( b_{0x} \frac{\partial b_y}{\partial x} + b_{0y} \frac{\partial b_y}{\partial y} \right), \quad (26)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (H_0 v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (H_0 v_y) = 0,$$

$$H_0 \left( \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} \right) + b_{z0}^{(e)}(x, y, t) - b_{z0}(x, y, t) = 0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial t} - b_{0x} \frac{\partial v_x}{\partial x} - b_{0y} \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{R_m} \Delta b_x, \quad (28)$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial t} - b_{0x} \frac{\partial v_y}{\partial x} - b_{0y} \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{1}{R_m} \Delta b_y. \quad (29)$$

Здесь  $\alpha = 2\omega$ .

Рассмотрим далее систему (25), (26), (28) и (29), представленную в виде

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} - \alpha v_y = g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{\mu \rho} D b_x, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} + \alpha v_x = g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{\mu \rho} D b_y, \quad (30)$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial t} = D v_x + \frac{1}{R_m} \Delta b_x, \quad \frac{\partial b_y}{\partial t} = D v_y + \frac{1}{R_m} \Delta b_y, \quad (31)$$

где  $D = b_{0x} \frac{\partial}{\partial x} + b_{0y} \frac{\partial}{\partial y}$  - дифференциальный оператор. Введем в рассмотрение функции

$\tilde{\eta}(x, y, t), \tilde{b}_x(x, y, t), \tilde{b}_y(x, y, t)$ , определяемые равенствами

$$\eta(x, y, t) = \frac{1}{g} D_t (D_t^2 + \alpha^2) \tilde{\eta}(x, y, t), \quad (32)$$

$$b_x(x, y, t) = \mu \rho D_t (D_t^2 + \alpha^2) \tilde{b}_x(x, y, t), \quad (33)$$

$$b_y(x, y, t) = \mu \rho D_t (D_t^2 + \alpha^2) \tilde{b}_y(x, y, t), \quad (34)$$

где  $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$ .

Заметим, что соотношениями (32)-(34) функции  $\eta, b_x, b_y$  определяются неоднозначно: если функция  $\eta_0(x, y, t)$  удовлетворяет соотношению (32), то, очевидно, соотношению (32) удовлетворяет и функция вида

$$\tilde{\eta} = \eta_0(x, y, t) + \eta_1(x, y) + \eta_2(x, y) \cos \alpha t + \eta_3(x, y) \sin \alpha t, \quad (35)$$

где  $\eta_j(x, y), j = 1, 2, 3$  - произвольные функции.

Аналогично, в (33) и (34) функции  $\tilde{b}_x(x, y, t)$  и  $\tilde{b}_y(x, y, t)$  представимы в виде

$$\tilde{b}_x = b_x^{(0)}(x, y, t) + b_x^{(1)}(x, y) + b_x^{(2)}(x, y) \cos \alpha t + b_x^{(3)}(x, y) \sin \alpha t, \quad (36)$$

$$\tilde{b}_y = b_y^{(0)}(x, y, t) + b_y^{(1)}(x, y) + b_y^{(2)}(x, y) \cos \alpha t + b_y^{(3)}(x, y) \sin \alpha t, \quad (37)$$

где  $b_x^{(j)}, b_y^{(j)}, j = 1, 2, 3$  - произвольные функции своих аргументов в рассматриваемой области.

Подставив функции  $\eta, b_x, b_y$  из (32)-(34) в уравнения (30), получим в матричном виде

$$\begin{pmatrix} D_t & -\alpha \\ \alpha & D_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = D_t (D_t^2 + \alpha^2) \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_x \\ \tilde{\eta}_y \end{pmatrix} + D_t (D_t^2 + \alpha^2) D \begin{pmatrix} \tilde{b}_x \\ \tilde{b}_y \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Интегрирование соотношения (38) по  $t$  приводит к равенству

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = D_t \begin{pmatrix} D_t & \alpha \\ -\alpha & D_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_x \\ \tilde{\eta}_y \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} D_t & \alpha \\ -\alpha & D_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{b}_x \\ \tilde{b}_y \end{pmatrix} + C_1(x, y) \begin{pmatrix} \cos \alpha t \\ -\sin \alpha t \end{pmatrix} + C_2(x, y) \begin{pmatrix} \cos \alpha t \\ -\sin \alpha t \end{pmatrix}, \quad (39)$$

где  $C_1(x, y), C_2(x, y)$  - произвольные функции.

Подставляя в (39) функции  $\tilde{\eta}, \tilde{b}_x, \tilde{b}_y$  из (37)-(39), получим

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} &= D_t \begin{pmatrix} D_t & \alpha \\ -\alpha & D_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{0x} \\ \eta_{0y} \end{pmatrix} + \left[ C_1(x, y) - \alpha^2 \left( \frac{\partial \eta_2}{\partial x} - \frac{\partial \eta_3}{\partial y} \right) - \alpha^2 \left( \frac{\partial b_x^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial b_x^{(3)}}{\partial y} \right) - \alpha^2 \left( \frac{\partial b_y^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial b_y^{(3)}}{\partial y} \right) \right] \cdot \\ &\cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha t \\ -\sin \alpha t \end{pmatrix} + \left[ C_2(x, y) - \alpha^2 \left( \frac{\partial \eta_2}{\partial y} + \frac{\partial \eta_3}{\partial x} \right) - \alpha^2 \left( \frac{\partial b_x^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial b_x^{(3)}}{\partial x} \right) - \alpha^2 \left( \frac{\partial b_y^{(2)}}{\partial y} - \frac{\partial b_y^{(3)}}{\partial x} \right) \right] \begin{pmatrix} \sin \alpha t \\ \cos \alpha t \end{pmatrix} + \\ &+ D \begin{pmatrix} D_t & \alpha \\ -\alpha & D_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x^{(0)} \\ b_y^{(0)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (40)$$

Рассмотрим вектор  $C(x, y) = (C_2(x, y), -C_1(x, y), 0) \in H_2(\Omega), C_j(x, y) \in L_2(\Omega), j = 1, 2$ . Воспользуемся следующей леммой [2].

**Лемма.** Для любого вектора  $C(x, y) \in H_2(\Omega)$  найдутся функции  $\varphi(x, y), \psi(x, y) \in L_2(\Omega)$ , такие, что  $C = (\varphi_x + \psi_y, \varphi_y - \psi_x, 0)$ , где  $\varphi_x(x, y), \varphi_y(x, y), \psi_x(x, y), \psi_y(x, y)$  - обобщенные частные производные функций  $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ .

Доказательство леммы приведено в [2]. Используя лемму и полагая в (40)

$$(\eta_2 + b_x^{(2)} + b_y^{(2)})(x, y) = \frac{\psi(x, y)}{\alpha^2}, \quad (\eta_3 + b_x^{(3)} + b_y^{(3)})(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\alpha^2},$$

получим

$$(\eta_2 + b_x^{(2)} + b_y^{(2)})(x, y) = \frac{\psi(x, y)}{\alpha^2}, \quad (\eta_2 + b_x^{(3)} + b_y^{(3)})(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\alpha^2},$$

получим

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = D_t \begin{pmatrix} D_t & \alpha \\ -\alpha & D_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_x \\ \tilde{\eta}_y \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} D_t & \alpha \\ -\alpha & D_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{b}_x \\ \tilde{b}_y \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Подставляя  $b_x$  и  $b_y$  из (41) в уравнения (31) и (27), получим систему уравнений для функций  $\tilde{\eta}, \tilde{b}_x, \tilde{b}_y$ :

$$\begin{aligned} \mu\rho D_t (D_t^2 + \alpha^2) \left( D_t - \frac{\Delta}{R_m} \right) \tilde{b}_x &= DD_t (D_t \tilde{\eta}_x + \alpha \tilde{\eta}_y) + D^2 D_t (D_t \tilde{b}_x + \alpha \tilde{b}_y), \\ \mu\rho D_t (D_t^2 + \alpha^2) \left( D_t - \frac{\Delta}{R_m} \right) \tilde{b}_y &= DD_t (D_t \tilde{\eta}_y - \alpha \tilde{\eta}_x) + D^2 D_t (D_t \tilde{b}_y - \alpha \tilde{b}_x), \\ D_t (D_t^2 + \alpha^2) \left( \frac{\partial \tilde{b}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{b}_y}{\partial y} \right) &= \frac{b_{z0}(x, y, t) - b_{z0}^{(e)}(x, y, t)}{H_0 \mu\rho}. \end{aligned}$$

Переход от функций  $\tilde{\eta}, \tilde{b}_x, \tilde{b}_y$  к функциям  $\tilde{\tilde{\eta}}, \tilde{\tilde{b}}_x, \tilde{\tilde{b}}_y$  по формулам

$$\tilde{\tilde{\eta}} = D_t \tilde{\eta}, \quad \tilde{\tilde{b}}_x = D_t \tilde{b}_x, \quad \tilde{\tilde{b}}_y = D_t \tilde{b}_y$$

приводит последнюю систему к системе

$$\left[ \mu\rho \left( D_t - \frac{\Delta}{R_m} \right) (D_t^2 + \alpha^2) - D^2 D_t \right] \tilde{\tilde{b}}_x - \alpha^2 D^2 \tilde{\tilde{b}}_y = D (D_t \tilde{\tilde{\eta}}_x + \alpha \tilde{\tilde{\eta}}_y), \quad (42)$$

$$\left[ \mu\rho \left( D_t - \frac{\Delta}{R_m} \right) (D_t^2 + \alpha^2) - D^2 D_t \right] \tilde{\tilde{b}}_y + \alpha^2 D^2 \tilde{\tilde{b}}_x = D (D_t \tilde{\tilde{\eta}}_y - \alpha \tilde{\tilde{\eta}}_x), \quad (43)$$

$$D_t (D_t^2 + \alpha^2) \left( \frac{\partial \tilde{\tilde{b}}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tilde{b}}_y}{\partial y} \right) = \frac{b_{z0}(x, y, t) - b_{z0}^{(e)}(x, y, t)}{H_0 \mu\rho}. \quad (44)$$

Запишем далее уравнения (42) и (43), опуская знак «двойной» тильды, в виде

$$F b_x - \alpha D^2 b_y = D (D_t \eta_x + \alpha \eta_y), \quad F b_y + \alpha D^2 b_x = D (D_t \eta_y - \alpha \eta_x) \quad (45)$$

с использованием оператора

$$F = \mu\rho \left( D_t^2 + \alpha^2 \right) \left( D_t - \frac{\Delta}{R_m} \right) - D^2 D_t.$$

Введем в рассмотрение функцию  $\xi(x, y, t)$ , определяемую равенством

$$\eta(x, y, t) = \left( F^2 + (\alpha D^2)^2 \right) \xi(x, y, t). \quad (46)$$

Подставив функцию  $\eta(x, y, t)$  из (46) в уравнения (44), получим в матричном виде

$$\begin{pmatrix} F & -\alpha D^2 \\ \alpha D^2 & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = D \left( F^2 + (\alpha D^2)^2 \right) \begin{pmatrix} D_t & \alpha \\ -\alpha & D_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Интегрирование по  $t$  соотношения (47) приводит к равенству

$$\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} F & \alpha D^2 \\ -\alpha D^2 & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_t & \alpha \\ -\alpha & D_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Процедура исключения произвольных функций результата интегрирования рассмотрена выше.

Перемножив матрицы в правой части соотношения (48), получим

$$\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = D \left( F^2 + (\alpha D^2)^2 \right) \begin{pmatrix} D_t F - \alpha^2 D^2 & \alpha (F + D^2 D_t) \\ -\alpha (F + D^2 D_t) & D_t F - \alpha^2 D^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix}$$



или

$$\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = D(D_t^2 + \alpha^2) \begin{pmatrix} D_t \mu \rho \left( D_t - \frac{\Delta}{R_m} \right) - D^2 & \alpha \mu \rho \left( D_t - \frac{\Delta}{R_m} \right) \\ -\alpha \mu \rho \left( D_t - \frac{\Delta}{R_m} \right) & D_t \mu \rho \left( D_t - \frac{\Delta}{R_m} \right) - D^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Подставив выражение (49) в уравнение (44), получим уравнение для функции  $\xi(x, y, t)$ :

$$D(D_t^2 + \alpha^2) \left( \left( D_t - \frac{\Delta}{R_m} \right) D_t - \frac{D^2}{\mu \rho} \right) \Delta \xi = \frac{b_{z0}(x, y, t) - b_{z0}^{(e)}(x, y, t)}{(\mu \rho)^2 H_0}. \quad (50)$$

На основании изложенного приходим к следующему выводу.

**Утверждение.** Любое решение  $\mathbf{v}(x, y, t), \mathbf{b}(x, y, t), \eta(x, y, t)$  задачи о малых возмущениях в слое идеальной несжимаемой однородной электропроводной вращающейся жидкости с учетом диффузии магнитного поля, удовлетворяющее необходимым условиям гладкости, представимо в виде

$$\mathbf{b}(x, y, t) = \mu \rho D_t (D_t^2 + \alpha^2) \tilde{\mathbf{b}}(x, y, t), \quad (51)$$

$$\eta(x, y, t) = \frac{1}{g} D_t (D_t^2 + \alpha^2) \tilde{\eta}(x, y, t), \quad (52)$$

$$\tilde{\eta}(x, y, t) = D_t \tilde{\eta}(x, y, t), \quad \tilde{\mathbf{b}}(x, y, z, t) = D_t \tilde{\mathbf{b}}(x, y, z, t), \quad (53)$$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_t & \alpha \\ -\alpha & D_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_x + D \tilde{b}_x \\ \tilde{\eta}_y + D \tilde{b}_y \end{pmatrix}, \quad (54)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{b}_x \\ \tilde{b}_y \end{pmatrix} = D(D_t^2 + \alpha^2) \begin{pmatrix} D_t \mu \rho \left( D_t - \frac{\Delta}{R_m} \right) - D^2 & \alpha \mu \rho \left( D_t - \frac{\Delta}{R_m} \right) \\ -\alpha \mu \rho \left( D_t - \frac{\Delta}{R_m} \right) & D_t \mu \rho \left( D_t - \frac{\Delta}{R_m} \right) - D^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix}, \quad (55)$$

$$\tilde{\eta}(x, y, t) = \left( F^2 + (\alpha D^2)^2 \right) \xi(x, y, t), \quad (56)$$

$$F = \mu \rho (D_t^2 + \alpha^2) - D^2 D_t, \quad D = b_{0x} \frac{\partial}{\partial x} + b_{0y} \frac{\partial}{\partial y},$$

где функция  $\xi(x, y, t)$  является решением уравнения (50).

**Замечание.** Верно и обратное утверждение: любое решение уравнения (50) порождает решение системы (25)-(29), моделирующей малые возмущения в тонком слое идеальной несжимаемой однородной электропроводной вращающейся жидкости с учетом диффузии магнитного поля, если построенные по формулам (51)-(56) функции  $\mathbf{v}, \mathbf{b}, \eta$  удовлетворяют в рассматриваемой области условиям гладкости.

Подведя итог проведенного исследования, представим уравнение (50) в виде

$$\begin{aligned} & \left( b_{0x} \frac{\partial}{\partial x} + b_{0y} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^6}{\partial t^6} + 2\alpha^2 \frac{\partial^4}{\partial t^4} + \alpha^4 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\Delta}{R_m} \frac{\partial^5}{\partial t^5} - 2\alpha^2 \frac{\Delta}{R_m} \frac{\partial^3}{\partial t^3} - \alpha^4 \frac{\Delta}{R_m} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \xi - \\ & - \frac{\left( b_{0x} \frac{\partial}{\partial x} + b_{0y} \frac{\partial}{\partial y} \right)^3}{\mu \rho} \left( \frac{\partial^4}{\partial t^4} + 2\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha^4 \right) \Delta \xi = \frac{b_{z0}(x, y, t) - b_{z0}^{(e)}(x, y, t)}{(\mu \rho)^2 H_0}. \end{aligned}$$

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Альвен Г., Фельтхаммар К.-Г. Космическая электродинамика. М.: Мир. 1967.
- [2] Габов С.А., Свешников А.Г. Линейные задачи нестационарных внутренних волн. М.: Наука. 1990.
- [3] Busse F.H. A model of the geodynamo. *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* Vol.42. 437-459. 1975.
- [4] Busse F.H. Generation of planetary by convection. *Phys. Earth Planet. Inter.* Vol.12. 1976. P.350-358.
- [5] Zhang K.-K., Busse F.H. Finite amplitude convection and magnetic field generation in a rotating spherical shell. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* Vol.44. 1988. P.33-54.
- [6] Zhang K.-K., Busse F.H. Convection driven magnetohydrodynamic dynamos in rotating spherical shell. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* Vol.49. 1989. P.97-116.
- [7] Zhang K.-K., Busse F.H. Generation of magnetic fields by convection in a rotating spherical fluid shell of infinite Prandtl number. *Phys. Earth Planet. Inter.* Vol.59. 1990. P.208-222.
- [8] Eltayeb I.A., Kumar S. Hydromagnetic convective instabilities of a rotation self-gravitation fluid sphere containing a uniform distribution of heat sources. *Proc. Roy. Soc. London.* Vol.353. 1977. P.145-162.
- [9] Fearn D.R. Thermally driven hydromagnetic convection in a rapidly rotating sphere. *Proc. Roy. Soc. London.* Vol.369. 1979. P.227-242.
- [10] Fearn D.R. Thermal and magnetically driven instabilities in a rapidly rotating fluid sphere. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* Vol.14. 1979. P.103-126.
- [11] Fearn D.R., Proctor M.R. Hydromagnetic waves in a differentially rotating sphere. *J. Fluid Mech.* Vol.128. 1983. P.1-20.

## SCALING, INTEGRAL OPERATORS AND FRACTALS IN LOW-CONTRAST AND FUZZY IMAGES PROCESSING

### СКЕЙЛИНГ, ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ФРАКТАЛЫ В ОБРАБОТКЕ МАЛОКОНТРАСТНЫХ НЕЧЕТКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

---

*General results of theoretical and experimental researches are briefly systematized for multi-dimensional signals processing in intensive noises. The researches was being carried out by author and team he led in Kotel'nikov Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS. It's shown that fractals and scaling are important instrument of researches, which have good adaptability for practical requests as well as for abstract constructions of modern mathematics. Efficiency of proposed methods is widely illustrated by different examples.*

---

#### ВВЕДЕНИЕ

При решении целого ряда задач, связанных с аварийной слепой посадкой, с отказом локационных средств обеспечения посадки самолета и вертолета, а также при визуальном активном и пассивном обнаружении (распознавании) летательных и космических аппаратов и других объектов, одной из основных является задача идентификации окружающей обстановки. Предлагаемые нами методы обработки изображений также нужны для судоходства в условиях ограниченной видимости над/под водой и обнаружения морских целей. Эта задача также актуальна при движении любых видов транспорта в условиях торфяных пожаров, сильного задымления и смога, наличия облачности и атмосферных искажений.

Еще одно применение описанных видов обработки изображений связано с пожарной безопасностью, одной из основных является задача обнаружения задымленных объектов и правильная их идентификация. Помимо перечисленного, в настоящее время данные методы опробованы нами и в медицине.

Отказавшись от мысли сделать сколько-нибудь полный обзор сделанного донныне, пожертвовав во многих местах понятностью в пользу краткости, автор заполнил эту статью примерами, для того, чтобы читатель мог составить суждение о задачах и методах предмета и отчасти о достигнутых результатах.

Разработанные ранее нами новые цифровые последетекторные методы обработки сверхслабых многомерных радиолокационных сигналов от удаленных объектов широко представлены в монографиях [1 - 3].

При первом варианте обработки использовались последовательно алгоритмы итерационного устранения неравномерного фона и алгоритмы, основанные на частотной коррекции в области Фурье-спектра; а далее - широкий спектр фрактальных методов с использованием эффектов скейлинга (см., также, нашу статью о глобальном фрактальном методе и фрактальной парадигме в синтезе динамических фрактальных радиолокационных обнаружителей в настоящем сборнике на английском языке). Не описывая подробно применяемые методы (см., например, книги [1 - 3] и ссылки там), приведем краткие схемы алгоритмов и результаты обработки изображений на персональном компьютере.

---

<sup>1</sup> Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics, Moscow, Russia

## ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В схеме алгоритма устранения неравномерного аддитивного фона вычисляется среднее значение неравномерного фона  $\hat{n}$  по периметру кадра  $L$ , поскольку априори предполагается, что интересующее изображение расположено не на периферии кадра:

$$\hat{n} = L^{-1} \sum_{i=1}^L n_i, \quad (1)$$

где  $n_i$  - значение фона в  $i$ -ом элементе разрешения по периметру кадра.

Суммирование в (1) происходит только по периметру прямоугольного кадра. Далее формируется оценка отфильтрованного изображения по следующему эвристическому правилу:

$$J_{k-1} - \hat{n}_{k-1}, \text{ при } J_{k-1} > \hat{n}_{k-1}, \quad (2)$$

$$J_k = 0, \text{ при } J_{k-1} < \hat{n}_{k-1}.$$

При двух- или трехкратном применении данного цифрового фильтра к исследуемому кадру практически весь аддитивный фон устраняется.

В схеме алгоритма повышения резкости изображения или выделения деталей отфильтрованное от фона описанным выше методом (1) - (2) изображение преобразуется по Фурье и осуществляется переход в область пространственных частот  $F_k(\vec{\omega})$ . Далее осуществляется повышение высоких пространственных частот путем возведение полученного спектра в степень, показатель которой  $\alpha$  лежит в диапазоне (0 ... 1). Указанную процедуру можно записать следующим образом:

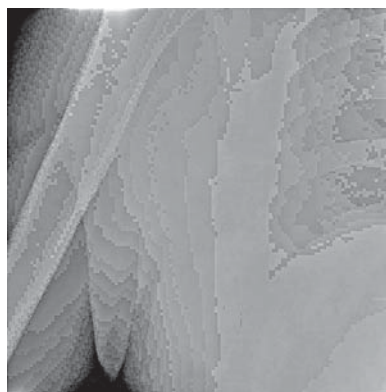
$$F_{k+1}(\vec{\omega}) = [F_k(\vec{\omega})]^\alpha. \quad (3)$$

Затем осуществляется обратное Фурье-преобразование от  $F_{k+1}(\vec{\omega})$  и получаем оценку изображения  $J_{k+1}$  с резко выделенными деталями. Операция (3) соответствует частично *фрактальной* обработке изображений [1].

Рассмотрим сначала несколько примеров из медицинской практики. Сначала применяется алгоритм устранения неравномерного аддитивного фона, затем - алгоритм повышения резкости изображения. Подобная процедура повторяется 2 ... 3 раза, но не более. Коэффициент  $\alpha$  по данным математического моделирования лучше выбирать равным  $\alpha \approx 0,7$ . Исследования проводились при обработке переломов и повреждений костей, плохо заметных при обычном визуальном анализе (рис. 1 - рис. 3). Например, на рис. 1,б и рис. 2,б видно появление дополнительных деталей, но скелетных повреждений не обнаруживается. Обработка изображения черепно-лицевой структуры человека показаны на рис. 3. При визуальном анализе отчетливо видна детальная костная структура.



(а)

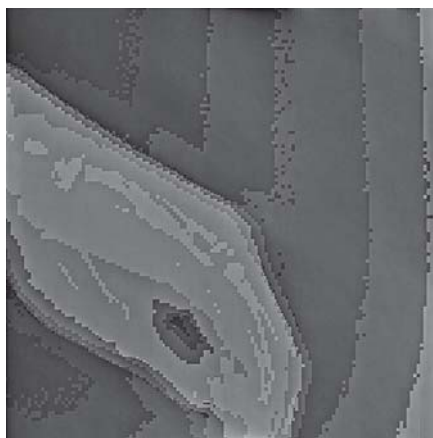


(б)

Рис. 1. Обработка изображения плечевой кости пациента: исходное изображение (а), обработанное изображение с помощью метода устранения фона (б)

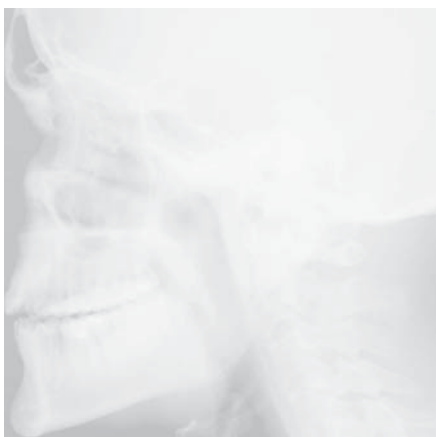


(a)



(б)

**Рис. 2.** Обработка изображения кисти руки пациента: исходное изображение (a), справа - обработанное изображение методом устранения фона (б)

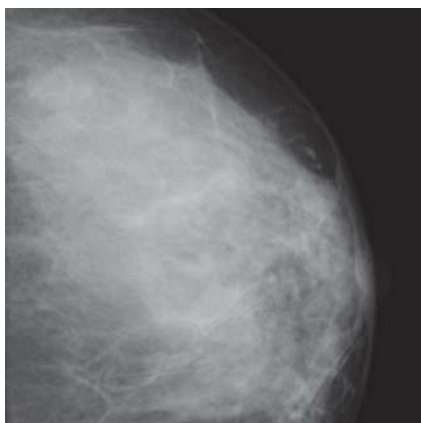


(a)

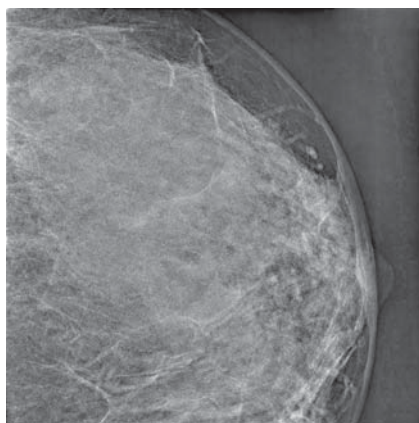


(б)

**Рис. 3.** Обработка изображения черепно-лицевой структуры человека: исходное размытое изображение (a) и обработанное изображение комбинированным методом устранения фона и частотной коррекции (б)



(a)



(б)

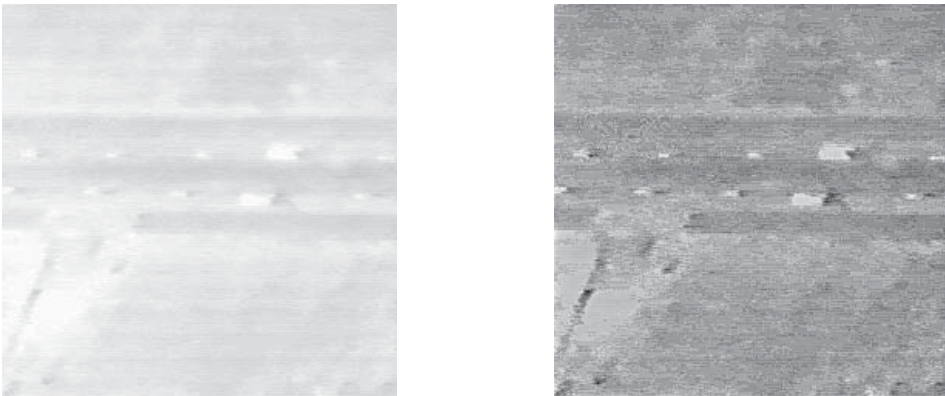
**Рис. 4.** Обработка изображения женской молочной железы при диагностике первичного появления метастаз: исходное изображение (a), обработанное комбинированным методом изображения (б)

На рис. 4 приведены исходное (а) и обработанное (б) изображения женской молочной железы при диагностике первичного появления метастаз. При визуальном анализе на правом снимке (б) видны мелкие многочисленные уплотнения.

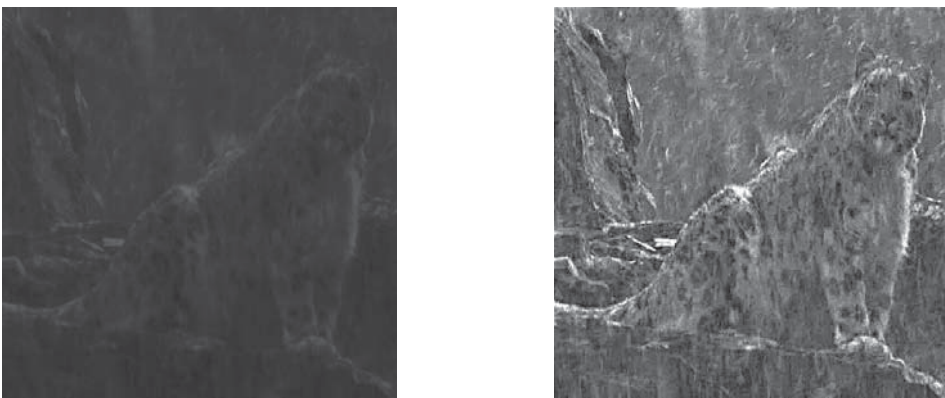
Далее представлены результаты цифровой обработки изображений удаленных объектов, наблюдаемых в оптическом и ИК-диапазонах длин волн, искаженных смогом, дождем и метелью (рис. 5 - 9).



**Рис. 5.** Изображение здания в Москве в смоге (слева), результаты обработки (справа). Обработка проводилась по схеме: алгоритм устранения неравномерного фона (коэффициент 2) + алгоритм Фурье-обработки (коэффициентом 0,7)



**Рис. 6.** Тепловизионное изображение поверхности Земли на дальности 1 км в диапазоне 8-12 мкм (слева), результаты обработки (справа)



**Рис. 7.** Результаты обработки зимних изображений, полученных во время сильной метели и сумерек, слева - исходный фрагмент, справа - результат обработки



Рис. 8. Фрагмент изображения промышленного объекта (слева), результаты обработки (справа)

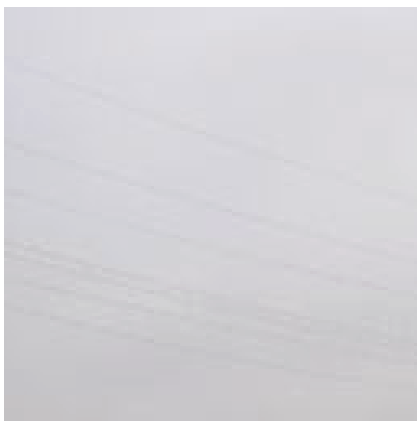


Рис. 9. Примеры обработки изображении высоковольтных проводов в условиях сильного тумана: (а) - исходное, (б) - обработанное (снимки получены фотокамерой на дальности 3 ... 5 км)

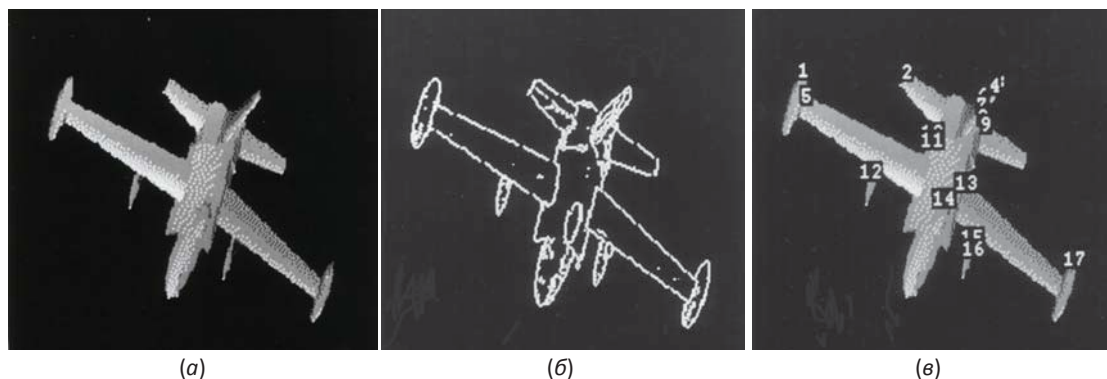
В качестве практических методов восстановления были выбраны методы итерационного, последовательного улучшения оценки изображения на основе все более полного ее согласования с априорными ограничениями - положительностью, финитностью и заданной информацией о Фурье-спектре. Подобные алгоритмы обычно сходятся достаточно быстро при обработке простых изображений, однако для сложных многосюжетных изображений сходимость замедляется.

В связи с этой особенностью итерационных алгоритмов была предложена модификация итерационной схемы на основе адаптивного выбора релаксационных параметров. Данная схема восстановления основана на применении расширенных операторов проекции, однако для данной задачи удалось вывести теоретическое выражение только для одного релаксационного параметра и провести математическое моделирование. Сравнение итерационной схемы без оптимизации и с оптимизации показало, что оптимизационная схема обладает 30 % выигрышем по скорости сходимости. Главное то, что в случае, когда обычный алгоритм перестает сходиться, оптимизационный продолжает монотонно устойчиво сходиться. Скорость сходимости диагностировалась по поведению среднеквадратичной нормированной ошибки по оценкам изображения, получаемым на каждом шаге [1].

## РАСПОЗНАВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ КЛАСТЕРА ПРИЗНАКОВ

Рассмотрим кратко задачу распознавания восстановленного изображения после устранения искажений в нем или сравнения его с эталоном. Наиболее информативным с точки зрения рас-

познавания является внешний контур изображения. Задача выделения контура изображения на фоне подстилающей поверхности и на фоне собственной яркостной картины изображения решалась применением различных сглаживающих масок размера  $3 \times 3$  пикселя с различными весовыми коэффициентами. При этом учитывалось распределение яркостной картины обрабатываемого изображения. Не вдаваясь в детали сравнительного анализа применяемых масок, приведем окончательные результаты предлагаемой методики - рис. 10.



**Рис. 10.** Построение вектора-признака, состоящего из точек излома внешнего контура изображения цели:  
 (а) - исходное искаженное изображение, (б) - результат подавления шумов и выделения контура,  
 (в) - построение точек излома контура (вектор-признак изображения)

Для реального распознавания целей были сформированы векторы - признаки, состоящие из точек излома внешнего контура изображения. Для учета изменяемости ориентации распознаваемой цели были сформированы векторы-признаки с шагом  $10^\circ$  по осям X, Y, Z - 36 отсчетов. Как показали многочисленные результаты тестирования, вероятность правильного распознавания в описанных условиях при исследовании сложных многосвязных объектов достигала  $\approx 90\%$ . Недостаток описанной методики - чувствительность к ракурсу объекта, находится в стадии преодоления с помощью перехода к анализу чисто инвариантных фрактальных признаков.

### ФРАКТАЛЬНО-СКЕЙЛИНГОВЫЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ

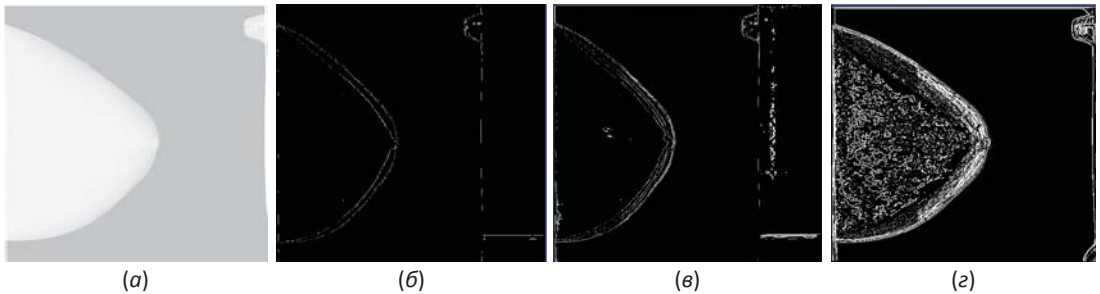
В качестве нового перспективного признака целесообразно использовать такое понятие как самоподобие (*скейлинг*), а также тесно связанное с ним понятие *фрактальной размерности D*. Виды самоподобия будут различны и для случайных - неслучайных процессов и для процессов одной природы, но с разными параметрами. Действительно, в случае детерминированного изображения или сигнала имеем вполне определенные виды самоподобия, например, простейшего «тождества» или более сложного - прямого произведения. В любом, случае для детерминированного сигнала по части множества можно восстановить и все множество. Случайное изображение или помеха, также может иметь некое самоподобие, но вид этого самоподобия будет другим. Подробно о предложенных автором методиках можно ознакомиться, например, в [1 - 3].

В случае, когда, изображение неоднородно, имеет смысл оценивать размерность малых элементов изображения или «локальную размерность  $D$ ». Вычисление оценки размерности производилось по лично разработанным методам [1 - 3]. Выбирая масштабы K и M ( $M > K$ ), в зависимости от размеров предполагаемых целей можно производить фильтрацию исходного изображения по величине оценки фрактальной размерности  $D$ . Существует два способа отображения полученных данных [1]. Самое простое - отображать результат «исключающего ИЛИ» непосредственно. Так, сравнительно быстро, можно получить «срезы» исходного изображения. Однако фильтрация и кластеризация при таком подходе затруднена. Это связано с тем, что «исключающее ИЛИ» является побитовой операцией и, в предположении о равномерном распределении значений точек на изображении, приводит к группированию значений вблизи чистых единиц. Например, в слу-



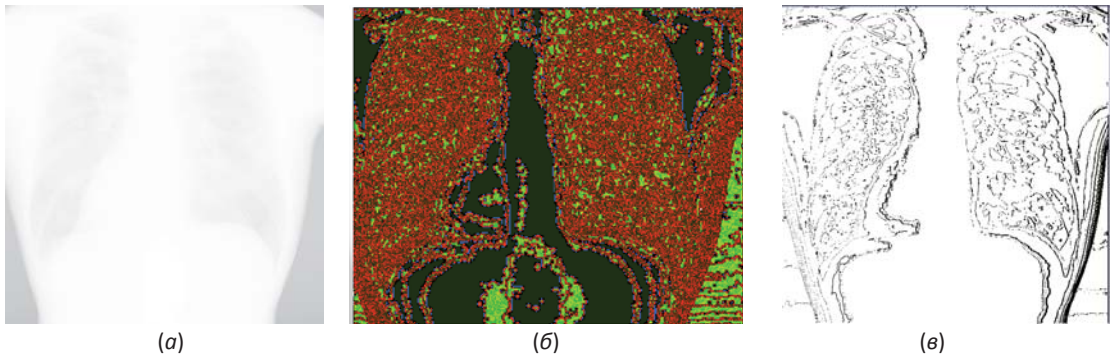
чае 8 битного кодирования, значения операции группируются в 8 групп, соответствующих единицам. Кроме такого подхода, часто имеет смысл использовать оценки фрактальной размерности, основанные на дисперсионном алгоритме [2, 3]. Такой подход более трудоемок, но оценки получаются непрерывными, и все моды эмпирических распределений соответствуют реальным подмножествам исходного изображения.

Для решения задачи выделения подозрительных областей на рентгеновских снимках нами была выбрана серия изображений со скоплениями кальцинатов. Зная характерный размер таких образований, удалось выявить их на фоне остальных элементов изображения. При фрактальной обработке масштабы  $K$  и  $M$  варьировались от 2 до 10. Соответственно получались различные срезы оценки  $D$  - рис. 11. Особенно отчетливо проявляется подозрительная область на рис 11,в.



**Рис. 11.** Изображения, полученные при различных значениях оценки фрактальной размерности  $D$  ( $D_1 > D_2 > D_3$ ):  
(а) - исходное рентгеновское изображение, (б) -  $D = D_1$ , (в)  $D = D_2$ , (г)  $D = D_3$

На рис. 12 представлены конечные результаты решения задач кластеризации изображения по значению оценки фрактальной размерности  $D$  и задач выделения контуров изображения.



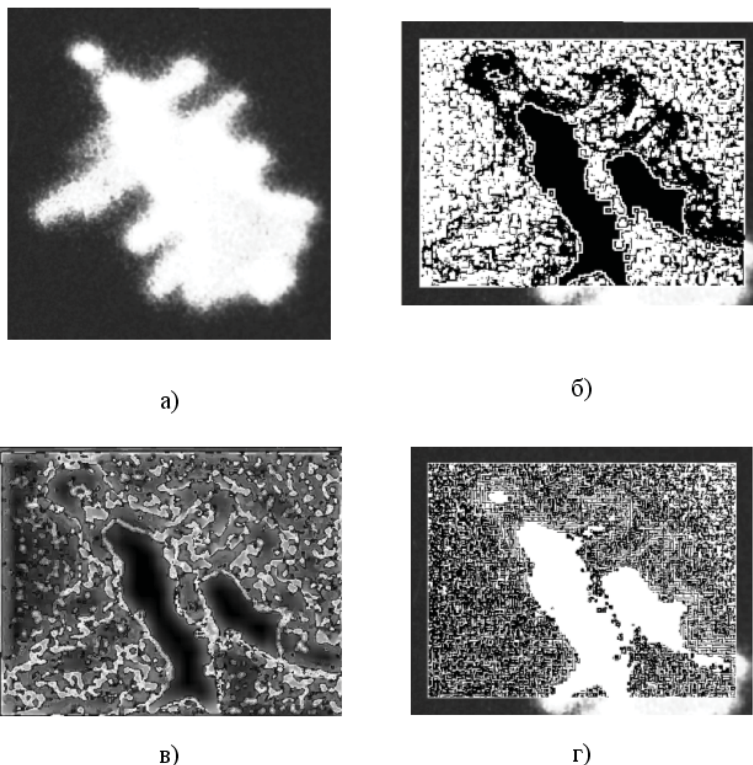
**Рис. 12.** Пример решения задачи кластеризации рентгеновского снимка грудной клетки (а) по значению оценки фрактальной размерности  $D$  (б) и выделение контуров изображения (в)

Результаты проведенной фрактальной обработки показывают надежное повышение качества обработанных медицинских изображений. Предлагаемые методы проверены авторами на различных реальных медицинских изображениях. Следует отметить, что использованные алгоритмы отличаются скромными вычислительными требованиями и высокой устойчивостью.

Алгоритмы фрактального распознавания образов основаны на использовании парадигмы «топология цели - ее фрактальная размерность» [1 - 3]. Методологической основой алгоритмов фрактального распознавания является отказ от топологических констант и описание классов целей на языке признаков в виде фрактальных размерностей или фрактальных сигнатур.

Высокая чувствительность оценки функционалов от нецелой размерности к наличию непрерывных контуров на изображениях позволяет говорить о больших потенциальных возможностях фрактальной фильтрации контуров объектов в помехах (рис. 13).

Фрактально-скейлинговые методы позволяют частично преодолевать априорную неопределенность в радиолокационных задачах с помощью информации о «топологии выборки» - одномерной или многомерной, т.е. в случае сигнала и изображения. При этом большое значение приобретают топологические особенности индивидуальной выборки, а не усредненные реализации, имеющие зачастую совершенно другой характер.



**Рис. 13.** Исходное изображение (с наземного телескопа) космического комплекса во время стыковки «Shuttle» - «Мир» (а) и результаты применения (б - г) фрактальной кластеризации при различных значениях фрактального порога  $D$  обнаружителя

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты являются исходным материалом для дальнейшего развития и обоснования практического применения разработанных методов в современных областях астрономии, радиофизики, радиотехники, электроники и информационно-управляющих систем.

Данные оригинальные методы позволяют увеличить дальность видимости и резкость изображений в плохих метеоусловиях и в водных средах примерно в два раза.

Следует отметить, что использованные алгоритмы отличаются скромными вычислительными требованиями и высокой устойчивостью.

Разработанные методы обработки одиночных кадров работают в режиме реального времени, а при наличии спецпроцессора время обработки можно повысить примерно на порядок.

В книгах [1, 3] подробно описана также идеология создания словаря фрактальных признаков на основе фрактальных примитивов. Было проведено сопоставление методов фрактального анализа с вейвлет - обработкой. Отмечено, что подобие во фрактальном анализе подразумевается гораздо шире.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Потапов А.А., Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Пахомов А.А., Герман В.А. Новейшие методы обработки изображений / Под ред. А.А. Потапова. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2008. (Монография - по гранту РФФИ № 07 - 07 - 07005).
- [2] Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. М.: Логос. 2002.
- [3] Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Университетская книга. 2005.

# THE GLOBAL FRACTAL METHOD, FRACTAL PARADIGM AND THE FRACTIONAL DERIVATIVES METHOD IN FUNDAMENTAL RADAR PROBLEMS AND DESIGNING OF REVOLUTIONARY RADIO SIGNALS DETECTORS

---

*Review of multiple results, which author obtained by using the theory of fractals and theory of fractional dimension considering the real signal and electromagnetic fields scaling effects are presented in the work. The researches are carried within fundamental science direction named "Fractal Radiophysics and Fractal Electronics: Developing a Fractal Radio-system" proposed by author and developed by him in Kotel'nikov IREE of RAS since 1980s.*

---

## INTRODUCTION

In base of modern fractal researches can be highlighted three main lines: fractal approach theoretical base development, building of research apparatus, corresponding it, and application of the fractal ideas and particular methods. In this paper all three lines are considered. First of all, the work actuality is due to urgent need for comprehension of fractality and chaos as a united whole process, forming the fractal paradigm in wide range of natural sciences and humanities, i. e. in the "fractal science" [1 - 12].

The work objective is to draw attention to methodological problems, arising at overall use of the global fractal method, created by me and existing method of fractional derivatives in natural science.

The "Method" term use in paper title denotes that work is not only about fractal theory and fractional-differential calculus as such, but moreover about their application in physics and radio-engineering, which is the most goal of author's scientific interests. In particular, our world priority in constructive methods of ultra-weak signals fractal detection, methods of multidimensional fractal detection, fractal systems and passive components synthesis is obvious and already don't require more clarifications. It is easy to see: it had not exist before my works and it appeared after. I believe that four examples (but I can much more) above is enough. My reasons justification contained in earlier monographs (e.g. see [1 - 12], it references and author's web-site: [www.potapov-fractal.com](http://www.potapov-fractal.com)). The report is reflects the progress reached in common fractal ideas development for the thirty years period of my work in the new science direction. Now my ideas and methods expansion is directed to almost all knowledge areas.

The fractality ideas developed by B. Mandelbrot (Nov. 20<sup>th</sup> 1924 - Oct. 14<sup>th</sup> 2010) about 40 years earlier now becomes the connecting link among mathematicians, physicists, chemists, engineers, geologists, biophysicists... The ideas widening unto including generalized statistics (not corresponding to the central limit theorem) and memory effects (hereditary) violates the markovian nature of first stages of a stochastic processes creates the rich instrument described complex systems.

A global fractal method finally and in full had presented by author in 2006, after their thirty-years development. Exaggerating a bit, it can be said that the fractals been like a thin amalgam in the huge frame of end of the XX Century science. The method of fractional integrals and derivatives is well known and works fine. The family of differential equations is enriching; the gaps between equations of integral order is tightly filling by real (non integral) order equations; becomes possible continuous transition between parabolic, hyperbolic and elliptic equation types in partial derivatives. Existing of fractional time derivative in equations interpreted as reflection of memory/hereditary or non-markov property of stochastic process. Fractional spatial coordinates derivatives reflects the self-similarly inhomogeneous of a fractal structure or fractal environment where a process is developing.

---

<sup>1</sup> Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Moscow, Russia

## FRactal sets and fractal signatures classification

In modern situation all the attempts to belittle their meaning and to reckoning only on the classical knowledge is endures the intellectual fiasco. In his works, author is relying on own fractal description - Fig. 1. The description endorsed by B. Mandelbrot at New York in 2005. Now it used by all.

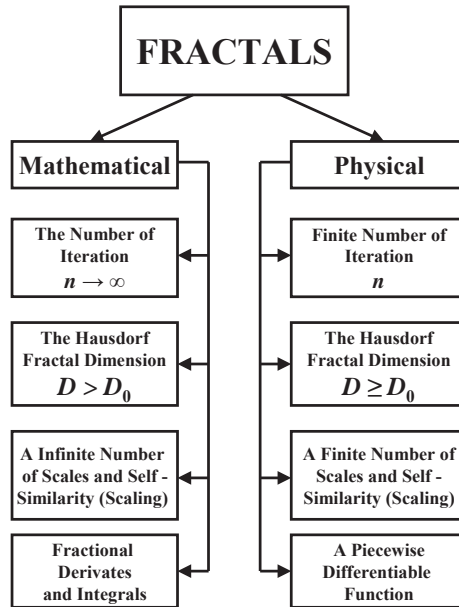


Fig. 1. Fractal sets and fractal signatures classification and morphology

## THE NEW INFORMATION TECHNOLOGIES

In the fractal researches we're basing on three global theses: 1. - Non-Gaussian distorted information processing in fractional dimension space with using scaling and stable non-Gaussian probability distribution (1981). 2. - Using of continuous undifferentiated functions (1990). 3. - Fractal radio systems (2005) - Fig. 2 [1 - 13].

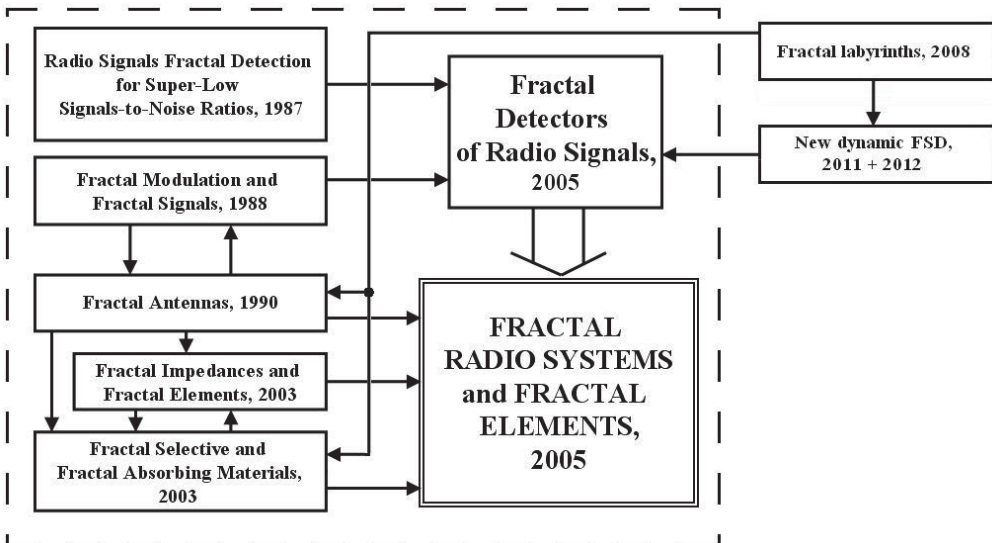


Fig. 2. Author conception of fractal radio systems and devices

Union of specified problem triad in common “fractal analysis and synthesis” therefore creates base of global fractal-scaling method (2006) and fractal paradigm (2011).

The work obtained in Kotel’nikov IREE of RAS by author and his apprentices is based on the fundamental theoretical and experimental results in scheduled introduction of the fractals, fractional integration-differentiation and the scaling effects in radio physics, radio engineering, radiolocation and some contiguous scientific directions (Fig. 3).

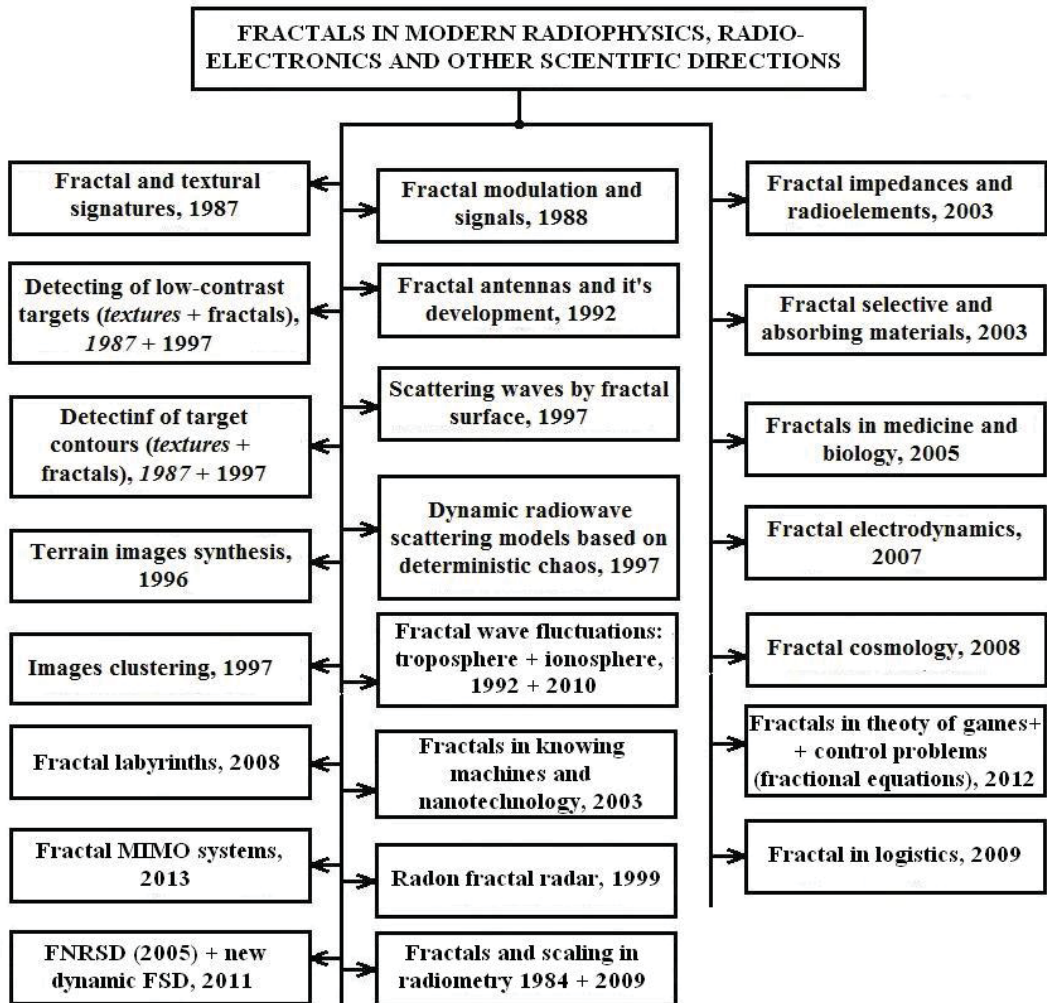


Fig. 3. Sketch of author’s development of new information technologies based on fractals, fractional operators and scaling effects

Physic mathematical problems of the fractals theory and fractional measuring are represented in monographs [1 - 5] in detail. The author and his subordinate research group perform all the investigations exceptionally in the framework of the new fundamental interdisciplinary project in IREE RAS which is briefly called as “Fractal radio physics and fractal radio electronics: Fractal radio systems designing”. The main principles of this course are investigated by the author in IRE RAS as noted earlier since the eighties of XX century. In the beginning this work concerned the super weak radio signals and images filtering for the non-Gaussian interference. Then it became clear that such a “fractal” approach was useful for other problems.

It is natural for such “fractal” approach to focus attention on description and processing of radio phys-

ics signals (fields) exceptionally in fractional measuring space using hypothesis of scaling and distributions with “heavy tails” (stable distributions). Note that scale transformations and scaling effects are widespread in present physics when relationships between different thermodynamics values in renormgroup phase transition theory are established. Fractals belong to sets which have extremely branched and irregular structure.

**FRACTAL PROCESSING OF UNIVARIATE AND MULTIVARIATE SIGNALS FOR LOW SIGNAL- TO-NOISE RATIO**

We start with works that for the first time revealed one of fundamental application of fractal theory - processing of one-dimensional and multi-dimensional signals for low ratios of signal-to-noise  $q_0^2$  (Fig. 4). Full description of the signals and fields up-to-date processing processes is impossible using classical mathematics formulas [1 - 5].

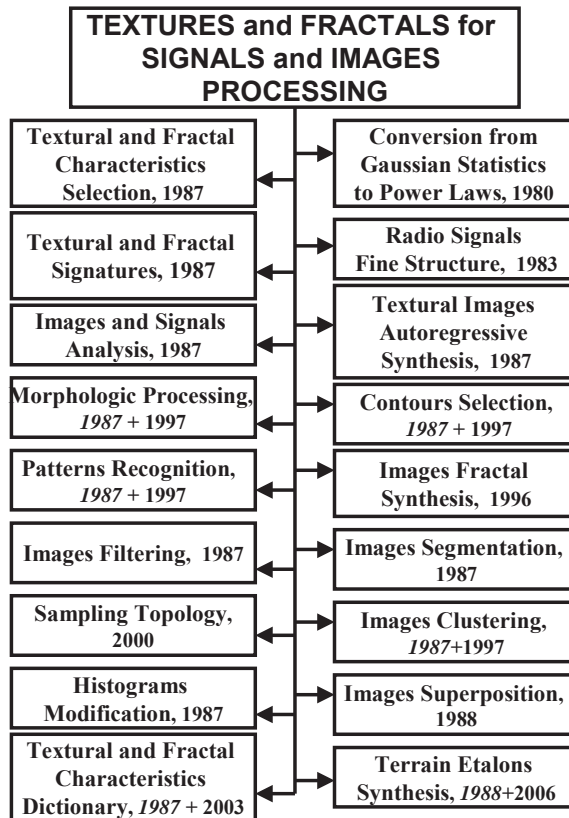


Fig. 4. Textural and fractal methods of processing of low-contrast images and poop signals in non-Gaussian interferences

Fractal numerical methods that are being worked up allow us to overcome partly a priori uncertainty in radar problems using information about geometry (topology) of sampling - one-dimensional or multi-dimensional [1 - 5]. At that topological features of individual sampling take on special significance rather than averaged realizations that often have absolutely different behavior.

Characteristics of classical and original measuring methods for fractal dimension  $D$ , fractal signatures and respective fractal cepstrums of one-dimensional and multi-dimensional, which are being used in IREE RAS and which are experimentally examined, are presented in [1 - 5, 7, 14 - 20].

Examples of its wide application for problems of processing, analysis and recognition of super-poor signals and low-contrast patterns are shown.

## THE SIGNIFICANCE OF PROBABILITY DISTRIBUTION WITH HEAVY TAILS

The fractal methods make it possible to overcome a priori ambiguity in radar problems with the use of information on the geometry (topology) of a 1D or multidimensional sample [1 - 20]. In this situation, the topological features of an individual sample, rather than averaged realizations, which often have an absolutely different character, are of substantial importance. It turns out that the concepts of fractal signatures and fractal spectra are very helpful for measurements. For example, these concepts are effectively applied to solve problems of detection of low-contrast targets and weak signals in the presence of intense non-Gaussian (!) interference. The methods of fractal processing should take into account the scaling effect of real radio signals and electromagnetic fields.

The introduction of a fractional measure and scaling invariants necessitates the predominant use of power-series probabilistic distributions. These distributions result from feedback that amplifies events. Note that, for distributions with heavy tails, sample means are unstable and carry little information because the law of large numbers cannot be applied in this situation. Power-series distributions are a specific feature of complicity. Let us briefly discuss the results of investigations of experimental probabilistic distributions of the instantaneous fractal dimension of radio physical processes. Fig. 5 shows the general view of distributions with fractal dimension  $D$ .

In all without exception experiments steady work offered by authors fractal algorithms is confirmed at small relations signal / noise (SNR)  $q_0^2$  even at supervision useful fractal objects on a background pre-venting fractal formations with other values. All this allows speaking about real opportunities of designing fractal nonparametric detector radar signals.

At fractal processing of realizations of signals in noise it is shown, that at the relations a SNR  $q_0^2 = +10$  dB we precisely measure statistics of a signal. With reduction of value aside negative values (for example,  $q_0^2 = -3$  dB) there is a displacement of a maximum final fractal distributions aside values fractal dimensions of noise or a handicap. Thus always in a vicinity of value fractal dimensions of a useful component there is "a heavy tail" fractal distribution, reaching stable size, about 20 %. The given tendency is kept and at much smaller values, equal SNR -10 dB and -20 dB, as shown in Fig. 5.

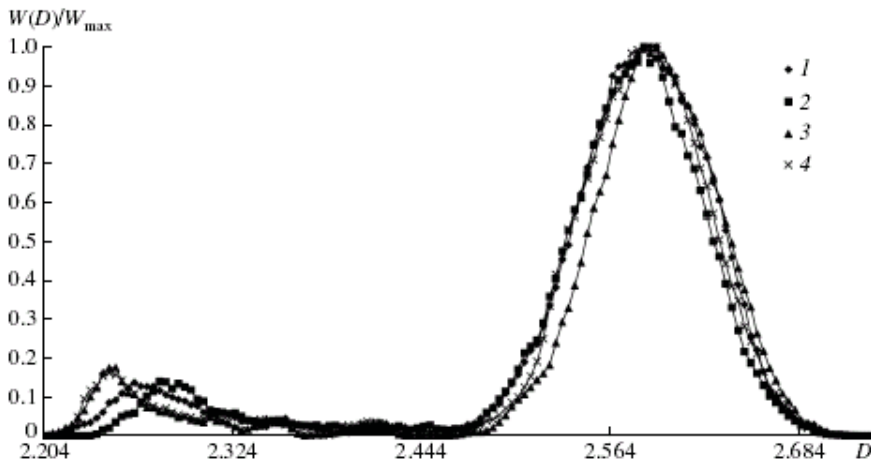


Fig. 5. Empirical fractal distributions with heavy tails for images observed in the presence of an intense Gaussian noise: (1 and 3) scene A, (2 and 4) scene B, (1 and 2)  $q_0^2 = -10$  dB, and (3 and 4)  $q_0^2 = -20$  dB

## APPLICATIONS OF FRACTAL PROCESSING

Fig. 6 - 11 show selected results of fractal nonparametric filtering of low-contrast objects. Aircraft images were masked by an additive Gaussian noise. In this case, the SNR ratio was -3 dB. It is seen in the figures that all desired information is hidden  $q_0^2$  in the noise. The optimum mode of filtering of necessary



contours or objects is chosen by the operator using the spatial distribution of fractal dimensions  $D$  of a scene. This distribution is determined automatically and is shown in the right panel of the computer display [1 - 3, 5, 7, 8, 10, 14 - 17].

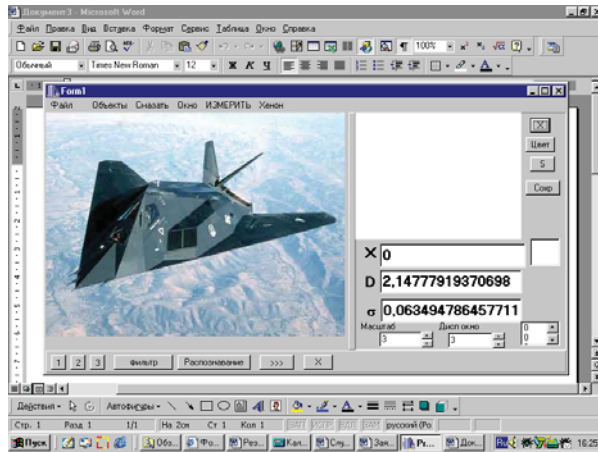


Fig. 6. Source image

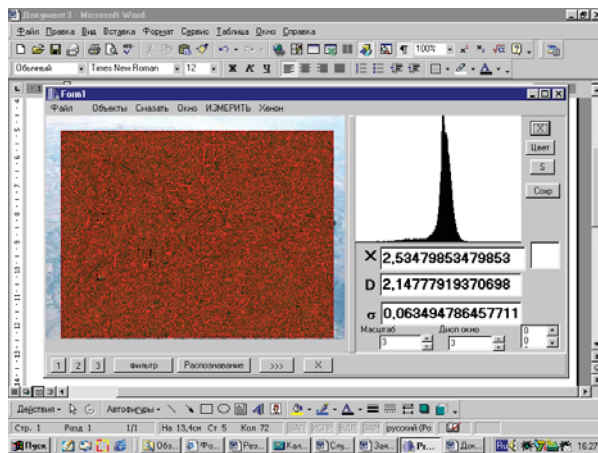


Fig. 7. Source image and noise SNR ratio was -3 dB

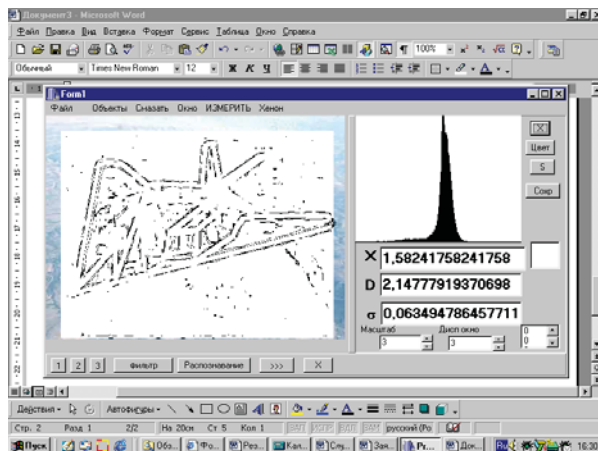
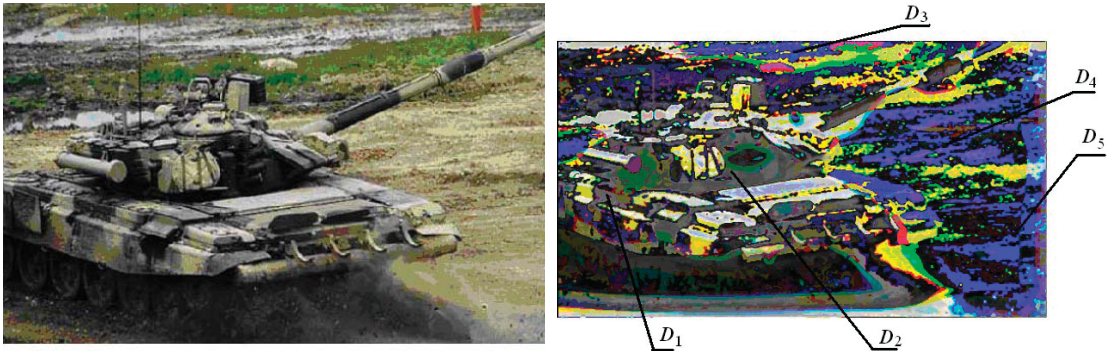


Fig. 8. Results of fractal filtration image on Fig. 7



**Fig. 9.** Fractal segmentation of the image of a determined object (tank) against the background of the locality:  
on the left - source image, on the right - fractal portrait

The possibility of efficient clustering of homogenous expanded connected domains using fractal filtering was experimentally proved. For example, Fig. 10 demonstrates the results of fractal analysis of X-ray tomograms from the Institute of applied physics of the NAS, Belarus.



**Fig. 10.** Results of fractal filtering of tomograms of the lower part of the human head

The initial tomography image is given on the left in Fig. 10. Tomograms were reconstructed with different values of the fractal dimension  $D$  which was distinguished by the paretian; namely  $D^{(1)}$ ,  $D^{(2)} \neq D^{(1)}$  and  $D^{(3)} \neq D^{(2)} \neq D^{(1)}$ . Acquired data explicitly demonstrate various clusters invisible in the initial image. Images of the lower part of the human head including a lot of contrast details as well as images of the upper part of the head with low-contrast images of brain cuts were exposed to fractal processing.

Possibilities of application of fractal analysis in medical diagnostics of skin diseases are illustrated by data in Fig. 11.

This concept can be widely applied to solve modern problems of radar, correlation-extremely navigation, artificial intelligence, and dynamic systems. The algorithms developed by the authors for calculating fractal signatures are efficient over an extremely wide range of physical sizes of characteristic image details and provide detection estimation for scaling effects, including even those masked by noise.

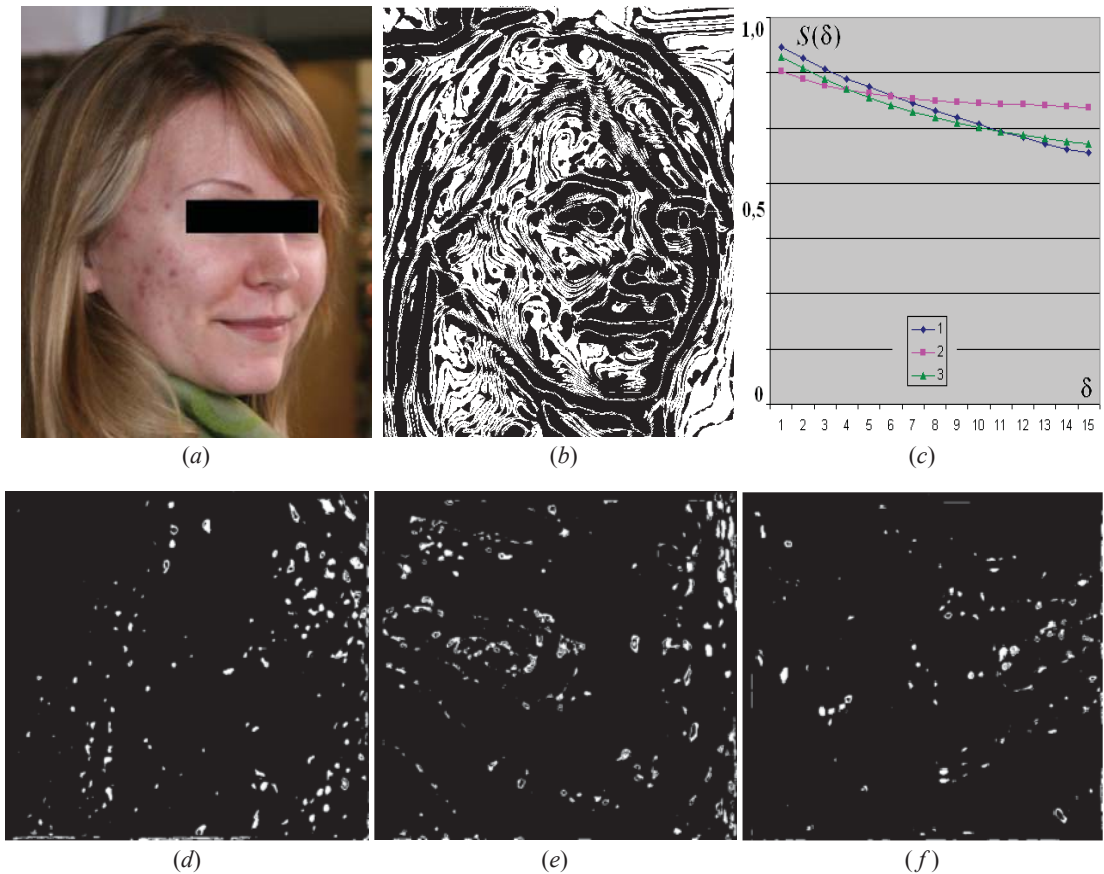


Fig. 11. Patient's photo (a), fractal portrait (b), fractal signature (c), sections of the field of fractal dimensions (d, e, f)

## NEW KINDS OF DYNAMICAL FRACTAL DETECTORS AND THEIR SYNTHESIS

As examples of effective operation of the global fractal methodology and concept of radiosystems and devices, created by author, the series of principally *new fractal signal detectors* not mentioned by me in printing (except Voronezh radiolocation conference, Apr. 2013) is shown below. The paper is first of the world publication about it (lists with notes and pictures is amounted the notebook in my archive: "The future of radiolocation and radio systems", 2011 - 2013).

The improvement of classical signal detectors and their mathematical support in substance reaches the saturation and limit. It causes to search a principally new ways of solve the problem. Note that all the modern radio engineering based on classical integral dimension theory and integral calculus. Therefore, historically the area of mathematical analysis, named fractional calculus, works with the derivatives and integrals of any (real or complex) and all the fractal theory becomes "overboard".

Principally, fractals and fractional operators is not possible one without the other. We first showed that fractal processing is suitable as well as possible for solving of the low-contrast images identification and ultra weak signal detection in intense non-Gaussian noises modern problems, when modern radars can not operate. One of our main conclusions is that work on the pointed evaluation of the fractal dimension  $D$  is lead to absurd results. At the same time almost all the authors beginning use of fractal signal processing gives absolutely accurate meanings moreover with the RMS deviation! In our works we introduced fractal signatures and fractal keppers. Therefore the accuracy problem in digital fractal processing in real-time mode are solved.

The main principles of fractal detection first proposed by us in works with Central Design Bureau (CDB) "Almaz" still in 1989 and able to work fractal non-parametric radiolocation signals detector (FNRSD - Fig. 3) model obtaining are achieved (also first of the world) in 2004-2005. Detector отмечен high accuracy observed. The main kinds of FSD proposed by us during 2011-2012 are shown at Fig. 12.

All the FSD are forming two classes: a non-coherent (FND) and a coherent (FCD). It followed by single-frequency (FSFD - single operating frequency generator), multi-frequency (FMD - several operating frequency generator) and also directly scaling fractal detector (FScD).

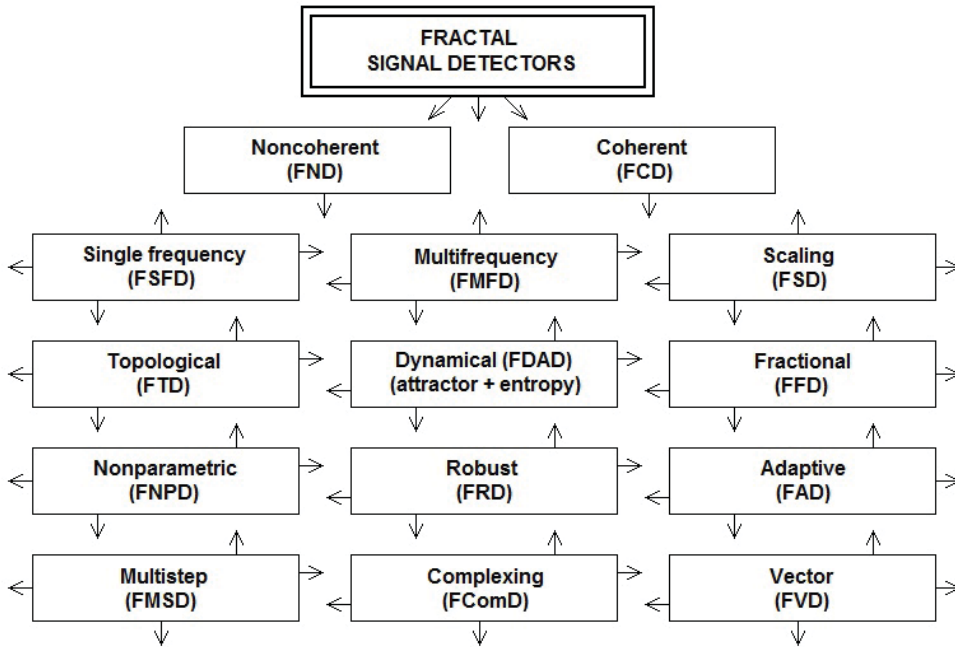


Fig. 12. The main kinds of new dynamical fractal signal detectors (FSD) proposed by author

Operability of the FScD successfully tested by us in practice for acoustic signal detecting and direction-finding on the forest background. Their high efficiency is shown in high background noises, where classic correlation-spectrum analysis don't give the right results in real-time mode. Fractal topological detector (FTD): interpreting the space of received signals as a topologically linked structure with fractional dimension (situation - "fractal labyrinth") we can detect channels with hypothesis  $H_0$  and  $H_1$ , detect them explicitly and then detect them. Fractal labyrinth it is the new mathematical physics and nanotechnology object. The fractal dynamical detector (FDAD) excepting the fractals used the dynamical chaos characteristics. In received signal samples phase plane there is the strange attractor reconstruction. Then its characteristics including Lyapunov indexes, predicting interval and Kolmogorov entropy are calculated. In practice FDAD is successfully tested in the vegetal cover conditions. In the FDAD algorithms use of Renyi, Howard-Charvat-Daroshi, Ratier-Kannappan, Sharm -Mittal, Kulbak-Leiber statistic measures of entropy and difference information are possible. The fractal fractional detector (FFD) fully used the fractional order integration-differentiation.

In adaptive problem a parameters and/or system structure changes according to external conditions. In the paper fractal adaptive detector (FAD) is considered. Such non-linear fractal filtering adaptation in aprioristic uncertainty conditions is provided in particular by current  $N$ . Hurst index evaluation. Parametric and non-parametric detectors are reciprocally complement each other and corresponding to different limitations of aprioristic information. Non-parametric algorithms do not uses observing values meanings, but they uses the values some ordering degree. They have almost fixed false detecting probability at arbitrary sample distribution law. For non-parametric aprioristic indeterminacy cases we

introduced the fractal non-parametric detector (FNPD). Such detector example is FNRSD. All the main researches implemented in 2004-2005. Serial combine of parametric and non-parametric FSD and unite of classical and fractal algorithms is possible. Robust detectors (FRD) takes transitional place between parametric and non-parametric detectors. In the presence of training sample it is possible to build the adaptive-robust detector. In the case, the combination of FNPD, FNRSD, FAD is stable. The fractal multistage detector (FMSD) developed for problems including every  $n$  step hypothesis acceptance with submitting or changing of accepted decision on next observation steps. In practice at first step it accept three possible decisions, at second stage - one of two. The fractal vectorial or multichannel detector (FVD) corresponding to multiposition radiolocation. Also the Radon transform in radiolocation considered (1999).

Complexing the information processing systems was thoroughly studied by us at the eighties and nineties of the XX century for millimeter-length and optical waves. The fractal complexed detector (FcomD) uses combinations with classical detectors and based on FNRSD or docking FNORS with out of operating radio locator. It is shown by us that in this case probability of right detection increases.

### **THE PERSPECTIVE AND FUNDAMENTAL DIRECTIONS OF "FRACTAL" RESEARCHES**

Lower, we, basing on our works (see author site - <http://www.potapov-fractal.com>) will try to take the common vision of most perspective and fundamental directions of "*fractal*" researches:

1. Research of possibility of texture (spatial and spectral) fractal and entropy attributes for radiolocation detecting problems.
2. Synthesis of new models of radiolocation signals scattering by land cover based on theory of deterministic chaos, strange attractors and fractal probabilistic distributions - stable distributions.
3. Research of wave phenomena (propagation and scattering waves, diffusion processes) at fractal anisotropic environments based on fractional integration-differentiation. Further development in fractal electrodynamics.
4. Model synthesis of radiolocation and telecommunication systems channels, based on spatial fractal generalized correlators and fractal frequency functions of coherency.
5. Research of possibilities of detecting form or contour of targets by using fractal, texture and entropy attributes. Work with singularities of input functions.
6. Research of potential possibilities and limitations of fractal methods of radiolocation and communication signal processing, including fractal modulation and demodulation, fractal coding and compressing of information, fractal image synthesis and fractal filters. Transition of fractal radiosystems.
7. Research of adaptive spatiotemporal signal processing based on fractional dimension and fractional operators.
8. Search and investigation of new combined methods of low-contrast targets classes detecting and identification at intensive non-Gaussian noises.
9. Research of possibilities of creating a new environments for information transferring, multiple ranges fractal absorbing materials, constructing of fractal antennas and fractal frequency-selective surfaces and volumes. Further development of theory and technologies of fractal impedances.
10. Synthesis the new classes of fractals and multi-fractals with generalization of set dimension concept.
11. Investigation the kind or topology of one-dimensional (multidimensional) signal sample for problems, such as artificial intelligence in order to creation of dictionaries of fractal attributes based on fractal primitives, the elements of fractal language with fractal grammar, i. e. investigation of problem named "*dimensional sclerosis*" of physical signals and signatures. This concepts introduced

by author, involves researches of topological peculiarities of each concrete individual sample, but not average realizations, often having other character.

12. Forecast of roughness forming mechanisms and characteristics in order to managing the microrelief geometrical parameters for obtaining specified physical and chemical, and operating properties of devices with modern nonequilibrium technologies of processing it's surface layer. Fractals in nanotechnologies. (At 2008 author proposed the new concept, namely "Scaling in rough fractal layer and nanotechnologies").
13. Development of *fractal non-inertial relativistic radiolocation* in curved time-space of connected structures, i. e. *fractal geometry of time-space* of determined structures. Presently, in USA this fundamental scientific direction been called as "Fractal Cosmology".

Two of my large works with co-authors there are in list of publications (arXiv: Cornell University, USA) on this direction: - {See also our works: **Podosenov S. A., Foukzon J., Potapov A.A.** Pulse electro-dynamics of wideband radiosystems and connected structures fields / Ed. *Potapov A. A.* "Radiotekhnika", Moscow, 2003. 720 pp.; **Podosenov S. A., Foukzon J., Potapov A.A.** A Study of the Motion of a Relativistic Continuous Medium // *Gravitation and Cosmology*. 2010. V. 16, № 4. P. 307 - 312; **Foukzon J., Podosenov S.A., Potapov A.A.** Relativistic Length Expansion in General Accelerated System Revisited // <http://arxiv.org/abs/0910.2298v1>.- arXiv: 0910.2298.- (General Physics), 13 October 2009, Cornell University, USA. 2009.- 11 pp.; **Foukzon J., Podosenov S.A., Potapov A.A., Menkova E.** Bi-metric Theory of Gravitational-Inertial Field in Riemannian and in Finsler-Lagrange Approximation // <http://arxiv.org/abs/1007.3290>.- (General Physics), 9 Oct. 2010.- 95 pp.; **Foukzon J., Potapov A.A., Podosenov S.A.** Hausdorff-Colombeau measure and axiomatic quantum field theory in spacetime with negative B. Mandelbrot dimensions // <http://arxiv.org/abs/1004.0451>, 5 Feb. 2011. 206 pp.; **Foukzon J., Potapov A.A., Podosenov S.A.** Exact quasiclassical asymptotics beyond Maslov canonical operator // <http://arxiv.org/abs/1110.0098>, 4 Oct. 2011. 162 pp.; **Foukzon J., Potapov A.A., Podosenov S.A., Men'kova E.R.** Detecting Fractal Dimensions Via Primordial Gravitational Wave Astronomy // <http://www.scribd.com/doc/58496226/Detecting-Fractal-Dimensions-via-Primordial-Gravitational-Wave-Astronomy-Fractal-Cosmology> 74 pp.; **Podosenov S.A., Foukzon J., Potapov A.A.** Electro-dynamics of a Continuous Medium in a System with Specified Structure // *Physics of Wave Phenomena*, 2012. V. 20, № 2. P. 143 - 157; **Foukzon J. and Potapov A. A.** Homing Missile Guidance Law with Imperfect Measurements and Imperfect Information about the System, 2012. <http://arxiv.org/abs/1210.2933>. 58 pp.; **Foukzon J., Potapov A.A., Podosenov S.A., Men'kova E.R.** Detecting Fractal Dimensions Via Primordial Gravitational Wave Astronomy // <http://vixra:1304,0095> submitted on 2013-04-20. 2013. 74 pp. ; **Podosenov S.A., Potapov A.A., Foukzon J., Men'kova E.R.** Geometry of Noninertial Bases in Relativistic Mechanics of Continua and Bell's Problem Solution // <http://vixra:1308,0108> submitted on 2013-08-20. 2013. 13 pp.}.

## FROM FRACTAL RESEARCHES TO HIGH TECHNOLOGIES AND PRACTICE

Careful bibliographic search shows our full and absolutely priority in all "fractal" directions (Fig. 2 and Fig. 3) in USSR and Russia, no less than in world science. There is serious acknowledgement:

- At book [21, p. 41] in subsection "Radar systems" of section "Information Technology and Computing Systems" given following text: "Created reference dictionary of fractal attributes of optical and RF images, necessary for realization of essentially new fractal methods of radiolocation information processing and creation highly informative devices for detection and recognition of weak signals in intensive non-Gaussian noise. Established, that for effective solving of radiolocation problems and multi-dimensional signals fractal detectors design, fractional dimension, fractal signatures and cepstrums and, also, texture signatures of area backgrounds has significant importance" (IREE of RAS) - 2007, published at 2008.
- At book [22, p. 24] in subsection "Radar systems. Geoinformational technologies and systems",

section “Nanotechnology and Information Technology” given following text: “For the first time in world practice proposed and experimentally proven constructing principles of fractal adaptive radiosystems and fractal radioelements for modern radio-engineering and radiolocation problems. Operation principle of these systems and elements is based on introduction of radiating and received signals fractional transform in non-integer dimension space, considering it’s scaling effects and non-Gaussian statistics. This achievements allows a new level of real non-Markov’s signals and fields informational structure” (IREE of RAS) - 2009, published at 2010.

- At book [23, p. 199] and book [24, p. 242] in subsection “Radar systems. Geoinformational technologies and systems”, section “Informatics and Information Technology” given following text: “Basing on fractal analysis performed systematic research of fractal antennas electro-dynamics properties. Confirmed wideband and multi-range properties of fractal antennas and resonances quantity dependence on fractal iteration number. Shown, that, basing on miniature fractal antennas, possible effective realization of frequency-selective environments and shields, deforming radiolocation target image. Investigated fractal frequency-selective 3D-environments or fractal “sandwiches” (engineered radio-electronic micro- and nanoconstructions)” (IREE of RAS) - 2011, published at 2012.
- At book [25, p. 195] in subsection “Component base of microelectronics, nanoelectronics and quantum computers. Materials for micro- and nano-electronics. Nano- and microsystem technics. Solid-state electronics.” of section “Nanotechnology and information technology” given following text: “It is established that in physical base of memristor operation there is integral quantum Hall effect. The voltage to current relations for any memristor type are obtained. The results are directed to practical realization of memristors as new elements of electronic schematics” (SRI AMA KBSC of RAS, IREE of RAS” - 2012, published in 2013.

## CONCLUSION

As result of lecturing on the fractal technologies developed by author in IREE RAS and reports on ISTC project in USA (Washington, New-York, Huntsville, Atlanta, Franklin) in 2000 and 2005 American specialists wrote in official letter for Director of IREE RAS academician Yu.V. Gulyaev in December of 2005 : “...Dr. A. Potapov has successfully presented several seminars in the Center for Space Plasma and Aeronomomic Research (CSPAR) at the University of Alabama in Hunstville. The seminars were of essential interests and confirmed high scientific credentials of Dr. A. Potapov. RADAR technologies presented by Dr. Potapov are novel and based on the fractal theory. Their importance for the international community of specialists and scientists is undeniable”. At the same time (December of 2005) scientific meeting of author and fractal geometry founder B. Mandelbrot [8].

Fractal theory formation - striking example of new science investigation line that is based equally on both progress in abstract mathematics areas and on a new view on a long known empiric material which could not be interpreted and described scientifically before the valid models appear. Fractal theory application allows us to discover a great deal of previously unused reserves and to apply it in different technical applications field.

Fundamental steps consisted in transfer of integer measuring signals received by radio system into fractional measuring space using scaling relations, allow to introduce absolutely new conceptions and approaches in conventional fields of the classical radio physics and radio electronics and to obtain sufficiently unexpected for practice but physically validated results on the basis of these conceptions.

Author approach isn’t disproof values of existing theories and nor pretend to superiority relatively it’s and alien to ambitions of “exhaustive” explanation. Fundamental meaning of proposed by me “fractal paradigm” consists in possibility to a new and sharper look to a Nature and Human. Existing observations may be reevaluated and previous conclusions supplemented and reformulated. At the same time, opens fundamentally new methodological perspectives. We begin see principally new World: former objects are reinterpreting, but in fact it’s are transfigurations. Summarizing this work, I decided to say,

that scientific knowledge of *fractal conception* may pretend on large theory status in science context. For further researches this conceptualization opens inspiring perspectives of fractal naturalism. Result: in science must be introduced the “*fractal*” dimension, and not in auxiliary role, but as fundamental explanatory fact.

## REFERENCES

- [1] Potapov A.A. Fractals in Radiophysics and Radiolocation. M.: Logos. 2002.
- [2] Potapov A.A.. Fractals in Radiophysics and Radiolocation: The Sample Topology. 2<sup>nd</sup> edition, revised and augmented. M.: Universitetskaya kniga. 2005.
- [3] Potapov A.A., Gulyaev Yu.V., Nikitov S.A., Pakhomov A.A., German V.A. The Newest Methods of Signal Processing / Ed. by A.A. Potapov. M.: FIZMATLIT. 2008.
- [4] Potapov A.A. The Fractal Method and Fractal Paradigm in Modern Natural Science. Voronezh: IPC “Nauchnaya kniga”. 2012.
- [5] Potapov A.A. Fractals, Scaling and Fractional Operators in Information Processing (Moscow Scientific School of the Fractal Methods in Kotel’nikov IREE of RAS, 1981 - 2011) // Works Coll. “Irreversible Processes in Nature and Technology”. M.: Bauman MSTU and Lebedev Physical institution of RAS. 2012. Issue IV. P. 5-121.
- [6] Podosenov S.A., Potapov A.A., and Sokolov A.A. Pulsed Electrodynamics of Broadband Radio Systems and Fields of Coupled Structures / Ed. A.A. Potapov. M.: Radiotekhnika. 2003.
- [7] Potapov A.A. The Textures, Fractal, Scaling Effects and Fractional Operators as a Basis of New Methods of Information Processing and Fractal Radio Systems Designing // Proc. SPIE. Vol. 7374. 2009. P. 73740E-1 - 73740E-14 ([http://spie.org/x648.html?product\\_id=829032](http://spie.org/x648.html?product_id=829032)).
- [8] Potapov A.A. Fractals and Chaos as a Base of New Breakthrough Technologies in Modern Radio Systems. In: Crownover R.M. Introduction to Fractals and Chaos. M.: Tekhnosfera. 2006. P. 374-479.
- [9] Potapov A.A., Gil’mutdinov A.Kh., Ushakov P.A. Fractal Elements and Radio Systems: Physical Aspects / Ed. by A. A. Potapov. M.: Radiotekhnika. 2009.
- [10] Potapov A.A. Application of the Fractal Theory and Scaling Effects During Processing of Low-Contrast Images and Super Weak Signals in the Presence of Intensive Noise.- Abstracts Int. Conf. “Zababakhin Scientific Talks”, devoted to E.I. Zababakhin’s 95-th anniversary, Snezhinsk, Russia, RFNC-VNIITF. 2012. P. 311-312.
- [11] Potapov A.A. Fractal Method, Fractal Paradigm and Fractional Derivatives Method in Natural Science. Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod. Series Mathematical Modeling. Optimal Control. № 5(2). P. 172-180.
- [12] Potapov A.A. The Global Fractal Method and the Fractal Paradigm in Fundamental Radar Problems.- Book of Abstracts Int. Conf. “Dynamics, Bifurcations and Strange Attractors” Dedicated to the Memory of L.P. Shil’nikov (1934 - 2011). Nizhni Novgorod: Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, 2013. P. 98.
- [13] Potapov A.A. Can we Build an Adaptive Fractal Radio System?- Proc. PIERS 2009 in Moscow “Progress in Electromagnetics Research Symp.”, Moscow, Russia. Cambridge, MA: Electromagnetics Academy, 2009. P. 1798-1802.
- [14] Potapov A.A., German V.A. Detection of Artificial Objects with Fractal Signatures. Pattern Recognition and Image Analysis. V. 8. № 2. 1998. P. 226-229.
- [15] Potapov A.A., German V.A. Fractal Method of Detection of Weak Signals from Complex Images.- Book of abstracts Second Int. Conf. “Modern Trends in Computational Physics”, Dubna, Russia. Dubna: JINR. 2000. P. 132.
- [16] Potapov A.A., German V.A. Fractals, Fractal Target Selection and Fractal Antennas.- Proc. 1<sup>st</sup> Int. Workshop on Mathematical Modeling of Physical Processes in Inhomogeneous Media, Mexico, Guanajuato. Guanajuato. 2001. P. 44-46.
- [17] Potapov A.A. On the Fractal Radio Physics and Fractal Radio Electronics.- Proc. Jubilee Sci.-Tech. Conf. Dedicated to the 60th Birthday of OAO Radiotekhnicheskii Inst. im. A.L. Mintsa and Faculty of Aircraft Electronics, Moscow Aviation Inst. “Innovation in Radio Engineering Information - Telecommunication Technologies”, Moscow, Russia. M.: CJS Comp. “Extra Print”. Pt. 1. 2006. P. 66-84.
- [18] Potapov A.A. New Information Radiophysical Technologies Fractal in Radiolocation: Fractal and Synergetic.- Proc. of 28<sup>th</sup> ESA Antenna Workshop on pace Antenna Systems and Technologies, Noordwijk, The Netherlands. Noordwijk: ESTEC. Pt. 2. 2005. P. 1047-1050.
- [19] Potapov A.A. Fractional Operators and Fractals for Non-Linear Radio Physics Problems.- Abstracts 3<sup>rd</sup> IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications FDA’08, Turkey, Ankara. Ankara: Cankaya University. 2008. 55. Proc. pdf. 5 pp.
- [20] Potapov A.A. Fractals and Fractal Operators for Non-Linear Radio Physics Problems: Fractal Radio Systems Designing.- Book of Abstracts 2nd Int. Conf. (CHAOS’ 2009) on Chaotic Modeling, Simulation and Applications, Chania, Crete, Greece. Chania: National and Kapodistrian University, 2009. P. 61.
- [21] Progress Report of Presidium of the Russian Academy of Sciences. Scientific achievements of the Russian Academy of Sciences in 2007. Moscow: Nauka, 2008.



- [22] Progress Report of Presidium of the Russian Academy of Sciences. Scientific achievements of the Russian Academy of Sciences in 2009. Moscow: Nauka, 2010.
- [23] Progress Report of Presidium of the Russian Academy of Sciences. Scientific achievements of the Russian Academy of Sciences in 2011. Moscow: Nauka, 2012.
- [24] Report to Government of Russian Federation. About 2011 Year Results of Realization of the Fundamental Scientific Researches of State Scientific Academies in 2008 - 2012 Years. In three volumes. Moscow: Nauka, 2012.
- [25] Progress report of Presidium of the Russian Academy of Sciences. Scientific achievements of Russian Academy of Sciences in 2012. Moscow: Nauka, 2013.

## FRactal Labyrinth as Small Antennas Development Base

### ФРАКТАЛЬНЫЕ ЛАБИРИНТЫ В КАК ОСНОВА МОДЕЛИРОВАНИЯ МАЛЫХ АНТЕНН

---

*Fractal labyrinth concept is introduced in this paper. Original method is suggested for small UHF antennas development. The method based on idea about fractal labyrinth is described and its software realization is presented. Some illustrations are given to estimate obtained simulation results of new generation of fractal antennas. An idea about genetic algorithms application is presented.*

---

#### ВВЕДЕНИЕ

Самые общие и глобальные принципы и закономерности природы часто повторяются и в отдельных малых ее частях. Или наоборот: каждый частный случай дает хотя и приближенное представление о целом, но отражает суть и принцип его образования. Примеров тому очень много - растрескивание земли, образование рыбьих стай, работа систем сбора информации, административное разделение государств и т. д.

Среди технических примеров можно отметить форму радиоантенн, которая представляя собой самоподобный излом линии вибратора, способна эффективнее соразмерных аналогов принимать сигнал. Такие антенны называются фрактальными [1] и широко применяются сейчас в средствах связи массового потребления. Другой пример - «фрактальный конденсатор», за счет фрактальной структуры (схемы замещения) имеет уникальные электротехнические свойства.

Существует много как хорошо - так и малоизвестных фрактальных кривых, где одним из главных свойств является - фрактальная размерность. Математический плоский фрактал нигде не плотен, но когда речь идет о физическом фрактале, количество итераций и каждый геометрический размер которого конечны, размерность фрактала становится пропорциональна коэффициенту заполнения им пространства. В свою очередь, размерность кривой зависит исключительно от формы образующего ее элемента, и не всякий фрактал может эффективно заполнить выделенную область.

В природе процесс может происходить многократно и фрактальных кривых в отдельно взятой прямоугольной области может быть много, как не связанных, так и ветвящихся. В этом свете стали интересны в частности структуры Л. Кристи [2], когда автор рассматривает структуры, называемые им «лабиринтными фракталами». Они основаны на двумерном прямоугольном скейлинге: заданная прямоугольная область разбивается на ячейки ( $4 \times 4$ ), некоторые из которых особо отмечаются. Затем место помеченных ячеек занимает уменьшенная пропорционально копия всей структуры (рис. 1). Исследование Кристи интересно, но ограничено логико-математическими выкладками, которые не нацелены на изучение законов природы и технического воплощения.

Физико-техническое воплощение фракталов особенно интересно в связи с разработкой глобального фрактально-скейлингового метода. В России такие работы проводятся, в основном, в ИРЭ РАН и совместной китайско-российской лаборатории информационных технологий и фрактальной обработки сигналов (Президент - проф. А.А. Потапов). К математическому закреплению и обоснованию фрактальности не прибегнуть нельзя, но видится необходимым в первую очередь наблюдение свойств этих объектов в контексте живой природы, опыт которой отрицать сложно.

---

<sup>1</sup> Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Moscow, Russia

Существуют такие фундаментальные законы природы [1, 3], которые не сводятся к классическим представлениям науки. Их задача не опровержение, а скорее систематизация и более связанное описание последних [1, 3, 4].

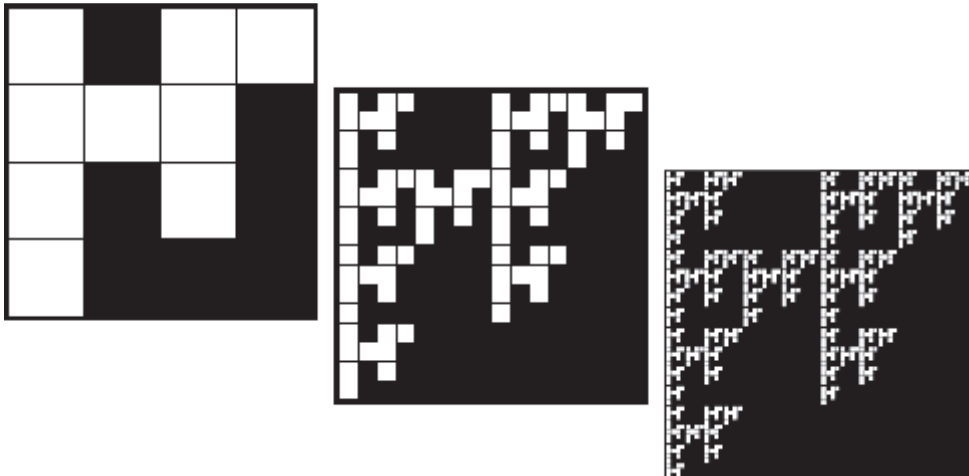


Рис. 1. Лабиринтные фракталы Л. Кристи

История «фрактальной» науки уже насчитывает ни одно десятилетие и в настоящие дни имеет множество технических реализаций своих идей. Большой импульс развития в наши дни получили методы синтеза фрактальных искусственных метаматериалов и композитов: фрактальные антенны, фрактальные структуры в фотонных кристаллах, моделирование фрактальных импедансов и т.д. [4, 5]. Замечательно, что довольно часто в природе встречаются именно фрактальные лабиринты. К ним прежде всего нужно отнести природные трещины, а кроме того системы каналов и капилляров, генные структуры, молниевые разряды, новые структуры в ионосфере (эльфы, джетты, спрайты) и многое другое. Еще более интересно то, что сами того не декларируя, фрактально-лабиринтную топологию имеют телекоммуникационные сети, системы сбора и распределения ресурсов и информации, логистические сети и другое.

## ПРОГРАММНЫЙ ПРОДУКТ

На основании всего вышеперечисленного следующий шаг в развитии фрактальных технических подходов наметился. В данной работе основной упор делается на демонстрацию этих подходов на примере лабиринтных фрактальных антенн - нового вида фрактальных антенн.

Для освобождения от ручного ввода каждого элемента лабиринта был разработан специальный программный продукт (рис. 2) - о нем и пойдет речь далее - способный параметрически синтезировать фрактальные лабиринты. Одно из больших преимуществ фрактальной геометрии есть простота построения программными средствами при высокой сложности структуры [6, 7].

Превращая процесс синтеза из ручного в программно-параметрический, мы получаем новое пространство, как минимум, для экспериментальных попыток создания фрактального радиоэлемента, который до сих пор не имеет однозначной структурно-геометрической концепции построения.

При разработке продукта, мы постарались учесть, прежде всего, первичные нужды пользователя, между тем стараясь дополнить ее различными вспомогательными функциями, делающими процесс разработки удобнее, а результат - качественнее. Программа получила название «Fractalyzer».

Продукт (внешний вид окна показан на рис. 2) содержит, во-первых, графический редактор генератора фрактальной кривой с функциями отмены последних действий и выбора шага построения

угла. Справа от поля генератора введены инструменты установки параметров: количества итераций главной ветви, количество ответвлений, максимальная итерация ответвлений, ширина и длина линий, максимальное расстояние между не соседними элементами (элементарными линиями) структуры. Кроме того, программа имеет возможность ограничить возможность ветвления до пределов образующей ветви, т.е. программа будет создавать ветви только как ответвления от главной кривой, в противном же случае главная ветвь может иметь длинные цепи «ветвей-потомков» (рис. 3). Кроме того, программа может скруглять внешние углы структуры. Это сделано, прежде всего, во избежание краевых электродинамических эффектов, часто имеющих место. Авторам кажется ошибочным считать такое скругление «искажением» структуры, ведь именно оно придает структуре постоянство ширины линий в любом месте (рис. 4).

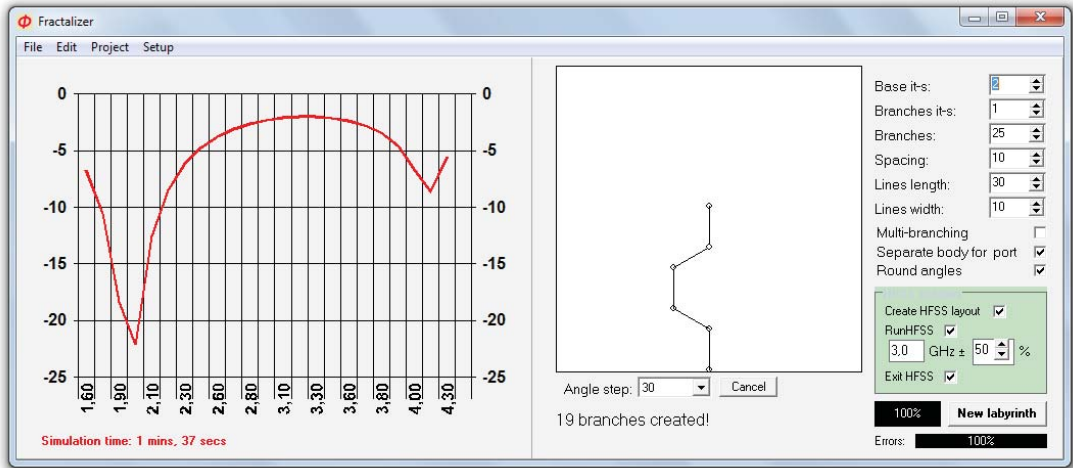


Рис 2. Окно программного продукта Fractalizer

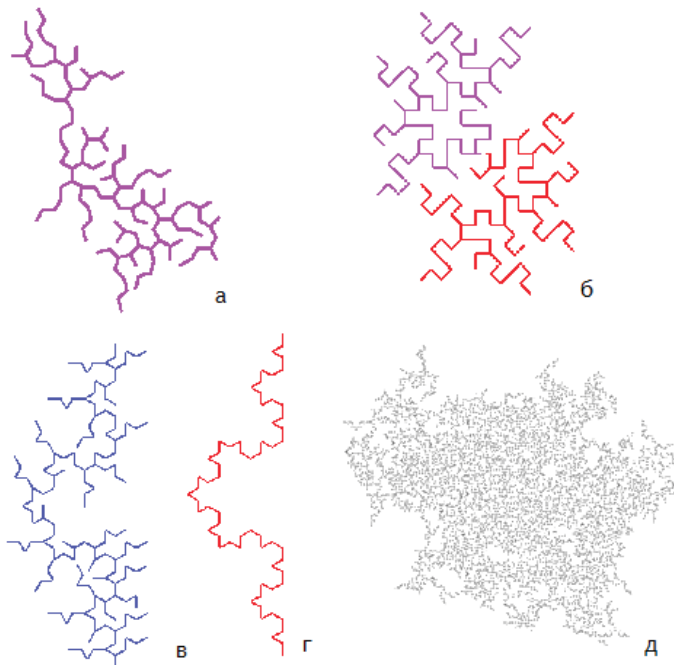


Рис. 3. Примеры фрактальных лабиринтов: а, б, д - с неограниченным ветвлением, в - с ветвлением от главной кривой, г - основная кривая для случая в

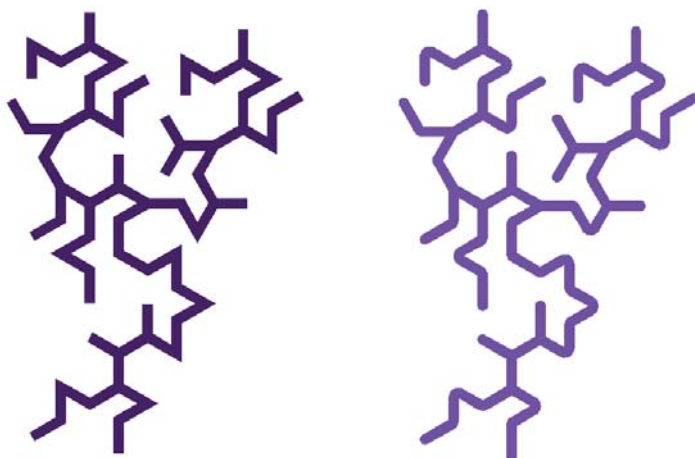


Рис. 4. Скругление углов фрактального лабиринта

Остановившаяся подробнее на синтезе фрактального лабиринта, следует отметить, что для выбора точки каждого нового ответвления автомат использует генератор псевдослучайных чисел. А именно, случайным образом выбирается узел, связывающий существующие ветви и элементарные линии внутри них. После удачного ответвления новой фрактальной кривой, которая исходит всегда из внешнего угла, разделяя его пополам, все узлы этой кривой становятся доступными для генератора псевдослучайных чисел (в случае отсутствия ограничивающей настройки, см., выше). В программе также реализован контроль пересечений, который прекращает развитие ветвей, которые стремятся пересечь или «подойти» достаточно близко (степень близости - один из параметров) к другим элементам структуры.

Опорной средой, с помощью которой можно оценить характеристики синтезируемой структуры в качестве антенны выбран известный продукт электродинамического моделирования Ansoft HFSS 12. Схема взаимодействия продукта Fractalyzer с HFSS показана на рис. 5.

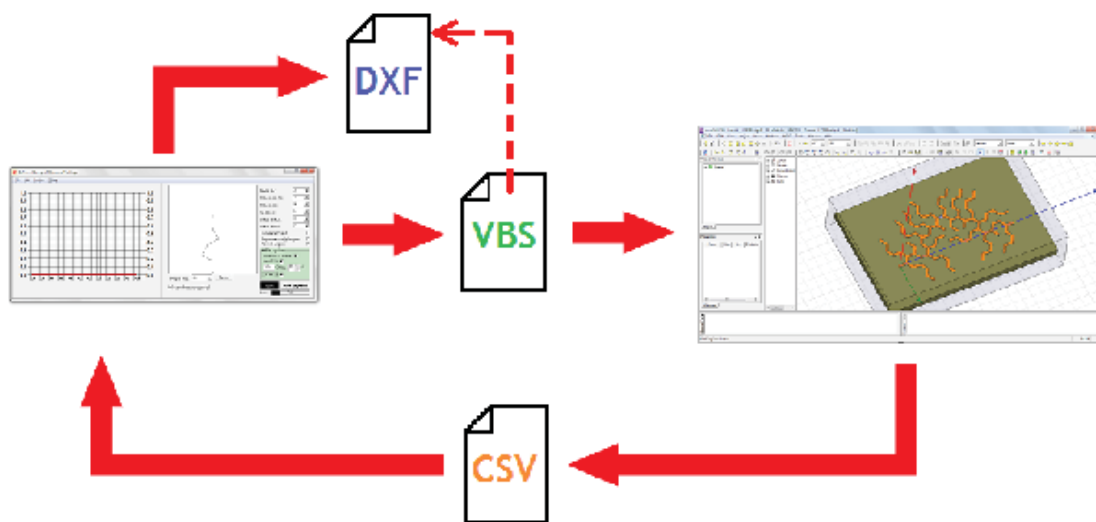


Рис. 5. Схема работы программы Fractalyzer

Последовательность действий при работе с продуктом такова: сначала вручную задаются параметры фрактального лабиринта (итерация основания, итерация ветвей, их количество и т. д.),

задаются параметры запуска и диапазон моделирования для Ansoft HFSS 12, синтез начинается, программа создает управляющий файл Ansoft HFSS 12 - сценарий на языке Visual Basic, а так же чертеж структуры в формате DXF; программа запускает Ansoft HFSS12 (в случае, если это П/О установлено на ПК), иницируя выполнение созданного сценария. Сценарий импортирует файл .DXF в качестве медного проводника, создает подложку из текстолита, воздушную область, задает место подключения фидера и запускает моделирование. По завершении моделирования сценарий с помощью инструмента Ansoft HFSS 12 создает табличный файл в формате .CSV. Наконец, программа Fractalyzer обнаруживает завершение работы Ansoft HFSS 12, после чего импортирует созданный CSV файл и представляет информацию в виде графика зависимости коэффициента отражения  $S_{11}$  от частоты порта.

## ПРИМЕРЫ

На рис. 6 показан один из примеров структуры, сформированной в среде HFSS по сценарию и чертежу из продукта Fractalyzer.

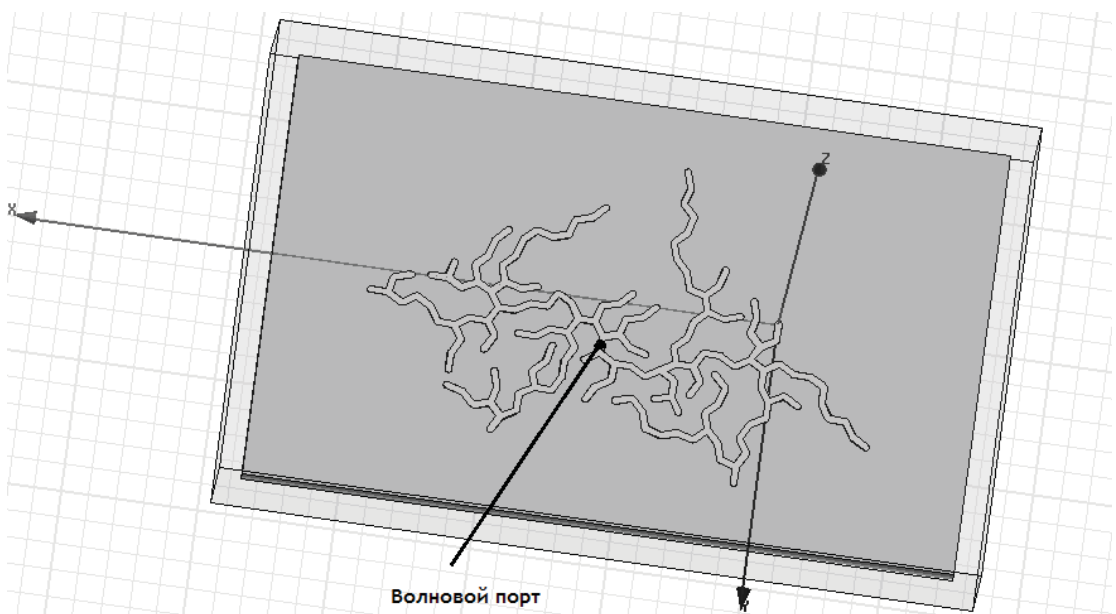


Рис. 6. Структура, сгенерированная программой автоматически, по заданным параметрам

Отмечено, что при стохастическом подходе к построению структуры антенны (рис. 6), ее свойства количественно не уступают свойствам известных соразмерных видов фрактальных антенн. Антенна также имеет несколько резонансов с коэффициентом отражения на уровне  $-12...-20$  дБ. Диаграмма направленности лабиринтных антенн зависима от частоты излучения и в точках резонанса чаще всего круговая. Некоторые примеры структур и графиков коэффициента отражения  $S_{11}$  представлены на рис. 7.

## ВЫВОДЫ

Факты, подтверждающие то, что результаты моделирования сопоставимы с результатами для других фрактальных антенн, например [4 - 14], на данном этапе дают возможность для того, чтобы развивать это научное направление. Дело здесь в том, что структура, изображенная на рис. 6 синтезирована стохастическим образом, а значит, логично предположить, что оптимизируя ее форму с помощью того или иного алгоритма можно добиться и лучшего результата. Лабиринтные фрактальные антенны с генетически оптимизируемой геометрией должны стать универсаль-

ным средством достижения разнообразных целевых параметров для разных применений в радиолокации и радиосвязи. Среди таких параметров - усиление и направленность, так и напротив, многодипазонность и широкополосности, а также, что немаловажно, минимизация размеров антенны при заданной частоте. Напомним, что свое применение фрактальные антенны уже находят в медицине, военных приложениях, физических экспериментах, сотовых системах связи на базовых станциях и мобильных терминалах [1, 4, 5].

Кроме логического вывода о том, что переход от случайного к оптимальному имеет шанс превзойти по характеристикам существующие малые фрактальные и не фрактальные антенны, подкрепляет нашу идею и сам тот факт, мы впервые совмещаем два заимствованных у природы метода - фрактальный и генетический.

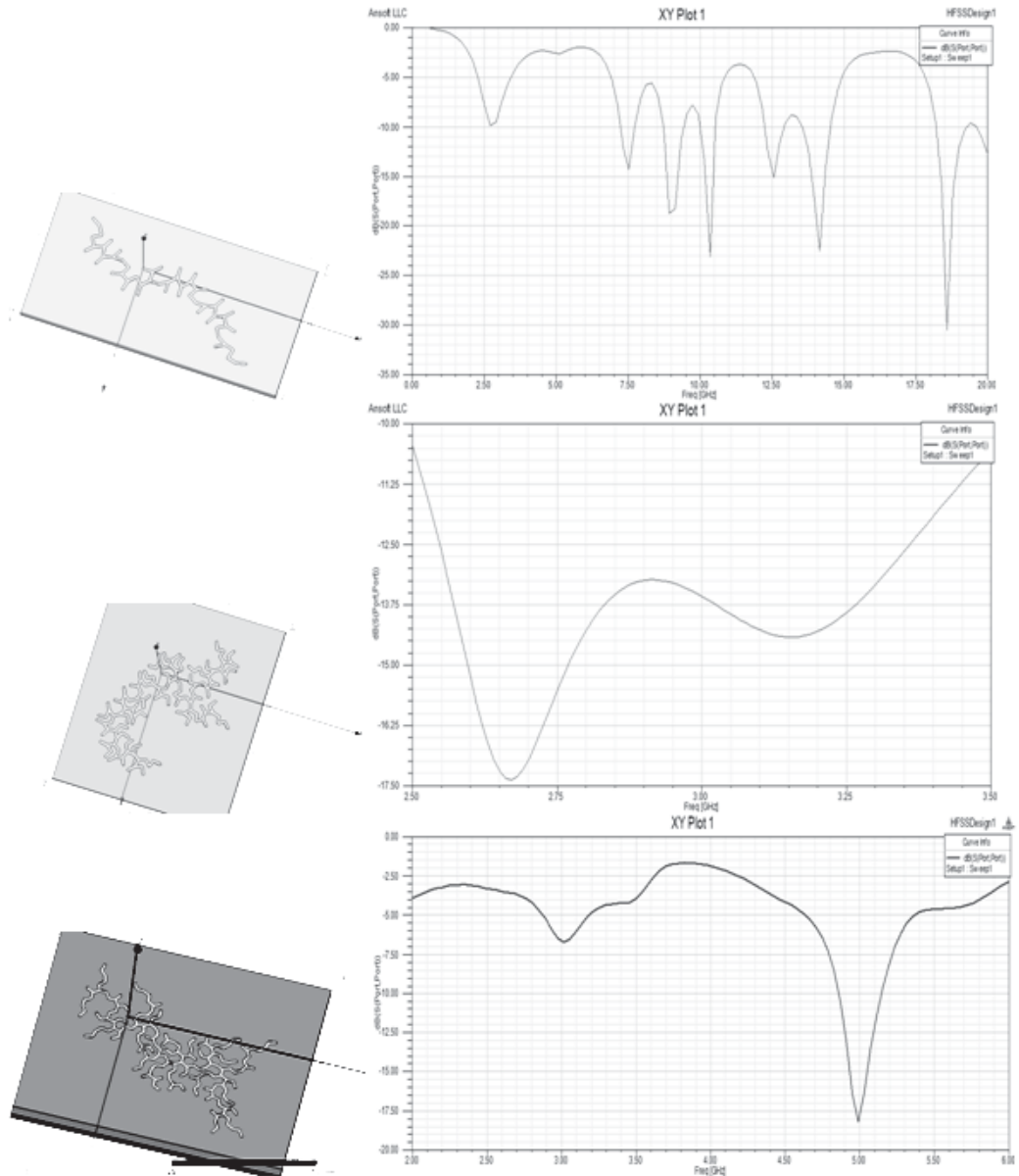


Рис. 7. Результаты для различных примеров

Есть основания предполагать также, что совмещая эти методы, мы получим широкие возможности компьютерного моделирования различных сложных природных процессов. Ведь существующие точные методы моделирования в значительной степени обобщены, что с одной стороны придает им универсальность, но с другой существенно замедляет их действие. Как видится авторам, фрактально-генетический подход к моделированию отсечет все ненужные «тяжелые» формальности в расчетах и позволит модернизировать сам подход к моделированию. Уже сейчас заметны тенденции в этом направлении и в общеизвестных случаях.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. М.: Логос, 2002.
- [2] Cristea L.L., Steinsky V. Curves of infinite length in 4 x 4 - labyrinth fractals. *Geom Dedicata*. 2009. V. 141. P. 1 - 17.
- [3] Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991.
- [4] Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. Изд. 2-е, перераб. и доп.- М.: Университетская книга, 2005.
- [5] Потапов А.А., Матвеев Е.Н. Фрактальная электродинамика, скейлинг фрактальных антенн на основе кольцевых структур и мультимасштабные частотно-избирательные 3D-среды или фрактальные «сэндвичи»: переход к фрактальным наноструктурам // *Радиотехника и электроника*. 2010. Т. 55. № 10. С. 1157 - 1177.
- [6] Потапов А.А., Слезкин Д.В., Потапов В.А. Фрактальные лабиринты в качестве основы геометрии новых видов фрактальных антенн и фрактальных антенных решеток // *Радиотехника*. 2013. № 8. С. 31 - 36.
- [7] Потапов А.А., Слезкин Д.В. Фрактальные лабиринтные структуры, математическое определение и построение // *Материалы X Всероссийской НТК «Динамика нелинейных дискретных электротехнических и электронных систем «ДНДС-2013 (Чебоксары, 06 - 08 июня 2013 г.)»*. Чебоксары: Изд. - во Чувашского гос. ун-та, 2013. С. 65 - 68.
- [8] Потапов А.А., Слезкин Д.В. Осциллятор с дробно-дифференциальной ПОС как модель фрактальной динамики. *Нелинейный мир*. 2013. Т. 11, № 2. С. 134 - 135.
- [9] Потапов А.А. Глобальный фрактально-скейлинговый метод и фрактальная парадигма в моделировании физико-технических процессов и сред. *Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки*. (Материалы междунар. конф. «Колмогоровские чтения - VI. Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ - 2013), посв. 110-летию со Дня рождения А.Н. Колмогорова (Тамбов, 07 - 11 октября 2013 г.)».- 2013. Т. 18. № 5. С. 2645 - 2646.
- [10] Потапов А.А., Слезкин Д.В., Потапов В.А. Методы конструирования фрактальных лабиринтов для современных задач математической физики, прикладной электродинамики, радиолокации, обработки многомерных сигналов, биологии и логистики // *Материалы международной науч. конф. «Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта (ISDMCI' 2013)» (Евпатория, 20- 24 мая 2013 г.)*.- Херсон: ХНТУ, 2013. С. 484 - 487.
- [11] Потапов А.А., Слезкин Д.В. Фрактальные лабиринты в информационных и математических технологиях // *Conference Information Int. Conf. «Mathematical and Informational Technologies, MIT-2013» (5 - 8 September, 2013, Vrnjacka Banja, Serbia and 9 - 14 September, 2013, Budva, Montenegro)*. - Kosovska Mitrovica: University of Pristina, 2013. P. 124 - 125.
- [12] Потапов А.А., Слезкин Д.В. Применение стохастических фрактальных лабиринтов в проектировании пассивных радиокомпонентов и фрактальных антенных решеток с большим числом излучателей // *Труды Первой Российско-Белорусской НТК «Элементная база отечественной радиоэлектроники»*, посв. 110-летию со дня рождения О. В. Лосева (Нижегород, 11 - 14 сентября 2013 г.)- Н.Новгород: НРО РНТОРЭС им. А.С. Попова, 2013. Т. 1. С. 167 - 171.
- [13] Потапов А.А., Ковалева М.Н., Потапов В.А., Кузеев Р.Р. Теория, модели и радиофизические приложения фрактальных лабиринтов // *Тез. докл. Междунар. НТК «Нигматуллинские чтения - 2013» (Казань, 19 - 21 ноября 2013 г.)*.- Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2013. С. 82 - 87.
- [14] Потапов А.А., Слезкин Д.В. Использование ветвящихся фрактальных структур в качестве основы геометрии печатных СВЧ - антенн // *Тез. докл. Междунар. НТК «Нигматуллинские чтения - 2013» (Казань, 19 - 21 ноября 2013 г.)*.- Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2013. С. 238 - 241.



# TRANSFER FUNCTION OPTIMIZATION FOR PLL LOOP WITH REALISTIC OPERATIONAL AMPLIFIER

---

*Analysing stability for a linear loop model using the Bode's diagram, the second-order loop with phase correction has the best stability. If we use a real operational amplifier in the loop, then its transfer function becomes the third order, which adversely affects the stability of the loop. Solving the system of nonlinear equations we determine the adjusted third order polynomial coefficients, in order to minimize discrepancies of that transfer function compared with the second order transfer function of PLL loop.*

---

## INTRODUCTION

Phase Locked Loops - PLL is a control system which is used to generate a signal which is by frequency and phase synchronized with the referent, input signal. PLL is very interesting for applications in radio communication devices, both in the modulation and demodulation of FM signals and in frequency synthesis, as well. The detection of phase and frequency modulated signals is possible in several ways, whereas the detection by PLL is irreplaceable when the signal-to-noise ratio is small ie. is the best solution for weak input signals, such as satellite signals [1]. Frequency synthesizers by PLL enable high stability frequencies and are applied in the generator of transmitter carrier frequencies, whereas in radio and TV receivers they are applied as local oscillators [3]. The principle of the loop operation is defined for the second-order linear loop, and is most commonly described by the second-order transfer function. During the linear operation regime, a problem may appear in the case of integrated PLL loops using active filter [4]. One of the reasons is the influence of the dominant pole of the operational amplifier, due to which the loop transfer function becomes of the third order [5].

## GENERAL LINEAR EQUATIONS OF PLL LOOP

In the general case, the PLL loop consists of a phase detector-FD, LF filter and voltage controlled oscillator - VCO, figure1. The input (reference) signal and VCO output signal are led to the input of the phase detector, whereas, at its output there is the error signal, which is the function of the phase difference between the input signals. After filtering in the LF filter, the error signal is led to the input of the voltage controlled oscillator as the control signal. In the PLL loop operation, the phase difference and the principle of automatic correction are used and for the given phase of the input signal, the o of the phase loop is completely determined by the integro-differential equation [6]:

$$\frac{d\Phi_0}{dt} = K \{ \sin[\Phi i(t) - \Phi_0(t)] * f(t) \} \quad (1)$$

When the phase difference between the input signal  $\Phi i(t)$  and the signal of the voltage controlled oscillator  $\Phi_0(t)$  is small enough, using the approximation  $\sin \Phi \approx \Phi$  it is possible to approximate the nonlinear differential equation by the relation:

$$\frac{d\Phi_0}{dt} = K [\Phi i(t) - \Phi_0(t)] * f(t) \quad (2)$$

There is a tendency in the analysis to solve the equations rather in frequency than in the time domain, and since for the two quantities related by the convolution product their Furrier transformation is given by a regular product, it follows:

---

<sup>1</sup> Faculty of Technical Sciences, Kosovska Mitrovica, Serbia

$$j\omega\Phi_0(j\omega) = K[\Phi_i(j\omega) - \Phi_0(j\omega)]F(j\omega) \quad (3)$$

So the general transfer function of the PLL loop is

$$H(j\omega) = \frac{\Phi_0(j\omega)}{\Phi_i(j\omega)} = \frac{KF(j\omega)}{j\omega + KF(j\omega)} \quad (4)$$

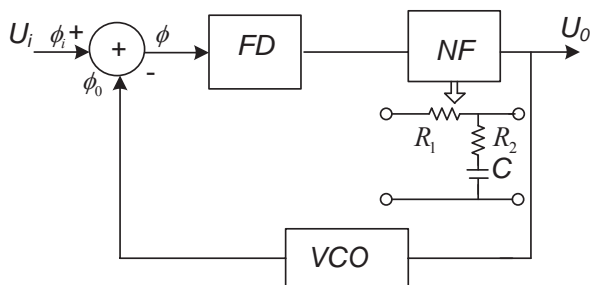


Fig. 1.

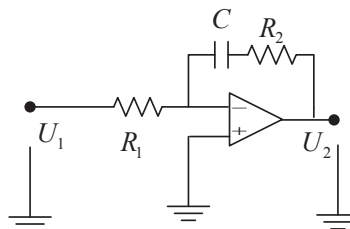


Fig. 2.

where  $F(j\omega)$  represents the transfer function of the LF filter. LF filter most frequently used in practice is given in the figure. Its transfer function has a zero and a pole and is given by the expression:

$$F(s) = \frac{1 + s\tau_2}{1 + s\tau_1}, \quad \tau_2 = R_2C, \quad \tau_1 = (R_1 + R_2)C \quad (5)$$

Then, the transfer function of the loop is of the second order and has the following form:

$$H(s) = \frac{K + sK\tau_2}{K + s(1 + K\tau_2) + s^2\tau_1} = \frac{\omega_n^2 + s(2\xi\omega_n - 1/\tau_2)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (6)$$

In practical applications the transfer function of the second-order PLL loop is defined by secondary parameters: the attenuation factor  $\xi$  and natural frequency  $\omega_n$ . The denominator of that transfer function has the form  $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$  and equalizing it with the denominator of the transfer function of the second order PLL loop, equation (6), the connection of the secondary parameters and physical parameters of the loop is obtained:

$$\omega_n^2 = \frac{K}{\tau_1}, \quad 2\xi\omega_n = \frac{1 + K\tau_2}{\tau_1} \quad (7)$$

## PLL LOOP STABILITY

According to the previous analysis, it can be observed that in the general case PLL loop is a non-linear system; however, it can be linearized for a small phase error. The question of stability for the linear loop model will be considered, the conditions obtained are the necessary conditions, and the practice has shown that the system is stable if it is stable in the linear work regime. When analyzing the stability of the circuit with feedback it is very practical to use Bode diagrams instead of Nyquist diagram. Certainly, the definitions of the phase and amplitude margins ostaju iste kao i kriterijumi stabilnosti remain the same as the stability criteria derived in Nyquist diagrams. In practice, the most common case is a filter with one real zero and the pole whose transfer function is given by the equation (5). By choosing elements  $R_1, R_2$  and  $C$  time constants can be set independently, providing better opportunities to control the PLL loop performance. Analyzing Bode diagrams of amplitude and phase characteristic it is concluded that the second-order loop with the filter which has a zero and a pole has the best stability. Moreover, care should be taken about the values  $K, \xi$  and  $\omega_n$ , since for a high value of  $\tau_1$  and low  $\tau_2$  the phase is near  $-\pi$ , and the system is near instability. If the circular gain  $K$  is high and if it is demanded that  $\omega_n$  is very small, then it is necessary that the time constant  $\tau_1$  is very high, order of thousand seconds.

In that case, it is not always possible to find the capacity  $C$  by which the desired time constant can be obtained. That problem can be solved by the active filter, figure 2. and its transfer function also has a zero and a pole. More detailed analysis shows that the second-order PLL loops are actually higher-order loops. In real conditions the filter and voltage controlled oscillator have certain higher-order effects ie. there is always an additional pole introduced through the operational amplifier if the active filter is concerned, so the loop becomes of the higher order. The influence of the real operational amplifier on the filter characteristics depends on the topology and the values of filter elements, and in some cases it may happen that the circuit becomes instable. During the active filter transfer function derivation, figure 2, it will be assumed that the amplification of the operational amplifier changes with the change of frequency, which, in the first approximation, can be represented using the following expression:

$$A(s) = \frac{A_0}{1 + s\tau_g} \quad (8)$$

where  $A_0$  represents unidirection gain in the open loop, whereas  $1 / 2\pi\tau_g$  is the cut-off frequency, so the active filter transfer function in figure 2 is:

$$F(s) = \frac{-A_0(1 + s\tau_2)}{1 + s\tau_{11} + s^2\tau_{12}^2}; \quad \tau_{11} = \tau_1(1 + A_0) + \tau_2 + \tau_g; \quad \tau_{12} = \tau_g(\tau_1 + \tau_2); \quad (9)$$

In the further analysis the negative sign will be left out, with the remark that the output signal of the filter has to be led to the voltage controlled oscillator with the changed sign. According to the equation(6), the loop transfer function is now:

$$H(s) = \frac{K / \tau_{12}(1 + s\tau_2)}{s^3 + s^2\tau_{11}/K + s(1 + K\tau_2) / \tau_{12} + s(1 + K\tau_2) / \tau_{12} + K / \tau_{12}} \quad (10)$$

The loop transfer function given by the equation (10) can have two conjugate complex and one real pole. If the real pole is non-dominant, then in the bandwidth the loop will have the characteristics of the ideal second-order loop. Applying the approach as in the design of the active filter with predistortion in order to compensate the final gain bandwidth product [4], the denominator of the transfer function given by the equation (10) can be expressed in the following form:

$$P(s) = (s + p)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2) \quad (11)$$

where  $p$  represents the real pole and  $\xi$  and  $\omega_n$  the required values of the ideal second-order loop parameters. Transforming the polynomial (11) into the third-order polynomial and equalizing the corresponding coefficients with those in the denominator of the transfer function given in equation (10), a system of non-linear equations is obtained:

$$\begin{aligned} 2\xi\omega_n + p &= \frac{\tau_{11}}{K} \\ 2\xi\omega_n p + \omega_n^2 &= \frac{1 + K\tau_2}{\tau_{12}} \\ p\omega_n^2 &= \frac{K}{\tau_{12}} \end{aligned} \quad (12)$$

The parameters to be determined are  $\tau_1$  and  $\tau_2$ , and their new-corrected values are determined. With the increase of the  $A_0 / \tau_g$  quotient the real pole of the operational amplifier is farther from the coordinate origin, so its influence is weaker. On the graph 3. it can be observed that when  $A_0 / \tau_g = 10$  the discrepancy between the transfer function of the third-order loop and the ideal second-order function is significant. By increasing  $A_0 / \tau_g$  the difference is decreased and when  $A_0 / \tau_g = 70$  the difference disappears, figure 4.

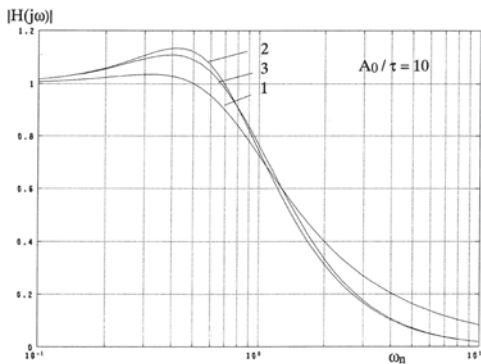


Fig. 3.

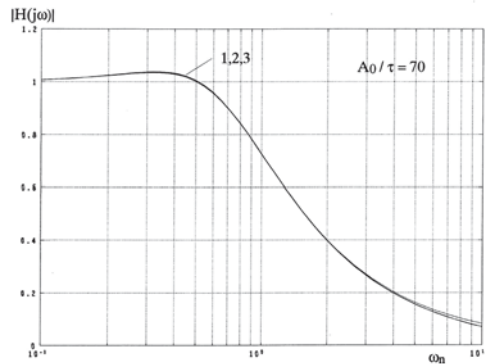


Fig. 4.

## CONCLUSION

The paper has shown that the loop with the most frequently used filter with a zero and a pole has the best stability, and the control of PLL loop performances is considerable, since with the choice of  $R_1$ ,  $R_2$  and  $C$ , it is possible to set independently  $\tau_1$  and  $\tau_2$ . The problem is that in real conditions there are effects which cause the loop transfer function to become of a higher order. By the process of optimization of the transfer function of the loop with the active filter when the operational amplifier is not ideal, the difference between that transfer function and the ideal transfer function of the loop is decreased. In the case of the high-quality operational amplifiers, having  $A_0 / \tau_g \geq 70$ , the optimization process is not necessary.

## REFERENCES

- [1] Roland E. Best, Phase-Locked Loops: Design, Simulation and Applications (6th ed.), McGraw Hill, ISBN 978-0-07-149375-8, 2007.
- [2] Krstić D. Radiokomunikaciona elektronika i sistemi, Elektronski fakultet, Niš, 2004.
- [3] A. Raičević, B. Prica, One Solution For Differential Equation For Non/linear Mode PLL loop, MIT2009, pp. 342-346
- [4] S. Gupta, Phase Locked-Loops, Proceedings of the IEEE, vol 63. pp. 291-306, 2005.
- [5] S. Tešić, D. Vasiljević, Elektronika, Beograd, 2004.
- [6] Brennan, P.V.; Thompson, I., Phase frequency detector phase noise contribution in PLL frequency synthesiser, Electronics Letters, Volume 37, Issue 15, 2011 July, Pages 939-940.

## MATHEMATICAL MODELLING OF ONE-PUMP FIBER OPTICAL PARAMETRIC AMPLIFIERS

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛОКОННО-ОПТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ УСИЛИТЕЛЕЙ С ОДИНАРНОЙ НАКАЧКОЙ

---

*We have presented the results of numerical simulation of wavelength-division multiplexing (WDM) system with parametric amplification. Mathematical model of WDM optical signal propagation along high nonlinearity fiber is based on the nonlinear Schrodinger equation. To perform numerical simulations, split-step Fourier method has been employed. We have observed the saturation of the amplifier when the pump power is above the threshold. We have shown that the pump wavelength has to be a few nanometers larger than the zero-dispersion wavelength in order to obtain the high, flat and broad C-band amplification gain. We have found that required pump power may be reduced and flatness of the gain spectrum may be improved by means of increasing the length of the fiber.*

---

#### ВВЕДЕНИЕ

Для удовлетворения растущего спроса на передачу большого объёма информации, обусловленного постоянным появлением новых мультимедийных приложений, необходимо разрабатывать волоконно-оптические линии связи (ВОЛС) с плотным спектральным разделением каналов и высокой спектральной эффективностью. Пропускная способность существующих линий связи ограничена применением распространённых точечных эрбиевых волоконных усилителей с шириной полосы усиления в несколько десятков нанометров. Однако известно, что доступная полоса пропускания для кварцевых световодов, для которой оптические потери минимальны, составляет несколько сотен нанометров. Поэтому для её эффективного использования необходимо исследовать оптические усилители других типов.

В последние несколько лет исследователями уделяется повышенное внимание волоконно-оптическим параметрическим усилителям (ВОПУ), что обусловлено высоким потенциалом их использования во множестве приложений [1-3]. В частности, ВОПУ могут применяться для усиления оптического сигнала при его распространении по волоконным линиям связи, для генерации оптического сигнала на длинах волн, недоступных используемому источнику излучения, а также для различной оптической обработки сигнала. Ключевым свойством ВОПУ, необходимым для их применения в качестве усилителей в ВОЛС со спектральным уплотнением каналов, является высокий коэффициент усиления в широком диапазоне длин волн с незначительными колебаниями кривой усиления внутри данного диапазона. Небольшой интервал колебаний коэффициента усиления в зависимости от длины волны является необходимым условием применения усилителя в волоконно-оптических линиях связи, так как в ВОЛС во всех спектральных каналах должно быть одинаковое по величине усиление. Добиться плоскостности спектральной характеристики усиления можно как за счёт мультисегментных ВОПУ [4], так и за счёт ВОПУ с двойной накачкой [5]. Ещё одно преимущество ВОПУ состоит в том, что диапазон усиления может быть центрирован на любой необходимой длине волны  $\lambda_C$ . Единственным ограничением является близость длины волны  $\lambda_C$  к длине волны нулевой дисперсии волокна  $\lambda_0$ .

Принцип действия ВОПУ основан на нелинейном явлении в волоконном световоде, называемом четырёхволновое смешение (ЧВС) [6]. При распространении по световоду оптического сигнала

---

1 Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russia

2 Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

(сигнальной волны) вместе с интенсивной волной накачки происходит усиление сигнала, истощение накачки, а также генерация «холостой» волны (idler wave), частота которой определяется частотами накачки и сигнала по закону

$$\omega_S + \omega_I = 2\omega_P$$

в случае одинарной накачки, где  $\omega_S$ ,  $\omega_I$  и  $\omega_P$  - частоты сигнальной волны, «холостой» волны и накачки соответственно, или

$$\omega_S + \omega_I = \omega_{P_1} + \omega_{P_2}$$

в случае двойной накачки, где  $\omega_{P_1}$  и  $\omega_{P_2}$  - частоты двух накачек. Схематически данные процессы изображены на рис. 1.

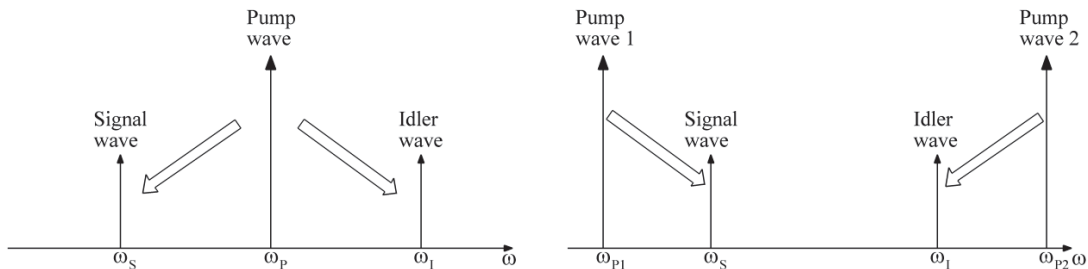


Рис. 1. Схематическое расположение частот для ВОПУ при одинарной и двойной накачках

Для изготовления ВОПУ обычно используется специальное высоконелинейное волокно, у которого коэффициент нелинейности  $\gamma$  больше на порядок по сравнению с коэффициентом нелинейности стандартного телекоммуникационного волокна. Высокая нелинейность позволяет создать параметрический усилитель при помощи короткого отрезка волокна. Использование небольших отрезков волокна позволяет избежать дополнительного сильного затухания оптического сигнала.

При исследовании параметрических усилителей методами математического моделирования спектральную характеристику усиления ВОПУ с одинарной и двойной накачками в первом приближении можно численно получить используя упрощённую модель, которая учитывает нелинейные взаимодействия только между волнами накачки, сигнальной волной и «холостой» волной. Аналитические решения, полученные на основе данной модели, широко используются для оптимизации формы кривой усиления ВОПУ. Однако в некоторых ситуациях данная модель не может быть применима для описания явления параметрического усиления в ВОПУ. Одним из важных примеров является распространение оптического сигнала, состоящего из множества подсигналов с различными несущими длинами волн. В настоящей работе представлена математическая модель для описания явления параметрического усиления оптического сигнала, основанная на нелинейном уравнении Шрёдингера. Описан метод расщепления по физическим процессам с использованием быстрого преобразования Фурье для численного решения начально-краевой задачи для данного уравнения. С помощью численных расчётов проведено исследование зависимости спектральной характеристики усиления ВОПУ с одинарной накачкой от таких параметров, как длина волокна, мощность накачки и отстройка длины волны накачки от длины волны нулевой дисперсии.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается распространение оптического сигнала, образованного сигнальной волной и волной накачки, по короткому отрезку высоконелинейного волокна. Требуется вычислить величину усиления сигнальной волны после прохождения по волокну и определить форму спектральной характеристики усиления ВОПУ, которая определяется как

$$G(\omega) = 10 \log_{10} \frac{|A_S(L, \omega)|^2}{|A_S(0, \omega)|^2}, \quad (1)$$

где  $A_S(z, \omega)$  - амплитуда сигнальной волны,  $L$  - длина волокна.

Процесс распространения оптического сигнала по волокну описывается нелинейным уравнением Шрёдингера для комплексной огибающей амплитуды электромагнитного поля  $A(z, t)$ :

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \alpha A + i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} - i \frac{\beta_4}{24} \frac{\partial^4 A}{\partial t^4} - i \gamma |A|^2 A = 0, \quad (2)$$

где  $z$  - расстояние вдоль линии,  $t$  - время,  $|A|^2$  - мощность,  $\alpha$  - коэффициент затухания,  $\gamma$  - коэффициент керровской нелинейности. Коэффициент нелинейности  $\gamma$  определяется формулой

$$\gamma = \frac{2\pi n_2}{\lambda_c A_{eff}},$$

где  $n_2$  - нелинейный показатель преломления,  $\lambda_c$  - несущая длина волны,  $A_{eff}$  - эффективная площадь собственной моды световода. Параметры  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  и  $\beta_4$  - коэффициенты разложения постоянной распространения  $\beta(\omega)$  в ряд Тейлора в окрестности несущей частоты  $\omega_c$ :

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_c) + \frac{\beta_2}{2}(\omega - \omega_c)^2 + \frac{\beta_3}{6}(\omega - \omega_c)^3 + \dots,$$

т.е.

$$\beta_i = \left[ \frac{d^i \beta}{d\omega^i} \right]_{\omega=\omega_c}.$$

Для уравнения (2) ставится начально-краевая задача с периодическими граничными условиями

$$A(z, t) = A(z, t + T),$$

$$A(0, t) = \sum_{k=1}^K A_k(t) e^{i\omega_k t},$$

$$\Omega = (0, T) \times (0, L),$$

где  $T$  - величина расчётной области по  $t$ ,  $A_k(t)$  - комплексная амплитуда  $k$ -ой компоненты оптического сигнала с несущей частотой  $\omega_k$ , включая амплитуду волн накачек.

В отличие от упрощённых моделей, в данном случае сигнальная волна может представлять собой как одноканальный сигнал с одной несущей длиной волны, так и многоканальный сигнал с несколькими несущими длинами волн.

Уравнение распространения (2) не имеет аналитического решения за исключением некоторых частных случаев. Для численного решения (2) можно использовать несколько численных методов [7-10], которые можно отнести к одному из двух классов: конечно-разностные методы или псевдоспектральные методы. Псевдоспектральные методы на порядок и более быстрее конечно-разностных при той же точности счёта. Одним из наиболее широко распространённых псевдоспектральных методов является метод расщепления по физическим процессам (SSFM) [11-13]. Относительно большая скорость счёта этим методом по сравнению с большинством методов конечных разностей достигается благодаря использованию алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Принцип метода SSFM заключается в следующем: перепишем уравнение (2) в виде

$$\frac{\partial A}{\partial z} = (\hat{D} + \hat{N})A, \quad (3)$$

где  $\hat{D}$  - дифференциальный оператор, учитывающий дисперсию и поглощение в линейной сре-

де, а  $\hat{N}$  - нелинейный оператор, описывающий действие нелинейностей световода на распространение оптического сигнала. Эти операторы записываются следующим образом:

$$\hat{D} = -i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3}{\partial t^3} + i \frac{\beta_4}{24} \frac{\partial^4}{\partial t^4} - \alpha, \quad (4)$$

$$\hat{N} = i\gamma |A|^2. \quad (5)$$

Вообще говоря, дисперсия и нелинейность действуют в световоде совместно. В методе SSFM приближенное решение получают, предполагая, что при распространении оптического поля на малое расстояние  $h$  в световоде нелинейные и дисперсионные эффекты действуют независимо, а именно распространение от точки  $z$  к  $z+h$  описывается в два уже последовательных шага. На первом действует только нелинейность и в уравнении (3)  $\hat{D} = 0$ . На втором шаге действует только дисперсия и в уравнении (3)  $\hat{N} = 0$ . Формально решение выглядит так

$$A(z+h, t) \approx \exp[h\hat{D}] \exp[h\hat{N}] A(z, t). \quad (6)$$

Действие экспоненциального оператора  $\exp[h\hat{D}]$  можно выполнить в Фурье-пространстве, следуя формуле

$$\exp[h\hat{D}] B(z, t) = \left\{ F^{-1} \exp[h\hat{D}(i\omega)] F \right\} B(z, t), \quad (7)$$

где  $F$  обозначает оператор Фурье-преобразования,  $\hat{D}(i\omega)$  можно получить из уравнения (4), заменяя дифференциальный оператор  $\partial/\partial t$  на  $i\omega$ , где  $\omega$  - частота в спектральном представлении. Так как  $\hat{D}(i\omega)$  в Фурье-пространстве есть просто число, уравнение (7) решается непосредственно. Использование алгоритма БПФ делает решение уравнения (7) относительно быстрым. Используя формулу Бейкера-Хаусдорфа для двух некоммутирующих операторов можно показать, что SSFM имеет второй порядок точности по шагу  $h$ .

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЁТОВ

Распространённые эрбиевые усилители, используемые при разработке современных ВОЛС, способны усилить сигнал в диапазоне длин волн C-band от 1530 нм до 1560 нм. Характерная величина усиления составляет 20 дБ, что соответствует потерям при распространении сигнала по стандартному коммуникационному волокну длиной 100 км с коэффициентом затухания 0,2 дБ/км. Одна из целей исследования формулировалась как сравнение ВОПУ с эрбиевыми усилителями по ключевым характеристикам эффективности. В связи с этим исследования ВОПУ проводились с акцентом на усиление сигнала со спектральным уплотнением каналов в диапазоне длин волн C-band.

Определим два параметра:

$$G_m = \min_{\lambda \in C\text{-band}} G(\lambda),$$

$$G_f = \max_{\lambda \in C\text{-band}} G(\lambda) - \min_{\lambda \in C\text{-band}} G(\lambda).$$

Параметр  $G_m$  соответствует минимальной величине усиления сигнала среди всех длин волн из диапазона C-band. Тогда условие, при котором для любого сигнала на длине волны из диапазона C-band величина его усиления составляет не менее 20 дБ, формулируется простым образом:  $G_m > 20$  дБ. Параметр  $G_f$  соответствует разнице между максимальной и минимальной величинами усиления сигнала в диапазоне C-band и характеризует плоскостность кривой усиления. Среди двух усилителей с одинаковыми характеристиками приоритет всегда остаётся за усилителем с меньшим показателем плоскостности кривой усиления.

При численном моделировании ВОПУ использовались следующие параметры высоконелиней-



ного волокна: коэффициент затухания  $\alpha = 0,9$  дБ/км, коэффициент нелинейности  $\gamma = 8,8$  Вт<sup>-1</sup>·км<sup>-1</sup>, дисперсионный наклон  $S = 0,083$  пс·нм<sup>-2</sup>·км<sup>-1</sup>, длина волны нулевой дисперсии волокна  $\lambda_0 = 1566$  нм. Такие параметры как дисперсионный параметр 4-го порядка  $\beta_4$ , длина волокна  $L$ , длина волны накачки  $\lambda_p$  и мощность накачки  $P_p$  не были фиксированы и варьировались в ходе численных расчётов.

При  $z = 0$  волна накачки задавалась в виде немодулированной непрерывной волны постоянной мощности  $P_p$ . Сигнальная волна представляла собой систему со спектральным уплотнением каналов, состоящую из 80 частотных каналов с межканальным расстоянием 50 ГГц. Таким образом, полная ширина 80 каналов составляла около 32 нм. В каждом канале сигнал задавался в виде последовательности гауссовских импульсов, формат модуляции - двоичный фазовый формат модуляции BPSK. Средняя мощность сигнала в каждом канале составляла -20 дБм, а полная средняя мощность всех 80 каналов -1 дБм соответственно. Длительность битового интервала составляла 100 пс, что соответствует скорости передачи данных 10 Гбит/с.

В численных расчётах спектральная характеристика усиления  $G(\lambda)$  находилась в два этапа: на первом этапе все спектральные каналы находились слева от длины волны накачки, и таким образом вычислялась левая часть кривой усиления, на втором этапе все спектральные каналы находились справа от длины волны накачки, симметрично первому случаю, и таким образом вычислялась правая часть кривой усиления. Стоит ещё раз отметить, что новизна исследования заключается в том, что кривая усиления  $G(\lambda)$  вычисляется не последовательным «сканированием» диапазона усиления сигналом на одной длине волны, а расчётом распространения набора каналов на разных длинах волн, что больше соответствует современным технологиям волоконной оптики.

На Рис. 2 и 3 показано, как форма кривой усиления изменяется с ростом мощности волны накачки  $P_p$  от 1 до 10 Вт (от 30 до 40 дБм). Рис. 2 соответствует отрицательному значению дисперсионного параметра 4-го порядка  $\beta_4$ , а рис. 3 положительному значению  $\beta_4$ . Из рисунков видно, что форма кривой усиления сильно зависит от величины отстройки длины волны накачки  $\lambda_p$  от длины волны нулевой дисперсии  $\lambda_0$ . Однако присутствует и общая тенденция для всех параметров: величина усиления быстро растёт с ростом мощности накачки до 5 Вт, однако для мощностей накачки больше 5 Вт величина усиления растёт значительно медленнее. Этот эффект является следствием насыщения усиления и часто наблюдается в физических экспериментах в оптике.

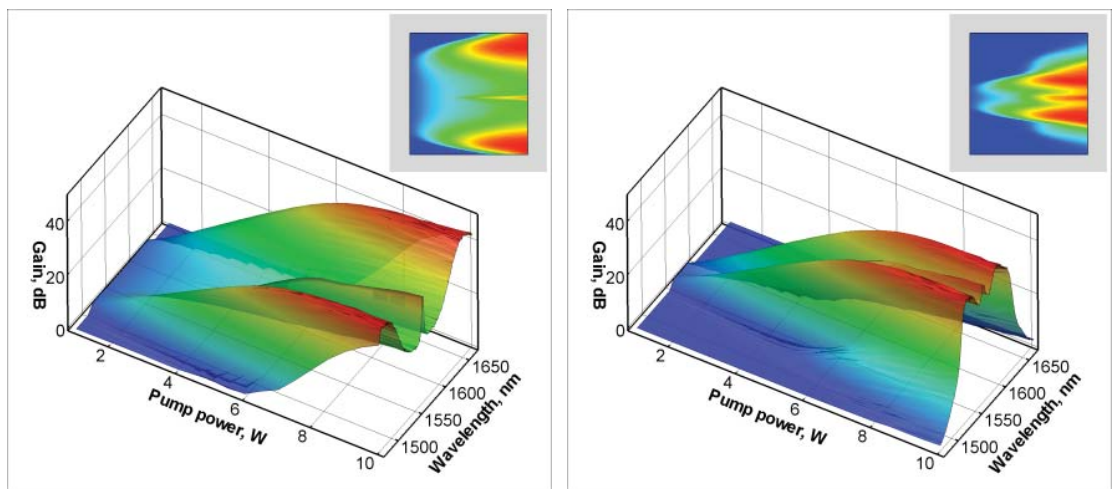


Рис. 2. Динамика спектральной характеристики усиления при изменении мощности волны накачки  $P_p$ .  $\beta_4 = -10^{-4}$  пс<sup>4</sup>·км<sup>-1</sup>,  $\lambda_p = 1564$  нм (слева), 1566 нм (в центре) и 1568 нм (справа),  $L = 0,1$  км.

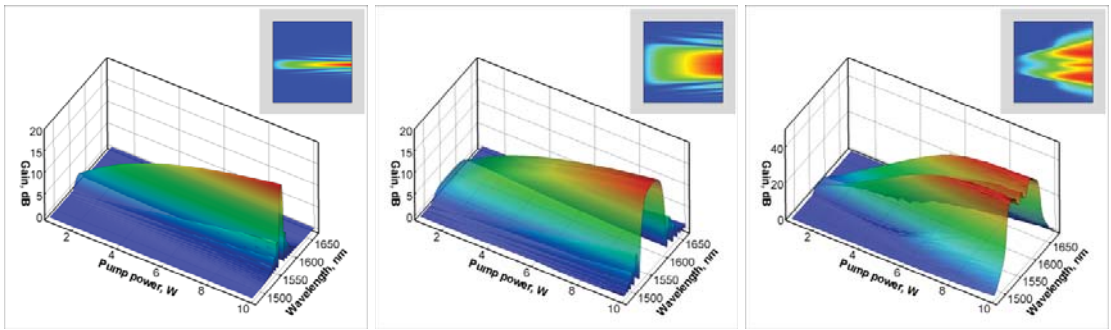


Рис. 3. Динамика спектральной характеристики усиления при изменении мощности волны накачки  $P_p$ .  $\beta_4 = 10^{-4} \text{ пс}^4 \cdot \text{км}^{-1}$ ,  $\lambda_p = 1564 \text{ нм}$  (слева),  $1566 \text{ нм}$  (в центре) и  $1568 \text{ нм}$  (справа),  $L = 0,1 \text{ км}$ .

На рис. 4 и 5 показано, как форма кривой усиления зависит от длины волны накачки  $\lambda_p$ , которая изменяется от 1563 до 1571 нм. Рис. 4 соответствует отрицательному значению  $\beta_4$ , а рис. 5 положительному значению  $\beta_4$ . Из рисунков видно, что в случае, когда длина волны накачки  $\lambda_p$  меньше длины волны нулевой дисперсии  $\lambda_0 = 1566 \text{ нм}$ , спектр усиления узкий и составляет порядка 10 нм. В противоположном случае, когда  $\lambda_p > \lambda_0$ , спектр усиления может достигать 100 нм и сужается с ростом длины волны накачки. Кроме того, максимальная величина усиления при  $\lambda_p < \lambda_0$  может быть более чем в два раза меньше, чем величина усиления при  $\lambda_p > \lambda_0$ .

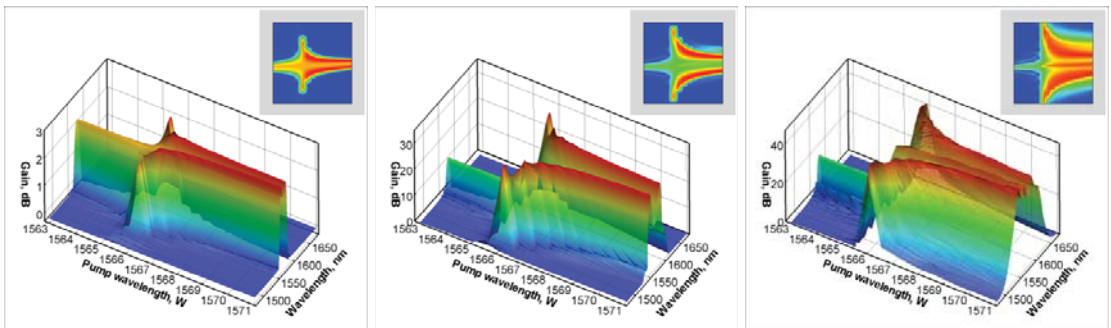


Рис. 4. Динамика спектральной характеристики усиления при изменении длины волны накачки  $\lambda_p$ .  $\beta_4 = -10^{-4} \text{ пс}^4 \cdot \text{км}^{-1}$ ,  $P_p = 1 \text{ Вт}$  (слева),  $5 \text{ Вт}$  (в центре) и  $10 \text{ Вт}$  (справа),  $L = 0,1 \text{ км}$ .

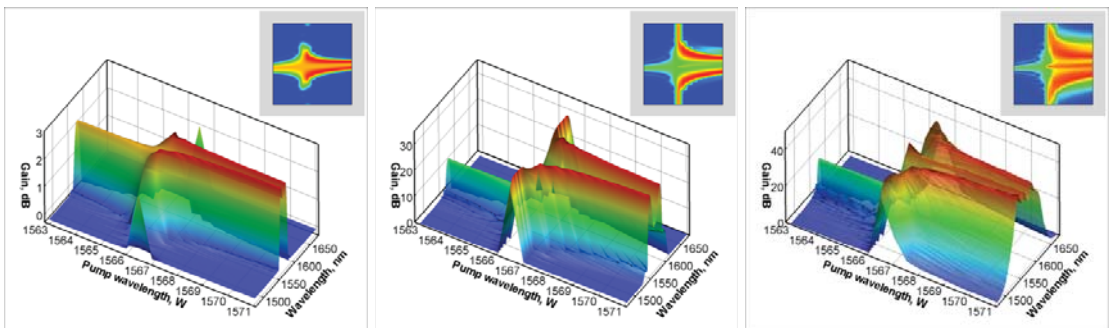


Рис. 5. Динамика спектральной характеристики усиления при изменении длины волны накачки  $\lambda_p$ .  $\beta_4 = 10^{-4} \text{ пс}^4 \cdot \text{км}^{-1}$ ,  $P_p = 1 \text{ Вт}$  (слева),  $5 \text{ Вт}$  (в центре) и  $10 \text{ Вт}$  (справа),  $L = 0,1 \text{ км}$ .

На рис. 6 и 7 показано, как форма кривой усиления зависит от дисперсионного параметра 4-го порядка  $\beta_4$ , который изменяется от  $-6 \cdot 10^{-4}$  до  $-10^{-5} \text{ пс}^4 \cdot \text{км}^{-1}$  (рис. 6) и от  $10^{-5}$  до  $6 \cdot 10^{-4} \text{ пс}^4 \cdot \text{км}^{-1}$  (рис. 7). Из полученных результатов сложно выделить однозначные тенденции в зависимости формы кривой усиления или величины усиления от  $\beta_4$ , однако более подробные исследования свидетельствуют, что положительным значениям  $\beta_4$  соответствуют кривые усиления, показатель пло-

скостности которых лучше, чем при отрицательных значениях  $\beta_4$ .

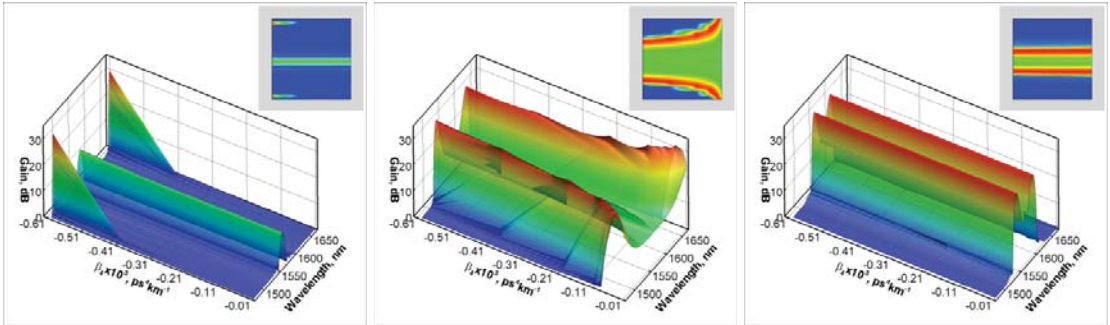


Рис. 6. Динамика спектральной характеристики усиления при изменении дисперсионного параметра 4-го порядка  $\beta_4$ .  $P_p = 5$  Вт,  $\lambda_p = 1564$  нм (слева), 1566 нм (в центре) и 1568 нм (справа),  $L = 0,1$  км,  $\beta_4 < 0$ .

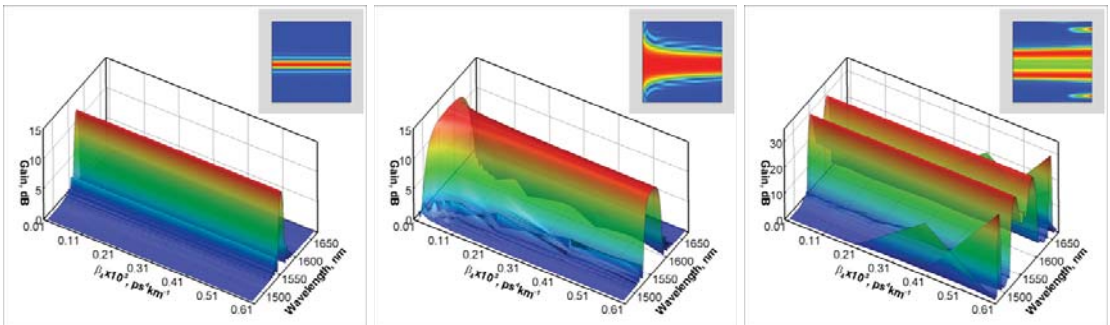


Рис. 7. Динамика спектральной характеристики усиления при изменении дисперсионного параметра 4-го порядка  $\beta_4$ .  $P_p = 5$  Вт,  $\lambda_p = 1564$  нм (слева), 1566 нм (в центре) и 1568 нм (справа),  $L = 0,1$  км,  $\beta_4 > 0$ .

Далее приведены результаты численного исследования ВОПУ для усиления диапазона длин волн C-band. На рис. 8 показаны линии уровня параметра  $G_f$ , характеризующего плоскостность кривой усиления, при изменении мощности накачки  $P_p$  и длины волны накачки  $\lambda_p$ . Рисунки приведены для разных значений дисперсионного параметра 4-го порядка  $\beta_4$  и длины волокна  $L = 0,1$  км. Кружкам на рисунках соответствуют значения параметров ( $P_p$  и  $\lambda_p$ ), при которых выполняется заданное целевое условие  $G_m > 20$  дБ, при котором для любого сигнала на длине волны из диапазона C-band величина его усиления составляет не менее 20 дБ. Из рисунка хорошо видно, что для удовлетворения условия  $G_m > 20$  дБ длина волны накачки должна быть на несколько нанометров больше длины волны нулевой дисперсии  $\lambda_0 = 1566$  нм. Кроме этого, мощность накачки  $P_p$  должна быть не менее 5,5 Вт. С точки зрения плоскостности кривой усиления видно, что при длинах волн накачки от 1567 нм до 1569 нм и значениях мощности накачки порядка 10 Вт существует область, в которой параметр  $G_f$  достигает своих минимумов и составляет около 5 дБ.

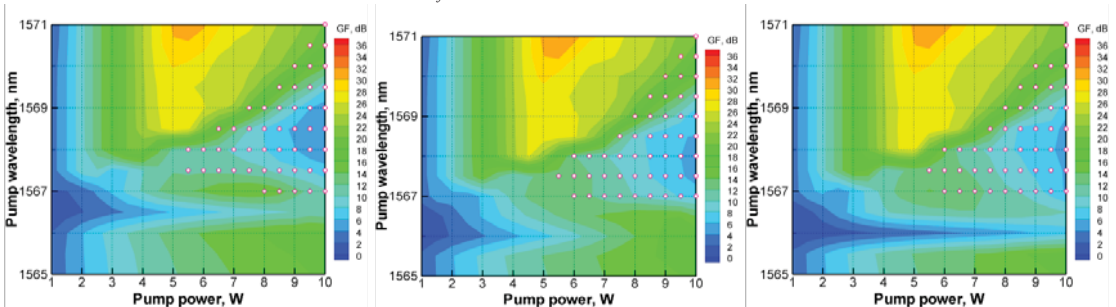


Рис. 8. Линии уровня параметра  $G_f$  в плоскости параметров мощности накачки  $P_p$  и длины волны накачки  $\lambda_p$ .  $\beta_4 = 6 \cdot 10^{-4}$  пс<sup>4</sup>·км<sup>-3</sup> (слева),  $\beta_4 = 2 \cdot 10^{-4}$  пс<sup>4</sup>·км<sup>-3</sup> (в центре),  $\beta_4 = 8 \cdot 10^{-5}$  пс<sup>4</sup>·км<sup>-3</sup> (справа),  $L = 0,1$  км.

На рис. 9 и 10 представлены результаты аналогичных расчётов, как и на рис. 8, но при длине волокна  $L=0,2$  км и  $L=0,3$  км соответственно. Из рисунков видно, что правило отстройки длины волны накачки  $\lambda_p$  от длины волны нулевой дисперсии  $\lambda_0$  сохраняется и для больших длин волокна. Также стоит отметить, что увеличению длины волокна соответствует пропорциональное уменьшению требуемой мощности волны накачки. Область минимальной плоскостности значительно больше по сравнению с рис. 8 и при некоторых значениях длины волны и мощности накачки достигает величины 1 дБ. Данные наблюдения свидетельствуют о необходимости использования длины высоконелинейного волокна в качестве одного из ключевых параметров при исследовании и разработке ВОПУ.

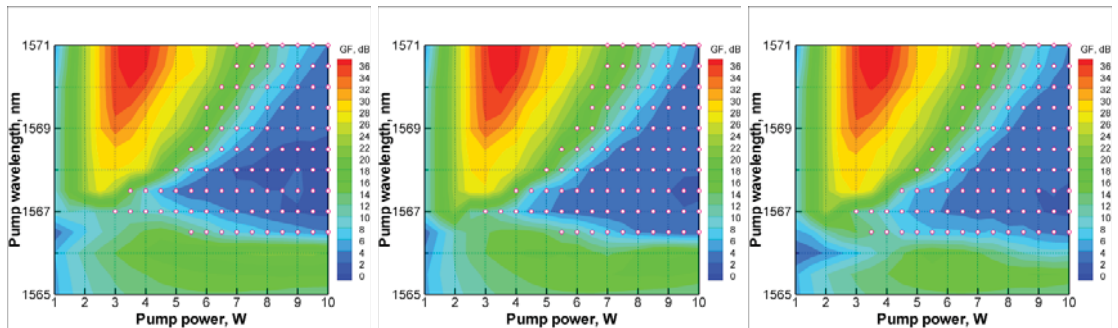


Рис. 9. Линии уровня параметра  $G_f$  в плоскости параметров мощности накачки  $P_p$  и длины волны накачки  $\lambda_p$ .  $\beta_4=6 \cdot 10^{-4}$  пс<sup>4</sup>·км<sup>-1</sup> (слева),  $\beta_4=2 \cdot 10^{-4}$  пс<sup>4</sup>·км<sup>-1</sup> (в центре),  $\beta_4=8 \cdot 10^{-5}$  пс<sup>4</sup>·км<sup>-1</sup> (справа),  $L=0,2$  км.

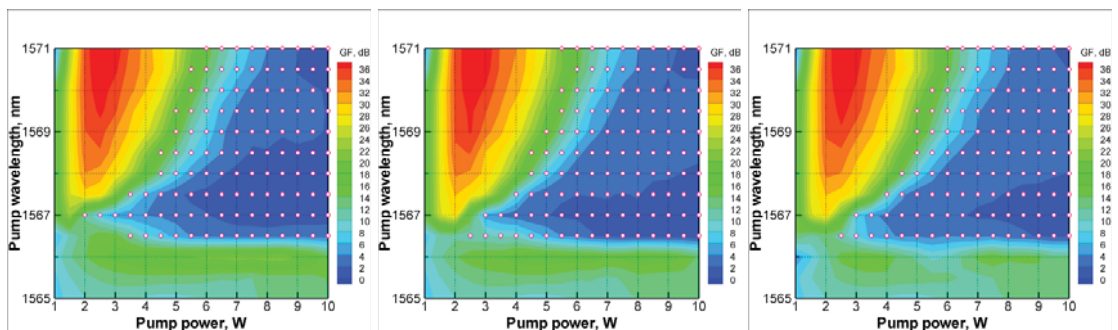


Рис. 10. Линии уровня параметра  $G_f$  в плоскости параметров мощности накачки  $P_p$  и длины волны накачки  $\lambda_p$ .  $\beta_4=6 \cdot 10^{-4}$  пс<sup>4</sup>·км<sup>-1</sup> (слева),  $\beta_4=2 \cdot 10^{-4}$  пс<sup>4</sup>·км<sup>-1</sup> (в центре),  $\beta_4=8 \cdot 10^{-5}$  пс<sup>4</sup>·км<sup>-1</sup> (справа),  $L=0,3$  км.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье представлены результаты математического моделирования волоконно-оптических параметрических усилителей с одинарной накачкой на основе высоконелинейного волокна. Математическая модель для описания процесса параметрического усиления оптического сигнала в виде системы со спектральным уплотнением каналов основана на нелинейном уравнении Шрёдингера для комплексной огибающей амплитуды электромагнитного поля. Для получения численного решения использовался метод расщепления по физическим процессам.

Проведено исследование зависимости профиля спектра параметрического усиления от мощности волны накачки, отстройки длины волны накачки от длины волны нулевой дисперсии, дисперсионного параметра 4-го порядка и длины высоконелинейного волокна. Установлено, что с ростом мощности накачки выше некоторого порогового значения происходит насыщение усиления. Показано, что для получения широкого и плоского спектра усиления в диапазоне длин волн C-band необходимо, чтобы длина волны накачки была на несколько нанометров больше длины волны нулевой дисперсии. Кроме того, установлено, что с помощью увеличения длины волокна

можно уменьшить требуемую мощность накачки и улучшить плоскостность спектра усиления.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено при поддержке проекта №14.В25.31.0003 (Министерство образования и науки Российской Федерации), а также при поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-01-31160.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Marhic M.E., Rieznik A.A., Fragnito H.L. Investigation of the gain spectrum near the pumps of two-pump fiber-optic parametric amplifiers. *J. Opt. Soc. Am. B*. Vol.25(1). 2008. P.22-30
- [2] Herrmann D. et al. Investigation of two-beam-pumped noncollinear optical parametric chirped-pulse amplification for the generation of few-cycle light pulses. *Optics Express*. Vol.18(5). 2010. P.4170-4183.
- [3] Braimiotis C., Marhic M.E., Rieznik A. Mitigating PMD in Fiber Optical Parametric Amplifiers With Alternating Fiber Twists. *IEEE Journal of Quantum Electronics*. Vol.45(11). 2009. P.1344-1349.
- [4] Sylvestre T. et al. System Performances of Fiber Optical Parametric Amplifiers. *Fiber and Integrated Optics*. Vol.27(6). 2008. P.516-531.
- [5] Boggio J.M.C., Marconi J.D., Fragnito H.L. Double-Pumped Fiber Optical Parametric Amplifier With Flat Gain Over 47-nm Bandwidth Using a Conventional Dispersion-Shifted Fiber. *IEEE Photonics Technology Letters*. Vol.17(9). 2005. P.1842-1844.
- [6] Marhic M.E. *Fiber Optical Parametric Amplifiers, Oscillators and Related Devices*. United Kingdom: Cambridge University Press. 2008
- [7] Ablowitz M.J., Ladik J.F. A Nonlinear Difference Scheme and Inverse Scattering. *Studies in Applied Mathematics*. Vol.55. 1976. P.213-229.
- [8] Taha T.R., Ablowitz M.J. Analytical and Numerical Aspects of Certain Nonlinear Evolution Equations Part II: Numerical Nonlinear Schrodinger Equation. *Journal of Computational Physics*. Vol.55(2). 1984. P.203-230.
- [9] Паасонен В.И., Федорук М.П. Компактная безытерационная схема с искусственной диссипацией для нелинейного уравнения Шрёдингера. *Вычислительные технологии*. Т.17(3). 2012. С.83-90.
- [10] Delfour M., Fortin M., Payre G. Finite-Difference Solutions of a Nonlinear Schrodinger Equation. *Journal of Computational Physics*. Vol.44(2). 1981. P.277-288.
- [11] Яненко Н.Н. *Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики*. Новосибирск: Наука. 1967.
- [12] Hardin R.H., Tappert F.D. Applications of the Split-Step Fourier Method to the Numerical Solution of Nonlinear and Variable Coefficient Wave Equations. *SIAM Review*. Vol.15(2). 1973. P.423.
- [13] Марчук Г.И. *Методы расщепления*. Москва: Наука. 1988.

## ON EXISTENCE OF CAUCHY PROBLEMS SOLUTIONS FOR LOADED PARABOLIC EQUATIONS AND SYSTEMS OF SPECIAL FORM

*The sufficient conditions of the existence of solution in classes of smooth bounded functions for the Cauchy problem for two-dimensional loaded parabolic equation of special form (coefficients at the highest term, at the lowest term, and at the right side depend on unknown functions and their derivatives), for the problem for the one-dimensional equation of the Burgers-type (a nonlinear equation for the function solution of the lower derivatives in the space variable) with the Cauchy data and for the system of the one-dimensional equations of special type with the Cauchy data are given in the paper. The method of weak approximation is used to the proof.*

### INTRODUCTION

This article is devoted to an attempt to generalize the algorithm to study the solvability of sufficiently broad class of an auxiliary direct problems for one- and two-dimensional coefficient inverse problems for parabolic equations and systems of parabolic equations in unbounded domains with Cauchy data.

The problems of a special type for the loaded (containing traces of unknown functions and their derivatives) two-dimensional parabolic equation, one-dimensional equation of the Burgers-type and one-dimensional system of parabolic equations are constructed in this work.

The question of the solution existence of the Cauchy problems for the above equations (or systems) was investigated. These auxiliary direct problems can be reduced to coefficient inverse problems with Cauchy data using overdetermination conditions (some additional information about the solution) assigned at fixed hyperplanes or hypersurfaces. Examples of studying of such algorithms of inverse problems can be found in [1 - 5]. There are other approaches that will reduce to the inverse problem of the non-linear unloaded equation or to the integrodifferential equation (see, e.g. [6 - 8]).

It is necessary know under what conditions the auxiliary problems are solvable, as well as to know the properties of their solutions. The sufficient conditions for the existence of solution of the problems are given in this article. To prove the existence of solutions of the given problems a method of weak approximation is used, which is known as the method of splitting on differential level [9,10].

### PROBLEM 1. STUDY LOADED TWO-DIMENSIONAL EQUATION OF A SPECIAL FORM

#### Problem definition

In space  $E_1$  of variables  $x$  choose  $r$  different points  $\alpha_k$ ,  $k = 1, \dots, r$ . Just the way in space  $E_1$  of variables  $z$  choose  $s$  different points  $\beta_m$ ,  $m = 1, \dots, s$ .

Consider in the strip  $G_{[0,T]} = \{(t, x, z) | 0 \leq t \leq T, x \in E_1, z \in E_1\}$  Cauchy problem for loaded (containing traces of unknown functions and their derivatives) non-classical parabolic equation

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x, z) = a_1(t, x, \bar{w}_0(t))u_{xx} + a_2(t, z, \bar{w}_0(t))u_{zz} + b_1(t, x, z, \bar{w}_0(t))u_x + b_2(t, x, z, \bar{w}_0(t))u_z + \quad (1)$$

$$+ f(t, x, z, u, \bar{w}_0(t), \bar{w}_1(t, x), \bar{w}_2(t, z)),$$

$$u(0, x, z) = u_0(x, z). \quad (2)$$

Let's denotes the vector-function through

$$\bar{w}_0(t) = \left( u(t, \alpha_k, \beta_m), \frac{\partial^{j_1+j_2}}{\partial x^{j_1} \partial z^{j_2}} u(t, \alpha_k, \beta_m) \right), \quad k = \overline{1, r}, \quad m = \overline{1, s}, \quad j_1 = 0, 1, \dots, p_1, \quad j_2 = 0, 1, \dots, q_1,$$

<sup>1</sup> Institute of Mathematics and Computer Science SFU, Krasnoyarsk, Russia

components of which are the traces (depending only on the variable  $t$ ) of function  $u(t, x, z)$  and all its derivatives with respect to  $x$  up to order  $p_1$  and to  $z$  up including the order of  $q_1$ .

The vector-function

$$\bar{w}_1(t, x) = \left( u(t, x, \beta_m), \frac{\partial^{j_2}}{\partial z^{j_2}} u(t, x, \beta_m) \right), \quad m = \overline{1, s}, \quad j_2 = 0, 1, \dots, q_1,$$

consists of the traces (depending only on the variables  $t, x$ ) of function  $u(t, x, z)$  and all its derivatives with respect to  $z$  up including the order of  $q_1$ .

Similarly, the vector-function

$$\bar{w}_2(t, z) = \left( u(t, \alpha_k, z), \frac{\partial^{j_1}}{\partial x^{j_1}} u(t, \alpha_k, z) \right), \quad k = \overline{1, r}, \quad j_1 = 0, 1, \dots, p_1,$$

consists of the traces (depending only on the variables  $t, z$ ) of function  $u(t, x, z)$  and all its derivatives with respect to  $x$  up including the order of  $p_1$ .

We choose and fix  $p \geq \max\{2, p_1\}$ ,  $q \geq \max\{2, q_1\}$ .

**Definition 1.** Let's denote set of functions  $u(t, x, z)$ , defined in  $G_{[0, t^*]}$ , belonging to class

$$C_{t, x, z}^{1, p, q} \left( G_{[0, t^*]} \right) = \left\{ u(t, x, z) \left| \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^{j_1 + j_2} u}{\partial x^{j_1} \partial z^{j_2}} \in C \left( G_{[0, t^*]} \right), \quad j_1 = \overline{0, p}, \quad j_2 = \overline{0, q} \right\},$$

limited at  $(t, x, z) \in G_{[0, t^*]}$  with all its derivatives appearing in the equation (1),

$$\sum_{j_1=0}^p \sum_{j_2=0}^q \left| \frac{\partial^{j_1 + j_2}}{\partial x^{j_1} \partial z^{j_2}} u(t, x, z) \right| \leq C, \quad \text{through } Z_{x, z}^{p, q}([0, t^*]).$$

**Definition 2.** A classical solution of the problem (1), (2) in domain  $G_{[0, t^*]}$  is the function  $u(t, x, z) \in Z_{x, z}^{p, q}([0, t^*])$ , which satisfies (1), (2) in  $G_{[0, t^*]}$ .

Where  $0 < t^* \leq T$  is a fixed constant. If  $t^*$  depends on the constant that limit the input date and  $t^* \leq T$ , then  $u(t, x, z)$  is a solution of problem (1), (2) in small time interval (or solution "in small"). If  $t^*$  is fixed and  $t^* = T$  for any set of input data that satisfy the condition of solvability, then  $u(t, x, z)$  is a solution of problem (1), (2) in the whole time interval (or will use term "global solvability").

### Basic result

Suppose that the following conditions are true.

**Condition 1.1.** The functions  $a_1, a_2, b_1, b_2$  are real-valued functions that are defined and continuous for all values of their arguments. The functions  $a_1, a_2$  satisfy conditions  $a_1 \geq a_0 > 0$ ,  $a_2 \geq a_0 > 0$ . For any  $t_1 \in (0, T]$  and any function  $u(t, x, z) \in Z_{x, z}^{p+2, q+2}([0, t_1])$  these functions, as functions of variables  $(t, x, z) \in G_{[0, t_1]}$ , are continuous and have continuous derivatives involved in relationship

$$\begin{aligned} & \sum_{j_1=0}^{p+2} \left| \frac{\partial^{j_1}}{\partial x^{j_1}} a_1(t, x, \bar{w}_0(t)) \right| + \sum_{j_2=0}^{q+2} \left| \frac{\partial^{j_2}}{\partial z^{j_2}} a_2(t, z, \bar{w}_0(t)) \right| + \\ & + \sum_{j_1=0}^{p+2} \sum_{j_2=0}^{q+2} \left( \left| \frac{\partial^{j_1 + j_2}}{\partial x^{j_1} \partial z^{j_2}} b_1(t, x, z, \bar{w}_0(t)) \right| + \left| \frac{\partial^{j_1 + j_2}}{\partial x^{j_1} \partial z^{j_2}} b_2(t, x, z, \bar{w}_0(t)) \right| \right) \leq P_{\gamma_1}(U(t)); \end{aligned} \quad (3)$$

**Condition 1.2.** The function  $u_0$  is a real-valued function and has continuous derivatives involved in the relationship and satisfies this relation

$$\sum_{j_1=0}^{p+2} \sum_{j_2=0}^{q+2} \left| \frac{\partial^{j_1 + j_2}}{\partial x^{j_1} \partial z^{j_2}} u_0(x, z) \right| \geq \tilde{C};$$

**Condition 1.3.** The function  $f$  is a real-valued function, defined and continuous for all values of their

arguments. For any  $t_1 \in (0, T]$  and any function  $u(t, x, z) \in Z_{x,z}^{p+2, q+2}([0, t_1])$  this function, as function of variables  $(t, x, z) \in G_{[0, t_1]}$ , is continuous and has continuous derivatives involved in relationship

$$\sum_{j_1=0}^{p+2} \sum_{j_2=0}^{q+2} \left| \frac{\partial^{j_1+j_2}}{\partial x^{j_1} \partial z^{j_2}} f(t, x, z, u, \bar{w}_0(t), \bar{w}_1(t), \bar{w}_2(t)) \right| \leq P_{\gamma_2}(U(t)). \quad (4)$$

In conditions 1.1 and 1.3,  $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$  are some fixed integers,  $P_\zeta(y) = \tilde{C}(1 + y + \dots + y^\zeta)$ ,  $\tilde{C} > 1$  - constant independent of the function  $u(t, x, z)$  and its derivatives,

$$U(t) = \sum_{j_1=0}^{p+2} \sum_{j_2=0}^{q+2} \sup_{0 < \xi \leq t} \sup_{(x,z) \in E_2} \left| \frac{\partial^{j_1+j_2}}{\partial x^{j_1} \partial z^{j_2}} u(\xi, x, z) \right|, \quad u(t, x, z) \in Z_{x,z}^{p+2, q+2}([0, t_1]).$$

The following theorem is proved in [11].

**Theorem (existence) 1.** Let the conditions 1.1 - 1.3 be valid.

**[1a]** If in the equation (1) the coefficients  $a_i, b_i$  are independent of the space variables:

$$a_1 = a_1(t, \bar{w}_0(t)), \quad a_2 = a_2(t, \bar{w}_0(t)), \quad b_1 = b_1(t, \bar{w}_0(t)), \quad b_2 = b_2(t, \bar{w}_0(t)),$$

and conditions 1.1, 1.3 are satisfy for  $\gamma_1 \geq 0, \quad 0 < \gamma_2 \leq 1$ , then the classical solution  $u(t, x, z)$  of the problem (1), (2) exists in class  $Z_{x,z}^{p,q}([0, T])$ .

**[1b]** If the coefficients  $a_i, b_i$  have the same form as in case 1a, and conditions 1.1, 1.3 valid for  $\gamma_1 \geq 0, \quad \gamma_2 > 1$ , then a constant  $t^* \quad 0 < t^* \leq T$ , exists and depends on the constant  $\tilde{C}$  from (3), (4), such that the classical solution  $u(t, x, z)$  of the problem (1), (2) exists in class  $Z_{x,z}^{p,q}([0, t^*])$ .

**[2a]** If in the equation (1) the coefficients  $a_i, b_i$  have the forms:

$$a_1 = a_1(t, x, \bar{w}_0(t)), \quad a_2 = a_2(t, z, \bar{w}_0(t)), \quad b_1 = b_1(t, x, z, \bar{w}_0(t)), \quad b_2 = b_2(t, x, z, \bar{w}_0(t)),$$

and conditions 1.1, 1.3 are satisfy for  $\gamma_1 = 0, \quad 0 < \gamma_2 \leq 1$ , then the classical solution  $u(t, x, z)$  of the problem (1), (2) exists in class  $Z_{x,z}^{p,q}([0, T])$ .

**[2b]** If the coefficients  $a_i, b_i$  have the same form as in case 2a, and conditions 1.1, 1.3 are true for  $\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 > 1$ , then a constant  $t^* \quad 0 < t^* \leq T$ , exists and depends on the constant  $\tilde{C}$  from (3), (4), such that the classical solution  $u(t, x, z)$  of the problem (1), (2) exists in class  $Z_{x,z}^{p,q}([0, t^*])$ .

## PROBLEM 2. STUDY LOADED ONE-DIMENSIONAL EQUATION OF BURGERS TYPE

### Problem definition

In space  $E_1$  choose  $r$  different points  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ . In the strip  $G_{[0, T]} = \{(t, x) | 0 \leq t \leq T, x \in E_1\}$  Cauchy problem is considered:

$$u_t(t, x) = a(t)u_x + b(t, x, u, \bar{w}(t))u_x + f(t, x, u, \bar{w}(t)), \quad (5)$$

$$u(0, x) = u_0(x). \quad (6)$$

Let's denotes the vector-function through

$$\bar{w}(t) = \left( u(t, \alpha_k), \frac{\partial^j}{\partial x^j} u(t, \alpha_k) \right), \quad k = \overline{1, r}, \quad j = \overline{0, p_1},$$

components of which are the traces (depending only on the variable  $t$ ) of function  $u(t, x)$  and all its derivatives with respect to  $x$  up to order  $p_1$ .

**Definition 3.** Let's denotes set of functions  $u(t, x)$ , defined in  $G_{[0, t^*]}$ , belonging to class

$$C_{t,x}^{1,p}(G_{[0, t^*]}) = \left\{ u(t, x) \left| \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^j u}{\partial x^j} \in C(G_{[0, t^*]}), \quad j = \overline{0, p}, \right. \right\},$$

limited at  $(t, x) \in G_{[0, t^*]}$  with the following derivatives



$$\sum_{j=0}^p \left| \frac{\partial^j}{\partial x^j} u(t, x) \right| \leq C, \quad (7)$$

through  $Z_x^p([0, t^*])$ , where  $p \geq \max\{2, p_1\}$  is a fixed constant.

**Definition 4.** A classical solution of the problem (5), (6) in  $G_{[0, t^*]}$  is the function  $u(t, x) \in Z_x^p([0, t^*])$ , which satisfies (5), (6) in  $G_{[0, t^*]}$ .

Where  $0 < t^* \leq T$  is a fixed constant.

### Basic result

Suppose that the following conditions are valid.

**Condition 2.1.** The functions  $b(t, x, u, \bar{w}(t))$ ,  $f(t, x, u, \bar{w}(t))$ ,  $u_0(x)$  are real-valued functions that are defined and continuous for all values of their arguments. For any  $t_1 \in (0, T]$  and any function  $u(t, x) \in Z_x^{p+2}([0, t_1])$  these functions, as functions of variables  $(t, x) \in G_{[0, t_1]}$ , are continuous and have continuous derivatives involved in relationship (7).

The function  $a \geq a_0 > 0$  is continuous bounded function on the interval  $[0, T]$ . The function  $u_0(x)$  has continuous derivatives involved in relationship and satisfies

$$\sum_{j=0}^{p+2} \left| \frac{d^j}{dx^j} u_0(x) \right| \leq \tilde{C}.$$

**Condition 2.2.** Let's introduce some notation

$$U_j(0) = \sup_{x \in E_1} \left| \frac{d^j}{dx^j} u_0(x) \right|, \quad U_j(t) = \sup_{0 < \xi \leq t} \left| \frac{\partial^j}{\partial x^j} u(\xi, x) \right|, \quad U(0) = \sum_{j=0}^{p+2} U_j(0), \quad U(t) = \sum_{j=0}^{p+2} U_j(t).$$

Let's  $\forall t_1 \in (0, T], \forall t \in [0, t_1]$  the following estimates are hold:

$$\sum_{j=0}^{p+2} \left| \frac{\partial^j}{\partial x^j} b(t, x, u(t, x), \bar{w}(t)) \right| \leq P_{\gamma_1}(U(t)), \quad \sum_{j=0}^{p+2} \left| \frac{\partial^j}{\partial x^j} f(t, x, u(t, x), \bar{w}(t)) \right| \leq P_{\gamma_2}(U(t)), \quad (8)$$

where  $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$  are some fixed integers,  $P_\gamma(y) = \tilde{C}(1 + y + \dots + y^\gamma)$ ,  $\tilde{C} > 1$  - constant independent of the function  $u(t, x)$  and its derivatives.

**Theorem (existence) 2.** Let the conditions 2.1 and 2.2 are satisfied for  $\gamma_1 \geq 0, 0 \leq \gamma_2 \leq 1$ , then a constant  $t^* \in (0, T]$ , exists, which depends on the constant  $a_0, \tilde{C}$  from condition 2.1 and relationships (8), such that the classical solution  $u(t, x)$  of the problem (5), (6) exists in class  $Z_x^p([0, t^*])$ .

The proof is carried out using the method of splitting on the differential level.

## PROBLEM 3. STUDY THE PROBLEM FOR A SYSTEM OF ONE-DIMENSIONAL LOADED PARABOLIC EQUATIONS WITH CAUCHY DATA

### Problem definition

In space  $E_1$  of variables  $x$  choose  $r$  different points  $\alpha_k, k = \overline{1, r}$ .

Consider in the strip  $G_{[0, T]} = \{(t, x) | 0 \leq t \leq T, x \in E_1\}$  Cauchy problem for system of loaded non-classical parabolic equations

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= a_1(t, \bar{\varphi}_u(t), \bar{\varphi}_v(t)) u_{xx} + b_1(t, \bar{\varphi}_u(t), \bar{\varphi}_v(t)) u_x + f_1(t, x, u, v, \bar{\varphi}_u(t), \bar{\varphi}_v(t)), \\ v_t(t, x) &= a_2(t, \bar{\varphi}_u(t), \bar{\varphi}_v(t)) v_{xx} + b_2(t, \bar{\varphi}_u(t), \bar{\varphi}_v(t)) v_x + f_2(t, x, u, v, \bar{\varphi}_u(t), \bar{\varphi}_v(t)), \end{aligned} \quad (9)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x). \quad (10)$$

Let's denotes the vector-functions through

$$\overline{\varphi}_u(t) = \left( u(t, \alpha_k), \frac{\partial^j}{\partial x^j} u(t, \alpha_k) \right), \quad \overline{\varphi}_v(t) = \left( v(t, \alpha_k), \frac{\partial^j}{\partial x^j} v(t, \alpha_k) \right), \quad k = \overline{1, r}, \quad j = 0, 1, \dots, p_1,$$

components of which are the traces (depending only on the variable  $t$ ) of functions  $u(t, x)$ ,  $v(t, x)$  and all their derivatives with respect to  $x$  up including the order  $p_1$ .

**Definition 5.** Let's denote set of functions  $u(t, x)$ ,  $v(t, x)$ , defined in  $G_{[0, t^*]}$ , belonging to class

$$C_{t,x}^{1,p} \left( G_{[0, t^*]} \right) = \left\{ \psi(t, x) \left| \frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial^j \psi}{\partial x^j} \in C \left( G_{[0, t^*]} \right), \quad j = \overline{0, p} \right\},$$

limited at  $(t, x) \in G_{[0, t^*]}$  with the following derivatives

$$\sum_{j=0}^p \left( \left| \frac{\partial^j}{\partial x^j} u(t, x) \right| + \left| \frac{\partial^j}{\partial x^j} v(t, x) \right| \right) \leq C, \quad (11)$$

through  $Z_x^p([0, t^*])$ , where  $p \geq \max\{2, p_1\}$  is a fixed constant.

**Definition 6.** A classical solution of the problem (9), (10) in  $G_{[0, t^*]}$  is the pair of functions  $\{u(t, x), v(t, x)\} \in Z_x^p([0, t^*])$ , which satisfies (9), (10) in  $G_{[0, t^*]}$ .

Where  $0 < t^* \leq T$  is a fixed constant.

### Basic result

Suppose that the following conditions.

**Condition 3.1.** The functions  $a_1, a_2, b_1, b_2$  are real-valued functions that are defined and continuous for all values of their arguments. The functions  $a_1, a_2$  satisfy conditions  $a_1 \geq a_0 > 0, a_2 \geq a_0 > 0$ . For any  $t_1 \in (0, T]$  and any function  $u(t, x), v(t, x) \in Z_x^{p+2}([0, t_1])$  these functions, as functions of variables  $(t, x) \in G_{[0, t_1]}$ , are continuous and have continuous derivatives involved in relationship

$$\left| a_1(t, \overline{\varphi}_u(t), \overline{\varphi}_v(t)) \right| + \left| a_2(t, \overline{\varphi}_u(t), \overline{\varphi}_v(t)) \right| + \left| b_1(t, \overline{\varphi}_u(t), \overline{\varphi}_v(t)) \right| + \left| b_2(t, \overline{\varphi}_u(t), \overline{\varphi}_v(t)) \right| \leq P_{\gamma_1}(S(t)); \quad (12)$$

**Condition 3.2.** The functions  $u_0, v_0$  are real-valued functions and have continuous derivatives involved in the relationship and satisfy

$$\sum_{j=0}^{p+2} \left( \left| \frac{d^j}{dx^j} u_0(x) \right| + \left| \frac{d^j}{dx^j} v_0(x) \right| \right) \leq \tilde{C};$$

**Condition 3.3.** The functions  $f_1, f_2$  are real-valued functions defined and continuous for all values of their arguments. For any  $t_1 \in (0, T]$  and any function  $u(t, x), v(t, x) \in Z_x^{p+2}([0, t_1])$  this function, as function of variables  $(t, x) \in G_{[0, t_1]}$ , is continuous and has continuous derivatives involved in relationship

$$\sum_{j=0}^{p+2} \left( \left| \frac{\partial^j}{\partial x^j} f_1(t, x, u, v, \overline{\varphi}_u(t), \overline{\varphi}_v(t)) \right| + \left| \frac{\partial^j}{\partial x^j} f_2(t, x, u, v, \overline{\varphi}_u(t), \overline{\varphi}_v(t)) \right| \right) \leq P_{\gamma_2}(S(t)); \quad (13)$$

In conditions 3.1 and 3.3,  $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$  are some fixed integers,  $P_{\gamma}(y) = \tilde{C}(1 + y + \dots + y^{\gamma})$ ,  $\tilde{C} > 1$  - constant independent of the functions  $u(t, x)$ ,  $v(t, x)$  and its derivatives,

$$S(t) = \sum_{j=0}^{p+2} \left( \sup_{0 < \xi \leq t} \sup_{x \in E_1} \left| \frac{\partial^j}{\partial x^j} u(\xi, x) \right| + \sup_{0 < \xi \leq t} \sup_{x \in E_1} \left| \frac{\partial^j}{\partial x^j} v(\xi, x) \right| \right), \quad u(t, x), v(t, x) \in Z_x^{p+2}([0, t_1]).$$

**Theorem (existence) 3.** Let the conditions 3.1-3.3 are true.

**[a]** If conditions 3.1, 3.3 are satisfied for  $\gamma_1 \geq 0, 0 < \gamma_2 \leq 1$ , then the classical solution of the problem (9), (10)  $\{u(t, x), v(t, x)\}$  exists in class  $Z_x^p([0, t^*])$ .

**[b]** If conditions 3.1, 3.3 are valid for  $\gamma_1 \geq 0, \gamma_2 > 1$ , then a constant  $t^*, 0 < t^* \leq T$ , exists, which depends on the constant  $\tilde{C}$  from (11), (13), such that the classical solution  $\{u(t, x), v(t, x)\}$  of the problem

(9), (10) exists in class  $Z_x^p([0, t^*])$ .

### EXAMPLE

As an example, we consider the inverse problem for the Burgers-type equation. In the strip  $G_{[0, T]} = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq T, x \in E_1\}$  Cauchy problem is considered:

$$u_t(t, x) = a^2 u_{xx} + u^\alpha u_x + \lambda(t) f(t, x), \quad u(0, x) = u_0(x), \quad (14)$$

here  $\alpha \geq 1$  is a the whole constant. Coefficient  $\lambda(t)$  should be determined simultaneously with the solution of the problem  $u(t, x)$ . The overdetermination conditions are  $u(t, 0) = \varphi(t)$  and consistency conditions are  $\varphi(0) = u_0$ .

We choose  $p = 2$  from definition 3, then we demand of the initial data

$$|f(t, 0)| \geq \delta > 0, \quad |\varphi(t)| + |\varphi'(t)| + \sum_{k=0}^4 \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(t, x) \right| + \sum_{k=0}^4 \left| \frac{d^k}{dx^k} u_0(x) \right| \leq C. \quad (15)$$

The direct problem has the form of

$$u_t(t, x) = a^2 u_{xx} + u^\alpha u_x + \frac{\varphi'(t) - u_{xx}(t, 0) - \varphi^\alpha(t) u_x(t, 0)}{f(t, 0)} f(t, x), \quad u(0, x) = u_0(x). \quad (16)$$

In this example the functions from equation (5) have the form of

$$b(t, x, u, w(t)) = u^\alpha, \quad f(t, x, u, w(t)) = \frac{\varphi'(t) - u_{xx}(t, 0) - \varphi^\alpha(t) u_x(t, 0)}{f(t, 0)} f(t, x).$$

Conditions 2.1 and 2.2 are hold by (15), in condition 2.2  $\gamma_1 = \alpha$ .

$$\sum_{k=0}^4 \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left( \frac{\varphi'(t) - u_{xx}(t, 0) - \varphi^\alpha(t) u_x(t, 0)}{f(t, 0)} f(t, x) \right) \right| \leq \frac{C + U(t) + CU(t)}{\delta} C \leq C(1 + U(t)). \quad (17)$$

According to (17) in condition 2.2  $\gamma_2 = 1$ . The conditions of theorem 2 are hold, therefore, there exists a constant  $t^* > 0$ ,  $0 < t^* \leq T$ , which depends on the constants limiting the input data, such that the classical solution  $u(t, x)$  of the direct problem (16) exists in class  $Z_x^2([0, t^*])$ .

### ACKNOWLEDGEMENTS

The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (No. 12-01-31033).

### REFERENCES

- [1] Yu.Ya.Below, I.V.Frolenkov. Some identification problems of the coefficients in semilinear parabolic equations, *Doclady Mathematics*, 404(2005), №5, 583-585 (Russian).
- [2] I.V.Frolenkov, E.N.Kruger. An identification problem of the source function of the special form in two-dimensional parabolic equation, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 3(2010), №4, 556-564 (Russian).
- [3] I.V.Frolenkov, E.N.Kruger. An identification problem of coefficient in the special form at source function for multi-dimensional parabolic equation with Cauchy data, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 6(2013), №2, 186-199.
- [4] Yu.Ya.Below, K.V.Korshun. An identification problem of the source function for the Burgers equation, *J. Sib. Fed.University. Math. Phys.* 5 (2012), №4, 497-506 (Russian).
- [5] G.A.Spichak, T.N.Shipina. The problems of identification of the coefficients in a nonlinear system of equations of parabolic type // *The International Conference dedicated to the 80th anniversary of the birthday of Academician Mikhail Mikhailovich Lavrent'ev "Inverse and ill-posed problems of mathematical physics "*- Siberian Scientific Publishing House, Novosibirsk, 2012, 108 (Russian).
- [6] Yu.Ya.Below, I.V.Frolenkov. An identification problem of the two coefficients in semilinear ultraparabolic equation, *Joint issue. Computational Technologies. V.8. Part 1. Regional bulletin of the East. Publishing house of East Kazakhstan State University. Ust-Kamenogorsk* (2003), 120-131 (Russian).
- [7] I.V.Frolenkov, G.V.Romanenko. An representation of the solution of the inverse problem for a multidimensional parabolic equation with initial data in the form of a product, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 5(2012), №1, 122-131 (Russian).

- [8] I.V.Frolenkov, G.V.Romanenko. On the solution of the inverse problem for multidimensional parabolic equations, Sib. J. Math., XV(2012), №2(50), 139-146 (Russian).
- [9] Yu.Ya. Belov. Inverse Problems for Partial Differential Equations, Utrecht, VSP, 2002.
- [10] N.N.Yanenko. Fractions steps method for solving multi-dimensional problems of mathematical physics, Novosibirsk, Nauka, 1967 (Russian).
- [11] I.V.Frolenkov, Yu.Ya.Belov. An existence of a solution for the class of loaded two-dimensional parabolic equations with Cauchy data, Nonclassical equation of mathematical physics, collected papers, managing editor A.I.Kozhanov, publishing house of Sobolev institute of mathematics, Novosibirsk, 2012, 262-279 (Russian).

# CENTRALIZED MANAGING PERMISSIONS SYSTEM BASED ON THE ELECTION MULTIBIOMETRIC AUTHENTICATION

## РАЗРАБОТКА ЦЕНТРАЛИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ РАЗГРАНИЧЕНИЯ ПРАВ ДОСТУПА НА ОСНОВЕ ИЗБИРАТЕЛЬНОЙ МНОГОФАКТОРНОЙ БИОМЕТРИЧЕСКОЙ АУТЕНТИФИКАЦИИ

---

*This work aims to develop a prototype system of centralized managing permissions based on the election multi-biometric authentication. The novelty of this work is to develop the principles of distinction and multi-factor authentication, because at the moment there is no such development. Depending on various conditions and factors, including the availability of electronic means and convenience, resistance to attacks and exploits, disease or injury of users can be selected on the basis of biometric authentication of any such biometrics as rhythm password, voice, dynamic signatures and graphics recognition. The results of the software development based on the new approach are showed; in addition, the architecture of system and biometric data transfer protocol are described. The possible attacks on the developed system are analyzed, and the conclusions and recommendations on defenses from these attacks are submitted.*

---

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время актуальной является разработка биометрических систем. Такие системы активно развиваются в течение последних 60 лет. Преимущества биометрических систем очевидны, они имеют большую практическую значимость, что обосновывает важность как теоретических исследований, так и практических разработок. Поэтому данная тема, без сомнения, является актуальной [1].

Разработчики и исследователи биометрических систем предлагают программные реализации на основе, как правило, одной биометрической характеристики без дополнительных инструментов и модулей, что создает проблемы при их использовании и эксплуатации [2]. Однако современные тенденции показывают стремление использовать системный подход для создания мультибиометрических систем аутентификации личности [1, 3, 4]. Под мультибиометрической системой будем понимать систему с использованием нескольких биометрических характеристик человека, которые могут быть интегрированы на разных уровнях и использованы различными способами [1, 5]. Мультибиометрические системы принято разделять на два подкласса: мультимодальные и многофакторные системы аутентификации. В мультимодальных системах биометрические характеристики человека обрабатываются с помощью различных методов, и принятие решение происходит по объединенному решающему правилу для повышения надежности. В многофакторных системах используют не только разные биометрические характеристики, но и другие методы аутентификации, например, PIN-код, пароль, ритм ввода пароля, токены [6].

В зависимости от разных условий и факторов, в частности от доступности электронных средств, от удобства, от стойкости к атакам и уязвимостям, от болезней или увечий пользователей, может быть выбрана биометрическая аутентификация на основе любых таких биометрических характеристик, как ритм ввода пароля, голос, динамика подписи и графическое распознавание. Например, если необходимо разграничить права доступа в изолированном помещении без посторонних, то может быть использована аутентификация по голосу, по ритму ввода пароля или графическому распознаванию. Если помещение наоборот не обладает такими условиями,

---

<sup>1</sup> Chelyabinsk state university, Chelyabinsk, Russia

то аутентификация может быть осуществлена на основе ритма ввода пароля или по динамике подписи. Для осуществления аутентификации в мобильных или сенсорных устройствах может быть выбрана аутентификация по ритму ввода пароля, по динамике подписи или графическому распознаванию. На пропускных пунктах возможна аутентификация по динамике подписи. В настоящее время актуальной является задача разработки универсальных модулей, реализующих разграничение прав доступа на основе биометрической аутентификации [7].

Кроме того, системы разграничения доступа на основе биометрической аутентификации имеют большую практическую значимость и преимущества:

- уникальность, неотъемлемость и неотчуждаемость биометрической характеристики;
- затруднения при проведении атаки подбора по биометрической характеристике;
- независимость от операционной системы и кодировок символов;
- избирательность и многофакторность аутентификации;
- отсутствие ошибок третьего рода, когда невозможно аутентифицировать человека из-за болезней и увечий.

Целью данного проекта была разработка, исследование и реализация централизованной системы разграничения прав доступа на основе избирательной многофакторной биометрической аутентификации с клиент-серверной архитектурой. Для этого необходимо было решить следующие задачи:

- разработка принципов построения системы, архитектуры, протокола взаимодействия;
- разработка и реализация центра и модулей биометрической аутентификации.

## АРХИТЕКТУРА СИСТЕМЫ

В работах [2, 7, 8] был описан разработанный комплекс модулей биометрической аутентификации для разграничения прав доступа в ОС Windows XP на примере текстозависимой верификации диктора [9, 10]. Данный комплекс модулей послужил основой для разработки и реализации централизованной системы разграничения прав доступа на основе избирательной многофакторной биометрической аутентификации. В работе [11] были сформулированы основные принципы, и был создан прототип централизованной системы разграничения прав доступа на основе избирательной многофакторной биометрической аутентификации.

Самым важным аспектом методологии разработки централизованной системы разграничения прав доступа на основе избирательной многофакторной биометрической аутентификации является требование отраслевых стандартов и в частности серии стандартов ГОСТ Р ИСО/МЭК 19784, 19795 и 24709. Стоит отдельно отметить, что в серии российских стандартах ГОСТ Р 52633 содержатся требования к средствам высоконадежной биометрической аутентификации.



Рис. 1. Программная архитектура

На рисунке 1 представлена общая схема биометрической системы аутентификации, где базовыми функциями являются регистрация и сравнение. В ходе регистрации сигнал, полученный при помощи биометрических сканеров или устройств ввода, преобразуется в цифровой шаблон

с помощью специальных процедур параметризации. На этапе сравнения предъявляемые биометрические данные сравниваются с шаблоном регистрации. Результатом сравнения биометрических данных является число, показывающее меру сходства.

В основу собственных разработок были положены работы [3, 4], в которых был предложен подход к созданию высокопроизводительных мультибиометрических технологий и систем на базе сервисно-ориентированной архитектуры, а также методы оптимизации и распараллеливания вычислений в задаче мультибиометрической идентификации.

С целью разработки и реализации централизованной системы разграничения прав доступа на основе избирательной многофакторной биометрической аутентификации были сформулированы требования к ее архитектуре [3]:

- возможность интеграции в рамках одной системы нескольких методов биометрической аутентификации;
- возможность замены и модификации библиотек, в которых реализованы методы биометрической аутентификации;
- гибкость в конфигурировании;
- обеспечение комплексной безопасности и защиты биометрических данных;
- поддержка существующих российских стандартов в сфере биометрических технологий.



Рис. 2. Программная архитектура

Современные разработки [3] изначально учитывают масштабируемость и распределенность архитектуры биометрической системы, в рамках которой используют концепцию сервисно-ориентированной архитектуры. Для такой архитектуры принято разделять внутреннюю логику биометрических приложений на элементарные сервисы [3]:

- вычислительные сервисы, отвечающие за выполнение функций биометрических библиотек, ядро системы;
- сервисы бизнес-логики приложения;
- сервисы хранилища;
- клиентские приложения, «тонкий» клиент терминальных станций;
- вспомогательные сервисы управления, мониторинга, диагностики;
- сервисы сообщений/предоставления интерфейса, отвечающие за обмен информацией между узлами системы;

- сервисы операционной системы, распределенная среда исполнения.

На рисунке 2 приведена схема взаимодействия перечисленных групп сервисов [3].

## ПРОТОКОЛЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Согласно российским стандартам по биометрии, реализация биометрической системы предполагает три типа данных [3]: исходные данные, полученные с устройств ввода; данные, обработанные функциями специализированных библиотек (фильтрация, шумоочистка и т.д.); цифровой шаблон биометрического образца. Кроме этого, функции биометрической системы [3]: регистрация, получение шаблона на основе исходных данных; сравнение двух шаблонов, определение меры сходства; нестандартные функции дополнительной обработки биометрической информации.

Основой для протокола передачи исходных биометрических данных являются стандарты по обмену биометрической информацией. Стандарты серии ITL-1-200х предполагают следующий состав необходимой информации [3]: заголовок; сопроводительная текстовая информация; биометрические образцы; сопроводительная информация по каждому биометрическому образцу.

Учитывая функциональное назначение компонентов, в работе [3] предлагается следующее базовое распределение сервисов и вычислительной нагрузки между клиентским и серверным компонентами системы (см. рисунок 3). В состав клиентского компонента включены: интерфейс пользователя; модуль управления запросами пользователя; биометрические сервисы; интерфейс администратора. В состав серверного компонента включены: сервис сообщений; сервис хранения; биометрические сервисы.

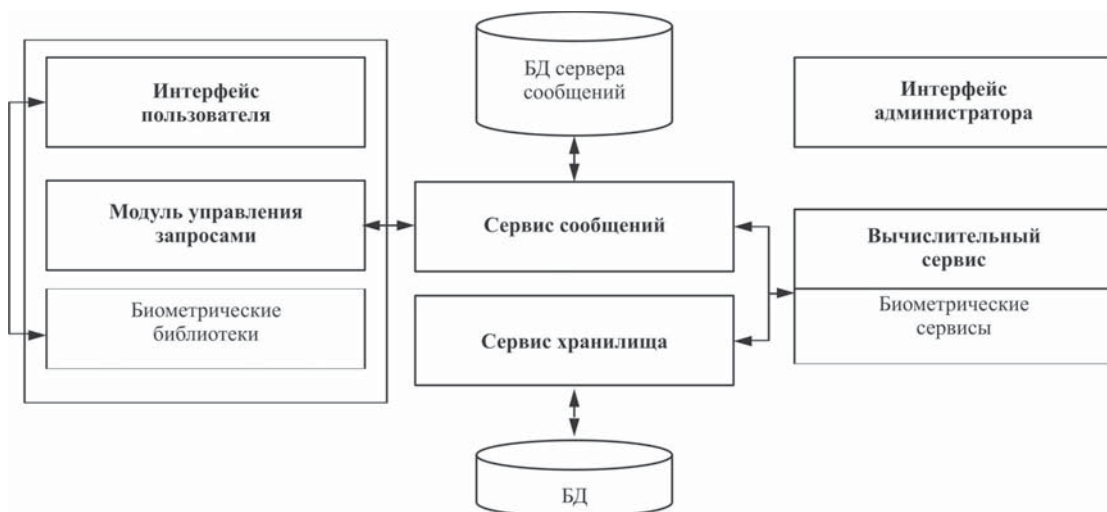


Рис. 3. Программная архитектура [3]

## АТАКИ И ЗАЩИТА БИОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

На основе анализа модели существующих атак и защиты можно сделать вывод, что многие проблемы и атаки предотвращаются с помощью цифрового кодирования, временных меток и шифрования открытого канала передачи данных [12, 13]. В связи с этим система разграничения прав доступа должна быть реализована с клиент-серверной архитектурой, что дает следующие преимущества:

- повышается общая безопасность системы;



- один мощный сервер сможет одновременно обслуживать множество клиентов;
- обеспечивается минимальная нагрузка на компьютер клиента;
- сводится к минимуму количество клиентских настроек;
- сервер можно переносить под любую ОС, а клиентские части останутся неизменными;
- клиентскую часть также можно написать под другую ОС, а сервер останется неизменным.

Клиент-серверная архитектура кроме этого позволяет отделить работу с внешними устройствами, чей интерфейс зачастую не стандартизирован, от основного вычислительного узла, который, в свою очередь, должен быть реализован с учетом требований российских и международных стандартов. На рисунке 4 изображена схема клиент-серверной архитектуры централизованной системы разграничения прав доступа на основе избирательной многофакторной биометрической аутентификации.

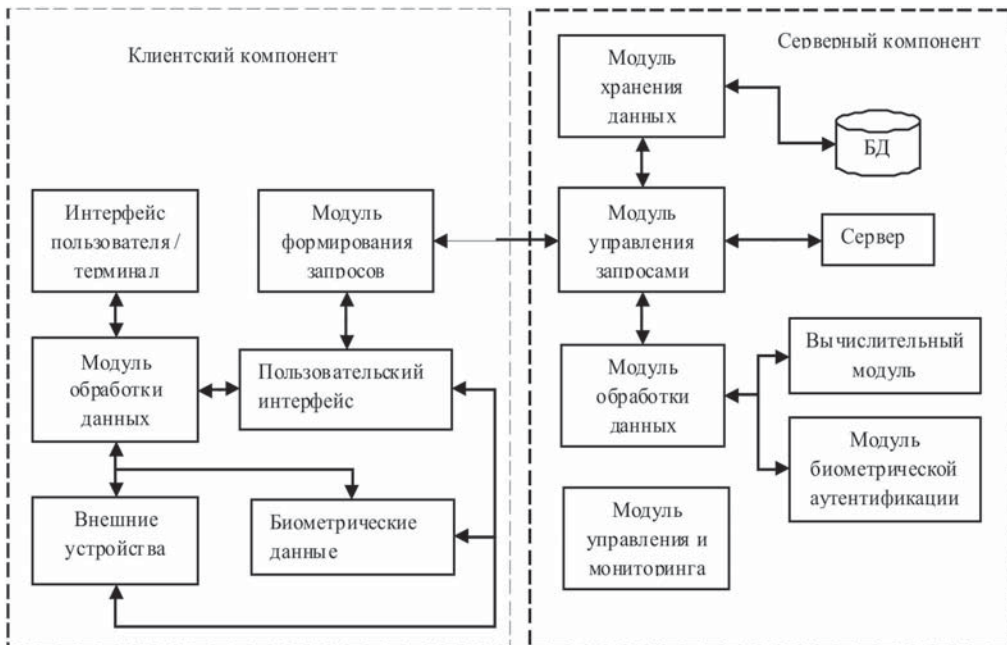


Рис. 4. Клиент-серверная архитектура

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате всей работы был разработан прототип централизованной системы разграничения прав доступа на основе избирательной многофакторной биометрической аутентификации. В зависимости от разных условий и факторов, в частности от доступности электронных средств, от удобства, от стойкости к атакам и уязвимостям, от болезней или увечий пользователей, может быть выбрана биометрическая аутентификация на основе любых таких биометрических характеристик, как ритм ввода пароля, голос, динамика подписи и графическое распознавание.

Важным этапом для реализации такой биометрической системы была разработка архитектуры системы и протокола передачи биометрических данных. Кроме того, был проведен анализ возможных атак на разработанную систему, и сделаны выводы и рекомендации по методам защиты от них.

Однако, существуют направления для дальнейшего развития разработанной системы: обеспечение большей универсальности, применения других биометрических характеристик, увеличения производительности и надежности.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа поддержана грантом РФФИ № 14-07-31049.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Сесин Е.М. Системы идентификации личности, основанные на интеграции нескольких биометрических характеристик человека / Е.М. Сесин, В.М. Белов // Доклады ТУСУРа. №2(25), часть 2. 2012. С. 175-179.
- [2] Ручай А.Н. Текстозависимая верификация диктора: математическая модель, статистические исследования, комплекс программ. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. 144 с.
- [3] Урмаев О.С. Сервисно-ориентированный подход к разработке мультибиометрических технологий // Информатика и ее применения. Т. 2. Вып. 3. 2008. С. 41-53.
- [4] Урмаев О.С. Проблемы распараллеливания биометрических вычислений в крупномасштабных идентификационных системах // Информатика и ее применения. Т. 3. Вып. 1. 2009. С. 8-18.
- [5] Болл Р.М. Руководство по биометрии / Р. М. Болл, Дж. Х. Коннел, Ш. Панканти, Н. К. Ратха, Э. У. Сеньор. М. : Техносфера, 2007. 368 с.
- [6] Ручай А.Н. Усиление парольной аутентификации с помощью проверки ритма ввода пароля / А.Н. Ручай, А.В. Волков // Современные проблемы математики. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2013. С. 235-237.
- [7] Ручай А.Н. Разработка комплекса модулей для разграничения прав доступа в ОС Windows XP на основе биометрической аутентификации // Информационные технологии и системы: материалы Первой междунар. конф. Челябинск: ЧелГУ, 2012. С. 75-76.
- [8] Ручай А.Н. Разработка универсального комплекса модулей для разграничения прав доступа в ОС Windows XP на основе биометрической аутентификации // Безопасность информационных технологий. №2. 2013. С. 74-78.
- [9] Ручай А.Н. Формантный метод текстозависимой верификации диктора // Вестник Челяб. гос. университета. Математика. Механика. Информатика. 2010. №23(204), вып. 12. С. 121-131.
- [10] Ручай А.Н. Улучшение надежности формантного метода текстозависимой верификации диктора с помощью нового метода сегментации сигнала // Доклады ТУСУРа. №2(24). 2011. С. 241-246.
- [11] Ручай А.Н. Прототип централизованной системы разграничения прав доступа на основе избирательной многофакторной биометрической аутентификации // Безопасность информационных технологий. №1. 2013. С. 118-120.
- [12] Ручай А.Н. Модель атак и защиты биометрических систем распознавания диктора // Доклады ТУСУРа. №1(23). 2011. С. 96-100.
- [13] Dunstone T. Biometric system and data analysis: design, evaluation, and data mining / T. Dunstone, N. Yager. Boston, Ma: Springer, 2009. 268 p.

## THE PROBLEM OF NUMERICAL MODELING OF FLOW IN THE EXPANSIBLE CHANNEL

### К ВОПРОСУ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЯ В РАСШИРЯЮЩЕМСЯ КАНАЛЕ

---

*An algorithm for numerical solution of Navier-Stokes equations for two-dimensional motion of a viscous heat-conducting gas is proposed in the paper. The discretization of the equations is performed by a combination of the method of trajectories for the substantive derivative and the finite element method with piecewise-bilinear basis functions for other summands. Results of numerical study of the supersonic flow structure are presented for a flat channel in its step expansion zone for a wide range of Mach and Reynolds numbers. Velocity and pressure fields are investigated, the vortex structure of the circulation flow is studied in the domain after the step.*

---

#### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время стало ясно, что при постановке задач расчета отрывных течений с вихревыми образованиями необходимо использовать не приближенные уравнения пограничного слоя, а полные уравнения Навье-Стокса. Численное решение уравнений Навье-Стокса и сегодня представляет большие трудности, что обусловлено нелинейностью исходных уравнений, наличием областей больших градиентов и других особенностей, возникающих при определенных параметрах и режимах газодинамических течений. Как следствие, это вызывает необходимость разработки и создания специальных численных методов решения этих уравнений. Хотя к настоящему времени разработано много численных алгоритмов и специальных комплексов программ (см. [1-5, 10, 11] и обширную цитируемую литературу в них), проблема создания и применения эффективных численных методов и алгоритмов остаётся актуальной.

Для аппроксимации полной (субстанциональной, или Лагранжевой) производной по времени в каждом уравнении системы используется метод траекторий, который заключается в аппроксимации этой производной с помощью разностной производной назад по времени вдоль траектории движения частицы. Дискретизация по пространству остальных слагаемых уравнений Навье-Стокса на каждом временном слое осуществляется методом конечных элементов с кусочно-билинейными базисными функциями и применением простых квадратурных формул. Для решения систем алгебраических уравнений используется метод Якоби с улучшенным начальным приближением внутри внешних итераций по нелинейности.

Как следует из тестовых расчетов [6], модификация уравнений Навье-Стокса обеспечивает повышение точности приближенного решения по сравнению с погрешностью для немодифицированных уравнений. А применение комбинации методов траекторий и конечных элементов позволяет построить алгоритм, довольно эффективный с вычислительной точки зрения.

#### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим двумерное ламинарное течение газа в плоском канале с расширением в виде уступа на нижней стенке канала при сверхзвуковой скорости потока на входе. Конфигурация расчетной области представлена на рис. 1. Начало введенной системы координат находится в левом нижнем углу в точке  $A$ . Ширина канала в левом входном сечении имеет размер  $h_1$ , а в правом выходном сечении размер  $h_c$ . Высота уступа  $FE$  равна соответственно  $b = h_c - h_1$ , а длина уступа  $c$ . Левая и правая границы расчетной области  $A_1B$  и  $CD$  считаются достаточно удаленными от сече-

---

<sup>1</sup> Institute of Computational Modelling SB RAS, Krasnoyarsk, Russia

ния  $C_1FE$ , поэтому на них можно принять условия, соответствующие невозмущенному течению.

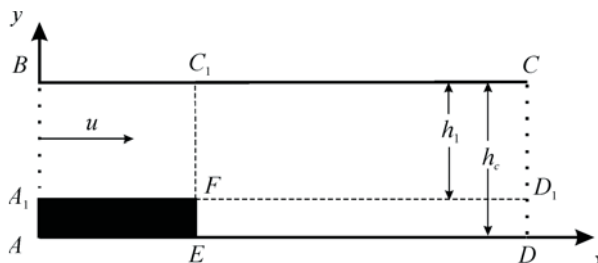


Рис. 1. Канал с уступом

Для описания движения газа используем нестационарные уравнения Навье-Стокса без упрощающих предположений. При введении безразмерных величин за масштаб длины принимается ширина канала  $CD$ ; за масштаб плотности принята плотность в набегающем потоке  $\rho_\infty$ , за масштаб скорости - скорость потока на входе в канал  $u_\infty$ , за масштаб времени - величина  $h_c/u_\infty$ , а за масштаб давления, температуры и внутренней энергии принимаются величины из условия совершенного газа.

Выпишем дифференциальные уравнения двумерного вязкого теплопроводного газа в виде безразмерных уравнений неразрывности, количества движения и уравнения для внутренней энергии

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}, \quad (3)$$

$$\rho \frac{de}{dt} + P \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + \Phi. \quad (4)$$

Здесь  $d(\cdot)/dt$  - субстанциональная, или полная производная, т.е.

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y}, \quad (5)$$

$\rho$  - плотность;  $u$  и  $v$  - проекции вектора скорости на оси  $x$  и  $y$ ;  $P = (\gamma - 1)\rho e$  - давление;  $\mu = (\gamma(\gamma - 1)M^2 e)^\omega$  - динамический коэффициент вязкости;  $e$  - внутренняя энергия. Компоненты тензора напряжений  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yy}$ ,  $\tau_{xy}$ , проекции теплового потока  $q_x$ ,  $q_y$  и диссипативная функция  $\Phi$  выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{2}{3\text{Re}} \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \tau_{yy} = \frac{2}{3\text{Re}} \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\mu}{\text{Re}} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ q_x &= -\frac{\gamma}{\text{Pr Re}} \mu \frac{\partial e}{\partial x}, \quad q_y = -\frac{\gamma}{\text{Pr Re}} \mu \frac{\partial e}{\partial y}, \\ \Phi &= \frac{\mu}{\text{Re}} \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{2}{3} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где  $Re$  - число Рейнольдса,  $Pr$  - число Прандтля,  $\gamma = 1.4$ .

Для завершения постановки задачи зададим начальные и краевые условия. Пусть газ начинает движение слева направо из состояния покоя внутри области, так что  $\rho(0, x, y) = 1$ ,  $u(0, x, y) = 0$ ,  $v(0, x, y) = 0$ . Внутренняя энергия для совершенного газа равна  $e(0, x, y) = (\gamma(\gamma - 1)M^2)^{-1}$ . На входной границе  $A_1B$  на временном интервале  $t \in (0, t_{fin})$  задаются следующие параметры потока:  $\rho|_{A_1B} = 1$ ,  $e|_{A_1B} = (\gamma(\gamma - 1)M^2)^{-1}$ ,  $v|_{A_1B} = 0$ . Пусть  $b_1 = b/h_c$  - безразмерная высота уступа, тогда профиль скорости  $u(t, 0, y)$  на входной границе  $A_1B$  задается следующим образом:

$$u(t, 0, y) = \begin{cases} (b_1 + 2a - y)(y - b_1)/a^2, & y \in (b_1, b_1 + a], \\ 1, & y \in (b_1 + a, 1 - a), \\ (1 - 2a - y)(y - 1)/a^2, & y \in [1 - a, 1), \end{cases} \quad (7)$$

где  $a$  - свободный параметр, который в последующих расчетах брался равным  $1/10$ . Выбранный профиль предназначен для обеспечения непрерывности функции  $u(t, x, y)$  в точках  $A_1$  и  $B$ . В противном случае не только отсутствовала сходимости, но и проявлялись паразитические осцилляции за счет разностного дифференцирования по пространству в окрестностях этих точек. Что касается скачка между нулевыми начальными условиями и значениями в (7) при  $t > 0$ , то используемая монотонная аппроксимация производной по времени приводит к быстрому разглаживанию разрыва со временем.

На неподвижных твердых стенках выполняется условие прилипания  $u|_{\Gamma_s} = 0$  и  $v|_{\Gamma_s} = 0$ , а также условие тепловой изоляции, то есть равенство нулю производной от внутренней энергии по нормали к твердой стенке  $\partial e / \partial n|_{\Gamma_s}$ , где  $\Gamma_s = \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5$  - твердая граница. На выходе из канала в сечении  $CD$  для функций  $u, v, e$  принимаются нулевые условия Неймана, для  $\rho$  нет необходимости ставить дополнительные условия на выходе.

## РЕДУКЦИЯ ИСХОДНЫХ УРАВНЕНИЙ

Преобразуем уравнения (1) и (4) к новому виду. Для этого, учитывая неотрицательность плотности и внутренней энергии, введем функции

$$\rho = \sigma^2, \quad (8)$$

$$e = \varepsilon^2. \quad (9)$$

Итак, далее будем решать систему уравнений, преобразованную к следующему виду:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{2}\sigma \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad (10)$$

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad (11)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\gamma}{Pr Re} \left( \frac{\mu}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) \right) - \frac{\gamma}{Pr Re} \left( \frac{\mu}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) \right) = \\ -\frac{P}{2\varepsilon} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{2Re} \frac{\mu}{\varepsilon} \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{2}{3} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Эту систему замыкают алгебраические соотношения для давления и динамического коэффициента вязкости совершенного газа  $P = P(\sigma, \varepsilon)$ ,  $\mu = \mu(\sigma, \varepsilon)$ .

Предложенная в работе замена искомым функций в уравнениях неразрывности и внутренней энергии переводит закон сохранения массы и полной энергии из терминов пространства  $L_1$  в термины гильбертова пространства  $L_2$ . Впоследствии это значительно упрощает обоснование устойчивости и сходимости [7].

## МЕТОД ТРАЕКТОРИЙ

В качестве области определения задачи возьмем многоугольник  $\Omega$ , ограниченный ломаной  $BCDEFA_1$  с границей  $\Gamma$ , состоящей из шести сегментов:

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \{(x, y) : x \in (0.0, 3.3], y = 1.0\}; \\ \Gamma_2 &= \{(x, y) : x = 3.3, y \in (0.0, 1.0)\}; \\ \Gamma_3 &= \{(x, y) : x \in [1.0, 3.3], y = 0.0\}; \\ \Gamma_4 &= \{(x, y) : x = 1.0, y \in (0.0, 0.25)\}; \\ \Gamma_5 &= \{(x, y) : x \in (0.0, 1.0], y = 0.25\}; \\ \Gamma_6 &= \{(x, y) : x = 0.0, y \in [0.25, 1.0]\}.\end{aligned}$$

В целях упрощения изложения возьмем равномерную квадратную сетку по пространству с координатами  $x_i = ih$ ,  $y_j = jh$ ,  $i = 0, 1, \dots, n+1$ ,  $j = -1, 0, 1, \dots, n_1+1$ , с шагом  $h = 1/n_1$ , целиком укладываемся по горизонтали и вертикали многоугольника  $\Omega$ . Введенная сетка разбивает расчетную область  $\bar{\Omega}$  на квадратные ячейки  $\omega_{i,j} = (x_i, x_{i+1}) \times (y_j, y_{j+1})$ . Обозначим множество узлов этой сетки в прямоугольнике  $BCDA$  через  $S_h = \{s_{i,j} = (x_i, y_j) : i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, n_1\}$  и введем сеточную область  $\bar{\Omega}_h = S_h \cap \bar{\Omega}$ . Обозначим через  $\Omega_h = S_h \cap (\Omega \cup \Gamma_2)$  множество “расчетных узлов”, а через  $\Gamma_h^D = \bar{\Omega}_h \cap (\Gamma \setminus \Gamma_2)$  - множество граничных узлов “известных значений” для компонент скорости. Обозначим также два участка сеточной границы как  $\Gamma_h^{\text{out}} = \bar{\Omega}_h \cap \Gamma_2$  и  $\Gamma_h^{\text{in}} = \bar{\Omega}_h \cap \Gamma_6$ .

Для аппроксимации субстанциональных производных по времени в каждом уравнении системы (10)-(13) используем метод траекторий, который заключается в аппроксимации этой производной с помощью разностной производной назад по времени вдоль траектории, обусловленной уравнением (1) [10]. Для этого введем равномерную сетку по времени с шагом  $\tau = t_{\text{fin}}/m$ :

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_k : t_k = k\tau, k = 0, \dots, m\}.$$

Для произвольной функции  $\varphi(t, x, y)$  мы будем использовать обозначения  $\varphi^k(x, y) = \varphi(t_k, x, y)$  и  $\varphi_{i,j}^k = \varphi(t_k, x_i, y_j)$ .

Итак, субстанциональную производную в уравнении (10) заменим разностной производной с первым порядком аппроксимации [5]:

$$\left. \frac{d\sigma_{i,j}}{dt} \right|_{t_{k+1}} \approx \frac{\sigma_{i,j}^{k+1} - \sigma^k(X_i^k, Y_j^k)}{\tau}, \quad (14)$$

где  $X_i^k = x(t_k)$ ,  $Y_j^k = y(t_k)$  - координаты траектории в момент времени  $t = t_k$ , которая при  $t = t_{k+1}$  проходит через узел  $(x_i, y_j)$ . В принципе, для определения  $(X_i^k, Y_j^k)$  необходимо решить обратную по времени следующую задачу об этой траектории на отрезке  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(t, x(t), y(t)), \\ \frac{dy}{dt} = v(t, x(t), y(t)), \end{cases} \begin{cases} x(t_{k+1}) = x_i, \\ y(t_{k+1}) = y_j. \end{cases}$$

Вместо этого реализуем один шаг по времени явной схемы Эйлера (тоже первого порядка аппроксимации). В итоге получаем приближенные значения

$$X_i^k \approx \bar{X}_i^k = x_i - \tau u_{i,j}^k \text{ и } Y_j^k \approx \bar{Y}_j^k = y_j - \tau v_{i,j}^k.$$

Ясно, что в общем случае координаты  $\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k$  не попадут в узел сетки. Поэтому значение  $\sigma^k(\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k)$  определим путем линейной интерполяции:

$$\begin{aligned} \sigma^k(\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k) &= \sigma_{i,j}^k + \frac{\sigma^k(\bar{x}, y_j) - \sigma_{i,j}^k}{\bar{x} - x_i} (\bar{X}_i^k - x_i) + \frac{\sigma^k(x_i, \bar{y}) - \sigma_{i,j}^k}{\bar{y} - y_j} (\bar{Y}_j^k - y_j) = \\ &= \sigma_{i,j}^k - \tau u_{i,j}^k \frac{\sigma^k(\bar{x}, y_j) - \sigma_{i,j}^k}{\bar{x} - x_i} - \tau v_{i,j}^k \frac{\sigma^k(x_i, \bar{y}) - \sigma_{i,j}^k}{\bar{y} - y_j}, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  выбираются из соображений монотонности разностной аппроксимации:

$$\bar{x} = \begin{cases} x_{i-1}, & \text{если } u_{i,j}^k \geq 0 \\ x_{i+1}, & \text{иначе} \end{cases}, \quad \bar{y} = \begin{cases} y_{j-1}, & \text{если } v_{i,j}^k \geq 0 \\ y_{j+1}, & \text{иначе} \end{cases}.$$

В итоге, монотонность (неположительность внедиагональных элементов) выполняется при условии

$$\tau \leq h \left( |u_{i,j}^k| + |v_{i,j}^k| \right) \text{ для всех узлов } \bar{\Omega}_h = S_h \cap \bar{\Omega}. \quad (16)$$

Итак, субстанциональные производные в уравнениях (10)-(13) аппроксимируются следующим образом:

$$\left. \frac{d\sigma_{i,j}}{dt} \right|_{t_{k+1}} \approx \frac{\sigma_{i,j}^{k+1} - \sigma^k(\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k)}{\tau}, \quad (17)$$

$$\rho_{i,j} \left. \frac{du_{i,j}}{dt} \right|_{t_{k+1}} \approx \rho_{i,j}^{k+1} \frac{u_{i,j}^{k+1} - u^k(\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k)}{\tau}, \quad (18)$$

$$\rho_{i,j} \left. \frac{dv_{i,j}}{dt} \right|_{t_{k+1}} = \rho_{i,j}^{k+1} \frac{v_{i,j}^{k+1} - v^k(\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k)}{\tau}, \quad (19)$$

$$\rho_{i,j} \left. \frac{d\varepsilon_{i,j}}{dt} \right|_{t_{k+1}} = \rho_{i,j}^{k+1} \frac{\varepsilon_{i,j}^{k+1} - \varepsilon^k(\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k)}{\tau}. \quad (20)$$

Значения  $u^k(\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k)$ ,  $v^k(\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k)$  и  $\varepsilon^k(\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k)$  вычисляются путем линейной интерполяции аналогично формуле (15) для  $\sigma^k(\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k)$ .

## МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В принципе, после аппроксимации субстанциональной производной на каждом временном шаге  $t = t_{k+1}$ ,  $k = 0, \dots, m-1$ , в  $\Omega \cup \Gamma_2$  получаются уравнения

$$\frac{\sigma}{\tau} + \frac{1}{2} \sigma \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = f_1, \quad (21)$$

$$\frac{\rho u}{\tau} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_2, \quad (22)$$

$$\frac{\rho v}{\tau} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + f_3, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho \varepsilon}{\tau} - \frac{\gamma}{\text{Pr Re}} \left( \frac{\mu}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) \right) - \frac{\gamma}{\text{Pr Re}} \left( \frac{\mu}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) \right) = \\ f_4 - \frac{P}{2\varepsilon} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{2\text{Re}} \frac{\mu}{\varepsilon} \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{2}{3} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (24)$$

с правыми частями  $f_1, f_2, f_3, f_4$ , куда вынесены слагаемые, известные с предыдущего временно-го слоя.

Вообще говоря, в предыдущем разделе в явной форме построены аппроксимации только для узловых точек, а не для всей области  $\Omega \cup \Gamma_2$ . На самом деле, в методе конечных элементов после использования квадратурных формул нам и не потребуется аппроксимаций в других точках.

Для каждого узла  $s_{i,j} \in \overline{\Omega}_h$  введем базисную функцию

$$\varphi_{i,j}(x, y) = \begin{cases} (1 - |x_i - x|/h)(1 - |y_j - y|/h), & (x, y) \in ([x_{i-1}, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_{j+1}]) \cap \overline{\Omega}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (25)$$

которая равна единице в  $s_{i,j}$  и нулю во всех остальных узлах  $\overline{\Omega}_h$ . Будем искать приближенное решение в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma^h(t, x, y) &= \sum_{s_{i,j} \in \overline{\Omega}_h} \sigma_{i,j}(t) \varphi_{i,j}(x, y), & u^h(t, x, y) &= \sum_{s_{i,j} \in \overline{\Omega}_h} u_{i,j}(t) \varphi_{i,j}(x, y), \\ v^h(t, x, y) &= \sum_{s_{i,j} \in \overline{\Omega}_h} v_{i,j}(t) \varphi_{i,j}(x, y), & \varepsilon^h(t, x, y) &= \sum_{s_{i,j} \in \overline{\Omega}_h} \varepsilon_{i,j}(t) \varphi_{i,j}(x, y). \end{aligned}$$

Для  $\sigma^h, u^h$  и  $v^h$  известны значения на  $\Gamma_h^D$ , а для  $\varepsilon^h$  известны лишь значения на  $\Gamma_h^{\text{in}}$ . Это следует из того, что краевые условия Неймана в отличие от условий Дирихле не ликвидируют степени свободы в соответствующих узлах границы [3].

После стандартного применения метода конечных элементов с тестовыми функциями вида (25) применим квадратурную формулу трапеций для вычисления интегралов на отрезках, а для интегралов на ячейках  $\omega_{i,j} = (x_i, x_{i+1}) \times (y_j, y_{j+1})$  - ее декартово произведение. В итоге во внутренних узлах расчетной области  $S_h \cap \Omega$  получается следующий сеточный аналог уравнения неразрывности (далее в этом и следующем разделе у всех функций опущен верхний индекс  $k+1$ , характеризующий зависимость от времени):

$$\frac{\sigma_{i,j}}{\tau} + \frac{1}{4h} \sigma_{i,j} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + \frac{1}{4h} \sigma_{i,j} (v_{i,j+1} - v_{i,j-1}) = f_1 \quad \forall s_{i,j} \in S_h \cap \Omega. \quad (26)$$

В приграничных или граничных узлах это и последующие сеточные уравнения для  $u^h, v^h, \varepsilon^h$  упрощаются за счет краевых условий или за счет меньшего носителя тестовых функций, например, на границе  $\Gamma_h^{\text{out}}$ . В итоге получается большое разнообразие таких уравнений, которое мы приводить не будем и ограничимся лишь уравнениями во внутренних узлах, которые дают достаточное представление о виде получаемых сеточных уравнений.

Аналогично применяем метод конечных элементов для уравнений (22)-(24).

Понятно, что в узлах  $\overline{\Omega}_h \cap (\Gamma_s \cup \Gamma_2)$  благодаря нулевому условию Неймана это сеточное уравне-



ние упрощается. Эти уравнения дополняются краевыми условиями на  $\Gamma_h^{\text{in}}$  из условия невозмущенного потока на входе.

## СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Для решения систем алгебраических уравнений используется многосеточный метод с внешними итерациями по нелинейности. После аппроксимации субстанциональной производной и применения метода конечных элементов с квадратурными формулами на каждом временном слое  $t = t_{k+1}$ ,  $k = 0, 1, \dots, m-1$ , получаем системы нелинейных алгебраических уравнений.

Для сеточного аналога уравнения переноса массы система алгебраических уравнений относительно неизвестных  $\sigma^{k+1}$  имеет диагональный вид (далее в этом разделе верхний индекс  $k+1$  опущен):

$$\alpha_{\rho}^{i,j} \sigma_{i,j} = F_{\rho}^{i,j} \quad \forall s_{i,j} \in \bar{\Omega}_h, \quad (27)$$

где  $\alpha_{\rho}^{i,j}$  означают коэффициенты перед неизвестными, возможно, зависящие от других сеточных функций, а  $F_{\rho}^{i,j}$  означают значения, известные с предыдущего временного слоя или из краевых условий. После исключения известных краевых значений уравнение (27) в матричном виде принимает вид

$$A_{\rho}^h \sigma^h = F_{\rho}^h, \quad (28)$$

где  $A_{\rho}^h$  - диагональная матрица,  $\sigma^h$  и  $F_{\rho}^h$  - векторы неизвестных и правой части размерности множества  $\Omega_h$ .

Сеточные аналоги уравнений количества движения в терминах неизвестных значений  $u^{k+1}$  и  $v^{k+1}$  в узлах сетки  $\Omega_h$  могут быть представлены в следующем виде:

$$\alpha_u^{i-1,j} u_{i-1,j} + \alpha_u^{i,j-1} u_{i,j-1} + \alpha_u^{i,j} u_{i,j} + \alpha_u^{i,j+1} u_{i,j+1} + \alpha_u^{i+1,j} u_{i+1,j} + \beta_u^{i-1,j-1} v_{i-1,j-1}^{k+1} + \beta_u^{i-1,j+1} v_{i-1,j+1}^{k+1} + \beta_u^{i+1,j-1} v_{i+1,j-1}^{k+1} + \beta_u^{i+1,j+1} v_{i+1,j+1}^{k+1} = F_u^{i,j}, \quad (29)$$

$$\alpha_v^{i-1,j} v_{i-1,j}^{k+1} + \alpha_v^{i,j-1} v_{i,j-1}^{k+1} + \alpha_v^{i,j} v_{i,j}^{k+1} + \alpha_v^{i,j+1} v_{i,j+1}^{k+1} + \alpha_v^{i+1,j} v_{i+1,j}^{k+1} + \beta_v^{i-1,j-1} u_{i-1,j-1}^{k+1} + \beta_v^{i-1,j+1} u_{i-1,j+1}^{k+1} + \beta_v^{i+1,j-1} u_{i+1,j-1}^{k+1} + \beta_v^{i+1,j+1} u_{i+1,j+1}^{k+1} = F_v^{i,j}, \quad (30)$$

$$\forall s_{i,j} \in \Omega_h.$$

Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  с разными индексами - коэффициенты при неизвестных, равные нулю вне сеточной области  $\bar{\Omega}_h$  и зависящие нелинейным образом от других неизвестных систем (28)-(30).

Для решения систем линейных алгебраических уравнений на каждом временном слое использовался точечный метод Якоби. Сходимость этого метода и итераций по нелинейности значительно ускоряется при использовании в качестве начального приближения квадратичной экстраполяции значений по времени с двух временных слоев вместо простого переноса значений с предыдущего слоя. Ввиду существенного диагонального преобладания среднее количество итераций, необходимое для сходимости метода Якоби на сетке  $1001 \times 101$  узлов, составляло не более 10.

## РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В КАНАЛЕ С РАЗЛИЧНЫМИ ЧИСЛАМИ МАХА И РЕЙНОЛЬДСА

Приведенный алгоритм реализован для сформулированной выше задачи течения газа при сверхзвуковой скорости на входе. В качестве уравнений (5) в расчетах использованы уравнения состояния совершенного газа

$$P = (\gamma - 1)\rho e, \quad T = \gamma(\gamma - 1)M^2 e,$$

зависимость динамического коэффициента вязкости газа представляется формулой Сазерленда:  $\mu = T^\omega$ . Различные модификации этих уравнений и условия их применения можно найти в [10].

Расчеты выполнялись на сетке, содержащей  $1001 \times 101$  узлов, шаг по пространству  $h = 0.01$ , шаг по времени  $\tau = 0.001$ . Газодинамическая постоянная  $\gamma$ , число Рейнольдса  $Re$ , число Прандтля  $Pr$ , число Маха  $M$  и  $\omega$  имели следующие значения:  $\gamma = 1.4$ ,  $Re = 2 \times 10^3, 10^4$ ,  $Pr = 0.72$ ,  $M = 2, 4$ ,  $\omega = 0.8$ .

На рис. 2 приведена картина течения в канале для числа Маха  $M = 2$  и Рейнольдса  $Re = 2 \times 10^3$ .

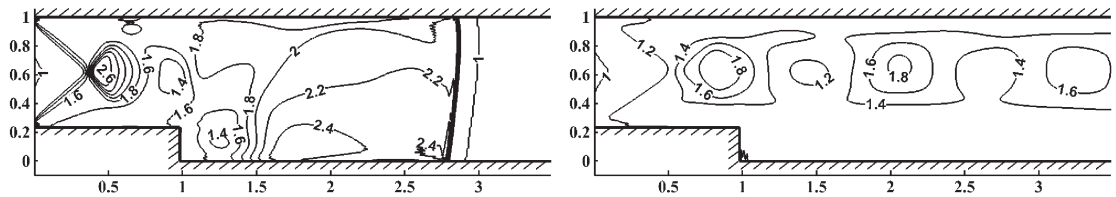


Рис. 2. Изолинии плотности для моментов времени  $t = 4$  и  $t = 50$ ,  $M = 2$ ,  $Re = 2 \times 10^3$

За уступом идет формирование вихря с отрицательными значениями скорости. С течением времени вихревая зона увеличивается в направлении потока и за уступом формируется течение со скоростью, близкой к нулевым значениям. Следует отметить, что за характерный размер  $L$  принята ширина канала, в данном случае длина канала при расчетах равнялась  $10L$ , чтобы точка «примыкания» основного потока к донному течению оставалась в пределах расчетной области [11].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что замена искомым функций в уравнениях сохранения массы и внутренней энергии привела к меньшей абсолютной погрешности в нормах  $L_2$  и  $L_\infty$ , что и раньше было отмечено в одномерном случае [6]. Полезно отметить, что применение комбинации метода траекторий и метода конечных элементов не требует согласования триангуляций на соседних временных слоях. Это значительно облегчает динамическое разрежение или сгущение триангуляций по времени для оптимизации вычислительной работы или улучшения аппроксимации в пограничных слоях и ударных волнах. Для решения систем алгебраических уравнений ввиду значительного диагонального преобладания использовался метод Якоби в комбинации с внешними итерациями по нелинейности. Совокупность метода траекторий и метода конечных элементов позволила построить вычислительно устойчивый и экономичный алгоритм.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00224а) и программы фундаментальных исследований Президиума РАН (проект № 18.2).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bosnyakov S., Kursakov I., Lysenkov A., Matyash S., Mikhailov S., Vlasenko V., Quest J. Computational tools for supporting the testing of civil aircraft configurations in wind tunnels. Progress in Aerospace Sciences. 2008. V. 44. P. 67-120.
- [2] Ковеня В.М. Слюняев А.Ю. Моделирование сверхзвуковых течений газа в канале // Вычислительные технологии. 2007. Т. 12. Спец. вып. 4. С. 32-41.
- [3] Rannacher R. Methods for Numerical Flow Simulation. Institute of Applied Mathematics, University of Heidelberg, Germany. 2007. P. 1-58.
- [4] Oberkampf W.L., Trucano T.G. Verification and validation in computational fluid dynamics // Progress in Aerospace Sciences. V. 38. P. 209-272.
- [5] Pironneau O. On the Transport-Diffusion Algorithm and Its Applications to the Navier-Stokes Equations // Numerische Mathematik. 1982. V. 38. P. 309-332.

- [6] Шайдуров В.В., Щепановская Г.И., Якубович М.В. Применение метода траекторий и метода конечных элементов в моделировании движения вязкого теплопроводного газа // Вычислительные методы и программирование. 2011. Т. 12. С. 275-281.
- [7] Ушакова О.А., Шайдуров В.В., Щепановская Г.И. Метод конечных элементов для уравнений Навье-Стокса в сферической системе координат // Вестник КрасГУ. 2006. № 4. 151-156.
- [8] Vos J.B., Rizzi A., Darracq D., Hirschel E.H. Navier-Stokes solvers in European aircraft design. Progress in Aerospace Sciences. 2002. V. 38. P. 601-697.
- [9] ADIGMA - A European Initiative on the Development of Adaptive Higher-Order Variational Methods for Aerospace Applications, Vol. 113 of Notes on numerical fluid mechanics and multidisciplinary design. Springer. 2010. P. 339-353.
- [10] The Handbook of Fluid Dynamics. Ed. R.W. Johnson. CRC Press LLC & Springer. 1998.
- [11] Shaidurov V.V., Shchepanovskaya G.I., Yakubovich M.V. Numerical simulation of supersonic flows in channel // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2012. V. 27, No 6. P. 585-601.

## EXPERIMENTAL EVALUATION QUEUE MODEL AND ALGORITHMS OF PARALLEL DATA TRANSMISSION PERFORMANCE IN DATA INTENSIVE TASKS IN DISTRIBUTED SYSTEMS

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ МОДЕЛИ ОЧЕРЕДЕЙ И АЛГОРИТМОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ПЕРЕДАЧИ В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ ИНТЕНСИВНЫХ ПОТОКОВ ДАННЫХ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

---

*The article describes a developed queue model used for parallel data transmission on long high-speed network. Algorithm of distribution parallel data streams from the data source to the compute nodes remote supercomputers and its dependence on congestion management strategies in transport protocols is presented. Described implementation of the model in the form of specialized complex software installed in interacting end systems and includes a messaging protocol between application processes and computational nodes supercomputers and a source of intense data flow. The possibility to dynamically adapt the number of compute nodes to the speed of the input stream and the time of processing applications, including several supercomputers. The measurement results and empirical evaluation of model performance and queue management algorithms in the transmission of data flow intensive high-speed fiber backbone Perm-Yekaterinburg is presented. The application field and effectiveness of the developed solutions for experimental data stream processing on a supercomputer in real time is presented.*

---

### ВВЕДЕНИЕ

Тенденции настоящего времени показывают экспоненциальный рост объемов данных, которые генерируются во всех сферах человеческой деятельности, таких как наука, промышленность, экономика и т.д. Соответственно, растут требования и к производительности вычислительных систем, необходимых для их обработки и хранения. В этих условиях особенно актуальной становится проблема передачи интенсивных потоков данных от мест их генерации к местам их обработки и хранения [1]. Для достижения практических результатов эта проблема должна решаться комплексно, на всех уровнях. Аппаратным фундаментом в данном случае являются параллельные скоростные сети, примером которых может служить создаваемая в рамках проекта «Инициатива GIGA UrB RAS» [2] научно образовательная сеть УрО РАН.

Второй компонентой являются модели передачи данных и алгоритмы их диспетчеризации по вычислителям, а так же промежуточное программное обеспечение, решающее эти задачи. Для случая, когда исходный поток данных допускает разбиение на сообщения, которые можно независимо обрабатывать или сохранять, нами была предложена модель очередей, использующая лямбда-грид парадигму распределенных вычислений [3], в которой используется параллелизм потоков данных в скоростных оптических сетях со спектральным уплотнением каналов. Достижение эффективной диспетчеризации параллельных потоков сообщений между сопрягаемыми системами является основной целью представленной работы. Апробация разработанных технологий проводилась с использованием выделенного L2 канала связи, который объединяет в единую подсеть источник данных (Пермь, ИМСС УрО РАН), суперкомпьютеры «Уран» и «УМ64» и систему хранения данных (СХД) EMC Celerra NS-480 (Екатеринбург, ИММ УрО РАН). В настоящий момент доступная пропускная способность выделенного канала связи составляет 1 Гбит/с.

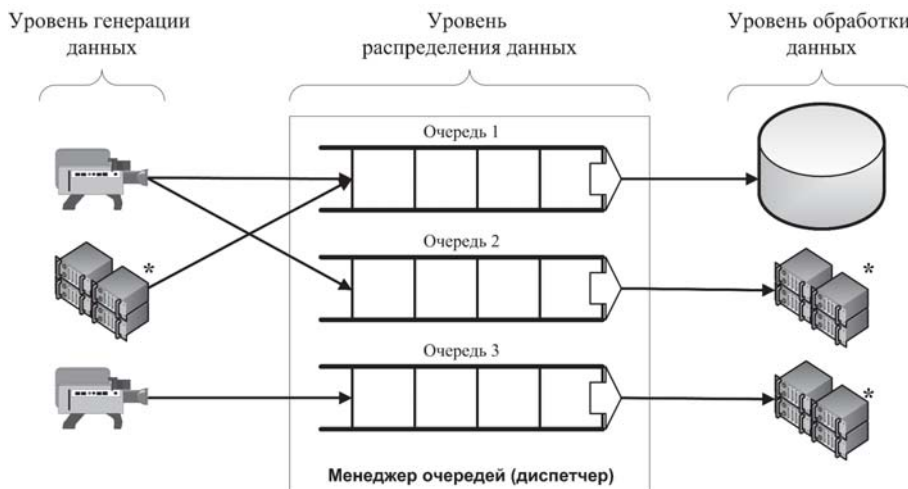
---

1 Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

2 Institute of continuous media mechanics UB RAS, Perm, Russia

## ТРЕХУРОВНЕВАЯ АРХИТЕКТУРА СИСТЕМЫ ОБРАБОТКИ ПОТОКА ДАННЫХ

Концепция очередей данных, показанная на рисунке 1, для решения задачи передачи и диспетчеризации потока данных напрямую вытекает из возможности разбиения исходного потока данных на подмножества (сообщения), допускающие полностью независимую обработку [4].



\*) Одно устройство может находиться и на уровне генерации данных, и на уровне обработки данных

Рис. 1. Трехуровневая архитектура системы обработки потока данных

Уровень генерации данных отвечает за загрузку исходных данных из источника данных и отправку их на уровень распределения в виде потока сообщений, допускающих независимую обработку.

Уровень распределения данных решает задачу получения сообщений от уровня генерации данных и их передачу на уровень обработки данных. В связи с тем, что уровень обработки данных состоит из множества вычислительных процессов, запущенных на узлах суперкомпьютера, на диспетчер ложится задача по распределению очередей данных на множество узлов суперкомпьютера. Исходя из независимости и равнозначности передаваемых сообщений, было принято решение использовать First In First Out (FIFO) стратегию распределения данных по запросам от конечных систем.

Уровень обработки данных отвечает за обработку данных в терминах прикладной задачи. Это может быть расчет исходных данных с применением каких-либо алгоритмов, сохранение данных в высокопроизводительных хранилищах или на большом количестве локальных дисков, передача данных в сторонние системы и т.д.



Рис. 2. Схема взаимодействия компонент

Оконечные системы взаимодействуют с менеджером очередей при помощи прикладного протокола, получившего название «Протокол PIV» (рисунок 2). Для прикладных программистов прото-

кол реализован в виде клиентской библиотеки, написанной на языке C++, которую могут использовать приложения уровня генерации и обработки данных.

Выделение задачи диспетчеризации в отдельный слой позволило отказаться от межузлового обмена данными на стороне суперкомпьютера, что дает следующие преимущества:

- автоматическая балансировка нагрузки по вычислительным узлам - более быстрые узлы будут чаще посылать запросы новых данных и, таким образом, будут получать больше данных для обработки;
- возможность изменять число используемых вычислительных узлов во время проведения эксперимента;
- возможность использовать вычислительную мощность нескольких суперкомпьютеров;
- минимизация потери данных в случае выхода из строя одного или нескольких вычислительных узлов (в худшем случае потеряется только текущее обрабатываемое измерение сбойного узла).

Перенос менеджера очередей на отдельный сервер позволяет снизить нагрузку на источник данных, так как в этом случае задача по обслуживанию большого числа параллельных TCP-соединений решается выделенным сервером, не используя ресурсы источника данных. Установка менеджера очередей недалеко от источника данных позволит эффективно передавать данные диспетчеру через небольшое число соединений.

## ПРОТОКОЛ PIV

Протокол PIV является протоколом прикладного уровня, реализующим идею модели RPC. Протокол работает по схеме запрос-ответ и может использоваться в качестве протокола транспортного уровня любой надежный потоковый протокол передачи данных. Текущая реализация протокола PIV поддерживает транспортные протоколы TCP и UDT [5]. Положение протокола PIV в стеке сетевых протоколов показано на рисунке 3 [6].

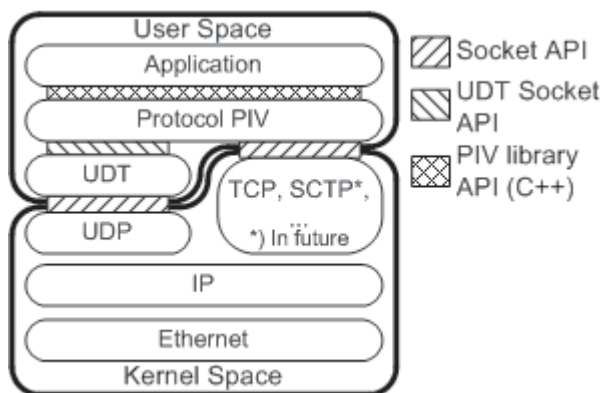


Рис. 3. Положение протокола PIV в стеке сетевых протоколов

Протокол PIV рассчитан на передачу нескольких именованных блоков бинарных данных. В одном пакете протокола PIV можно передать от нуля до 65535 блоков, каждый из которых может иметь размер до 4 Гбайт, при этом сохранение порядка следования блоков не гарантируется. Длина имени блока ограничена 255 байтами. На рисунке 4 приведен формат пакета протокола PIV. Поля заголовка пакета протокола кодируются в сетевом порядке байт.

Протокол поддерживает версионирование с использованием поля version, что позволяет реализовать в рамках одной версии ПО поддержку нескольких версий протокола. Поле cmd содержит код выполняемой команды. Поле status предназначено для передачи клиенту статуса ответа

от сервера. В зависимости от значения статуса можно судить о выполнении или невыполнении запроса клиента. Поле options предназначено для кодирования дополнительных опций. Поле block\_count содержит число передаваемых блоков данных. Далее в пакете располагаются список длин имен блоков и список длин блоков, после чего передаются пары, состоящие из имени блока и данных блока.

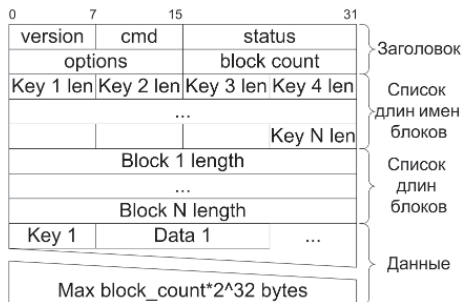


Рис. 4. Формат пакета протокола PIV

На рисунке 5 приведена временная диаграмма работы протокола PIV в трехуровневой архитектуре. Левая часть диаграммы показывает взаимодействие уровня генерации данных, а правая часть - уровня обработки данных с менеджером очередей. Для наглядности эти процессы разделены, однако существенным является то обстоятельство, что передача по протяженной линии связи занимает значительное время и процессы передачи необходимо выполнять одновременно при наличии данных.



Рис. 5. Временная диаграмма работы протокола PIV

### ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Предложенная модель была реализована в виде комплекса ПО для всех уровней системы. Были разработаны три компонента общего назначения:

- сервер очередей,
- клиентская библиотека,
- управляющее программное обеспечение.

Все приложения и библиотеки написаны на языке программирования C++ с использованием библиотек Boost<sup>3</sup>. В связи с тем, что менеджер очередей не занимается сложной обработкой поступающих данных, его работа с сетевыми сокетами реализована по событийно-ориентированному принципу с использованием технологии асинхронных, неблокирующих сетевых операций. Так как в разных операционных системах сетевые API значительно отличаются, для унификации кода

3 Boost C++ Libraries: <http://www.boost.org/>

используется библиотека Boost.ASIO, которая предоставляет единый интерфейс для различных технологий асинхронного I/O в различных операционных системах.

## ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ РАЗРАБОТАННОГО РЕШЕНИЯ

Оценка эффективности проводилась путем измерения эффективной пропускной способности системы при передаче данных от экспериментальной установки через сервер очередей на площадке ИМСС УрО РАН (Пермь) на вычислительные узлы удаленного суперкомпьютера «Уран» ИММ УрО РАН (Екатеринбург). Связь между городами осуществлялась по выделенному vlan по DWDM магистрали «GIGA UrB RAS» с доступной пропускной способностью 1 Гбит/с и временем RTT=5,5 мс.

На первом этапе оценивалась эффективность существующих в операционной системе Linux алгоритмов контроля перегрузки TCP. Для этого были проведены тесты с использованием ПО iperf. В рамках тестирования для каждого из имеющихся алгоритмов iperf запускался на 60 секунд с использованием 1, 4, 16, 64 параллельных потоков TCP. Результаты измерений показаны на рисунке 6.

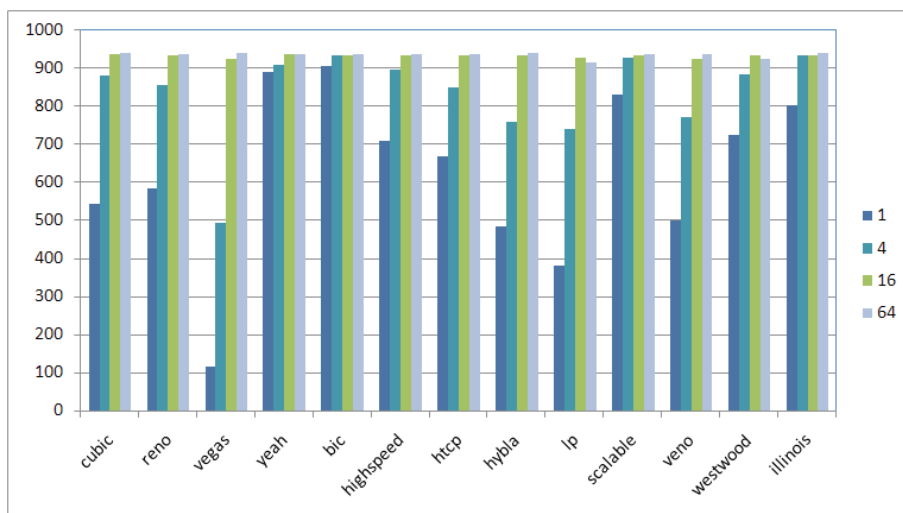


Рис. 6. Оценка эффективности различных реализаций алгоритмов управления перегрузкой TCP

Из графика следует, что используемый по умолчанию в Linux алгоритм cubic при малом числе параллельных потоков показывает явно недостаточную эффективность. Алгоритмы yeah, bic, highspeed, scalable и illinois показали большую эффективность утилизации канала связи, однако не все из них доступны в промышленных дистрибутивах Linux, а так же для изменения используемого алгоритма требуются права администратора, что невозможно в случае использования сторонних суперкомпьютеров. Необходимо отметить, что в используемых версиях Windows в настоящее время эффективные алгоритмы управления перегрузкой отсутствуют.

На втором этапе исследовалось поведение системы при передаче сообщений, состоящих из трех блоков с длинами 128, 1048576, 1048576 байт, соответственно. Измерения поступали от эмулятора экспериментальной установки PIV (ЭУ) с промежутками между отправками данных, равными 20 мс, 50 мс и 100 мс. Это приблизительно соответствует нескольким режимам работы реальной ЭУ. При этом при минимальном интервале скорость генерации составляет порядка 750 Мбит/с, что меньше предельной пропускной способности канала связи и поэтому позволяет работать в реальном времени без бесконечного роста размера очереди исходных данных. Процесс на вычислительных узлах рассчитывал контрольные суммы блоков данных по алгоритму CRC32 и передавал их обратно на эмулятор ЭУ.



Менеджер очередей располагался на Linux-сервере, который был настроен на использование алгоритма управления перегрузкой illinois.

На рисунке 7 показаны графики зависимости пропускной способности системы от числа задействованных вычислительных узлов. Для наглядности горизонтальная ось «число вычислительных узлов» приведена в логарифмическом масштабе.

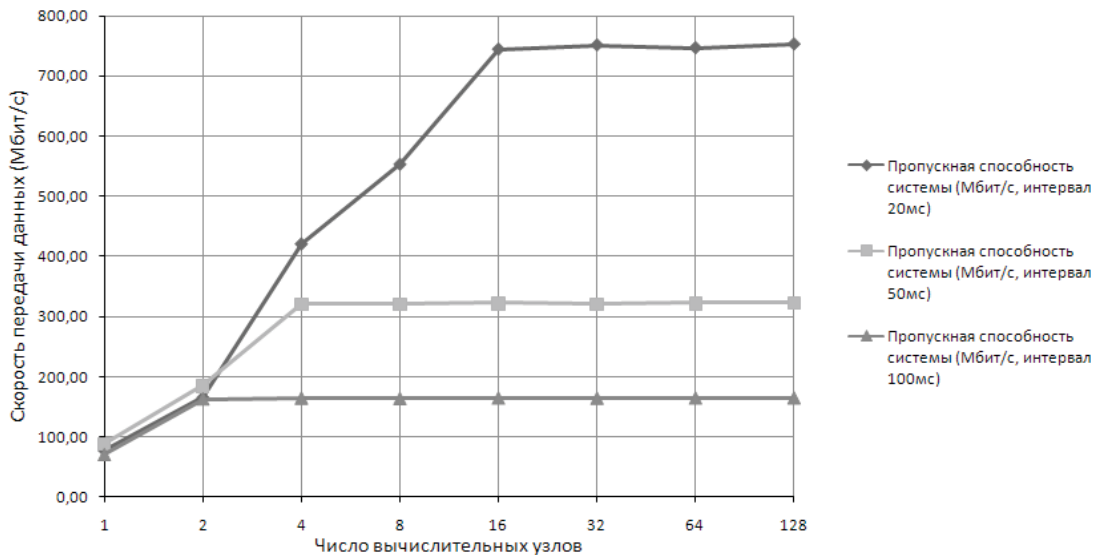


Рис. 7. Зависимость пропускной способности системы от числа задействованных вычислительных узлов

Горизонтальные участки в правой части графика соответствуют установившемуся режиму, в котором скорость обработки данных совпадает со скоростью генерации данных. В этом случае увеличение числа задействованных вычислительных узлов не влияет на пропускную способность системы, но увеличивает ее надежность. Рост надежности обусловлен тем, что в случае отключения или потери сетевой связности части вычислительных узлов, а также в случае, если время обработки одного измерения по каким-либо причинам возрастет, то система все равно может остаться в рамках горизонтального участка графика и не допустить снижение пропускной способности ниже скорости генерации данных. Необходимо отметить, что разработанная архитектура позволяет, при необходимости, увеличивать число задействованных вычислительных узлов непосредственно в процессе работы системы, что предоставляет возможность оперативно реагировать на изменения условий проведения расчета.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена модель очередей для параллельной передачи данных по скоростной протяженной линии связи в распределенных системах.

Приведен алгоритм распределения параллельных потоков данных от источника по вычислительным узлам удаленной суперЭВМ и его зависимость от стратегий управления перегрузками в транспортных протоколах. Спроектирован протокол, алгоритм диспетчеризации данных и разработано программное обеспечение для передачи данных с экспериментальной установки на узлы вычислительного кластера.

Проведенное экспериментальное сравнение реализаций алгоритмов управления перегрузкой TCP показало, что различные алгоритмы могут значительно отличаться по эффективности и что параметры по умолчанию в настройках операционных систем могут быть не оптимальными в конкретных ситуациях. В связи с тем, что изменение параметров сетевых подсистем требует ад-

министраторских полномочий и не всегда возможно, была обоснована необходимость создания специализированных решений, которые могут повышать суммарную эффективность системы в случае, если параметры сетевого стека не удовлетворяют необходимым требованиям.

Оценка эффективности модели очередей и протокола PIV показала увеличение пропускной способности системы при использовании разработанной технологии по сравнению с классическими подходами [7] и, как следствие, увеличение предельной пропускной способности системы. Показан возможный путь снижения нагрузки на процессор ЭУ путем переноса задачи диспетчеризации на близкорасположенный выделенный сервер. Помимо этого, использование выделенного сервера позволяет проводить сборку набора данных из нескольких несвязанных между собой источников, например, при наличии нескольких независимых групп датчиков, допускающих раздельную обработку данных с них.

Разработанная технология применяется в ИМСС УрО РАН в рамках проекта «Распределенный PIV» [7] для обработки экспериментальных данных, получаемых по методу PIV (Particle Image Velocimetry) - оптическому методу измерения полей скорости жидкости или газа в выбранном сечении потока, на удаленном суперкомпьютере в реальном времени.

## **БЛАГОДАРНОСТИ**

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-07-96001-р\_урал\_а) и УрО РАН (грант 12-П-1-2012).

## **ЛИТЕРАТУРА**

- [1] Степанов Р.А., Масич А.Г., Сухановский А.Н., Шапов В.А., Игумнов А.С., Масич Г.Ф. Обработка на супервычислителе потока экспериментальных данных // Вестник УГАТУ, Уфа, 2012. Т. 16, No3 (48). С. 126-133.
- [2] А.Г. Масич, Г.Ф. Масич Инициатива GIGA UrB RAS // Совместный вып. Журнала «Вычислительные технологии» и журн. «Вестник КазНУ им. Аль-Фараби». Сер. «Математика, механика, информатика», No3 (58). По материалам Междунар. конф. «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании», - Казахстан, Алматы.-2008.-Т.13.- Ч. II. -С. 413-418 (ISSN 1560-7534).
- [3] А.Г. Масич, Г.Ф. Масич GIGA UrB RAS подход к LambdaGrid парадигмам вычислений // Научный сервис в сети Интернет: суперкомпьютерные центры и задачи: Труды Международной суперкомпьютерной конференции (20-25 сентября 2010 г., г. Новороссийск). - М.: Изд-во МГУ, 2010. С. 4-11.
- [4] А.Г. Масич, Г.Ф. Масич, Р.А. Степанов, В.А. Шапов Скоростной I/O-канал супервычислителя и протокол обмена интенсивным потоком экспериментальных данных // Материалы X международной конференции «Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах HPC-2010» - Пермь: Изд-во ПГТУ, 2010. - Т. 2. С. 119-128. (ISBN 978-5-398-00506-6).
- [5] Yunhong Gu and Robert L. Grossman UDT: UDP-based Data Transfer for High-Speed Wide Area Networks, Computer Networks (Elsevier). Volume 51, Issue 7. May 2007.
- [6] Vladislav Shchapov, Alexey Masich Protocol of High Speed Data Transfer from Particle Image Velocimetry System to Supercomputer // Proc. of The 7th International Forum on Strategic Technology (IFOST 2012) September 18-21, 2012, Vol.1. National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, P. 653-657
- [7] Р.А. Степанов, А.Г. Масич, Г.Ф. Масич Инициативный проект «Распределенный PIV» // Научный сервис в сети Интернет: масштабируемость, параллельность, эффективность: труды Всероссийской суперкомпьютерной конференции - М.: Изд-во МГУ, 2009. - С. 360-363. (ISBN 978-5-211-05697-8).

# TOPOLOGICAL STRUCTURE OF ATTRACTORS AND MORSE DECOMPOSITION

---

*For investigation of the global behaviour of a dynamical system, an important role is played by Morse decomposition i.e. by the chain recurrent set of a flow. In the paper is presented a result about topological structure of chain recurrent set.*

---

## INTRODUCTION

The exact solution of differential equations by integration is a very rare case. Numerical solution of differential equations gives only a particular solution not a general solution. Moreover the solution is obtained only on a finite interval.

At the end of nineteenth century in solving the problems from space mechanics (and now in the fluid dynamics), it was very important to know the character of the integral curves over whole region of the existence without solving the equation. This implied occurrence of qualitative theory of differential equations. The theory was founded by Poincare and Lyapunov. In the beginning only systems of two equations was treated

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) \quad , \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

and was generalized to system of  $n$  equations

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\text{-----} \\ \frac{dx_n}{dt} &= \phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{1}$$

The system of differential equations is *autonomous system of differential equations*, if the functions on the right sides of equations in (1) not depend on and are continuous in some region  $X$  of the real  $n$ -dimensional space  $R^n$

If we have a non- autonomous system

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= \phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{aligned}$$

then by a simple change of variables  $x_{n+1} = t$  we obtain an autonomous system of  $n + 1$  equations

---

<sup>1</sup> Institute of Mathematics, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Skopje, Republic of Macedonia

$$\frac{dx_1}{dt} = \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

.....

$$\frac{dx_n}{dt} = \phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = 1$$

The system (1) is **dynamical system** if the following conditions are satisfied:

1. uniqueness of the solution
2. the system is defined for all  $t$ ,  $-\infty < t < \infty$

In this case, the solution  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  of the autonomous system (1) can be interpreted as coordinates of a point at time moment  $t$ . For fixed  $\underline{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  the function  $\underline{r}(t) = f(\underline{x}^0, t)$  satisfying the system (1) and the initial condition  $\underline{r}(0) = \underline{x}^0$  is interpreted as moving starting from the initial position  $\underline{x}^0$  at time  $t = 0$ . The set of all points

$$\{ \underline{y} \mid \underline{y} = f(\underline{x}^0, t), \quad -\infty < t < \infty \}$$

we call a trajectory.

If we put

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \underline{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$$

then the system of differential equations is presented in a vector form

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\phi}(\underline{x}) \tag{1'}$$

The solution satisfying the initial conditions

$$x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, \dots, x_n = x_n^0$$

for  $t = 0$ , can be written as

$$\underline{r}(t) = f(\underline{x}^0, t)$$

where  $\underline{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ .

For a chosen real number  $t_1$ , the function

$$\underline{x}(t) = f(\underline{x}^0, t_1 + t)$$

satisfies the system (1'). For  $t = 0$ ,

$$\underline{x}(0) = \underline{x}^1$$

where  $\underline{x}^1 = f(\underline{x}^0, t_1)$ .

We define a function

$$\underline{X}(t) = f(\underline{x}^1, t)$$

Since this function satisfies the system (1'), for  $t = 0$ , it follows that the function satisfies the initial conditions

$$\underline{X}(0) = f(\underline{x}^0, t)$$

i.e.

$$\underline{X}(0) = \underline{x}^1.$$

From  $\underline{X}(0) = \underline{x}^1$ , from the uniqueness of solution, the functions  $\underline{x}(t)$  and  $\underline{X}(t)$  are identical for all  $t$  and specially for  $t = t_2$  i.e.

$$f(f(\underline{x}^0, t_1), t_2) = f(\underline{x}^0, t_1 + t_2)$$

In this way we achieved the abstract definition of dynamical system.

**Definition.** A dynamical system (a flow) with phase space  $X \subseteq R^n$  is a continuous map  $\Phi: X \times R \rightarrow X$  satisfying the following two condition:

- $\Phi(x, 0) = x, \forall x \in X$
- $\Phi(\Phi(x, t_1), t_2) = \Phi(x, t_1 + t_2), \forall x \in X, \forall t_1, t_2 \in R$

(For the purpose of this paper it is enough to consider  $X$  to be metric space or  $X \subseteq R^n$ )

In investigation of properties of a dynamical system, an important role play attractors - asymptotically stable sets. The local topological structure of these sets could be very complicated, so the homotopy type is not an appropriate tool for their classification.

On the other hand, shape theory is a kind of homotopy theory adapted for topological spaces with bad local behaviour [4] (for intrinsic definition of shape without external spaces see [7].)

By the result from [5] an attractor has the shape of a finite (topological) polyhedron.

By shape theory, both Warsaw circle (Fig. 1) and a circle with an approaching orbit (Fig. 2) have shape of circle - a finite topological polyhedron. So, they can be attractors of a flow defined on a plane.

On the other hand, Hawaiian earring (Fig. 3), being an union of infinite many circles is not a finite polyhedron and couldn't be an attractor. The solenoid (Fig. 4) is not a finite polyhedron, also.

Examples:

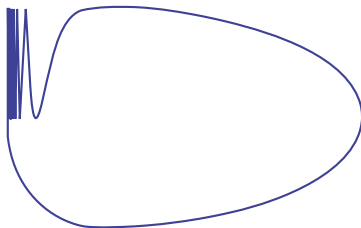


Fig. 1. Warsaw circle

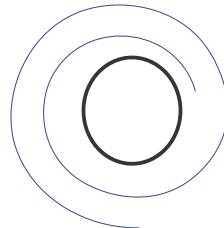


Fig. 2. circle with an approaching orbit

Warsaw circle is an union of the graph of  $\sin(1/x)$  curve,  $0 < x \leq \frac{2}{\pi}$ , the part of y-axis between points (0,-1) and (0,1), and an arc connecting the points (0,-1) and  $(\frac{2}{\pi}, 1)$ , (Fig. 1).

Hawaiian earring is a union of circles in the plane with radius  $1/n$  and center at  $(0, 1/n)$ .  $l = 1, 2, \dots, n$ .

Solenoid (dyadic solenoid) is intersection of members of the sequence  $T_1 \supset T_2 \supset \dots \supset T_n \supset \dots$ . The first member of sequence  $T_1$  is a solid torus. Each next member of this sequence,  $T_i$ , is a solid torus twice twisted and embedded in the previous  $T_{i-1}$  (Fig. 4).

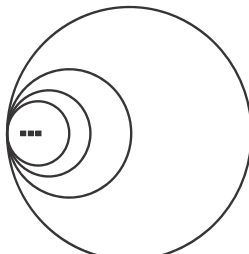


Fig. 3. Hawaiian earring

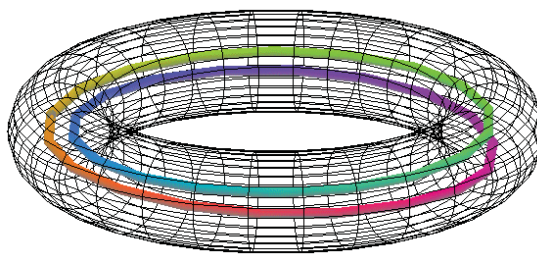


Fig. 4. Solenoid

## CHAIN RECURRENT SET

The global behaviour of a dynamical system can be described by its Morse decompositions or its attractor and repeller configurations. Morse decomposition is an effective technique for analyzing the topological structure of a dynamical system in a reliable manner. This technique yields results that are not susceptible to small perturbations.

Chain recurrent set is the union of members of Morse decomposition. In this paper a new result about the components of chain recurrent set is obtained.

We start with some definitions.

An  $\varepsilon$  - chain from  $x$  to  $y$ , points of a metric space with metric  $d$ , are finite number of points

$$x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = y$$

such that  $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$

**Remark:** The following is *Cantor definition of connectedness*: A topological space is connected if for any two points  $x$  and  $y$  and any  $\varepsilon > 0$  there is an  $\varepsilon$  - chain from  $x$  to  $y$ . In the case of compact metric spaces Cantor definition coincides with the usual definition [6].

In order to differ objects in a dynamical system we will introduce reformulated definition of joinability (strong connectedness).

A *simple deformation of a  $\varepsilon$  - chain* is a deleting or adding a point to the chain

$$x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = y$$

such that the new obtained chain is an  $\varepsilon$  - chain.

If a new chain is obtained from an  $\varepsilon$  - chain we say that it is an  $\varepsilon$  - deformation.

A set is *joinable* if for any two points  $x$  and  $y$  there is a sequence  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  such that

- 1) for any  $n$  we can choose an  $\varepsilon_n$  - chain from  $x$  to  $y$  in a such way that
- 2) there is an  $n_0$  such that for  $n > n_0$ , the  $\varepsilon_n$  - chain can be  $\varepsilon_{n_0}$  - deformed to the  $\varepsilon_{n_0}$  - chain

This is my reformulation of joinability, that is adapted to dynamical systems. The notion is also known as "pointed 1- movability" (Borsuk) and appear in many papers in the past.

Now, suppose  $\Phi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  is a dynamical system. For  $x, y \in X$  and  $\varepsilon, T > 0$  an  $(\varepsilon, T)$ -chain from  $x$  to  $y$  is given by a finite number of points

$$x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = y$$

such that

$$d(\Phi(x_i, T), x_{i+1}) < \varepsilon \text{ for } i = 0, 1, \dots, n-1.$$

A subset  $Y \subseteq X$  is *chain transitive* if for all  $x, y \in Y$  and all  $\varepsilon, T > 0$  there exists an  $(\varepsilon, T)$ -chain from  $x$  to  $y$ .

A point  $x \in X$  is *chain recurrent* if for all  $\varepsilon, T > 0$  there exists an  $(\varepsilon, T)$ -chain from  $x$  to  $x$ .

The *chain recurrent set* is the set of all chain recurrent points.

**Example:** The following differential equation in polar coordinates define a dynamical system

$$r' = \frac{r}{2} \left(1 - \frac{r}{2}\right)$$

Chain recurrent set consists of two components - the unit circle and the origin. The unit circle is an attractor and the origin is a repeler (a source).

The following result is from [21], (also [1]).

**Proposition:** Suppose  $\Phi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  is a flow and  $X$  a compact metric space, and  $Y$  a closed subset of  $X$ . Then  $Y$  is chain transitive if it is chain recurrent and connected.

**Theorem:** Suppose  $\Phi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  is a flow and  $X$  a compact metric space. The components of a chain

recurrent set of flow  $\Phi$  are joinable.

The proof is an immediate consequence of the reformulation of joinability.

**Example:** By the last theorem, it is possible Hawaiian earring (Fig. 3) to be a component of the chain recurrent set. This is not the case with the solenoid (Fig. 4) since it is not joinable.

## REFERENCES

- [1] J. Alongi, G. S. Nelson, Recurrence and Topology, Graduate Studies in Mathematics, AMS ( 2007)
- [2] J. Ayala, P. Corbin, K. Mc Conville, F. Colonius, W. Kliemann , J. Peters, Morse decomposition, attractors and chain recurrence, *Proyecciones Journal of Mathematics*, Vol. 25, No 1, pp. 79-109, May 2006. Universidad Cat'olica del Norte, Antofagasta - Chile
- [3] Bhatia, Szego, Stability Theory of Dynamical Systems, Springer-Verlag 1970
- [4] K. Borsuk, Theory of Shape, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1975.
- [5] B. Gunter, J. Segal: *Every attractor of a flow on a manifold has the shape of a finite polyhedron*, *Trans. AMS*, 119 (1993), 321-329
- [6] Kuratowski K., *Topology*, Vol. 2, Mir, Moscow, 1969 (in Russian)
- [7] N. Shekutkovski, *Intrinsic definition of strong shape for compact metric spaces*, *Topology Proceedings*, 39 (2012), 27 - 39

## THE STUDY OF TSUNAMI RUNUP ON THE EAST COAST OF JAPAN BY NUMERICAL SIMULATION

### ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАПЛЕСКОВ ВОЛН ЦУНАМИ НА ВОСТОЧНОЕ ПОБЕРЕЖЬЕ ЯПОНИИ МЕТОДАМИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

---

*The paper presents the results of the assessment of tsunami runup on the east coast of Japan, according to the five historical events. These estimates are based on the results of numerical modeling of all stages of the evolution of tsunami waves: from its generation in the areas of tsunamigenic earthquakes to the runup on the shore. Particular attention is paid to the methods of definition of the flooding zone boundaries, which were calculated using different approaches, that are based on the finite-difference approach, as well as algorithms of large-particle method. Some of the calculations were carried out using adaptive curvilinear grids. The results are compared with the known data of field observations, their dependence is defined on the accuracy of the used bathymetry and topography, on the friction magnitude, and on the methods of the boundary conditions definition.*

---

#### ВВЕДЕНИЕ

Япония находится в чрезвычайно активной зоне Тихоокеанского сейсмического пояса - на стыке трех крупных тектонических плит: Евразийской, Тихоокеанской и Филиппинской. Большая часть землетрясений, в том числе последнее мега-событие 11 марта 2011 г., происходит вдоль восточного побережья Японии. Другой областью их возникновения является тектоническая граница вдоль западного побережья островов Хонсю и Хоккайдо в восточной части Японского моря. При большой магнитуде сейсмического события порождаются значительные волны цунами, приводящие к разрушениям хозяйственных объектов и к человеческим жертвам. Так, за всю историю наблюдений на побережье Японии было зафиксировано около 30 разрушительных цунами с высотами волн 10 и более метров [1]. Здесь стоит отметить, что магнитуда землетрясения является хоть и основным, но далеко не единственным параметром, влияющим на интенсивность цунами. Важным критерием цунамигенности следует считать глубину залегания очага землетрясения, имея в виду существенно большую вероятность генерации катастрофической волны в случаях так называемых мелкофокусных землетрясений.

При решении практических задач снижения ущерба от цунами нужны достоверная информация об ожидаемой дальности и глубине заливания прибрежной зоны, длительности такого заливания, а также оценка скоростей течений в этой зоне. Прогнозные значения этих параметров позволяют определить размеры зон эвакуации населения, а также оценить возможный экономический урон, наносимый волнами цунами. Оценка параметров заплеска даже при известной высоте волны на урезе воды (либо на некоторой фиксированной глубине) представляет собой сложную задачу, требующую применения специальных методов расчета, отличных от используемых для моделирования распространения цунами на глубокой воде. Известны различные подходы к оценке воздействия волн цунами на конкретные участки побережья. Некоторые из них предполагают проведение лабораторных экспериментов в специальном образом обустроенных бассейнах [2], при существенных упрощениях распределения глубин в прибрежных акваториях и рельефов суши можно воспользоваться полученными аналитически точными решениями используемых математических моделей [3-5], а также значениями, полученными с использованием закона Грина. Однако наиболее экономичным по требуемым ресурсам и наиболее гибким инструментом, безусловно является метод численного моделирования, основанный на моделях

---

<sup>1</sup> Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russia



и алгоритмах, прошедших доскональные валидацию и верификацию.

В настоящей работе обсуждаются два подхода к численной оценке характеристик заплеска волн цунами на реальные участки побережья. Первый из них предполагает решение задач в «1.5D» постановке, когда распространение волны от источника к некоторой прибрежной области, ограниченной заданной изобатой, выполняется в рамках плановой модели мелкой воды, а последующий расчет наката волны на берег выполняется по выбранным одномерным сечениям так, что совокупность полученных результатов позволяет оценить основные параметры заплеска. Такой подход, естественно, оказывается возможным только для областей с достаточно гладкой береговой линией и при условии почти фронтального подхода набегающей волны. Вторым подход «2D» реализуется в рамках плановой модели мелкой воды и позволяет в одном расчете выполнять моделирование всех этапов жизни волны цунами от ее генерации до наката на берег. При необходимости реализованный авторами алгоритм допускает использование телескопически вложенных сеток.

Излагаемые ниже результаты связаны с использованием разработанных авторами методик для расчета параметров зон затопления восточного побережья Японии волнами цунами, порожденными 5 различными историческими землетрясениями. Сопоставление полученных результатов позволило определить зависимость рассчитанных характеристик исследуемых явлений от степени учета пространственных характеристик рельефов дна и суши, а также от свойств береговой поверхности, проявляющихся через коэффициенты трения.

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**

Для моделирования процесса генерации волн цунами подводными землетрясениями авторы применяли сейсмодинамическую модель, основанную на уравнениях динамической теории упругости, описывающих колебания слоя сжимаемой жидкости (модель океана), залегающего на поверхности упругого полупространства (модель земной коры и верхней мантии). Соответствующая модель была выведена в работах Подъяпольского, Гусякова и Окады [6-8]. Для решения задачи распространения волн цунами в океане и их наката на побережье авторами использовалась хорошо известная математическая модель мелкой воды.

Для нахождения численного решения гидродинамической модели на этапах распространения и наката волн использовались различные численные методы. Расчет распространения волн в океане от источника к побережью производился в рамках классических уравнений мелкой воды с использованием конечно-разностного метода, основанного на схеме Мак-Кормака [9] и для которого вдоль всей начальной береговой линии ставилось условие отражения («вертикальная стенка»). Для расчета наката применялись два подхода.

Первый из них состоял в том, что на «защищаемом» участке побережья с некоторой изолинии на суше до некоторой изолинии в воде проводилось несколько (как правило, 7 - 10) вертикальных сечений рельефа акватории, преимущественно перпендикулярно к береговой линии. При расчете распространения волн в точках морских окончаний этих сечений велась непрерывная запись параметров волнового процесса. Глубина под такими точками и их расстояние от берега выбирались таким образом, чтобы минимизировать влияние отраженных от берега волн на форму главной части падающей волны. Далее полученные данные использовались в качестве краевых условий для одномерных расчетов наката вдоль построенных сечений. Таким образом, в отличие от [5], «одномерный» накат определялся не по аналитическим формулам, а численно, с учетом неоднородного рельефа дна. По рассчитанным заплескам, путем соединения точек максимального заливания на сечениях, также строилась граница заливания пространственного рельефа суши. Подробно численный алгоритм, применявшийся для расчета наката вдоль сечений, а также способ указанного определения плановой зоны заплеска, учитывающий пространственную неоднородность топографии, описаны в [10].

Второй подход состоял в расчете двумерного наката на побережье с использованием метода крупных частиц на вложенной в глобальную область (где происходит только расчет распространения) сетке. Технология расчета на вложенных сетках использовалась стандартная, когда возмущение в малую подобласть передавалось из содержащей ее глобальной области через значения параметров в узлах грубой сетки вдоль всех внешних морских границ малой подобласти. Для пересчета этих граничных значений с грубой сетки на мелкую использовалась линейная интерполяция, как по пространству, так и по времени (в случаях, когда текущий временной шаг мелкой сетки оказывался меньше соответствующего шага сетки грубой). Описание метода крупных частиц и его верификация на тестовых задачах приведены в статье С.А.Бейзель, Х.Милошевича, А.Д.Рычкова «Численное моделирование наката волн цунами методом крупных частиц» из настоящего сборника.

Отметим, что первый подход возможно использовать только в случаях, когда «защищаемая» прибрежная зона не изрезана мелкомасштабными заливами и другими особенностями и волны подходят к ней приблизительно под прямым углом (между нормалью к фронту волны и линией берега), т.е. можно построить сечения, вдоль которых происходит распространение накат волн в прибрежной области. Второй же подход применим для рельефов дна и суши любой сложности и не накладывает на них никаких ограничений.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предложенные авторами подходы к моделированию наката волн применялись для численного определения зон заливания восточного побережья Японии волнами цунами, возникшими в результате землетрясений, произошедших у этого побережья в прошлом: 1854 г. (Ansei-Tokai), 1923 г. (Kanto), 1944 г. (Tonankai), 1946 г. (Nankai) и 2011 г. (Tohoku).

Для построения начальных смещений водной поверхности, совпадающих с остаточными смещениями дна, для каждого из этих очагов были определены значения параметров, задающих эти смещения по модели Подъяпольского-Гусякова-Окады. Их значения приведены ниже в таблице. Отметим, что для события 1854 г. соответствующий модельный очаг представлялся не одной площадкой разрыва, а двумя. Изолинии начальных смещений водной поверхности, полученные для таких значений параметров очагов землетрясений, показаны на рис. 1.

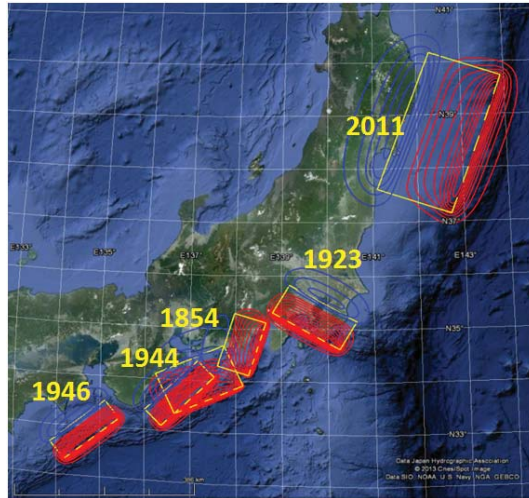
**Таблица 1.** Значения параметров модельных очагов пяти исторических землетрясений у восточного побережья Японии.

Событие/Параметры	Магнитуда $M_w$	координаты эпицентра	$H_{top}$ , км	$L$ , км	$W$ , км	$D_{\sigma}$ , м	$\delta$ , град	$\lambda$ , град	$\vartheta$ , град
Ansei-Tokai (1854)	8.4	34.4 N, 137.0 E	5	150	100	4	24	113	65
		34.8 N, 137.8 E	5	115	70	4	24	71	17
Kanto (1923)	7.9	35.5 N, 139.9 E	10	150	70	5	20	90	120
Tonankai (1944)	8.1	33.9 N, 136.6 E	10	150	50	5	20	90	45
Nankai (1946)	8.1	33.0 N, 134.5 E	10	150	50	5	20	90	50
Tohoku (2011)	9.0	38.9 N, 141.7 E	20	300	150	25	10	88	20

Для каждого исторического землетрясения были выбраны несколько участков побережья, для которых проводился расчет наката волн, порожденных этими землетрясениями. Такие участки выбирались как с достаточно пологими прибрежными зонами для возможности применения первой, «1.5D», методики расчета наката, так и со сложным рельефом, где применим только второй подход, использующий непосредственно двумерное моделирование наката.

Расчет распространения волн велся на сетке с пространственным шагом 15 угловых секунд, с использованием батиметрии, полученной путем линейной интерполяции из цифрового массива GEBCO-30 сек. При одномерных расчетах наката вдоль сечений рельеф строился также с использованием линейной интерполяции этого же массива. Двумерное моделирование наката прово-

дилось на сетках с шагом до 10 - 15 метров, при этом источником информации о рельефе служил массив GEBCO-30 sec, а также результаты оцифровки доступных авторам топографических и морских карт прибрежных участков и прилегающих акваторий.



**Рис. 1.** Изолинии начальных смещения водной поверхности от модельных очагов исторических землетрясений (синие линии - отрицательная часть возмущений, красные - положительная); желтыми прямоугольниками показаны площадки разрывов.

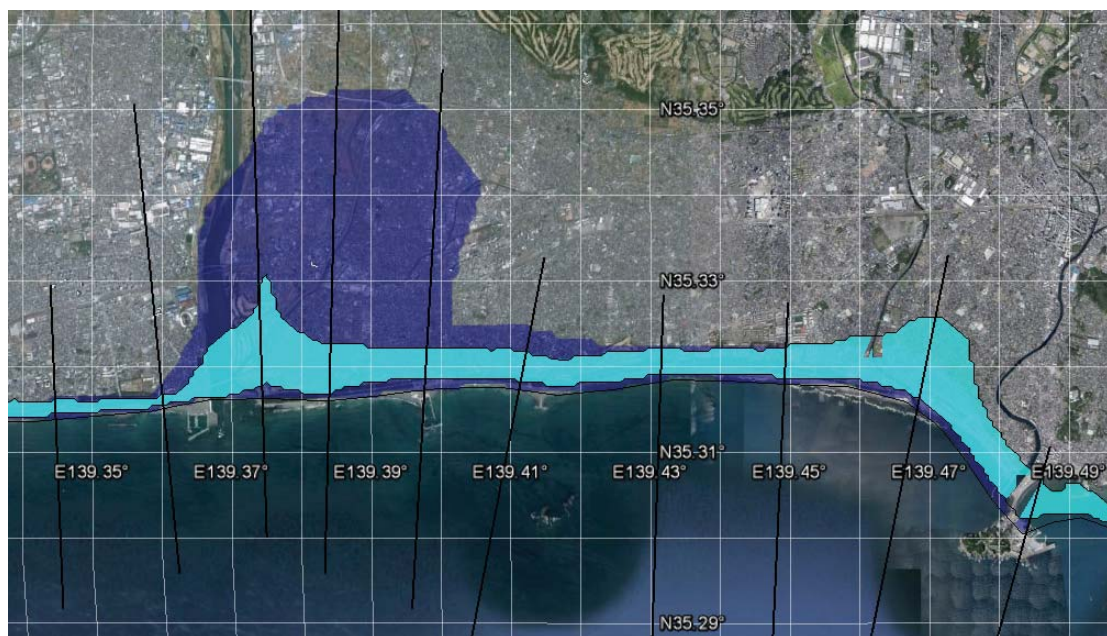
## РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В настоящем разделе приведены полученные авторами результаты моделирования затопления участков восточного побережья Японии волнами цунами, порожденными пятью историческими землетрясениями.

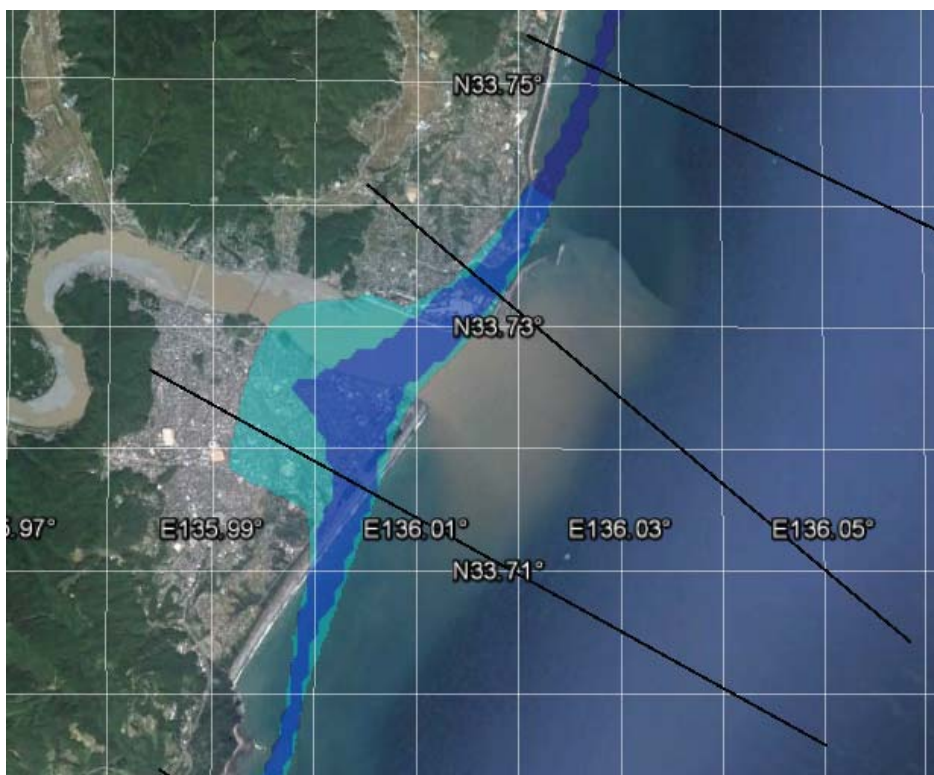
На рисунках 2 - 6 показано сравнение зон заливания, полученных с использованием обоих рассматриваемых подходов к моделированию наката волн от каждого из землетрясений. Приведенные изображения показывают, что на рассмотренных участках побережья, обладающих достаточной гладкой береговой линией и вполне однородным рельефом прибрежной области, позволяющими провести сечения с монотонно изменяющимися рельефами суши и дна, результаты расчетов по «1.5D» методике весьма близки к соответствующим результатам по двумерным расчетам, которые здесь можно принимать за эталонные, что иллюстрирует возможность применения упрощенной методики на рельефах такого типа.



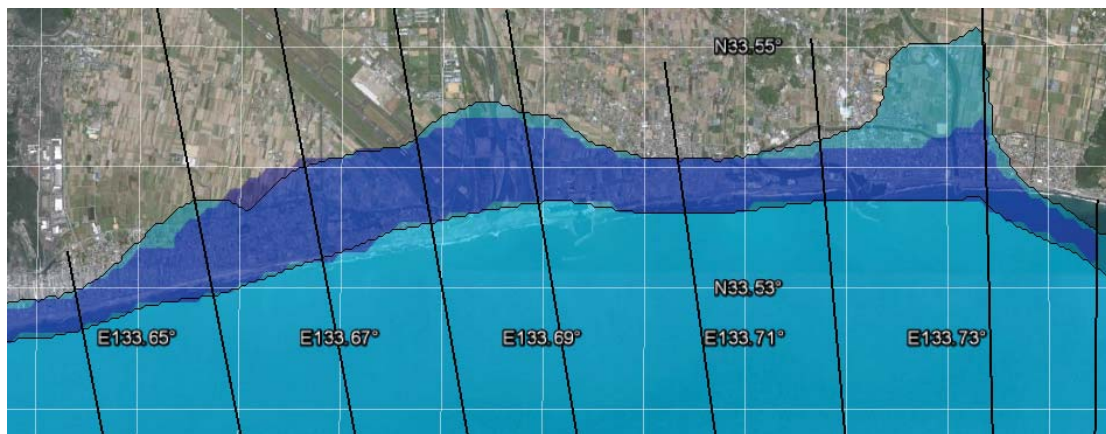
**Рис. 2.** Зоны затопления волной цунами 1854 г. (Ansei-Tokai) участка побережья Японии в районе города Михами, рассчитанные в двумерном случае (голубая заливка) и в «полуторамерном» (темно-синяя заливка) вдоль одномерных сечений (черные линии), наложенные на изображение Google Earth.



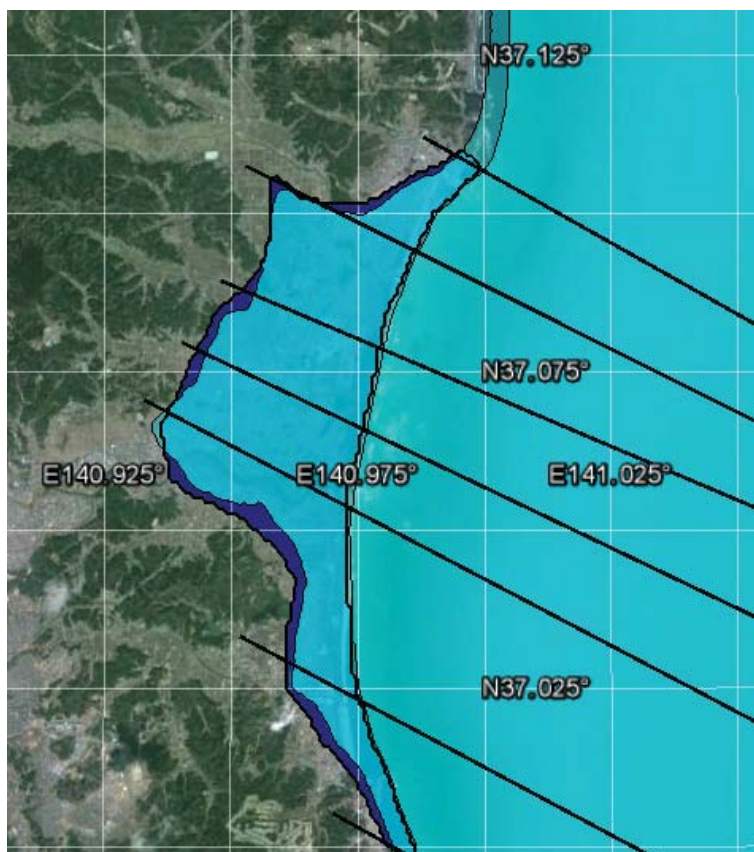
**Рис. 3.** Зоны затопления волной цунами 1923 г. (Kanto) участка побережья Японии в районе города Тигасаки, рассчитанные в двумерном случае (голубая заливка) и в «полуторамерном» (темно-синяя заливка) вдоль одномерных сечений (черные линии), наложенные на изображение Google Earth.



**Рис. 4.** Зоны затопления волной цунами 1944 г. (Tonankai) участка побережья Японии в районе города Сингу, рассчитанные в двумерном случае (голубая заливка) и в «полуторамерном» (темно-синяя заливка) вдоль одномерных сечений (черные линии), наложенные на изображение Google Earth.



**Рис. 5.** Зоны затопления волной цунами 1946 г. (Nankai) участка побережья Японии в районе города Нанкоку, рассчитанные в двумерном случае (голубая заливка) и в «полуторамерном» (темно-синяя заливка) вдоль одномерных сечений (черные линии), наложенные на изображение Google Earth.



**Рис. 6.** Зоны затопления волной цунами 2011 г. (Tohoku) участка побережья Японии в районе города Иваки, рассчитанные в двумерном случае (голубая заливка) и в «полуторамерном» (темно-синяя заливка) вдоль одномерных сечений (черные линии), наложенные на изображение Google Earth.

Для землетрясения и цунами 2011 г. (Tohoku) было рассмотрено две области со сложным рельефом, где расчет наката возможен только путем двумерного моделирования. Такими областями стали бухты Коборинаи и Мияко. На рисунке 7 приведены построенные для них рельефы то-

пографии и батиметрии, демонстрирующие сильную изрезанность береговой линии и наличие большого количества неоднородностей (выступов и впадин) на суше. Рассчитанные для таких рельефов с использованием метода крупных частиц зоны заливания изображены на рисунке 8. Полученные в численных экспериментах высоты заплесков до 30 - 35 метров в бухте Коборинаи и около 20 метров в бухте Мияко хорошо соответствуют натурным данным о высотах заплеска здесь цунами 2011 г.

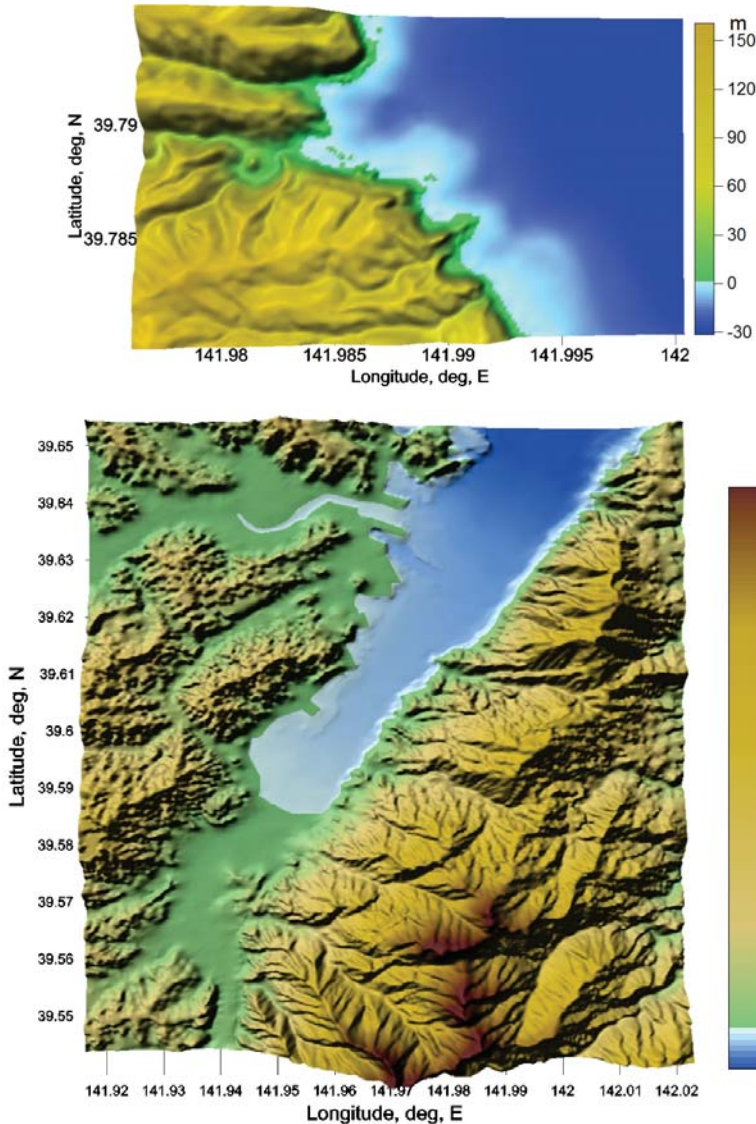


Рис. 7. Рельефы акваторий и прилегающих к ним участков суши со сложным рельефом в заливах Коборинаи (сверху) и Мияко (снизу).

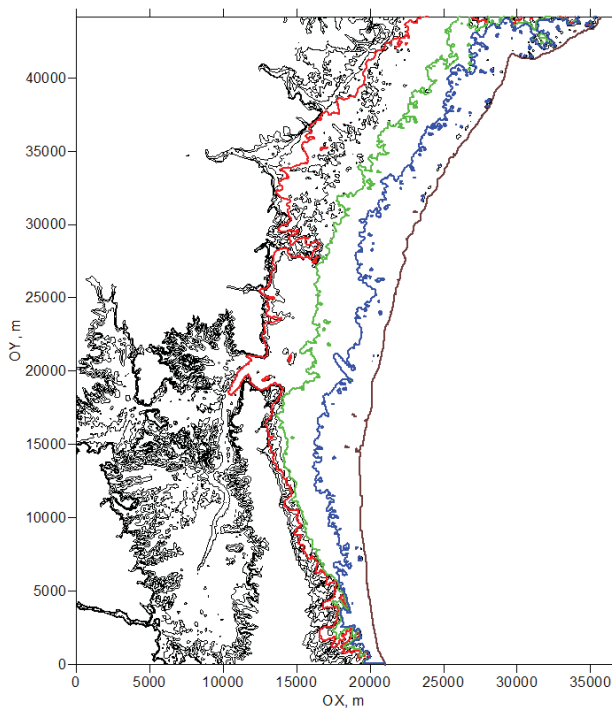
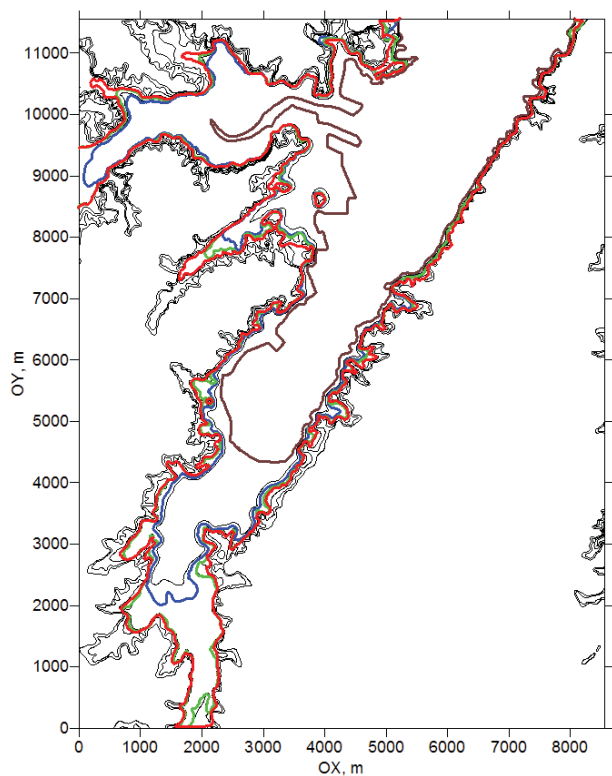
При численном моделировании наката волн цунами на побережье важную роль играет используемое в расчетах значение коэффициента трения, которое зависит от характера подстилающей поверхности. Приведенные выше результаты были получены при нулевом его значении, а ниже на рисунке 9 показано сравнение границ заливания бухты Мияко и побережья в районе г. Сендай волной цунами 2011 г. (Tohoku), рассчитанные для значений 0, 0.001 и 0.002. Видно, что величина

силы трения оказывает существенное влияние на положение границы заливания и, таким образом, площадь участка побережья, затапливаемого волной при накате.



**Рис. 8.** Зоны затопления волной цунами 2011 г. (Tohoku) побережья бухт Коборинаи (сверху) и Мияко (снизу) (голубая заливка), полученные в результате двумерных расчетов и наложенные на изображение Google Earth. Цветными линиями показаны изолинии цифрового рельефа суши: черная - 0 м, красная - 5 м, оранжевая - 10 м, желтая - 20 м, зеленая - 30 м.

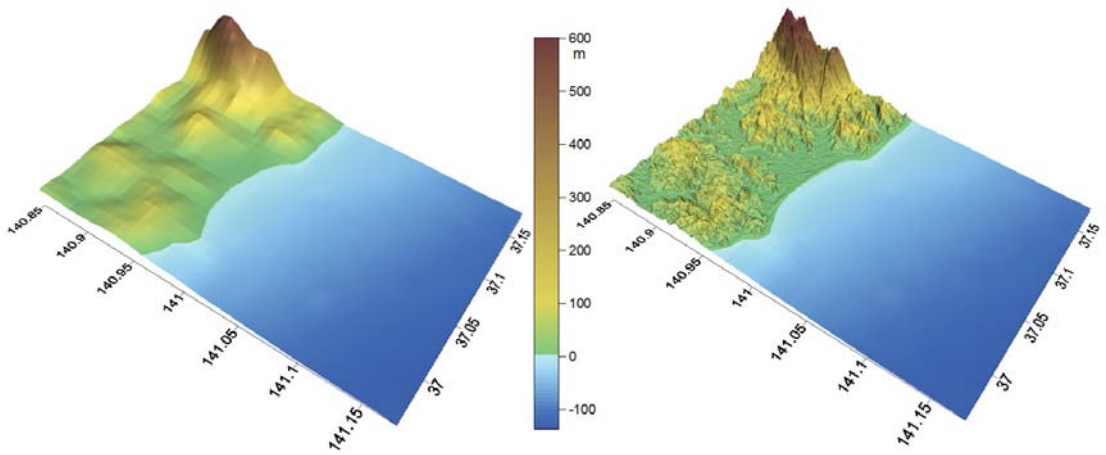
Адекватная параметризация свойств суши, по которой движется волна в ходе наката на берег, в каждом конкретном случае требует самого тщательного предварительного исследования. И, говоря о детальном анализе вероятных сценариев затопления побережья волнами цунами, следует, конечно, говорить о необходимости составления детального образа каждого защищаемого участка побережья, в число атрибутов которого должны быть включены характеристики ближайших к береговой линии участков суши, включая тип поверхности (песок, мелкая галька, камни, фрагменты скал), наличие и тип растительности (трава, кусты, отдельные деревья, лес), построек и т.п. Информация подобного рода может способствовать адекватному определению соответствующих коэффициентов трения, составлению схем их распределения.



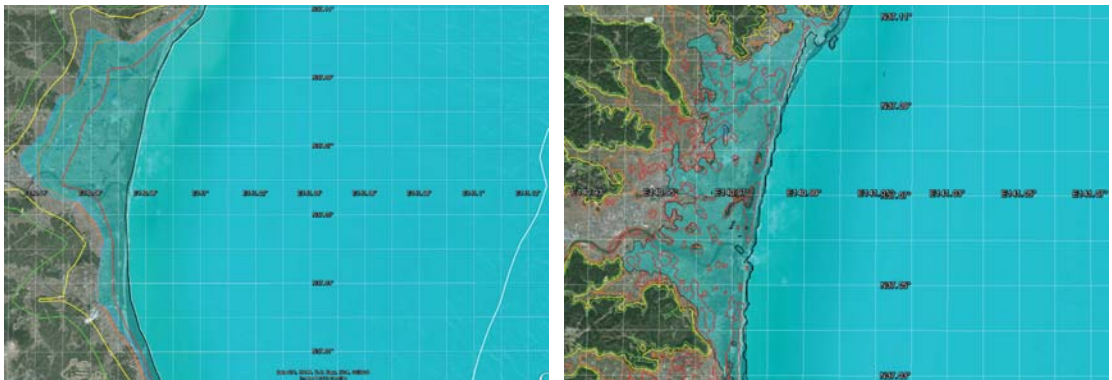
**Рис. 9.** Границы зон затопления волной цунами 2011 г. (Tohoku) в бухте Мияко (сверху) и в районе города Сендаи (снизу), полученные в результате двумерных расчетов при различных значениях коэффициента Шези  $n$  (параметра трения): красная линия -  $n=0$ , зеленая -  $n=0.001$ , синяя -  $n=0.002$ . Коричневая линия - изолиния рельефа 0 м; тонкими черными линиями показаны изолинии рельефа суши от 10 до 50 метров через каждые 10 м.



Наконец, еще одним элементом численного моделирования наката волн цунами на берег, способным оказывать большое влияние на качество получаемых результатов, является точность цифрового рельефа, в особенности, при расчете наката, - топографии. Для оценки возможности такого влияния авторами были рассмотрены два рельефа прибрежной области г. Иваки, один из которых был построен на основе данных GEBCO-30sec, а второй - SRTM-3sec. Как показывает рисунок 10, второй, более точный, массив содержит большее количество мелкомасштабных неоднородностей. В некотором смысле эти неоднородности можно интерпретировать как шероховатость поверхности, снижающую высоту и дальность заплеска волн на берегу. Так, при одном и том же нулевом значении коэффициента трения, для цунами 2011 г. (Tohoku) на первом рельефе рассчитанные высоты заплесков достигали 10 метров и более, а на втором - в целом не превосходили 5 метров (рис. 11).



**Рис. 10.** Рельефы акватории и прилегающего участка побережья в районе города Иваки, построенные по данным цифровых массивов GEBCO-30sec (слева) и SRTM-3sec (справа).



**Рис. 11.** Зоны затопления (голубая заливка) волной цунами 2011 г. (Tohoku) в окрестности города Иваки, полученные в результате двумерного моделирования с использованием цифровых рельефов, построенных на основе данных GEBCO- 30sec (слева) и SRTM-3sec (справа).  
Цветными линиями показаны изолинии рельефов суши:  
черная - 0м, красная -5 м, оранжевая -10 м, желтая - 20 м, зеленая - 30 м.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 12-05-00894), программы Интеграционных фундаментальных исследований СО РАН (проекты 117А, 37Б) и Президентской программы «Ведущие научные школы РФ» (грант № НШ-6293.2012.9).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Integrated Tsunami Database for the World Ocean (ITDB/WLD), 2000 BC to present. CD-ROM, Tsunami Laboratory, ICMMG SB RAS, Novosibirsk. 2013. Web-version: <http://tsun.sccc.ru/nh/tsunami.php>.
- [2] Liu P. L.-F., Yeh H., Synolakis C., Advanced Numerical Models for Simulating Tsunami Waves and Runup. *Advances in Coastal and Ocean Engineering*. Vol.10. 2008. 250 pp.
- [3] Carrier G.F., Greenspan H.P., Water waves of finite amplitude on a sloping beach. *J. Fluid Mech.* Vol.4, No.1. 1958. P.97-109.
- [4] Synolakis C.E., The runup of solitary waves. *J. Fluid Mech.* Vol.185. 1987. P.523-545.
- [5] Choi B.H., Kaistrenko V., Kim K.O., Min B.I., Pelinovsky E., Rapid forecasting of tsunami runup heights from 2-D numerical simulations. *Natural Hazards Earth Syst. Sci.* Vol.11. 2011. P.707-714.
- [6] Подъяпольский Г.С., Возбуждение длинной гравитационной волны в океане сейсмическим источником в коре. *Физика Земли*. 1968. №1. С.7-24.
- [7] Гусяков В.К., Остаточные смещения на поверхности упругого полу пространства. Условно-корректные задачи математической физики в интерпретации геофизических наблюдений. Новосибирск: ВЦ СО РАН. 1978. С.23-51.
- [8] Okada Y., Surface deformation due to shear and tensile faults in the half-space. *Bull. Seis. Soc. Am.* Vol. 75. 1985. P.1135-1154.
- [9] MacCormack R.W., The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering. *Journal of Spacecraft and Rockets*. Vol.40, No.5. 2003. P.757-763.
- [10] Бейзель С.А., Шокина Н.Ю., Хакимзянов Г.С., Чубаров Л.Б., Ковыркина О.А., Остапенко В.В., О некоторых численных алгоритмах расчета наката волн цунами в рамках модели мелкой воды. I. *Вычислительные технологии*. Т.19, №1. 2014. С.40-62.

## ON INFORMATIZATION OF THE SIBERIAN BRANCH OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

### О ВОПРОСАХ ИНФОРМАТИЗАЦИИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

---

*Performing modern research requires serious instrumental and technological support. One of the key sources of such securing is information technology, which are widely used in both research processes and in various tasks of the scientific activity: the publication of results, information storage and processing, document and project management, etc.*

*There is a long experience in solving problems in the field of telecommunications, high performance computing, multimedia resources and information systems gained in the Siberian Branch of Russian Academy of Sciences. Despite this, many informatization problems still remain open. In particular, these include issues of electronic document, publication and exchange of research results, collaboration tools. There is a strong need for in the data center for common purposes, which would have provided a variety of information services automatically. The maturity level of the telecommunications infrastructure, experience and information requests from research organizations suggest the possibility and necessity of building enterprise information systems and services. This article asserts the main tasks on informatization of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences and formulates conceptual proposals to address them.*

---

### ТЕКУЩЕЕ СОСТОЯНИЕ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ, МУЛЬТИМЕДИЙНЫХ И ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ СО РАН

Сеть передачи данных (СПД) СО РАН непрерывно развивается с начала 1990-х годов [1] и выполняет важнейшую интегрирующую роль в жизни Отделения, объединяя каналами передачи данных источники информации (датчики дистанционного наблюдения космические и наземные, высокотехнологичные приборы, генерирующие сверхбольшие объемы экспериментальных данных - ускорители, томографы, секвенаторы и т.п.) и обрабатывающие эти данные высокопроизводительные вычислительные устройства институтов Отделения (ССКЦ, ИВМ, ИДСТУ, ИВТ, ИТПМ и др.) и университетов региона (НГУ, СФУ, ТГУ и др.). В настоящее время СПД СО РАН обслуживает более 50 000 исследователей, аспирантов и студентов в Новосибирске, Красноярске, Иркутске, Томске и других городах России от Тюмени до Якутска, Улан-Удэ и Читы. Ведется развитие высокоскоростных технологических сегментов СПД СО РАН [2], которое обусловлено появлением больших объемов уникальных научных данных и работами по созданию корпоративных систем хранения данных.

В 2005-2009 г. была создана система видеоконференцсвязи СО РАН, для которой в региональных научных центрах были оборудованы специализированные конференц-залы. С помощью этой системы проводятся видеоконференции, связанные с наиболее значимыми событиями в жизни сибирского научного сообщества: заседания Президиума СО РАН, научно-координационных советов, объединенных ученых советов; конференции, симпозиумы, семинары.

В СО РАН с 2011 г. развивается проект корпоративного облака, основой которого является предоставление широкого ряда ИТ-услуг в виде сервисов. Наиболее востребованной является коммуникационная платформа - сервисы электронной почты, управления адресными книгами, календарного планирования, обмена мгновенными сообщениями, IP-телефония, аудио-, видео-конференцсвязь и т.д. Развитая коммуникационная платформа, используемая совместно органи-

---

<sup>1</sup> Institute of Computational Technologies of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

зациями Сибирского отделения, позволяет облегчить и интенсифицировать совместную работу исследователей. Облачный сервис видеоконференций интегрирован с существующей аппаратной инфраструктурой видеоконференцсвязи, позволяет организовывать видеоконференции и участвовать в них с произвольного рабочего места, не требуя приобретения дорогостоящего оборудования, проводить трансляции семинаров, ученых и диссертационных советов, а для крупных мероприятий поддерживает в интегрированном режиме одновременно использовать все каналы трансляции и, тем самым, многократно расширить количество потенциальных участников видеоконференций. Также на базе корпоративного облака интенсивно развивается инфраструктура сайтов и порталов институтов, прикладных веб-решений. Так, на базе проекта реализован первый этап информационной системы управления научными проектами СО РАН. Важным элементом проекта является единая система аутентификации пользователей во всех информационных ресурсах. В построении и развитии корпоративного облака участвуют несколько организаций Сибирского отделения в Новосибирске, Якутске, Кемерово.

Серьезным подтверждением высокого качества создаваемых в СО РАН информационных ресурсов, а следовательно и внимания к их содержанию, стало включение в 2012 г. Портала Сибирского отделения РАН (<http://www.sbras.ru>) в Top-50 июльского рейтинг-листа «Webometrics», составляемого Cybermetrics Lab. Этот портал занял 42-ое место среди 4000 сайтов научных организаций и центров всего мира, опередив все российские научные ресурсы. Созданы также оригинальные научно-образовательные ресурсы «Информационная система «Конференции» [3], «Байкальский музей», «Фауна и флора Байкала», «Единый библиотечный ресурс», «Электронные библиотеки», «Стратификация водных экосистем», «Путь в Сибирь», «Информационная система спутниковых данных СО РАН» и т.п.

В частности, в рамках последнего проекта на базе информационно-вычислительных ресурсов ИВТ СО РАН и инфраструктуры приема Сибирского центра ГУ «НИЦ ПЛАНЕТА» развернут комплекс по приему и обработке природно-ресурсных спутниковых данных. Принципиальным отличием этого комплекса от других российских центров подобного назначения является реализация полной технологии структурного преобразования данных до уровня стандартизованных специализированных продуктов и продуктов конечного пользования, содержащих уникальную информацию о состоянии атмосферы и подстилающей поверхности Земли. Эти результаты предоставляются Центром в режиме удаленного доступа 30 институтам СО РАН и организациям РосГидромета [4].

В 2012 году был проведен опрос 85 организаций Сибирского отделения РАН о состоянии ИТ-инфраструктуры и запросах на ее развитие. В опросе запрашивались потребности учреждений СО РАН в современных средствах коммуникации, порталных технологиях и средствах конструирования веб-сайтов, решениях для управления ИТ-инфраструктурой и научно-организационной деятельностью. В целом, результаты этого опроса позволяют сделать вывод о том, что текущие информационные потребности сотрудников существенно превосходят имеющиеся в большинстве институтов возможности. Для преодоления такого технологического разрыва необходимо либо многократно увеличить финансирование в ИТ-службах институтов, либо перейти на централизованное предоставление сервисов в масштабах всего Отделения. Именно второй подход и предлагается заложить в основу разрабатываемой стратегии.

## **ЦЕЛИ, ЗАДАЧИ И ПРИНЦИПЫ ИНФОРМАТИЗАЦИИ**

В соответствии с уже утратившим силу Федеральным законом № 24 «Об информации, информатизации и защите информации» от 25 января 1995 г. *информатизацией* называется «организационный социально-экономический и научно-технический процесс создания оптимальных условий для удовлетворения информационных потребностей и реализации прав граждан, органов государственной власти, органов местного самоуправления, организаций, общественных объединений на основе формирования и использования информационных ресурсов». Действующий Федеральный закон №149 «Об информации, информационных технологиях и о защите

информации» от 27 июня 2006 г. предлагает уже несколько другое толкование понятия информатизации: «...поиск, получение, передача, производство и распространение информации с применением информационных технологий». Сибирское отделение РАН как крупное, территориально распределенное сообщество, охватывающее сотни организаций и имеющее элементы централизованной системы управления, необходимо рассматривать как отдельный объект информатизации. Информатизация СО РАН - это процесс перехода к широкомасштабному, комплексному применению информационных технологий в различных областях деятельности, организация и поддержка в учреждениях СО РАН процессов управления и развитие ИТ-инфраструктуры.

Прежде всего, необходимо определить **объекты** информатизации: научно-исследовательская, научно-организационная и административно-хозяйственная деятельность сотрудников, подразделений, организаций и администрации Сибирского отделения РАН.

**Целью** информатизации является повышение качества и эффективности научно-исследовательской и административной деятельности СО РАН.

В процессе достижения вышеозначенных целей должны быть решены следующие **ключевые задачи**:

- Повышение эффективности и производительности труда как в научной, так и в управленческой деятельности;
- Постоянное скоординированное совершенствование ИТ-инфраструктуры организаций СО РАН в целях соответствия требованиям общих информационных систем;
- Сокращение совокупных издержек на поддержку и развитие ИТ-инфраструктуры, рациональное использование трудовых и материальных ресурсов;
- Формирование целостного позитивного имиджа СО РАН, представление информации о его деятельности, научно-образовательном потенциале и инвестиционной привлекательности.

Анализ структуры Сибирского отделения РАН, особенностей управления и решаемых задач, кадровой и технической обеспеченности, существующего опыта развития ИТ и стратегических целей показывает, что в основу процессов информатизации необходимо заложить следующие **ключевые принципы**.

- **Унификация.** Научно-организационная деятельность в различных институтах СО РАН имеет много общего: делопроизводство, бухгалтерия, проведение конференций и семинаров, управление научными проектами, библиотечное дело. Для таких задач целесообразно разрабатывать типовые тиражируемые решения, что позволит внедрять их во всех организациях и минимизировать эксплуатационные затраты.
- **Консолидация.** Развитие ИТ является технологически сложной задачей, требующей множества различных ресурсов: инженерная инфраструктура, каналы связи и коммуникационное оборудование, вычислительные мощности, системы хранения, программное обеспечение, высококвалифицированный персонал, обладающий различными компетенциями, и прочее. Представляется невозможным собрать все необходимые ресурсы в рамках одной организации. Вместо этого, целесообразно объединять и совместно использовать ресурсы в разных организациях для решения общих задач с сохранением их принадлежности и определением зон ответственности. Такой консолидированный подход позволит повысить эффективность использования ресурсов и откроет больше возможностей для развития.
- **Централизация.** С учетом специфики организационной структуры СО РАН (иерархия «СО РАН - научный центр - институт - лаборатория - сотрудник», большое число организаций и сотрудников) и наличия множества типовых задач, предоставление ИТ-услуг наиболее эффективно централизованным способом. Отметим, что в данном случае централизация понимается не в единственности источника услуг (наоборот, с учетом консолидированного подхода рекомендуется иметь несколько географически распределенных центров), а в смысле единого

подхода к формированию услуг и одной точки доступа к их получению. Кроме того, в условиях, когда расходы на развитие ИТ в большинстве институтов являются низкими, их информатизация становится возможной только при централизованном подходе.

- **Интеграция.** Информатизация затрагивает многие процессы, связанные с обработкой и передачей данных, выполняющиеся в различных организациях и подразделениях СО РАН. Эффективность этих процессов напрямую зависит от наличия необходимой информации и ее готовности к автоматизированной обработке. Таким образом, необходимо обеспечить интеграцию различных источников данных - возможность их логического объединения, автоматизированного взаимодействия и предоставления информации в унифицированном виде.

Общий подход к разработке стратегии заключается в том, что для каждого объекта необходимо сформулировать подзадачи его информатизации и методы их решения в соответствии с ключевыми задачами и обозначенными принципами.

## **ИНФОРМАТИЗАЦИЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ИНСТИТУТОВ И СОТРУДНИКОВ**

Деятельность научно-исследовательских институтов Сибирского отделения состоит из трех основных направлений: научно-исследовательская, научно-организационная и административно-хозяйственная. Каждое из направлений включает в себя ряд типовых задач, с каждой из которых могут быть связаны собственные процессы информатизации, поскольку все направления характеризуются наличием процессов обработки информации и регулярного обмена данными и документами с администрацией СО РАН, другими институтами и органами власти.

*Научно-исследовательская деятельность* институтов СО РАН сама по себе характеризуется широким спектром решаемых задач, среди которых важную роль играет задача управления научными проектами, включающая:

- Формирование планов научно-исследовательских работ;
- Подготовку заявок на участие в конкурсах научных проектов;
- Подготовку отчетов о научных исследованиях;
- Публикацию результатов научных исследований.

*Научно-организационная деятельность* институтов СО РАН характеризуется широким кругом вовлеченных сотрудников, ярко выраженными потребностями в информационном сопровождении, и включает следующие задачи:

- Проведение научных конференций;
- Проведение семинаров;
- Сопровождение аспирантур и докторантур;
- Работа диссертационных советов;
- Работа ученых советов;
- Издательская деятельность;
- Информационно-библиотечная деятельность.

*Административно-хозяйственная деятельность* институтов СО РАН характеризуется высокой степенью регламентации процессов со стороны Администрации СО РАН, ограниченным кругом вовлеченных сотрудников и повышенными требованиями к информационной безопасности, и включает следующие задачи:

- Ведение финансового и экономического учета, планирования;
- Документооборот и делопроизводство;
- Управление кадрами;
- Управление имуществом.

Кроме того, целесообразно в организационной структуре института выделить техническую службу (ИТ-отдел), отвечающую за процессы информатизации, в т.ч. за выполнение следующих задач:

- Управление парком компьютеров и оргтехники;
- Настройка специализированного программного обеспечения для нужд АУП;
- Эксплуатация ЛВС организации;
- Обеспечение средств связи (телефония, факсы, видеоконференцсвязь);
- Эксплуатация парка серверов и сопутствующей инженерной инфраструктуры;
- Обеспечение доступа к интернет-сервисам;
- Эксплуатация сайта организации и информационных ресурсов;
- Обеспечение информационной безопасности.

Кроме того, рекомендуется рассмотреть возможность вынесения этих функций из институтов в специальное подразделение научного центра, осуществляющего техническую поддержку.

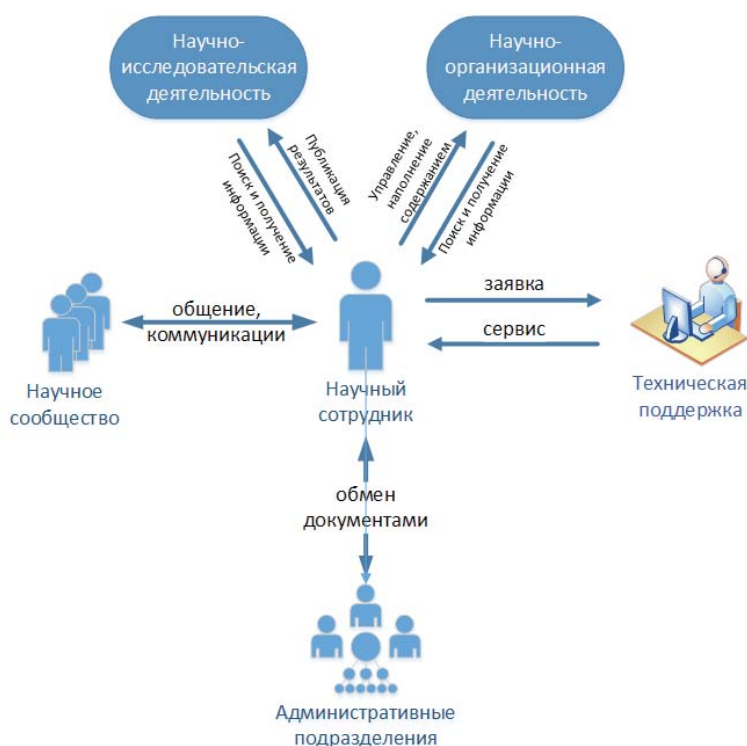


Рис. 1. Окружение научного сотрудника

С точки зрения процессов информатизации, деятельность научного сотрудника включает (Рис. 1):

- Обмен документами с АУП в соответствии с типовыми регламентами:
  - Подача электронных заявлений на предоставление справок и других документов;
  - Получение входящей и отправка исходящей корреспонденции;
  - Оформление командировок, отпусков, больничных;
  - Прием на работу и увольнение;
  - Исполнение поручений дирекции;
  - Подготовка заявок на проведение закупок и использование оборудования.

- Техническое обеспечение рабочего места:
  - Установка и настройка базового программного обеспечения;
  - Доступ в сеть Интернет и к корпоративным информационным ресурсам;
  - Техническая поддержка;
  - Предоставление дополнительных технических ресурсов (вычислительные мощности, дисковое пространство, виртуальные машины).
- Взаимодействие с другими членами исследовательского коллектива:
  - Аудио-, видеоконференцсвязь и телефония;
  - Электронная почта и мгновенные сообщения;
  - Разделяемое хранилище документов;
  - Совместная работа с информацией.
- Поиск и получение информации о планах и результатах научно-организационной деятельности;
  - Доступ к корпоративным ресурсам: сайты организаций, конференций, семинаров, диссертационных советов, новости и календари событий;
  - Доступ к корпоративным информационно-справочным системам;
  - Доступ к тематическим базам данных и информационным источникам;
  - Получение автоматических оповещений и рассылок.
- Управление и информационное наполнение научно-организационной деятельности;
  - Организация конференций и семинаров;
  - Участие в работе ученых и диссертационных советов.
- Поиск и получение информации о результатах научно-исследовательской деятельности:
  - Доступ к корпоративной системе управления научными проектами;
  - Поиск в библиотечных ресурсах.
- Публикация данных о своей научно-исследовательской деятельности.
  - Подготовка монографий и статей для публикации;
  - Ввод данных о результатах научных исследований в корпоративную систему;
  - Формирование тематических коллекций и наборов данных;
  - Ведение персонального сайта, сайта проекта и/или сайта исследовательской группы.

## **УРОВНИ ИНФОРМАТИЗАЦИИ**

Задачи информатизации разбиваются на несколько уровней, обеспечивающие функционирование необходимой ИТ-инфраструктуры, ИТ-сервисов и систем управления (Рис. 2). Каждый последующий уровень опирается на предыдущие уровни, которые предоставляют необходимые возможности.

Инженерный уровень решает задачи подготовки среды функционирования аппаратного уровня: специализированные помещения («серверные комнаты», помещения ЦОД), оборудованные электропитанием, системами кондиционирования, пожаротушения и мониторинга. Связность всей инфраструктуры обеспечивается каналами связи.

Аппаратный уровень обеспечивает функционирование вычислительного и телекоммуникационного оборудования, систем хранения данных и парка рабочих станций.

Базовый уровень обеспечивает работу низкоуровневых сетевых служб и основных каталогов: организаций и пользователей. С ними связана служба авторизации, выполняющая проверку прав



доступа пользователей к различным сервисам.

Уровень управления	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="background-color: #ADD8E6; padding: 5px;">АСУ «Финансы»</div> <div style="background-color: #ADD8E6; padding: 5px;">АСУ «Кадры»</div> <div style="background-color: #D3D3D3; padding: 5px;">АСУ «Научные проекты»</div> <div style="background-color: #D3D3D3; padding: 5px;">Электронная канцелярия</div> </div>					
Информационный уровень	ИС «Диссертационные советы»	ИС «Семинары»	ИС «Публикации»	Порталы для совместной работы	Публичные сайты	Корпоративный портал СО РАН
	ИС «Новости»	ИС «Конференции»	ИС «Редакция журнала»	ИС «Стационары, экспедиции и ЦКП»	Персональные сайты	Корпоративный портал института
Коммуникационный уровень	Телефония	Электронная почта	Видео-конференции	Файловые архивы	Базы данных	
Базовый уровень	Сетевые службы		Каталоги организаций и сотрудников	Совместное используемое ПО	Службы аутентификации и авторизации	
Аппаратный уровень	Телекоммуникационное оборудование		Вычислительное оборудование	Системы хранения данных	Рабочие станции	
Инженерный уровень	Каналы связи		Специализированные помещения	Инженерная инфраструктура		
<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="background-color: #008000; color: white; padding: 5px;">Функционирующие сервисы</div> <div style="background-color: #D3D3D3; padding: 5px;">Частично реализованные сервисы</div> <div style="background-color: #ADD8E6; padding: 5px;">Отсутствующие сервисы</div> </div>						

Рис. 2. Уровни информатизации.

Уровень коммуникаций решает задачи взаимодействия пользователей посредством сетевых технологий (электронная почта, телефония, видеоконференцсвязь) и средств совместного использования данных (файловые архив и базы данных).

Информационный уровень обеспечивает функционирование систем, основной задачей которых является накопление и публикация тематических данных. К таким данным относятся сведения о научно-организационной деятельности: конференции, семинары, диссертационные советы, служба обмена и агрегации новостей, сайты организаций, подразделений и проектов; а также о научных исследованиях: порталы для совместной работы, базы данных журналов и публикаций.

Уровень управления обеспечивает функционирование информационных систем административно-хозяйственной (финансы, кадры, канцелярия) и научно-организационной (научные проекты, отчеты) деятельностью организаций и администрации СО РАН.

В этой статье мы не будем останавливаться на каждом функциональном блоке, отметим лишь ключевые тезисы на отдельных примерах. Помимо выполнения основных функций, информационные системы должны иметь высокую степень взаимной интеграции. Так, информация о конференциях, семинарах и защитах диссертаций должна автоматически попадать в новостную систему, из которой эти данные могут транслироваться на корпоративных порталах и персональ-

ных сайтах сотрудников. Данные о публикации из журнальной системы должны автоматически попадать в общую систему учета публикаций и на персональный сайт авторов. Необходимо обеспечить техническую возможность связать с одним человеком информацию о нем из разных систем: участие в конференциях, авторство публикаций, кадровые данные и проекты, в которых он принимает участие. Исходя из этого мы можем сформулировать следующие принципы наполнения и использования информационных ресурсов:

1. Совместное наполнение. Авторами контента информационных ресурсов являются научные сотрудники и сотрудники служб сопровождения.
2. Совместное использование. Потребителями контента информационных ресурсов являются научные сотрудники, сотрудники аппарата управления, руководство, контролирурующие органы.
3. Взаимное связывание данных. Данные из разных систем могут и должны ссылаться друг на друга для обеспечения полноты информации.
4. Таргетирование контента. Информационные ресурсы должны при отображении отфильтровывать данные, соответствующие ожиданиям целевой аудитории или текущего пользователя.

## **КОРПОРАТИВНЫЙ ПОРТАЛ СО РАН**

Корпоративный портал СО РАН предназначен для представления интересов Отделения в глобальной сети, обеспечения доступа пользователей к информационным ресурсам СО РАН и к ресурсам других организаций, развития научных связей с другими организациями, установления персональных контактов, а также обеспечения эффективной коммуникации между организациями и подразделениями СО РАН, получения служебной и специализированной информации сотрудниками. Корпоративный портал представляет собой единую точку доступа в информационное пространство Отделения для сотрудников и организаций СО РАН. Портал интегрирует информацию, полученную из других корпоративных систем, предоставляет пользователям средства для ознакомления с ней с последующим переходом в соответствующую систему для выполнения функций обработки.

Характерной особенностью корпоративных порталов является отображение данных, которые были отфильтрованы по определенной тематике. Рассматривая сложившуюся схему управления «СО РАН-организация-лаборатория-сотрудник», можно выделить четыре корпоративных информационных уровня: портал СО РАН, портал организации, сайт лаборатории и персональный сайт сотрудника. Каждый из уровней имеет свою настраиваемую систему фильтрации информации, получаемой из других корпоративных систем, которая отображена в таблице.

Также могут быть выделены уровни фильтрации, соответствующие научным центрам, объединенным ученым советам или по другим признакам.

Помимо перечисленных разделов, Корпоративный портал СО РАН должен содержать следующие сведения:

- Общая характеристика и история СО РАН;
- Выдающиеся люди и награды СО РАН;
- Международные связи;
- Официальная информация по основным направлениям научной деятельности Отделения, годовые отчеты;
- Тематические информационные ресурсы;
- Информация о научных изданиях;
- Собственные СМИ: газета «Наука в Сибири», Центр общественных связей;

- Информация о работе Совета научной молодежи;
- Иллюстративные, исторические и другие мультимедийные материалы;
- Контактная информация.

Внешний вид и содержание основных страниц корпоративного портала может быть различным и определяется исходя из потребностей различных целевых аудиторий:

1. Администрация СО РАН и руководство организаций СО РАН;
2. Сотрудники организаций СО РАН;
3. Научное сообщество РФ и мира;
4. Партнеры: представители бизнеса, руководители предприятий, инвесторы;
5. Представители государственной власти, общественных структур, СМИ.

**Таблица 1.** Уровни фильтрации данных из корпоративных систем

Корпоративная система	Уровни фильтрации			
	СО РАН	Организация	Лаборатория	Сотрудник
ИС «Новости»	Все	По заданному фильтру	По заданному фильтру	По персональному фильтру
ИС «Конференции»	Все	По направлению исследований организации	По направлению исследований лаборатории	По области интересов или по персональному фильтру
ИС «Семинары»	Все	По направлению исследований организации	По направлению исследований лаборатории	По области интересов или по персональному фильтру
ИС «Диссертационные советы»	Все	По направлению исследований организации	По направлению исследований лаборатории	-
ИС «Публикации»	-	По авторству сотрудников	По авторству сотрудников	По авторству
АСУ «Научные проекты»	Все	Выполняемые организацией	Выполняемые организацией	По признаку участия
Каталог организаций	Все	-	-	-
ИС «Стационары, экспедиции и ЦКП»	Все	По направлению исследований организации	По направлению исследований лаборатории	-
Адресная книга (АСУ «Кадры»)	Руководство и ключевые должностные лица	Сотрудники организации	Сотрудники лаборатории	Коллеги
Нормативные документы, приказы (Электронная канцелярия)	Публичные	Публичные	-	-

## ПОРТАЛ ИНСТИТУТА

Портал института является исходной точкой взаимодействия научного сотрудника и информационной инфраструктуры института. Содержание портала во многом пересекается с содержанием публичного сайта института, поэтому целесообразно организовать их на одной платформе с ограничением по роли просматривающего пользователя. Перечень необходимых разделов приведен

в таблице 2.

**Таблица 2.** Разделы сайта научной организации

Раздел	Публичный доступ	Авторизованный доступ	Доступные действия для сотрудников
Новости*	Публичные новости	Публичные и внутренние новости.	Отправка запроса на публикацию своей новости
Телефонный справочник*	Список сотрудников с указанием подразделений, телефона, email	Отображение состояния присутствия на рабочем месте	-
Ученый совет	Состав совета, повестки заседаний	Материалы заседаний, протоколы	-
Диссертационный совет*	Состав совета, расписание защит, тексты диссертаций	-	-
Конференции*	Список конференций института	Список рекомендуемых конференций	Регистрация на конференции
Семинары*	Список семинаров института	Список рекомендуемых семинаров	Регистрация на семинаре
Проекты*	Список научных проектов института	Список научных проектов сотрудника	Подача заявки на участие в конкурсе проектов
Научные результаты и публикации*	Список научных результатов и публикаций института	-	Добавление своего научного результата. Добавление своей публикации
Канцелярия	-	Входящие, исходящие, приказы	Получить копию документа
Документы	-	Архив документов	Получить копию документа
Файловый архив	-	Разделяемый архив файлов	Добавление и удаление файлов
Приемная	-	-	Подать служебную записку, заявление на получение справки, на командировку.
Техническая поддержка	-	Список заявок сотрудника. Доступное ПО.	Подать заявку на техническую поддержку
Поручения*	-	Список поручений, которые назначены сотруднику или сотрудником	Добавить поручение. Подготовить отчет о выполнении поручения.
Закупки*	-	Список заявок сотрудника	Подать заявку на закупку товаров/услуг

Отмеченные разделы (\*) наполняются автоматизированным способом из соответствующих смежных информационных систем и при этом являются точками входа эти системы. Например, при просмотре списка действующих конкурсов в разделе «Проекты» научный сотрудник может перейти непосредственно к заполнению заявки на участие в конкурсе, а при просмотре списка семинаров - добавить запись в свой календарь или заявить свой доклад. Управление наполнением таких разделов осуществляется либо полностью автоматически (если информация из источника считается достоверной - телефонный справочник, диссертационный совет, проекты), либо после утверждения должностным лицом контента для отображения на портале (новости, конфе-

ренции, семинары, научные результаты и публикации).

По схожим принципам могут формироваться и персональные сайты ученых, и сайты лабораторий, и проектные сайты.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В этой статье рассмотрены стратегические направления информатизации организационной составляющей научной деятельности, при этом за рамками остались вопросы информатизации собственно научных исследований. Для этих целей используются системы классов SDMS (scientific data management systems), LIMS (laboratory information management systems, ELN (electronic laboratory notebooks) и прочих, однако целесообразность их применения сильно зависит от инфраструктуры научных подразделений и стоящих перед ними предметных задач.

В целом можно утверждать, что разработка и принятие стратегии информатизации Сибирского отделения РАН является важнейшим шагом для обеспечения поддержки научной деятельности на современном уровне, а также для эффективного использования и устойчивого развития материально-технической базы для научных исследований.

Основной материал этой статьи был подготовлен до начала обсуждений и последующего принятия Федерального закона от 27.09.2013 N 253-ФЗ «О Российской академии наук, реорганизации государственных академий наук и внесении изменений в отдельные законодательные акты Российской Федерации». Несмотря на связанное с этим законом изменение организационных форм управления наукой, авторы статьи уверены, что рассмотренные положения будут применимы и для «реформированных» академических сообществ как регионального, так и федерального масштаба.

## **ЛИТЕРАТУРА**

- [1] Чубаров Л.Б., Никульцев В.С., Белов С.Д., Никульцева Е.В. История и перспективы сети передачи данных СО РАН // Развитие вычислительной техники в России и странах бывшего СССР: история и перспективы. Материалы международной конференции (Петрозаводск, Россия, 3-7 июля 2006). - Петрозаводск. - Ч. 2. - 2006. - С. 137-139.
- [2] Adakin A., Chubarov D.L., Nikulzev V.S., Belov S., Kaplin V., Sukharev A., Zaytsev A., Kalyuzhny V., Kuchin N., Lomakin S. Building a high performance computing infrastructure for novosibirsk scientific center // Journal of Physics: Conference Series. - 2011. - Vol. 331. - Issue 5. - P. 52020
- [3] Гуськов А.Е., Васильков А.В. Средства поддержки проведения научных конференций: обзор и сравнение // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. - 2010. - Т. 8. - Вып. 4. С. 35-45.
- [4] Шокин Ю.И., Антонов В.Н., Добрецов Н.Н., Кихтенко В.А., Лагутин А.А., Смирнов В.В., Чубаров Д.Л., Чубаров Л.Б. Распределенная система приема и обработки спутниковых данных Сибири и Дальнего Востока. Текущее состояние и перспективы развития // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. - 2012. - Т. 9. - № 5. - С. 45-54.

Yu. I. Shokin<sup>1</sup>, A. Yu. Vesnin<sup>2,3</sup>, A. A. Dobrynin<sup>2</sup>, O. A. Klimenko<sup>1</sup>, E. V. Konstantinova<sup>2,3</sup>, E. V. Rychkova<sup>1</sup>, M. Yu. Savin<sup>3</sup>

## STUDYING OF SCIENTIFIC WEB SPACE BY WEBOMETRICS AND GRAPH THEORY METHODS

### ИЗУЧЕНИЕ НАУЧНОГО ВЕБ-ПРОСТРАНСТВА МЕТОДАМИ ВЕБОМЕТРИКИ И ТЕОРИИ ГРАФОВ

---

*An analysis of scientific web-space of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences by webometrics and graph theory methods is presented. Webometrics methods are applied for statistical analysis of content of scientific organizations sites and relationships between them. For studying of information interaction between sites, the graph representation of the web-space is used. Vertices of such a web-graph correspond to sites and a relation between vertices is defined by hyperlinks from one site to another. Structural and metric properties of the web-graph and its fragments are studied. We also present PageRank ranking vertices in the web-graph and its changes after adding new vertices.*

---

#### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время World Wide Web (веб-пространство) является объектом интенсивных исследований, весьма разнообразных по задачам и методам. В данной работе рассматривается веб-пространство научных организаций Сибирского отделения Российской академии наук, которое формируется веб-сайтами этих организаций и гиперсвязями между ними (см. также [1,2]). Структура веб-пространства будет моделироваться ориентированным графом, вершинам которого соответствуют веб-сайты, а дугам между вершинами соответствуют гиперсвязи. Для изучения свойств веб-пространства научных организаций СО РАН привлекаются методы вебометрики, теории графов и методы ранжирования сайтов. Поскольку рассматриваемое веб-пространство динамически развивается, важным вопросом является выявление закономерностей его эволюции. Работа содержит сравнительный анализ вебометрических и граф-теоретических параметров этого веб-пространства в различные моменты времени. А именно, в параграфе 1 дается сравнительный анализ методами вебометрики рейтингов сайтов научных организаций СО РАН по состоянию на 2009 и 2013 годы. В параграфе 2 сравниваются структурные свойства графов веб-пространства, соответствующих 2012 и 2013 годам. В параграфе 3 приводятся подграфы, соответствующие институтам гуманитарного профиля и институтам химико-биологического профиля. В параграфе 4 обсуждается вопрос о ранжировании сайтов веб-пространства с помощью алгоритма PageRank.

#### АНАЛИЗ РАЗВИТИЯ ВЕБ-ПРОСТРАНСТВА СО РАН МЕТОДАМИ ВЕБОМЕТРИКИ

Изучение научного веб-пространства ведется в Институте вычислительных технологий СО РАН с 2008 года на основе построения рейтинга сайтов научных организаций Сибирского отделения РАН [3]. Работа началась с анализа статистических параметров  $V$ ,  $S$ ,  $R$  и  $Ic$  [2].

Параметр  $V$  характеризует видимость сайта. Его значение равно количеству внешних ссылок с других сайтов на данный ресурс. Для вычисления  $V$  используются данные, полученные из поисковых систем Яндекс [4], Google [5] и Bing [6].

Параметр  $S$  характеризует размер сайта. Значение  $S$  равно количеству веб-страниц сайта, которое находится с помощью указанных поисковых систем.

---

1 Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russia

2 Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia

3 Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

Параметр  $R$  характеризует насыщенность сайта информацией. Он вычисляется как суммарное количество файлов в форматах Adobe Acrobat (pdf), Microsoft Word (doc) и Microsoft Powerpoint (ppt), размещенных на сайте. Значение этого параметра находится с помощью поисковых систем Яндекс и Google.

Параметр  $I_c$  - это индекс цитирования сайта. Он характеризует информационную значимость сайта. Для нахождения индекса цитирования сайтов использовались данные из системы Google Scholar [7] и индекс цитирования согласно Яндекс [8].

Помимо построения собственно рейтинга сайтов СО РАН существует возможность проследить динамику развития сайтов, сравнив значения параметров  $V$ ,  $S$ ,  $R$  и индекса цитирования  $I_{c_{Google}}$  за два достаточно удаленных момента времени (82 сайта в 2009 г. и 94 сайта в 2013 г.).

На рис. 1 показано распределение количества сайтов в зависимости от параметра  $V$  (число внешних ссылок на сайт), полученное 21 декабря 2009 года (слева) и 28 января 2013 года (справа). Видно, что за рассматриваемый период уменьшилось количество сайтов, имеющих более 1000 внешних ссылок. Это можно объяснить тем, что Google откорректировал определение данного параметра, убрав слишком похожие ссылки из своих результатов. Кроме того, само веб-пространство является достаточно динамичной системой, в которой веб-страницы как появляются, так и исчезают, поэтому и параметр  $V$  для каждого конкретного сайта может как увеличиваться, так и уменьшаться с течением времени. С другой стороны, увеличилось количество сайтов, у которых имеется от 50 до 100 и от 100 до 1000 внешних ссылок.

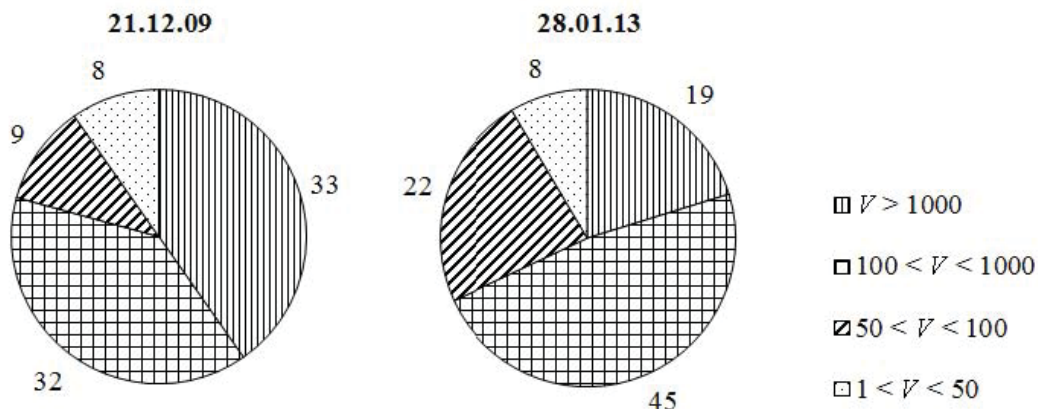


Рис. 1. Количество сайтов в зависимости от числа внешних ссылок ( $V$ ).

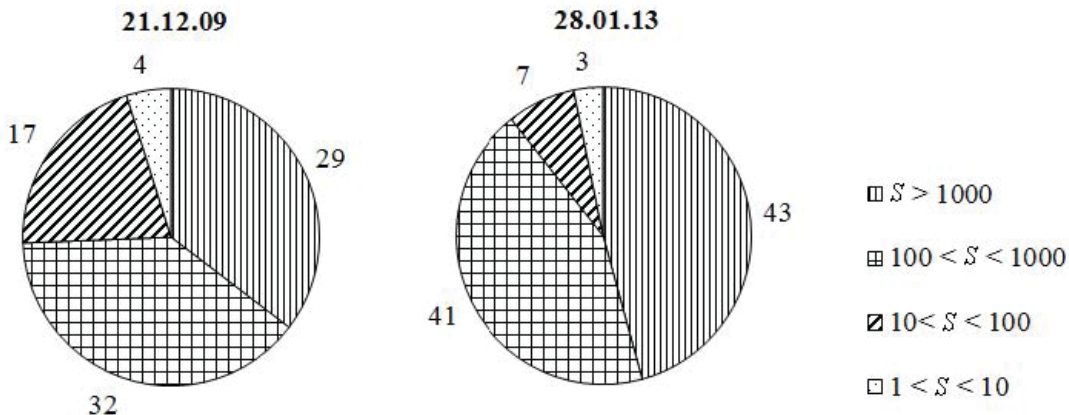


Рис. 2. Количество сайтов в зависимости от числа веб-страниц ( $S$ )

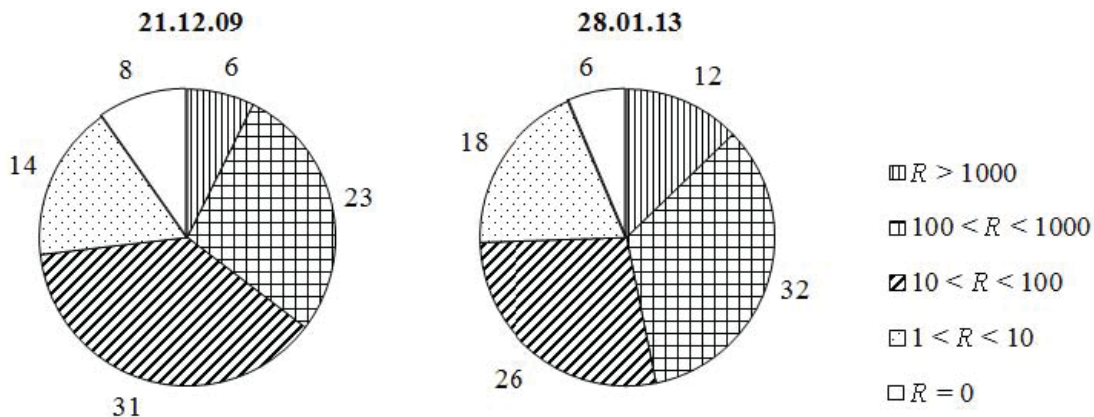


Рис. 3. Количество сайтов в зависимости от числа размещенных файлов ( $R$ ).

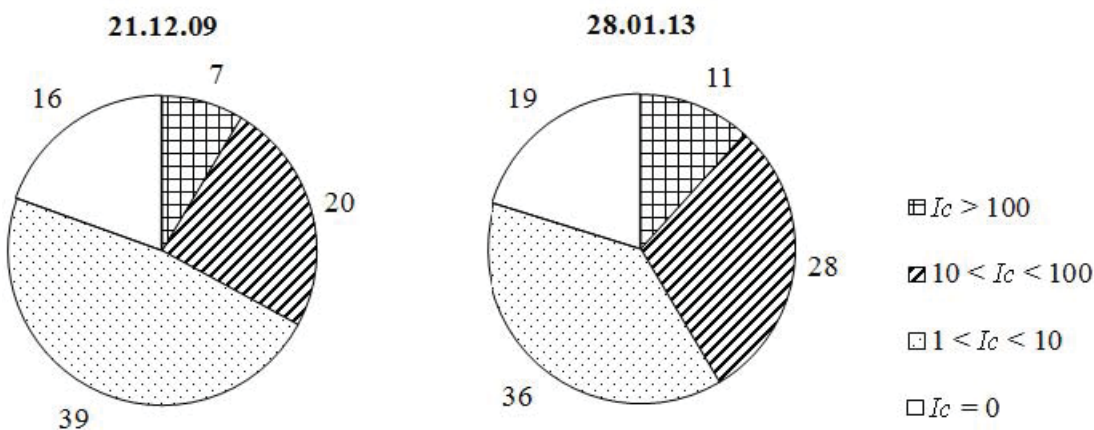


Рис. 4. Количество сайтов в зависимости от величины индекса цитирования ( $I_{cGoogle}$ ).

Размеры сайтов  $S$  также возросли: стало больше сайтов объемом более 1000 веб-страниц (рис. 2). Увеличилось и количество сайтов, на которые загружено более 100 дополнительных файлов (параметр  $R$ , рис. 3).

Распределение количества сайтов в зависимости от индекса цитирования  $I_{cGoogle}$  изменилось мало (рис. 4), причем увеличение количества сайтов с  $I_{cGoogle}$  от 10 до 100 можно объяснить, в том числе, и тем, что в 2009 году в рейтинге участвовало 82 сайта, а в 2013 году - 94 сайта.

### АНАЛИЗ ВЕБ-ГРАФА НАУЧНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ

В работе [2] исследован веб-граф  $G_0$ , вершинам которого соответствуют сайты научных организаций СО РАН, а отношение между сайтами определяется наличием гиперссылок друг на друга. Дуга веб-графа выходит из вершины  $v$  и заходит в вершину  $u$ , если сайт, соответствующий вершине  $v$ , содержит хотя бы одну ссылку на сайт, соответствующий вершине  $u$ . Веб-граф  $G_0$  является ориентированным графом, любая пара его вершин может быть соединена одной дугой или двумя противоположно направленными дугами. Вершинам графа  $G_0$  соответствуют научные организации из информационной системы «Организации и сотрудники СО РАН» по состоянию на 10 августа 2012 г. [9, 10]. Число организаций равно 88, а число ссылок сайтов этих организаций друг на друга, т.е. число ребер графа  $G_0$  равно 863.

В настоящей работе рассматривается граф  $G$  научного веб-пространства СО РАН по состоянию на 2 ноября 2012 года, включая ведущие университеты Сибири [11]. Он имеет отличия от графа  $G_0$ ,



обусловленные включением в информационное пространство новых сайтов, возникновением новых связей и исчезновением ранее существовавших связей. Граф  $G$  имеет 106 вершин и 1084 дуги и включает как вершины графа  $G_0$ , так и новые вершины. Диаграммы графов  $G_0$  и  $G$  представлены в [10] и [11]. Для их построения использовались программные средства, разработанные в ИВТ СО РАН. Аналогичный подход был использован для изучения научного веб-пространства Республики Сербия [12].

### Численные инварианты графов

Для оценки степени участия вершин и дуг в формировании структуры графа используются следующие численные параметры, являющиеся его инвариантами.

**Индекс вершин.** Пусть ориентированный граф  $G$  имеет  $n$  вершин, и в  $k$  из них есть хотя бы одна исходящая или входящая дуга. *Индексом вершин* в графе  $G$  будем называть величину  $cv(G) = k/n$ . Для веб-графа этот параметр характеризует число сайтов, включенных в информационное взаимодействие. Близость величины  $cv(G)$  к нулю говорит о том, что имеется значительное количество изолированных сайтов, то есть таких, которые не связаны с другими сайтами. Равенство  $cv(G) = 1$  означает, что все сайты научных организаций вовлечены в информационное взаимодействие.

**Индекс дуг.** Пусть ориентированный граф  $G$  имеет  $n$  вершин и  $t$  дуг. *Индексом дуг*  $t$  в графе  $G$  будем называть величину  $ca(G) = t/n(n-1)$ . В [13] эта величина называется *плотностью сети*. Максимальное значение  $ca(G) = 1$  достигается в случае, когда любые две вершины графа  $G$  соединены парой противоположно ориентированных дуг. В этом случае все сайты ссылаются друг на друга.

**Коэффициент кластеризации.** Пусть  $G$  - ориентированный граф, а  $V_2$  - множество таких его вершин, для каждой из которых сумма чисел входящих и исходящих дуг не менее 2. Под окрестностью вершины  $v$  будем понимать множество вершин графа, соединенных с  $v$  дугами без учета их ориентации. Для вершины  $v$  графа  $G$  обозначим через  $G_v$  подграф, порожденный окрестностью вершины  $v$ . *Коэффициентом кластеризации вершины  $v$*  будем называть величину  $ca(Gv)$ , то есть индекс дуг подграфа, порожденного окрестностью вершины  $v$  [14]. *Коэффициентом кластеризации графа  $G$*  будем называть величину  $cc(G) = \sum_{v \in V_2} ca(Gv) / |V_2|$ . Таким образом,  $cc(G)$  показывает, как в среднем заполнена дугами окрестность вершины графа.

Значения введенных выше параметров для веб-графов  $G$  и  $G_0$  приведены в таблице 1. Величина  $cv(G)$  отлична от 1 из-за наличия в графе  $G$  двух изолированных вершин.

Таблица 1. Инварианты веб-графов  $G_0$  и  $G$ .

Индекс вершин	Индекс дуг	Коэффициент кластеризации
$cv(G_0) = 1$	$ca(G_0) = 0.11$	$cc(G_0) = 0.06$
$cv(G) = 0.98$	$ca(G) = 0.10$	$cc(G) = 0.07$

### Классификация типов вершин

Под расстоянием между парой вершин в ориентированном графе понимается число дуг в кратчайшем ориентированном пути, соединяющим эти вершины. Естественными характеристиками вершины  $v$  ориентированного графа являются число исходящих из нее дуг (полустепень исхода) и число входящих в нее дуг (полустепень захода). Увеличение полустепеней вершин графа влечет в общем случае возрастание его компактности. Под этим понимается уменьшение расстояний между вершинами и, как следствие, уменьшение диаметра графа (максимального расстояния между его вершинами). Исходящие и входящие дуги вместе с вершиной образуют легко распознаваемые локальные фрагменты графа, которые могут быть использованы в качестве классификационных признаков вершин. Минимальная и максимальная степени исхода вершин в графе  $G$  равны 0 и 99, а захода - 0 и 57 (в графе  $G_0$  эти значения равны 0, 87 и 1, 48). Средние полустепени

исхода/захода в графе  $G$  равны 10.3 (в графе  $G_0$  - 9.8). Доля вершин, из которых нет ни одной исходящей дуги, составляет около 24% от всех вершин графа  $G$  (для графа  $G_0$  это значение равно 19%). В  $G$  большое число исходящих дуг имеют пять вершин, соответствующие сайтам: Портал СО РАН (99 дуг), Объединенный ученый совет СО РАН по нанотехнологиям и информационным технологиям (91 дуга), ИВТ СО РАН (91 дуга), Отделение ГПНТБ СО РАН (89 дуг) и Президиум СО РАН (79 дуг).

При анализе веб-графа представляет интерес соотношение между полустепенями исхода и захода вершин, позволяющее классифицировать вершины. На рис. 5 приводятся три варианта возможного распределения входящих и исходящих дуг. Вершины первого типа называют индукторами (мало входящих дуг, много исходящих), второго типа - коллекторами (много входящих дуг, мало исходящих), а третьего типа - посредниками (много входящих и исходящих дуг). Эти типы вершин образуют множество веб-коммуникаторов графа.

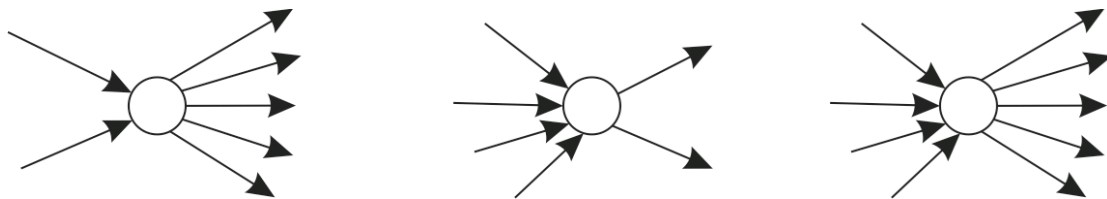


Рис. 5. Веб-коммуникаторы: индуктор, коллектор и посредник.

Коллекторы могут соответствовать сайтам организаций, в которых происходит накопление, хранение и обработка данных. Это могут быть библиотеки, банки данных, центры коллективного пользования, справочные ресурсы, журналы. Посредниками могут быть вершины, соответствующие головным сайтам, порталам научных центров, сайтам институтов с высокой степенью научной кооперации. Индукторами могут являться сайты недавно созданных организаций или новые сайты уже существующих институтов. Анализ вершин с большими степенями показывает, что в веб-графе  $G$  индукторами можно назвать сайты Объединенного ученого совета СО РАН по биологическим наукам (45 исходящих ребер, 2 входящих ребра), ОУС СО РАН по НИТ (91, 21) и ИВТ СО РАН (91, 23), а посредниками - сайты Портал СО РАН (99, 57), Президиум СО РАН (79, 40), ИК СО РАН (30, 15), Отделение ГПНТБ СО РАН (89, 30) и ГПНТБ СО РАН (46, 33). Коллекторов с большой степенью захода в этом графе нет. Посредников в графе  $G$  довольно много, например, это сайты СОРАН.INFO (18, 25), ИМ СО РАН (28, 22), СФУ (12, 13), ИХБФМ СО РАН (16, 14).

Отнесение вершин графа к веб-коммуникаторам того или иного типа зависит от соотношения между полустепенями захода и исхода, которое можно задавать на основе распределения степеней вершин в графе. В [2] приводятся данные по количеству веб-коммуникаторов в графе  $G_0$  при разных отношениях между полустепенями.

### Сильно связанная компонента

Для агрегированного описания структуры веб-графов, особенно больших, используется представление в виде схемы галстука-бабочки [15]. В этой модели в графе выделяется максимальная сильно связанная компонента, по отношению к которой классифицируются остальные вершины графа. Подграф называется *сильно связанной компонентой* графа, если между любой парой его вершин существует ориентированный путь. Таким образом, проходя по ссылкам соответствующих сайтов, можно обойти всю компоненту. На рис. 6 приводятся схемы для веб-графов  $G_0$  и  $G$ , где числа указывают количества вершин в соответствующих частях. Центральную часть схемы образует максимальная сильно связанная компонента. Левая часть схемы состоит из вершин, пути из которых ведут в эту компоненту. Правую часть образуют вершины, в которые ведут пути из компоненты. Отдельную часть образуют вершины, не имеющие связей с вершинами из указанных выше трех частей (см. две вершины в графе  $G$ , изображенные кружками на рис. 6). В слож-

ных веб-графах есть подмножества вершин, не попадающих в эти четыре части схемы (отростки, перешейки).

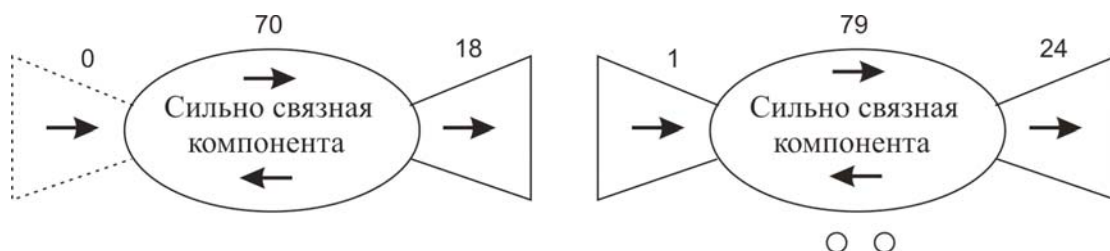


Рис. 6. Представление структуры графов  $G_0$  (слева) и  $G$  (справа).

Максимальное расстояние между вершинами в графе  $G$  равно 3, тогда как в графе  $G_0$  оно равно 4. Малый диаметр графов обеспечивается вершиной Портал СО РАН, имеющей большое число исходящих и входящих дуг.

### АНАЛИЗ ВЕБ-ПОДГРАФОВ

Статическая структура веб-графа научных организаций СО РАН, зафиксированная в какой-то момент времени, отражает текущие информационные связи между институтами. Так как эти связи с течением времени изменяются, то представляет интерес исследовать эволюцию веб-подграфов, соответствующих институтам по отдельным наукам за разные годы. Далее будут представлены данные о веб-графах научных организаций по гуманитарным и химико-биологическим наукам за 2010 и 2012 годы. На диаграммах графов две противоположно направленные дуги между парой вершин изображены одной двунаправленной дугой.

#### Веб-подграф институтов по гуманитарным наукам

На рис. 7 изображены структуры веб-подграфов  $H_{10}$  и  $H_{12}$  сайтов научных организаций по гуманитарным наукам за 2010 и 2012 годы (включая один экономический институт). В графе  $H_{12}$  появляются новые вершины, выделенные на рис. 7 серым цветом. Больше всего новых связей образовано в графе  $H_{12}$  между старыми и новыми вершинами. В то же время в графе  $H_{10}$  есть дуги, которых уже нет в графе  $H_{12}$ .

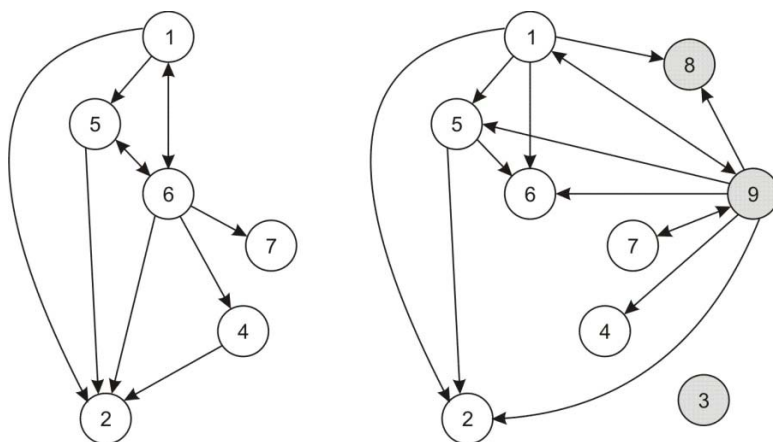


Рис. 7. Веб-графы  $H_{10}$  (слева) и  $H_{12}$  (справа) сайтов институтов СО РАН, относящихся к гуманитарным наукам. 1 - ГПНТБ СО РАН, 2 - ИФПР, 3 - ИПСО, 4 - ИЭОПП, 5 - ИАЭТ, 6 - ИИ, 7 - ИФЛ, 8 - ИМБТ, 9 - Отделение ГПНТБ СО РАН.

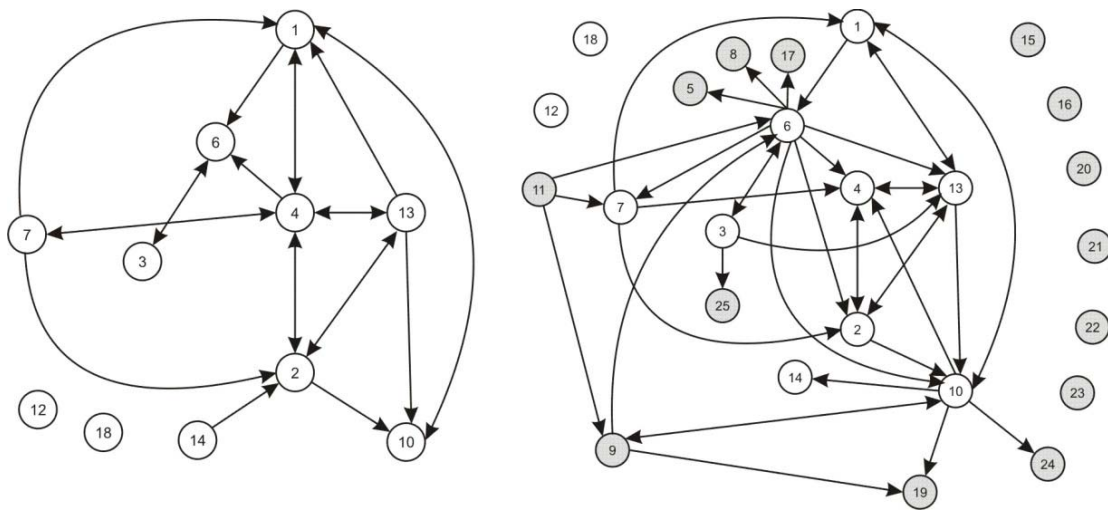
Сильно связанная компонента в обоих веб-графах состоит из трех вершин: в графе  $H_{10}$  это вершины 1, 5, 6, а в графе  $H_{12}$  - вершины 1, 7, 9. Все остальные вершины графов, кроме одной изолирован-

ной, образуют правую часть схемы графа. Средняя степень вершин в графах  $H_{10}$  и  $H_{12}$  равна 1.83 и 1.67 соответственно, а диаметр обоих графов равен 2. Параметры графов, характеризующие их структуру таковы:  $cv(H_{10})=1$ ,  $ca(H_{10})=0.37$ ,  $cc(H_{10})=0.1$  и  $cv(H_{12})=0.89$ ,  $ca(H_{12})=0.21$ ,  $cc(H_{12})=0.04$ . Вершина 6 является индуктором в графе  $H_{10}$ , а вершины 1 и 9 - индукторами в графе  $H_{12}$ .

### Веб-подграф институтов по химико-биологическим наукам

На рис. 8 приводится структура веб-подграфов  $V_{10}$  и  $V_{12}$  сайтов научных организаций по химико-биологическим наукам за 2010 и 2012 годы. Вершины графа  $V_{12}$ , отсутствующие в  $V_{10}$ , выделены серым цветом. Наряду с появлением в графе  $V_{12}$  новых дуг, некоторые дуги из графа  $V_{10}$  отсутствуют в  $V_{12}$ .

Максимальная сильно связная компонента в графе  $V_{10}$  содержит 6 вершин: 1, 2, 4, 7, 10, 13, а в графе  $V_{12}$  - 9 вершин: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 13. Левые части схемы обоих графов состоят из единственной вершины: 14 в графе  $V_{10}$  и 11 в графе  $V_{12}$ . Вершины 3 и 6, образующие правую часть схемы графа  $V_{10}$ , не вошли в правую часть схемы графа  $V_{12}$ , состоящей из вершин 5, 8, 14, 17, 19, 24, 25. Средняя степень вершин в графах  $V_{10}$  и  $V_{12}$  равна 2 и 1.56 соответственно, диаметр обоих графов равен 4. Структура графов характеризуется следующими значениями параметров:  $cv(V_{10})=0.82$ ,  $ca(V_{10})=0.2$ ,  $cc(V_{10})=0.09$  и  $cv(V_{12})=0.68$ ,  $ca(V_{12})=0.07$ ,  $cc(V_{12})=0.09$ . В графе  $V_{10}$  большинство вершин являются посредниками, в графе  $V_{12}$  вершину 6 можно считать индуктором, а вершину 4 - коллектором.



**Рис. 8.** Веб-графы  $V_{10}$  (слева) и  $V_{12}$  (справа) сайтов химико-биологических институтов СО РАН. 1 - ИЦиг, 2 - НИОХ, 3 - ИНХ, 4 - ИХКГ, 5 - ИЛ, 6 - ИК СО РАН, 7 - ИХТТМ, 8 - ИХН, 9 - ИБФ, 10 - ИХБФМ, 11 - ИХХТ, 12 - ЦСБС, 13 - МТЦ, 14 - ИСиЭЖ, 15 - ИриХ, 16 - Сифибр, 17 - ИПХЭТ, 18 - ИПА, 19 - ИОЭБ, 20 - ИППУ, 21 - ИБПК, 22 - АФ ЦСБС, 23 - ЗСФ ИЛ, 24 - ИМКБ, 25 - ИУХМ.

### РАНЖИРОВАНИЕ САЙТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГОРИТМА PAGERANK

Ранжирование сайтов в интернете может использоваться при составлении рейтинговых списков сайтов (например, сайтов университетов), при построении эффективных поисковых информационных систем. Популярным и хорошо зарекомендовавшим себя средством ранжирования сайтов веб-пространства является алгоритм PageRank [16]. Известно его применение при изучении связей графов научного сотрудничества и структуры веб-графов [17, 18]. Основанный на алгоритме PageRank анализ научного веб-пространства СО РАН описан в [19]. Поскольку веб-пространство развивается и меняется с течением времени, то для отражения этих изменений необходимо вести его мониторинг. Изменения веб-пространства обусловлены появлением новых сайтов,

установлением новых информационных связей между сайтами, утратой существовавших связей. Напомним основные идеи алгоритма PageRank. Пусть  $G$  - ориентированный граф с  $n$  вершинами. Обозначим через  $q_i$  число дуг, выходящих из вершины  $v_i$  графа  $G$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Определим  $(n \times n)$ -матрицу  $H = (h_{ij})$  следующим образом. Если  $q_i \neq 0$ , то положим  $h_{ij} = 1/q_i$ , если имеется дуга из вершины  $v_i$  в вершину  $v_j$ , иначе положим  $h_{ij} = 0$ , где  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Если  $q_i = 0$ , то для  $j = 1, 2, \dots, n$  положим  $h_{ij} = 1/n$ . По построению матрицы  $H$  сумма элементов в каждой ее строке равна единице, т.е.  $H$  является стохастической матрицей. Используя  $(n \times n)$ -матрицу  $E$ , каждый элемент которой равен  $1/n$ , определим матрицу

$$S = \alpha H + (1 - \alpha)E,$$

где параметр  $\alpha$  называется *коэффициентом затухания*. Обычно его значение принимают равным 0.85. Все элементы матрицы  $S$  положительны и она является стохастической. Матрица  $S = (s_{ij})$  известна в литературе как *Google matrix*. Рангом вершины  $v_j$  графа  $G$  назовем величину  $\pi_j$ , удовлетворяющую рекуррентному соотношению  $\pi_j = \pi_1 \cdot s_{1j} + \pi_2 \cdot s_{2j} + \dots + \pi_n \cdot s_{nj}$ , которое можно записать в виде  $\pi = \pi \cdot S$ . Вектор  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$  назовем *вектором рангов вершин* графа. Вектор  $\pi$  нормируется так, чтобы выполнялось  $\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n = 1$ . Тогда в общем виде можно записать

$$\pi = \alpha \pi S + (1 - \alpha)u,$$

где  $n$ -компонентный вектор  $u$  имеет вид  $(1/n, 1/n, \dots, 1/n)$ .

В [19] с использованием алгоритма PageRank были проведены ранжирования сайтов веб-пространства СО РАН (включая сайты Сибирского региона) по состоянию на 2 ноября 2012 г. Соответствующий веб-граф  $G_{106}$  имеет 106 вершин и 1084 дуги (в параграфе 2 этот граф обозначался  $G$ ). Распределение рангов вершин этого графа приведено на рис. 9, по вертикальной оси отложены значения рангов.

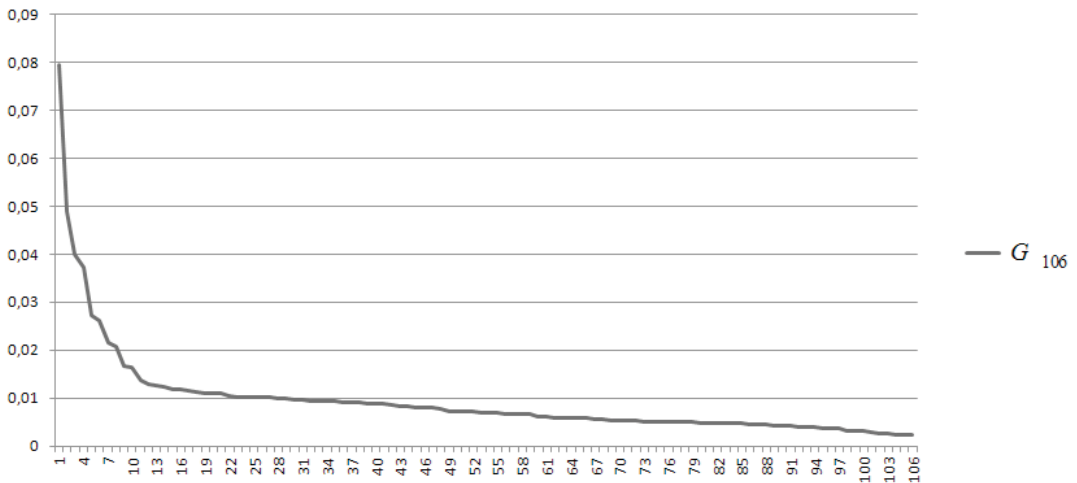


Рис. 9. Ранги вершин графа  $G_{106}$ .

Наибольший ранг, равный 0.0795, имеет вершина, соответствующая сайту Портал СО РАН. Информация о рангах первых 80 вершин графа  $G_{106}$  приведена в [20]. В таблице 2 приводятся первые 20 организаций СО РАН с наибольшими значениями PageRank.

В ситуации, когда место сайта организации при указанном ранжировании влияет на принятие решений, естественно задаться вопросом о том: как можно добиться повышения ранга сайта организации? Множество вершин с наибольшими (наименьшими) рангами при фиксированном ранжировании будем называть лидерами (аутсайдерами) графа. В [21] было проведено моделирование различных сценариев присоединения одной или нескольких новых вершин к графу  $G_{106}$ . В сценариях рассматривались ситуации, когда к исходному графу добавляется от одной до

двадцати пяти новых вершин; когда из новых вершин устанавливаются ссылки на фиксированное число лидеров или аутсайдеров исходного графа; когда фиксированное число лидеров или аутсайдеров исходного графа устанавливают ссылки на новые вершины.

**Таблица 2.** Первые двадцать научных организаций с наибольшим рейтингом.

№	Название организации	Число выходящих ссылок	Число входящих ссылок	Значение PageRank
1	Портал СО РАН	32763	13783	0.0795
2	Президиум СО РАН	1760	8109	0.0487
3	ГПНТБ СО РАН	159	2839	0.0398
4	НГУ	1383	6882	0.0371
5	Отделение ГПНТБ СО РАН	14223	1608	0.0273
6	СОРАН,INFO	1508	1512	0.0260
7	ИВТ СО РАН	11078	9173	0.0216
8	ИНЦ СО РАН	64	281	0.0208
9	ИМ СО РАН	685	3796	0.0167
10	ОУС СО РАН по НИТ	5035	548	0.0164
11	ИФПР СО РАН	14	313	0.0135
12	ИБФ СО РАН	25	510	0.0127
13	ИТ СО РАН	35	737	0.0127
14	ИГД СО РАН	99	229	0.0123
15	ИХКГ СО РАН	236	552	0.0117
16	ИК СО РАН	734	655	0.0116
17	НГТУ	8	150	0.0115
18	ТНЦ СО РАН	1199	103	0.0112
19	ИПРЭК СО РАН	30	90	0.0111
20	ИНГГ СО РАН	10	591	0.0110

Формализуем указанные понятия для сценария, при котором фиксированное число лидеров исходного графа ссылаются на новые вершины, причем все новые вершины ссылаются друг на друга. Пусть к графу  $G_{106}$  с вершинами  $v_1, v_2, \dots, v_{106}$  присоединяются  $n$  новых вершин  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . Обозначим через  $K_n$  ориентированный граф на вершинах  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , в котором каждая вершина соединена ориентированной дугой с каждой другой вершиной. Обозначим через  $G_{106+n}$  граф с множеством вершин  $\{v_1, v_2, \dots, v_{106}\} \cup \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ , множество дуг которого состоит из дуг графов  $G_{106}$  и  $K_n$ . Ранжирование вершин графа  $G_{106+n}$  методом PageRank индуцирует соответствующее ранжирование вершин на его подграфе  $G_{106}$ . Ранг вершины  $v_i$  здесь и далее будем обозначать  $\pi_i$ . Перенумеруем вершины подграфа  $G_{106}$  в соответствии с этим ранжированием в порядке невозрастания их рангов:  $\pi_1 \geq \pi_2 \geq \dots \geq \pi_{106}$ .

Пусть  $k$  - целый параметр, принимающий значения от 0 до 106. Обозначим через  $[G_{106+n}]^k$  новый граф, полученный проведением дуг из каждой вершины  $v_1, v_2, \dots, v_k$  графа  $G_{106+n}$  в каждую вершину  $u_1, u_2, \dots, u_n$  графа  $K_n$ . В частности,  $[G_{106+n}]^0$  совпадает с  $G_{106+n}$ .

Очевидно, что по построению графа  $[G_{106+n}]^k$  каждая вершина  $u_1, u_2, \dots, u_n$  будет иметь один и тот же ранг, который обозначим  $\pi^*$ . Варьируя параметры  $n$  и  $k$ , и пересчитывая ранги вершин для каждого варианта, можно попытаться найти значения параметров, при которых новые вершины станут лидерами.

Аналогично рассматриваются ситуации, в которых на новые вершины ссылаются фиксированное

число вершин-аутсайдеров исходного графа.

В результате построения моделей для рассматриваемых сценариев и ранжирования вершин графов методом PageRank установлено, что сценарий согласованного действия двух вершин при соглашениях с аутсайдерами (фиксированное число вершин-аутсайдеров ссылаются на новые вершины) является оптимальным: новые вершины становятся лидерами графа после установления на них всего лишь десяти ссылок от аутсайдеров исходного графа.

А именно, пусть к графу  $G_{106}$  добавлены две новые вершины  $u_1$  и  $u_2$ . Полученный граф  $G_{108}$  соответствует описанной выше конструкции при  $n = 2$ . После ранжирования вершин графа с помощью алгоритма PageRank наибольший ранг  $\pi_1 = 0.0771$  имеет вершина, соответствующая сайту Портала СО РАН, а ранги новых вершин  $u_1$  и  $u_2$  равны  $\pi^* = 0.0151$ . Построим новый граф  $[G_{106+n}]^{10}$ , добавив в граф  $G_{108}$  новые дуги, соединяющие каждого из 10 аутсайдеров графа  $G_{108}$  с вершинами  $u_1$  и  $u_2$ . В полученном графе ранг Портала СО РАН станет равным 0.0684, а ранги вершин  $u_1$  и  $u_2$  станут равными 0.0688, и эти вершины станут лидерами. Если же новые вершины  $u_1$  и  $u_2$  соединять не с аутсайдерами, а с лидерами, то для вывода  $u_1$  и  $u_2$  в лидеры требуется соединить их с не менее чем 11 лидерами графа  $G_{108}$  (см. подробнее в [21]).

## ВЫВОДЫ

Методами вебометрики и теории графов проведен анализ сайтов и структуры веб-графа научных организаций Сибирского отделения региона. Представленные данные показывают современное состояние информационной структуры взаимодействия научных организаций на уровне сайтов и позволяют проследить эволюцию рассматриваемого веб-пространства. Замечена тенденция увеличения количества связей между сайтами, которые входят в сильно связную компоненту. Рассмотрен метод ранжирования сайтов PageRank и изменение рангов при различных сценариях присоединения новых сайтов.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке Президиума СО РАН, в рамках междисциплинарного интеграционного проекта № 21, 2012-2014 гг. и РФФИ (грант № 12-01-00631)

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шокин Ю.И., Клименко О.А., Рычкова Е.В., Шабальников И.В. Рейтинг сайтов научных организаций СО РАН. Вычислительные технологии. 2008. Т. 13. № 3. С. 128-135.
- [2] Шокин Ю.И., Веснин А.Ю., Добрынин А.А., Клименко О.А., Рычкова Е.В., Петров И.С. Исследование научного веб-пространства Сибирского отделения Российской академии наук. Вычислительные технологии. 2012. Т. 17. № 6. С. 86-98.
- [3] Рейтинг сайтов научных организаций СО РАН. <http://www.ict.nsc.ru/ranking/> (дата доступа 15.04.2013).
- [4] Поисковая система Яндекс. <http://www.yandex.ru> (дата доступа 15.04.2013).
- [5] Поисковая система Google. <http://www.google.ru> (дата доступа 15.04.2013).
- [6] Поисковая система Bing. <http://www.bing.com> (дата доступа 15.04.2013).
- [7] Система определения индекса цитирования в веб-пространстве Google Scholar. <http://scholar.google.com/> (дата доступа 15.04.2013).
- [8] Индекс цитирования каталога Яндекс. <http://help.yandex.ru/catalogue/?id=873431> (дата доступа 15.04.2013).
- [9] Информационная система «Организации и сотрудники СО РАН». <http://www.sbras.ru/sbras/db> (дата доступа 10.08.2012).
- [10] Веб-граф G0 организаций СО РАН. <http://www.ict.nsc.ru/sitepage.php?PageID=975> (дата доступа 10.08.2012).
- [11] Веб-граф G организаций СО РАН. <http://www.ict.nsc.ru/sitepage.php?PageID=976> (дата доступа 02.11.2012).
- [12] Веснин А.Ю., Добрынин А.А., Клименко О.А., Петров И.С., Рычкова Е.В., Шокин Ю.И. Исследование научного веб-пространства Республики Сербия, Zbornik radova konferencije MIT 2013, Belgrad, Serbia, 2014.
- [13] Hage P., Harary F. Structural models in anthropology. Cambridge University Press: Cambridge, UK, 1983.
- [14] Watts D., Strogatz S. Collective dynamics of 'small world' networks. Nature. 1998. Vol. 393. P. 440-442.

- [15] Broder A., Kumar R., Maghoul F., Raghavan P., Rajagopalan S., Stata R., Tomkins A., Wiener J. Graph structure in the Web. *Computer Networks*. 2000. Vol. 33. № 1-6. P. 309-320.
- [16] Brin S., Page L. The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine. *Comput. Netw. ISDN Syst.* 1998. Vol. 30 № 1-7. P. 107-117.
- [17] Ding Y. Topic-based PageRank on author co-citation networks. *J. Assn. Inf. Sci. Technol.* 2011. Vol. 62. № 3. P. 449-466.
- [18] Pandurangan G., Raghavan P., Upfal E. Using PageRank to characterize Web structure. *Internet Mathematics* 2006. Vol. 3. № 1. P. 1-20.
- [19] Константинова Е.В., Савин М.Ю., Клименко О.А. Анализ научного веб-пространства СО РАН методом PageRank. Материалы XIV Российской конференции «Распределенные информационные и вычислительные ресурсы» - DICR-2012 (Новосибирск, Россия, 26.11 - 30.11.2012). Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2012. Адрес размещения: <http://conf.nsc.ru/dicr2012/ru/reportview/140506>
- [20] Константинова Е.В., Савин М.Ю., Клименко О.А. Анализ динамики развития веб-пространства Сибирского отделения РАН методом PageRank. Труды XVIII Байкальской Всероссийской конф. «Информационные и математические технологии в науке и управлении». Том 3. - Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2013. С.142-148.
- [21] Веснин А.Ю., Константинова Е.В., Савин М.Ю. О сценариях присоединения новых сайтов к веб-пространству СО РАН. Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2013. Т. 11. № 4. С. 28-37.



# INVESTIGATION OF THE ACADEMIC WEB SPACE OF THE REPUBLIC OF SERBIA

## ИССЛЕДОВАНИЕ НАУЧНОГО ВЕБ-ПРОСТРАНСТВА РЕСПУБЛИКИ СЕРБИЯ

---

*This article provides a detailed analysis of Web space of the Republic of Serbia Academic Institutions using webometrics techniques and graph theory. The content of sites and links between them are analyzed by search engine services and special programs. Criteria used for ranking sites are described. The official domains of scientific organizations of Serbian Academy of Sciences and Arts and Zajednice instituta Srbije (ZIS) have been analyzed. The structural and metric properties of webgraph of sites and its fragments are investigated.*

---

### ВЕБОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Регулярные исследования университетской и академической веб-среды ведутся лабораторией Cybermetrics Lab, которая принадлежит CSIC (Consejo Superior Investigaciones Cientificas) крупнейшему исследовательскому центру Испании. В рамках этих исследований существует проект «Ranking Web of World Research Centers» [1], в котором приводится рейтинг сайтов научных организаций, как для всего мира, так и для отдельных стран. Однако, для некоторых стран, количество организаций представленных в этом рейтинге, существенно меньше, чем реальное количество организаций, имеющих сайты. В частности, в выборке для Республики Сербия [2] (за январь 2013 г.) в этом рейтинге фигурируют только 14 сайтов научных организаций, в том числе лишь 8 сайтов научных институтов, входящих в Сербскую академию наук и искусств (САНУ) [3] и Объединение институтов Сербии (Zajednice instituta Srbije, ZIS) [4], тогда как всего научных институтов в этих организациях более 60.

Авторами была предложена модификация методики [1], описанная в [5] и примененная для построения рейтинга сайтов научных организаций Сибирского отделения Российской академии наук.

Для оценки сайтов используются параметры  $V$ ,  $S$ ,  $R$  и  $Ic$ .

Параметр  $V$  - видимость сайта. Его значение равно количеству внешних ссылок с других сайтов на данный ресурс; вычисляется на основе данных, полученных из поисковых систем Яндекс [6], Google [7] и Bing [8].

Параметр  $S$  - размер сайта. Значение  $S$  равно количеству веб-страниц сайта, определяемому поисковыми системами.

Параметр  $R$  - насыщенность сайта - определялся как суммарное количество файлов форматов Adobe Acrobat, Microsoft Word и Microsoft Powerpoint, размещенных на сайте. Значение этого параметра определялось с помощью поисковых систем Яндекс и Google.

Параметр  $Ic$  - индекс цитирования сайта. Этот параметр является мерой значимости сайта. Для построения рейтинга использовались данные из системы Google Scholar [9].

На основе этих величин определялась позиция в рейтинге ( $W$ ) для каждого сайта, причем итоговый ранг (позиция в текущем рейтинге) будет тем выше, чем меньше значение  $W$ . Сайтам с одинаковыми значениями  $W$  присваивались одинаковые рейтинги.

Важно отметить, что построение рейтинга сайтов научных институтов, входящих в САНУ и ZIS, уже выполнялось в 2009 году [10, 11], однако тогда большинство сайтов размещалось в доменной

1 Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russia

2 Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia

зоне .yu (Югославия), а сейчас все сайты находятся в доменной зоне .rs (Республика Сербия), т.е. с формальной точки зрения это разные адреса сайтов.

### Рейтинг сайтов САНУ

В табл. 1 представлены значения параметров  $V$ ,  $S$ ,  $R$ ,  $I_c$  и позиция в рейтинге  $W$  для сайтов научных институтов, входящих в Сербскую академию наук и искусств.

Таблица 1. Рейтинг сайтов САНУ.

Научная организация	Адрес сайта	$V$	$S$	$R$	$I_c$	$W$
Mathematical Institute	www.mi.sanu.ac.rs	448.3	7073.3	900	117	1
Serbian Academy of Sciences and Arts	www.sanu.ac.rs	803.7	6556.7	694	15	2
Institute of Technical Sciences	www.itn.sanu.ac.rs	77.7	944.0	260	10	3
Geographical Institute "Jovan Cvijić"	www.gi.sanu.ac.rs	37.3	514.3	307	84	4
Ethnographical Institute	www.etno-institut.co.rs	38.7	600.0	369	11	4
Institute for Balkan Studies	www.balkaninstitut.com	512.0	118.7	116	18	6
Institute for Byzantine Studies	www.vi.sanu.ac.rs	15.7	72.0	67	2	7
Branch of the Serbian Academy of Sciences and Arts in Novi Sad	www.ogranak.sanu.ac.rs	13.7	527.0	11	1	8
Archeological Institute	www.ai.ac.rs	2.7	69.3	0	0	9
Institute for the Serbian Language	www.isj-sanu.rs	2.0	1.3	0	0	10

### Рейтинг сайтов САНУ и ZIS

В табл. 2 представлен общий рейтинг, включающий сайты институтов САНУ и ZIS. Научные организации, фигурирующие в рейтинге [2], выделены жирным шрифтом.

Таблица 2. Рейтинг сайтов САНУ и ZIS.

Научная организация	Адрес сайта	$V$	$S$	$R$	$I_c$	$W$
<b>Mathematical Institute</b>	www.mi.sanu.ac.rs	448.3	7073.3	900	117	1
Institute of Economic Sciences	www.iem.bg.ac.rs	301.0	9086.7	864	139	2
<b>Serbian Academy of Sciences and Arts</b>	www.sanu.ac.rs	803.7	6556.7	694	15	3
Institute for Animal husbandry	www.istocar.bg.ac.rs	27756.7	1019.3	777	92	3
Institute of Technical Sciences	www.itn.sanu.ac.rs	77.7	944.0	260	10	5
Institute of Meat Hygiene and Technology	www.inmesbgd.com	42.7	3772.7	549	6	6
<b>Vinča Institute of Nuclear Sciences</b>	www.vinca.rs	55.0	1750.0	39	14	7
Geographical Institute "Jovan Cvijić"	www.gi.sanu.ac.rs	37.3	514.3	307	84	8
Ethnographical Institute	www.etno-institut.co.rs	38.7	600.0	369	11	8
Institute Mihailo Pupin	www.pupin.rs	336.3	642.7	48	9	10
Institute for Balkan Studies	www.balkaninstitut.com	512.0	118.7	116	18	11
Institute of International Politics and Economics	www.diplomacy.bg.ac.rs	74.0	422.7	123	6	12
Electrical Engineering Institute "Nikola Tesla"	www.ieent.org	34.0	464.3	131	11	13
<b>Institute of Physics</b>	www.ipb.ac.rs	56.0	427.3	76	6	14
Institute of Agricultural Economics	www.iep.bg.ac.rs	43.0	856.0	2	365	15
Institute for Philosophy and Social Theory	www.instifdt.bg.ac.rs	60.0	210.0	135	2	16
Institute of Social Sciences	www.idn.org.rs	46.3	507.7	53	6	17
IRITEL	www.iritel.com	34.0	335.7	119	8	18
<b>Institute of Oncology and Radiology</b>	www.ncrc.ac.rs	48.7	956.0	33	1	19
Institute Goša	www.institutgosa.rs	3256.0	1197.3	1	1	20
Saobraćajni institut CIP	www.sicip.co.rs	1176.3	881.3	1	2	21

Научная организация	Адрес сайта	V	S	R	Ic	W
Institute of Chemistry, Technology and Metallurgy	www.ihtm.bg.ac.rs	16.7	726.0	159	1	22
Scientific Veterinary Institute "Novi Sad"	niv.ns.ac.rs	41.3	115.7	36	71	23
Institute for testing materials-IMS Institute	www.institutims.rs	29.3	410.0	113	5	24
Institute of Medicinal Plants Research "Josif Pančić"	www.mocbilja.rs	33.0	938.0	98	0	25
Institute of Musicology	www.music.sanu.ac.rs	189.7	114.7	69	1	25
Institute of Molecular Genetics and Genetic Engineering	www.imgge.bg.ac.rs	43.3	604.3	59	0	27
Institut za zaštitu bilja i životnu sredinu	www.izbis.com	36.7	214.0	107	1	28
<b>Institute of Architecture and Urban and Spatial planning of Serbia</b>	www.iaus.ac.rs	25.7	532.3	26	9	29
Institute for Literature and Art	www.ikum.org.rs	16.7	623.0	133	0	30
Institute for Biological Research "Siniša Stanković"	www.ibiss.bg.ac.rs	60.3	656.0	5	0	31
Institute Kirilo Savić	www.iks.rs	35.3	115.7	34	1	32
Institut za noviju istoriju Srbije	www.inisbgd.co.rs	32.7	330.3	43	0	33
Institute of Comparative Law	www.comparativelaw.info	31.7	31.0	27	6	34
Institute for Byzantine Studies	www.vi.sanu.ac.rs	15.7	72.0	67	2	35
Institute of Lowland Forestry and Environment	www.ilfe.org	27.0	26.0	14	10	35
Branch of the Serbian Academy of Sciences and Arts in Novi Sad	www.ogranak.sanu.ac.rs	13.7	527.0	11	1	37
Institute for Educational Research	www.ipisr.org.rs	20.3	140.7	67	0	38
Institute for Contemporary History	www.isi.co.rs	26.7	234.0	1	1	39
Mining and Metallurgy Institute	www.irmbor.co.rs	7.7	148.3	58	1	40
Institute of Application of Nuclear Energy	www.inep.co.rs	26.3	45.3	9	1	41
Fruit Research Institute	www.institut-cacak.org	35.3	143.3	1	0	41
Astronomical Observatory	www.aob.rs	15.0	118.0	4	4	43
Institute of European Studies	www.ies.rs	30.7	82.7	17	0	44
Institute for Medical Research	www.imi.bg.ac.rs	16.3	136.7	21	0	45
Zajednice instituta Srbije	www.zis.phy.bg.ac.rs	10.0	33.0	35	1	46
Maize Research Institute, Zemun Polje	www.mrizp.co.rs	16.7	30.7	1	3	47
<b>Institute for Technology of Nuclear and other Raw Materials</b>	www.itnms.ac.rs	12.0	262.7	8	0	48
Institut za pesticide i zaštitu životne sredine	www.pesting.org.rs	14.0	2.3	1	8	49
Institute for Multidisciplinary Research	www.imsi.rs	14.0	36.0	15	0	50
Institute of Soil Science	www.soilinst.rs	26.3	21.0	5	0	51
Institute of Microwave Techniques and Electronics	www.insimtel.com	11.7	11.3	6	2	52
Institute of Forestry	www.izas.org.rs	8.7	1.0	0	16	52
Institute for Political Studies	www.ipsbgd.edu.rs	12.7	15.7	0	1	54
<b>Institute for Criminological and Sociological Research</b>	www.iksi.ac.rs	13.7	27.3	1	0	55
Institute for the development of water resources "Jaroslav Černi"	www.jcerni.co.rs	5.3	1.0	0	1	56
Archeological Institute	www.ai.ac.rs	2.7	69.3	0	0	57
Institute of Field and Vegetable Crops	www.ifvcns.co.rs	12.3	1.0	0	0	58
Institute for the Serbian Language	www.isj-sanu.rs	2.0	1.3	0	0	59

На основе анализа информации, представленной в табл. 2, можно сделать следующие выводы. Более 100 внешних ссылок на сайт есть у 9 организаций, от 10 до 100 ссылок - у 45 организаций.

Размер сайтов варьируется от нескольких десятков страниц до нескольких тысяч страниц, при этом у 7 организаций сайты имеют более 1000 страниц, от 100 до 1000 страниц на сайте имеют 34 организации, а остальные - менее 100 страниц, то есть около 30 % организаций имеют сайты с малым числом страниц.

Количество загруженных файлов на сайте больше у тех институтов, которые предоставляют в свободный доступ полные тексты документов (статей, докладов, отчетов, инструкций и т.п.). Только 17 организаций (29 %) имеют сайты с количеством загруженных файлов более 100.

Индекс цитирования более 100 определяется в системе Google Scholar всего у 3 сайтов. Следует заметить, что у большинства сайтов научных организаций Сербии индекс цитирования в Google Scholar низкий из-за того, что сайты содержат мало информации на английском языке.

## АНАЛИЗ ВЕБ-ГРАФА НАУЧНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ СЕРБИИ

### Веб-граф S и его сильно связанная компонента

Отношение между сайтами, определяемое наличием ссылок между ними, дает возможность представить научное веб-пространство Республики Сербия в виде ориентированного веб-графа S. Вершины этого графа соответствуют сайтам научных учреждений, входящих в Serbian Academy of Sciences and Arts (САНУ) и Zajednice instituta Srbije. Две различные вершины  $u$  и  $v$  графа S соединяются дугой, ориентированной из  $u$  в  $v$ , если на сайте, соответствующем вершине  $u$  имеется ссылка на сайт, соответствующий вершине  $v$ . Таким образом, любая пара вершин графа может быть соединена либо одной дугой, либо двумя противоположно направленными дугами. Для построения графа использовались программные средства, разработанные в ИВТ СО РАН. Веб-граф S имеет 59 вершин и 106 дуг [12]. Диаграмма графа S представлена на рис. 1.

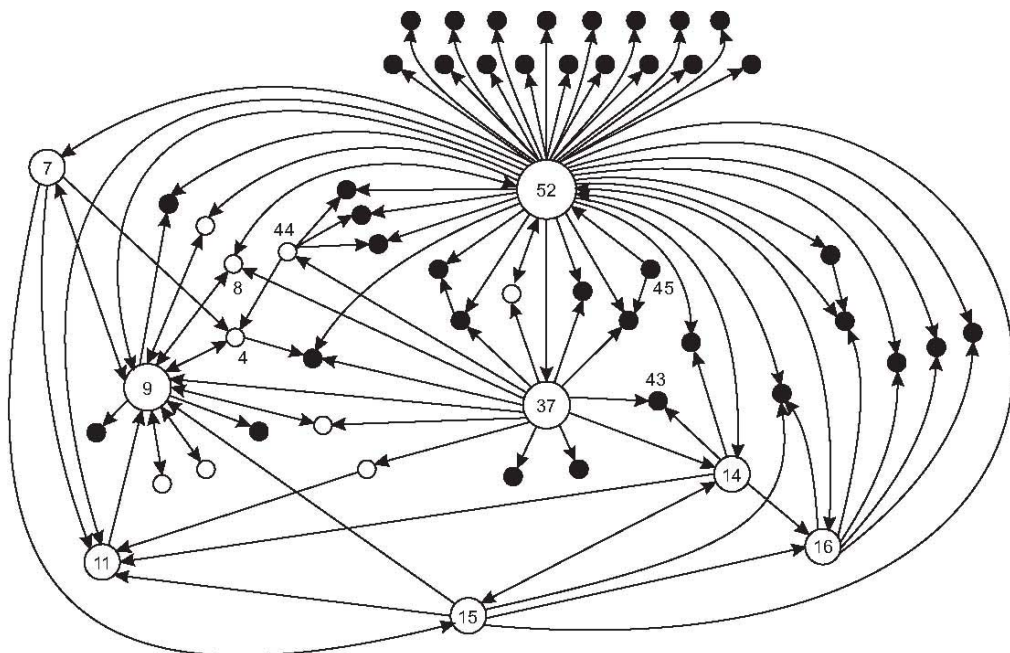


Рис. 1. Веб-граф S научных организаций Сербии. Сайты с большим количеством ссылок: 7 - Institute of Technical Sciences, 9 - Serbian Academy of Sciences and Arts, 11 - Institute for Biological Research "Siniša Stanković", 15 - Vinča Institute of Nuclear Sciences, 16 - Institute of Chemistry, Technology and Metallurgy, 37 - Institute of Economic Sciences, 52 - Zajednice instituta Srbije

Для агрегированного представления структуры веб-графов используется понятие максимальной сильно связной компоненты, по отношению которой классифицируются остальные вершины графа [13]. Напомним, что подграф ориентированного графа называется *сильно связной компонентой*, если его любые две вершины связаны ориентированным путем. В случае веб-графов это означает, что все сайты, попавшие в сильно связную компоненту, связаны друг с другом цепочками ссылок.

Для веб-графа **S** максимальная сильно связная компонента состоит из 17 вершин (выделены белым цветом на рис. 1), что составляет 29 % от числа всех вершин. Остальные вершины разбиваются на две группы: множество OUT содержит вершины, в которые ведут пути из компоненты, а множество IN образуют вершины, из которых ведут пути в компоненту. В графе **S** множество OUT состоит из 38 вершин (64 %), а множество IN содержит единственную вершину 45 (2 %). Из этой вершины идет дуга и в одну вершину из множества OUT. Изолированными являются 3 вершины (5 %).

### Характеристики связей вершин графа

Для приближенной характеристики графа используются численные параметры, называемые инвариантами графа, значения которых зависят только от его структуры. Пусть  $G$  - ориентированный граф, имеющий  $n$  вершин. Пусть число его вершин, имеющих хотя бы одну исходящую или входящую дугу, равно  $k$ . *Индексом вершин* графа  $G$  называется величина  $c_v(G) = k/n$ . Минимальное значение  $c_v(G) = 0$  достигается, если каждая вершина графа  $G$  изолирована, а максимальное значение  $c_v(G) = 1$  достигается, если  $G$  не имеет изолированных вершин.

Пусть  $G$  - ориентированный граф, имеющий  $n$  вершин и  $t$  дуг. *Индексом дуг* в графе  $G$  будем называть величину  $c_o(G) = t/n(n-1)$ . Минимальное значение  $c_o(G) = 0$  достигается, если каждая вершина графа  $G$  изолирована, а максимальное значение  $c_o(G) = 1$  достигается, если каждые две вершины графа соединены парой противоположно ориентированных дуг. Величина  $c_o(G)$  иногда также называется *плотностью сети* [15].

Пусть  $G$  - ориентированный граф, а  $V_2$  - множество таких его вершин, для каждой из которых сумма чисел входящих и исходящих дуг не менее 2. Под окрестностью вершины  $v$  будем понимать множество вершин графа, соединенных с  $v$  дугами без учета их ориентации. Для вершины  $v$  графа  $G$  обозначим через  $G_v$  подграф, порожденный окрестностью вершины  $v$ . *Коэффициентом кластеризации графа*  $G$  будем называть величину  $cc(G) = \frac{1}{|V_2|} \sum_{v \in V_2} c_a(G_v)$ . Таким образом,  $cc(G)$

показывает как в среднем заполнена дугами окрестность вершины графа. Обозначим через  $N_3$  число всех путей длины 2 в графе  $G$  таких, что концевые вершины этих путей соединены дугой (см. рис. 2а), а через  $N_2$  - число всех путей длины 2, концевые вершины которых не соединены дугой (см. рис. 2б).

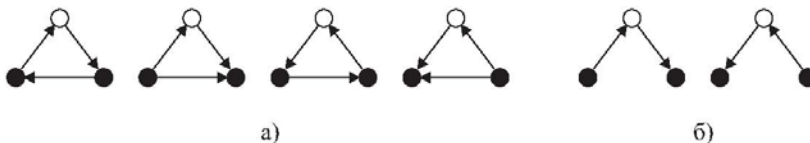


Рис. 2. Конфигурации для коэффициента транзитивности веб-графа

*Коэффициент транзитивности*  $\tau(G)$  ориентированного графа  $G$  определяется по формуле:  $\tau(G) = N_3 / N_2$ . Для рассматриваемого веб-графа **S** научных организаций Сербии указанные параметры принимают значения

$c_v(\mathbf{S}) = 0.95$	$c_o(\mathbf{S}) = 0.03$	$cc(\mathbf{S}) = 0.03$	$\tau(\mathbf{S}) = 0.07$
--------------------------	--------------------------	-------------------------	---------------------------

Малые значения параметров  $c_v(\mathbf{S})$  и  $cc(\mathbf{S})$  свидетельствует о низкой насыщенности графа  $\mathbf{S}$  дугами. Для сравнения, приведем значения указанных параметров для графа  $\mathbf{G}$  научного веб-пространства Сибирского отделения РАН (на 02.11.2012), приведенные в [14]:

$c_v(\mathbf{G}) = 0.98$	$c_a(\mathbf{G}) = 0.10$	$cc(\mathbf{G}) = 0.07$	$\tau(\mathbf{G}) = 0.24$
--------------------------	--------------------------	-------------------------	---------------------------

Напомним, что под расстоянием между двумя вершинами в графе понимается число дуг в кратчайшем ориентированном пути, соединяющим эти вершины. Максимальное расстояние между всеми парами вершин называется *диаметром* графа. Диаметр веб-графа  $\mathbf{S}$  равен 6. Граф имеет 5 диаметральных цепей, которые все выходят из вершины 44 (Institute of Agricultural Economics) и проходят через вершины 4 (Geographical Institute "Jovan Cvijic") и 9 (Serbian Academy of Sciences and Arts). Приведем два диаметральных пути, заканчивающиеся в одной и той же вершине: 44-4-9-7-15-14-43 и 44-4-9-8-52-14-43 (см. рис. 1).

### Степени вершин веб-графа

Естественными характеристиками вершины  $v$  ориентированного графа являются число исходящих из нее дуг  $deg_+(v)$  (полустепень исхода) и число входящих в нее дуг  $deg_-(v)$  (полустепень захода). Увеличение полустепеней вершин графа влечет в общем случае возрастание его компактности. Под этим понимается уменьшение расстояний между вершинами и, как следствие, уменьшение диаметра графа.

Исходящие и входящие дуги вместе с вершиной образуют легко распознаваемые локальные фрагменты, которые могут быть использованы в качестве классификационных признаков вершин. В таблицах 3 и 4 приводятся данные о распределениях вершин веб-графа  $\mathbf{S}$  по их полустепеням и степеням. В верхней строке таблиц указаны значения степеней, нижняя строка содержит количество вершин  $N$  с соответствующими степенями. Если ориентация дуг не учитывается, то считается, что пара вершин связана одним ребром (неориентированной дугой) независимо от кратности получающегося мультиребра между этими вершинами.

**Таблица 3.** Распределение вершин графа  $\mathbf{S}$  по полустепеням.

	полустепень исхода, $deg_+$									полустепень захода, $deg_-$					
$deg$	0	1	2	4	5	6	10	14	42	0	1	2	3	5	11
$N$	39	9	3	2	1	2	1	1	1	4	27	17	8	2	1

**Таблица 4.** Распределение вершин графа  $\mathbf{S}$  по степеням.

	сумма полустепеней, $deg_+ + deg_-$											неориентированные ребра												
$deg$	0	1	2	3	4	5	6	8	9	15	21	47	0	1	2	3	4	5	6	7	8	14	15	44
$N$	3	21	16	8	1	2	2	1	2	1	1	1	3	23	17	6	1	2	1	2	1	1	1	1

Средние полустепени исхода/захода вершин в графе  $\mathbf{S}$  равны 1.8 (сумма полустепеней исхода всегда равна сумме полустепеней захода). Число вершин, из которых нет ни одной исходящей дуги, составляет около 66 % от всех вершин графа. Входящих дуг нет у 7 % вершин. Большое число исходящих дуг имеют три вершины, соответствующие сайтам Zajednice instituta Srbije (42), Institute of Economic Sciences (14) и Serbian Academy of Sciences and Arts (10). Большое число заходящих дуг имеет единственная вершина, соответствующая сайту Serbian Academy of Sciences and Arts (11).

При анализе веб-графа представляет интерес соотношение между полустепенями исхода и захода вершин. На рис. 3 приводятся три варианта возможного распределения входящих и исходящих дуг. Вершины первого типа называют индукторами (мало входящих дуг, много исходящих), второго типа - коллекторами (много входящих дуг, мало исходящих), а третьего типа - посредниками (много входящих и исходящих дуг). Эти типы вершин образуют множество веб-коммуникаторов графа.

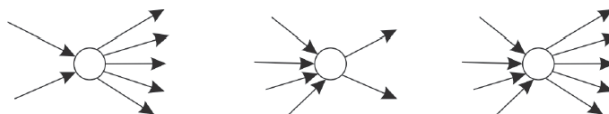


Рис. 3. Веб-коммуникаторы: индуктор, коллектор и посредник

Анализ вершин с большими степенями показывает, что в веб-графе научных организаций Сербии всего два индуктора. Это сайты Zajednice instituta Srbije (42, 5) и Institute of Economic Sciences (14, 1) (в скобках указаны полустепени исхода и захода вершин). Единственным посредником будет сайт Serbian Academy of Sciences and Arts (10, 11).

## ВЫВОДЫ

В работе проведен анализ веб-пространства научных организаций Республики Сербия методами вебометрики и теории графов. Содержание сайтов и связи между ними анализируются с помощью сервисов поисковых систем и специальных программ. Описаны критерии, использованные для составления рейтинга сайтов научных организаций Республики Сербия. Построены рейтинги сайтов научных институтов, входящих в Сербскую академию наук и искусств (Serbian Academy of Sciences and Arts) и Объединение институтов Сербии (Zajednice instituta Srbije).

Исследованы структурные и метрические свойства веб-графа сайтов научных организаций Республики Сербия и его фрагментов, что позволяет оценить уровень информационного взаимодействия. В этом смысле наиболее развитыми оказались сайты Zajednice instituta Srbije, Institute of Economic Sciences и Serbian Academy of Sciences and Arts.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке Президиума СО РАН, в рамках междисциплинарного интеграционного проекта № 21, 2012-2014 гг. и РФФИ (грант № 12-01-00631)

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Проект Ranking Web of World Research Centers. <http://research.webometrics.info/> (дата доступа - 15.04.2013).
- [2] Проект Ranking Web of World Research Centers, выборка данных по стране Сербия. <http://research.webometrics.info/en/Europe/Serbia> (дата доступа - 15.04.2013).
- [3] Сайт Сербской академии наук и искусств. <http://www.sanu.ac.rs/> (дата доступа - 15.04.2013).
- [4] Сайт Zajednice instituta Srbije. <http://www.zis.phy.bg.ac.rs/> (дата доступа - 15.04.2013).
- [5] Шокин Ю.И., Веснин А.Ю., Добрынин А.А., Клименко О.А., Рычкова Е.В., Петров И.С. Исследование научного веб-пространства Сибирского отделения Российской академии наук. Вычислительные технологии. 2012. Т. 17, № 6. С. 86-98.
- [6] Поисковая система Яндекс. <http://www.yandex.ru/> (дата доступа - 15.04.2013).
- [7] Поисковая система Google. <http://www.google.ru/> (дата доступа - 15.04.2013).
- [8] Поисковая система Bing. <http://www.bing.com/> (дата доступа - 15.04.2013).
- [9] Система определения индекса цитирования в веб-пространстве Google Scholar. <http://scholar.google.com/> (дата доступа - 15.04.2013).
- [10] Рейтинг сайтов научных организаций Республики Сербия. [http://www.ict.nsc.ru/userfiles/file/presentation/MIT-09/Srbija\\_webometrics.pdf](http://www.ict.nsc.ru/userfiles/file/presentation/MIT-09/Srbija_webometrics.pdf) (дата доступа - 14.08.2009).
- [11] Klimenko O.A., Rychkova E.V., Shokin Y.I. Website ranking for Scientific & Research Organizations of the Republic of Serbia // Proceedings of International Conference "Mathematical and Informational Technologies MIT-2009". Kosovska Mitrovica, 2010. P. 193- 197.
- [12] Веб-граф институтов Сербии. <http://ousnano.sbras.ru/sitepage.php?PageID=2506> (дата доступа - 07.04.2013).
- [13] Broder A., Kumar R., Maghoul F., Raghavan P., Rajagopalan S., Stata R., Tomkins A., Wiener J. Graph structure in the Web // Computer Networks. 2000. Vol. 33. No 1-6. P. 309-320.
- [14] Веснин А.Ю., Добрынин А.А., Клименко О.А., Константинова Е.В., Рычкова Е.В., Савин М.Ю., Шокин Ю.И. Изучение научного веб-пространства Сибирского отделения РАН методами вебометрики и теории графов, Zbornik radova konferencije MIT 2013, Belgrad, Serbia, 2014.
- [15] Hage P., Harary F. Structural models in anthropology. Cambridge University Press: Cambridge, UK, 1983.

## ON SOME PROBLEMS OF CONSTRUCTION OF DIFFERENCE SCHEMES ON MOVING GRIDS

### О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ КОНСТРУИРОВАНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ НА ПОДВИЖНЫХ СЕТКАХ

*The adaptive grid generation and the construction of divergent difference schemes, which preserve monotonicity of a numerical solution, are discussed using the examples of the transport equation and the nonlinear scalar equation. The predictor-corrector scheme is applied for the numerical solution of the one-dimensional non-stationary shallow water equations.*

#### ВВЕДЕНИЕ

В данной работе изложен подход к построению монотонных разностных схем, основанный на исследовании их дифференциальных приближений. Рассмотрены вопросы, не затронутые в [1]-[3]: свойства монотонности и дивергентности схем на подвижных неравномерных сетках, построение сеток, адаптирующихся к разрывным решениям. Предложен новый подход к построению любых явных двухслойных дивергентных схем на подвижных сетках. Многие схемы, сохраняющие монотонность численного решения, дают на разрывных решениях осциллирующие разностные производные [4] что может быть вызвано, в частности, ростом числа экстремумов численного решения даже при использовании TVD-схем [5, 6]. Если при использовании метода адаптивных сеток управляющая функция зависит от таких производных, то будет чередование длинных и коротких ячеек, что приведет к потере точности решения. Использование процедуры сглаживания управляющей функции дает плавное изменение длин соседних ячеек. Для задач с разрывными решениями нарушение условия неубывания энтропии [7] приводит к нефизическому решению [8, 9]. Для выполнения дискретного условия неубывания энтропии можно использовать энтропийную коррекцию [8], [10]-[13]. С помощью метода дифференциального приближения сделаны новое объяснение возникновения нефизических численных решений и энтропийная коррекция. Для нелинейного скалярного уравнения показано сохранение схемой предиктор-корректор постоянного решения и стационарного или, в случае подвижной сетки, движущегося скачка. Схема предиктор-корректор применена для решения одномерных уравнений мелкой воды, для которых нелинейное скалярное уравнение является модельным.

#### СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Для уравнения переноса

$$u_t + au_x = 0, \quad a = \text{const}, \quad (1)$$

явная схема предиктор-корректор [14] имеет вид:

$$\frac{u_{j+1/2}^* - u_{j+1/2}^n}{\tau_{j+1/2}^*} + au_{x,j+1/2}^n = 0, \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1/2}^* - u_{j-1/2}^*}{h} = 0, \quad (2)$$

$\tau$  - шаг по времени,  $h$  - шаг равномерной сетки  $x_j = jh$ ,  $u_{j+1/2}^*$  определены в  $x_{j+1/2} = x_j + h/2$  и

относятся к  $t = t^n + \tau_{j+1/2}^*$ ,  $t^n = n\tau$ ,  $u_{j+1/2}^n = \frac{u_{j+1}^n + u_j^n}{2}$ ,  $u_{x,j+1/2}^n = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{2}$ ,  $\tau_{j+1/2}^* = \frac{\tau}{2}(1 + \theta_{j+1/2}^n)$ ,  $\theta$  -схем-

<sup>1</sup> Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russia



ный параметр. Одношаговый вариант схемы (2)

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau} + a \frac{u_{j+1/2}^n - u_{j-1/2}^n}{h} - \frac{a^2 \tau}{2h} \left[ \left( (1+\theta) u_x \right)_{j+1/2}^n - \left( (1+\theta) u_x \right)_{j-1/2}^n \right] = 0 \quad (3)$$

можно назвать канонической формой явных двухслойных схем для (1), поскольку любая такая схема может быть записана в виде (3) при соответствующем выборе  $\theta$  [15].

При  $\theta = \text{const} \neq 0$  схема (3) имеет первый порядок на гладких решениях. Условия устойчивости имеют вид  $0 \leq \theta \leq \theta_L$ ,  $\theta_L = \frac{1}{C^2} - 1 > 0$ , где  $C = |a| \frac{\tau}{h} = |a| \alpha < 1$  - число Куранта. Если  $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_L$ ,

$\theta_0 = \frac{1}{C-1} > 0$ , то схема сохраняет монотонность численного решения. Если схема не сохраняет монотонность численного решения, то это не означает, что она все монотонные функции переводит в немонотонные [15]. При отсутствии дисперсии в решении второго дифференциального приближения схема может не сохранять монотонность численного решения [15]. Для «квазипостоянного»  $\theta$  (т.е. зависящего от  $h$  и  $\tau$  так, что  $\tau = O(h)$  (или  $\tau = O(\tau)$ ), коэффициенты схемы (3) зависят только от шагов сетки. Тогда при  $0 \leq \theta \leq \theta_L$  и  $\theta = O(h) \geq 0$  схема (3) будет второго порядка и сохраняющей монотонность численного решения [1]. Однако при измельчении сетки для сохранения этих свойств нужно использовать  $C$ , близкие к 1.

При особом выборе переменного  $\tau = O(\tau) \geq 0$  схема второго порядка (3) может сохранять монотонность решения при  $C = |a| \frac{\tau}{h} < 1$  [1,2].  $\theta$  выбирается так [3], чтобы диссипативный член в первом дифференциальном приближении (п.д.п.) схемы (3) либо частично или полностью компенсировал дисперсионный член, либо давал вклад в п.д.п., дающий смену знака коэффициента при третьей производной:

$$\theta_{j+1/2}^n = \begin{cases} 0 & \text{при } \left| u_{x,j+1/2}^n \right| \leq \left| u_{x,j+1/2-s}^n \right| \text{ и } u_{x,j+1/2}^n \cdot u_{x,j+1/2-s}^n \geq 0, \\ \bar{\theta} (1 - \xi_{j+1/2}^n) & \text{при } \left| u_{x,j+1/2}^n \right| > \left| u_{x,j+1/2-s}^n \right| \text{ и } u_{x,j+1/2}^n \cdot u_{x,j+1/2-s}^n \geq 0, \\ \bar{\theta} & \text{при } u_{x,j+1/2}^n \cdot u_{x,j+1/2-s}^n < 0, \end{cases} \quad (4)$$

$\theta = \text{const} > 0$ ,  $s = \text{sign } a$ ,  $\xi_{j+1/2}^n = u_{x,j+1/2-s}^n / u_{x,j+1/2}^n$ .

Рассмотрим схему с переменными коэффициентами

$$u_j^{n+1} = b_{-1,j} u_{j-1}^n + b_{0,j} u_j^n + b_{1,j} u_{j+1}^n \quad (5)$$

$b_{-1,j} = \frac{1 + \alpha a_j}{2} > 0$ ,  $b_0 = 0$ ,  $b_{1,j} = \frac{1 - \alpha a_j}{2} > 0$ , где  $a_j = a(x_j)$ , для решения задачи Коши для уравнения  $u_t + au_x = 0$ , где  $a(x)$  - строго возрастающая положительная ограниченная функция,

$0 < a(x) < 1$ ,  $a' > 0$ , и для любого  $j$  выполнено условие устойчивости  $\alpha a_j < 1$  в равномерной норме по начальным данным.

**Теорема 1.** Пусть для схемы (5)  $b_{-1,j} + b_{0,j} + b_{1,j} = 1$  в каждом узле  $x_j$ . Тогда выполнение при всех  $j$  условий  $b_{\pm 1,j} \geq 0$ ,  $b_{-1,j} + b_{1,j-1} \leq 1$  необходимо и достаточно, чтобы схема (5) сохраняла монотонность численного решения [3].

**Теорема 2.** Выполнение условий  $C = |a| \frac{\tau}{h} < 1$  и  $\theta_0 \leq \bar{\theta} \leq \frac{2}{3} \theta_L$  достаточно, чтобы схема (3) с параметром (4) сохраняла монотонность численного решения [2].

Схема предиктор-корректор на неравномерной подвижной сетке для (1) имеет вид:

$$\frac{v_{j+1/2}^* - v_{j+1/2}^n}{\tau_{j+1/2}^*} + \left( \frac{\bar{a}}{J} v_q \right)_{j+1/2}^n = 0, \quad (6)$$

$$\frac{(Jv)_j^{n+1} - (Jv)_j^n}{\tau} + a \frac{(\bar{a}^n v^*)_{j+1/2} - (\bar{a}^n v^*)_{j-1/2}}{h} = 0,$$

$$v_{j+1/2}^n = \frac{v_{j+1}^n + v_j^n}{2}, \quad \bar{a} = a - x_t, \quad x_{t,j+\frac{1}{2}}^n = \frac{x_{t,j}^n + x_{t,j+1}^n}{2}, \quad x_{t,j}^n = \frac{x_j^{n+1} - x_j^n}{\tau} \quad (7)$$

$$J_{j+1/2}^n = x_{q,j+1/2}^n = \frac{x_{j+1}^n - x_j^n}{h}, \quad J_j^n = \frac{J_{j+1/2}^n + J_{j-1/2}^n}{2} = x_{q,j}^n = \frac{x_{j+1}^n - x_{j-1}^n}{2h} \quad (8)$$

$h = \frac{1}{N}$  - шаг равномерной сетки  $\bar{Q}_h$  на  $\bar{Q}_h = [0, 1]$ ,  $x_j^n$  - узлы неравномерной подвижной сетки на  $\bar{\Omega}_h = [0, l]$  являются образами  $q_j \in \bar{\Omega}_h$  при некотором гладком невырожденном преобразовании  $x = x(q, t)$ ,  $x(0, t) = 0$ ,  $x(1, t) = l$ , для каждого  $t$  взаимно-однозначно отображающим  $\bar{Q}$  на  $\bar{\Omega}$ ,  $J = x_q > 0$  - якобиан преобразования,  $x_t$  - скорость движения узлов,  $v(q, t) = u(x(q, t), t)$ . Каноническая форма схемы (3):

$$\frac{(Jv)_j^n - (Jv)_j^{n-1}}{\tau} + \frac{(\bar{a}v)_{j+1/2}^n - (\bar{a}v)_{j-1/2}^n}{h} - \frac{\tau}{2h} \left[ \left( (1+\theta) \frac{\bar{a}^2}{J} v_q \right)_{j+1/2}^n - \left( (1+\theta) \frac{\bar{a}^2}{J} v_q \right)_{j-1/2}^n \right] = 0 \quad (9)$$

Условия устойчивости схемы (9) имеют вид  $\theta_{j+1/2}^n \geq 0$ ,  $\max_{j=0, \dots, N-1} \left( \sqrt{1+\theta} C \right)_{j+1/2}^n \leq 1$ , где  $C_{j+1/2}^n = \frac{\tau}{h} \left( \frac{\bar{a}}{J} \right)_{j+1/2}^n < 1$  - число Куранта. Для сохранения схемой (9) монотонности численного решения, достаточно [1] использовать, например,

$$\theta_{j+1/2}^n = \begin{cases} 0 & \text{при } |\bar{g}_{j+1/2}^n| \leq |\bar{g}_{j+1/2-s}^n| \text{ и } \bar{g}_{j+1/2}^n \cdot \bar{g}_{j+1/2-s}^n \geq 0, \\ (\theta_0 (1-\xi))_{j+1/2}^n & \text{при } |\bar{g}_{j+1/2}^n| > |\bar{g}_{j+1/2-s}^n| \text{ и } \bar{g}_{j+1/2}^n \cdot \bar{g}_{j+1/2-s}^n \geq 0, \\ \theta_{0,j+1/2}^n & \text{при } \bar{g}_{j+1/2}^n \cdot \bar{g}_{j+1/2-s}^n < 0, \end{cases} \quad (10)$$

$$s = \text{sign } \bar{a}_{j+1/2}^n, \quad \theta_{0,j+1/2}^n = \frac{1}{C_{j+1/2}^n} - 1, \quad \bar{g}_{j+1/2}^n = \left( |\bar{a}| (1-C) v_q \right)_{j+1/2}^n, \quad \xi_{j+1/2}^n = \frac{\bar{g}_{j+1/2-s}^n}{\bar{g}_{j+1/2}^n}.$$

Выполнение геометрического закона сохранения [16] является необходимым условием согласованности формул для характеристик подвижной неравномерной сетки [15] и гарантирует то, что схема (6), как и уравнение (1), имеет в качестве точного решения постоянную функцию. Простым методом построения любых явных двухслойных дивергентных схем на подвижных сетках является вывод на основе дивергентной канонической формы (9) с помощью выбора  $\theta$  [15]. В [15] на примере метода эквираспределения продемонстрированы некоторые проблемы построения адаптивных сеток для разрывных решений: например, в случае разрывной начальной функции резкое изменение длин ячеек начальной сетки в окрестности разрыва или отсутствие решения нелинейной задачи для вычисления координат узлов начальной сетки. Даже для TVD-схем возможен рост количества экстремумов решения [15], что может привести к чередованию длинных и коротких ячеек. Для устранения проблем может быть использована неявная процедура сгла-

живания [17] управляющей функции. Результаты решения задач [15] для уравнения переноса с разрывной и гладкой начальными функциями показывают преимущество использования монотонизации и подвижных адаптивных сеток.

### СХЕМЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО СКАЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ

Схема предиктор-корректор [18] для нелинейного скалярного уравнения

$$u_t + [f(u)]_x = 0, \quad (11)$$

состоит из аппроксимирующего уравнение для потоков  $f_t + a(u)f_x = 0$  (получается умножением (11) на  $a(u) = f_u(u)$ ) шага предиктор

$$\frac{f_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(f_{j+1}^n + f_j^n)}{\tau_{j+1/2}^*} + a_{j+1/2}^n \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{h} = 0 \quad (12)$$

где в  $x_{j+1/2} = x_j + h/2$  определяются потоки  $f^*$ ,  $f_j^n = f(u_j^n)$ ,  $\tau_{j+1/2}^* = 0.5\tau(1 + \theta_{j+1/2}^n)$ ,  $\tau$  – шаг по времени,  $\theta_{j+1/2}^n$  – схемный параметр, и аппроксимирующего (11) шага корректор

$$\frac{u_j^n - u_j^{n'}}{\tau} + \frac{f_{j+1/2}^* - f_{j-1/2}^*}{h} = 0 \quad (13)$$

Способ вычисления  $a_{j+1/2}^n$  определяется требованием сохранения для сеточных функций правила дифференцирования  $f_x = a(u)u_x$ . Это, например, сеточная функция [10]

$$a_j^n \begin{cases} \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{u_{j+1}^n - u_j^n} & \text{при } u_{j+1}^n \neq u_j^n, \\ a(u_j^n) & \text{при } u_{j+1}^n = u_j^n, \end{cases}$$

которая позволяет переписать шаг предиктор (12) в виде

$$f_{j+1/2}^* = \frac{f_{j+1}^n + f_j^n}{2} - \frac{\tau}{2} \left( (1 + \theta) a^2 u_x \right)_{j+1/2}^n \quad (14)$$

и получить каноническую форму явных дивергентных двухслойных схем для (11) [18]:

$$\frac{u_j^n - u_j^{n'}}{\tau} + \frac{f_{j+1}^n + f_{j-1}^n}{2h} - \frac{\tau}{2} \left[ \left( (1 + \theta) a^2 u_x \right)_{j+1/2}^n - \left( (1 + \theta) a^2 u_x \right)_{j-1/2}^n \right] = 0. \quad (15)$$

Для  $\theta = O(h)$  схема (15) аппроксимирует (11) со вторым порядком по  $\tau$  и  $h$ . При  $\theta = \text{const} \neq 0$  – с первым порядком на гладких решениях. Необходимое условие устойчивости для  $a(u) = \text{const}$  [15], требует, в частности,  $\theta \geq 0$ . Далее предполагается  $\theta_{j+1/2}^n \geq 0$ . Для произвольного  $\theta = O(h)$  схема (13), (12) не сохраняет монотонность численного решения. Используя п.д.п. схемы предиктор-корректор, параметр  $\theta$  можно подобрать так, чтобы диссипативный член п.д.п. приводил к изменению дисперсионного члена в тех подобластях, где возможно появление осцилляций в численном решении:

$$\theta_{j+1/2}^n = \begin{cases} 0 & \text{при } |g_{j+1/2}^n| \leq |g_{j+1/2-s}^n| \text{ и } g_{j+1/2}^n \cdot g_{j+1/2-s}^n \geq 0, \\ (\theta_0 (1 - \xi))_{j+1/2}^n & \text{при } |g_{j+1/2}^n| > |g_{j+1/2-s}^n| \text{ и } g_{j+1/2}^n \cdot g_{j+1/2-s}^n \geq 0, \\ \theta_{0,j+1/2}^n & \text{при } g_{j+1/2}^n \cdot g_{j+1/2-s}^n < 0, \end{cases} \quad (16)$$

$s = \text{sign } a_{j+1/2}^n$ ,  $\xi_{j+1/2}^n = \frac{g_{j+1/2-s}^n}{g_{j+1/2}^n}$ ,  $g_{j+1/2}^n = (|a|(1-C)u_x)_{j+1/2}^n$ , и доказать что для  $C_{j+1/2}^n = \left| a_{j+1/2}^n \frac{\tau}{h} \right| < 1$  схе-

ма (13), (12), (16) сохраняет монотонность численного решения [3].

**Лемма 1.** Схема (13), (12) сохраняет постоянное решение: если  $u_j^n \equiv U_0 = \text{const}$ , то и  $u_j^{n+1} \equiv U_0$  [18].  
Для  $f''(u) \geq 0$  и  $U_l > U_r$  задача Римана для уравнения (11) с начальной функцией

$$u_0(x) = \begin{cases} U_l, & x < x_0, \\ U_r, & x > x_0, \end{cases} \quad U_l \neq U_r \quad (17)$$

при  $t > 0$  имеет физически корректное решение в виде ударной волны, которое удовлетворяет условию неубывания энтропии [8,9]:

$$u(x,t) = \begin{cases} U_l & \text{при } x < x_0 + Wt, \\ U_r & \text{при } x > x_0 + Wt, \end{cases} \quad (18)$$

$W$  - постоянная скорость движения скачка, определяемая из условия Ренкина-Гюниона

$$W = \frac{f(U_r) - f(U_l)}{U_r - U_l}. \quad \text{При } W = 0 \text{ скачок является стационарным, } f(U_r) = f(U_l).$$

**Лемма 2.** Схема (13), (12) сохраняет стационарный скачок [18].

При  $U_l < U_r$  решение (18) в виде ударной волны разрежения является для задачи (11), (17) нефизичным и нарушающим условие неубывания энтропии, а устойчивым и не нарушающим энтропийное условие решением является центрированная волна разрежения [8,9]. Исследование п.д.п. [18] показывает, что при малых значениях  $a$  и при  $u_x > 0$  схемная вязкость становится отрицательной, что и является причиной нефизичного решения при расчете волн разрежения с критической точкой  $a = 0$ . Обеспечение неотрицательности схемной вязкости приводит к формуле для шага предиктор (14):

$$f_{j+1/2}^* = \frac{f_{j+1}^n + f_j^n}{2} - \frac{\tau}{2} \left( (a^2 + \psi) u_x \right)_{j+1/2}^n, \quad (19)$$

$$\psi_{j+1/2}^n = \begin{cases} \delta_{j+1/2}^n & \text{при } (\theta a^2)_{j+1/2}^n < \delta_{j+1/2}^n C_{j+1/2}^n \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, u_{x,j+1/2}^n \right\rangle 0, \\ (\theta a^2)_{j+1/2}^n & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad (20)$$

функция  $\theta$  вычисляется по формуле (16),

$$\delta_{j+1/2}^n = \frac{h}{\alpha} - \left( (1 - 3C^2) u_x \right)_{j+1/2}^n. \quad (21)$$

На подвижной сетке схема предиктор--корректор для уравнения (11) [18] имеет вид:

$$\left( \frac{\hat{f} - f^n}{\tau^*} \right)_{j+1/2} + \left( \frac{\bar{a}^2}{J} u_q \right)_{j+1/2} = 0, \quad \bar{a} = a - x_t, \quad (22)$$

$$\frac{(Ju)_j^{n+1} - (Ju)_j^n}{\tau} + \frac{(\hat{f} - (x_t u)^n)_{j+1/2} - (\hat{f} - (x_t u)^n)_{j-1/2}}{h} = 0, \quad (23)$$

Выбор  $\theta$  для монотонизации схемы (22), (23) можно также сделать с помощью п.д.п. схемы [18] и использовать формулу (16) для равномерной сетки, но с

$$s = \text{sign } \bar{a}_{j+1/2}^n, \quad g_{j+1/2}^n = (|\bar{a}|(1 - C) u_q)_{j+1/2}^n, \quad C_{j+1/2}^n < \alpha \left( \frac{|\bar{a}|}{J} \right)_{j+1/2}^n < 1, \quad (24)$$

при этом схема (22), (23), (16) сохраняет монотонность численного решения. Энтропийная кор-

рекция приводит к формуле для шага предиктор (22):

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} = f_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\tau}{2} \left( \left( \frac{a^2}{J} + \psi \right) u_q \right)_{j+\frac{1}{2}}^n,$$

$$\psi_{j+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} \delta_{j+\frac{1}{2}}^n & \text{при } \left( \theta \frac{\bar{a}^2}{J} \right)_{j+\frac{1}{2}}^n < \delta_{j+\frac{1}{2}}^n, C_{j+\frac{1}{2}}^n \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, u_{q,j+\frac{1}{2}}^n \right\rangle 0, \\ \left( \theta \frac{\bar{a}^2}{J} \right)_{j+\frac{1}{2}}^n & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad (25)$$

Функция  $\delta_{j+\frac{1}{2}}^n$  вычисляется по (21) с заменой  $u_x$  на  $u_q$  и использованием  $C_{j+\frac{1}{2}}^n$  из (24). Из одношаговой формы схемы (22), (23) в дивергентном виде с помощью выбора  $\theta$  могут быть получены любые явные двухслойные дивергентные схемы на подвижных сетках [18]. Для подвижных сеток лемма 1 справедлива, а лемма 2 принимает вид [18]:

**Лемма 3.** При условии  $x_{i,j_0+1/2}^n = W$  схема предиктор-корректор (22), (23) сохраняет движущийся скачок (17), (18).

При условии  $C_{j+\frac{1}{2}}^n = \left| a_{j+\frac{1}{2}}^n \frac{\tau}{h} \right| < 1$  схема Лакса для невязкого уравнения Бюргерса ( $f(u) = u^2 / 2$ ) является TVD-схемой, но увеличивает количество экстремумов, а противопоточная схема и монотонизированная схема предиктор-корректор без/с коррекцией схемной вязкости (также TVD-схемы) количество экстремумов не увеличивают [18].

Результаты решения задачи для невязкого уравнения Бюргерса с непрерывной начальной функцией, где точным решением является центрированная волна сжатия, в момент градиентной катастрофы генерирующая в зависимости от значений входных данных стационарный или движущийся скачок, показывают преимущество использования подвижных адаптивных сеток [15]. Результаты решения задачи Римана с точным решением в виде волны разрежения показывают преимущество использования подвижных адаптивных сеток и энтропийной коррекции для схемы предиктор-корректор [15].

В [18] схема предиктор-корректор на неравномерной подвижной сетке выписана и для неоднородного уравнения  $u_t + [f(u)]_x = g(x, t, u)$ . Результаты численного решения начально-краевой задачи с известным точным решением для неоднородного невязкого уравнения Бюргерса показывают преимущество использования адаптивных сеток [18].

### СХЕМА ПРЕДИКТОР-КОРРЕКТОР ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

В новых координатах  $(q, t)$  система уравнений мелкой воды, описывающая течение несжимаемой жидкости со свободной границей, имеет вид [18]:

$$\mathbf{u}_t + \frac{1}{J} (\mathbf{f}_q - x_t \mathbf{u}_q) = \frac{1}{J} \mathbf{G}, \quad \mathbf{f}_t + \frac{1}{J} \mathcal{A} (\mathbf{f}_q - x_t \mathbf{u}_q) = \mathbf{A} \mathbf{G}, \quad (26)$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} H \\ Hu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} Hu \\ Hu^2 + \frac{H^2}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(q, t, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ Hh_q \end{pmatrix},$$

$t$  - время,  $u(q, t)$  - скорость,  $\eta(q, t)$  - отклонение свободной поверхности от невозмущенного уровня,  $h(q, t)$  - глубина дна, отсчитываемая от невозмущенной свободной границы,  $H = \eta + h$  - полная глубина,  $\mathcal{A} = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{u}}(\mathbf{u})$  - матрица Якоби.

Схема предиктор-корректор для (26) является аналогом схемы для неоднородного нелинейного скалярного уравнения. На шаге предиктор используются аппроксимации уравнений (26), записанных в характеристической форме [18]. Важным вопросом является способ аппроксимации матрицы Якоби. Аналогично скалярному случаю потребуем  $\mathbf{f}_{q,j+1/2}^n = (\mathcal{A}\mathbf{u}_q)^n_{j+1/2}$ , чему удовлетворяет, например, следующая матрица

$$\mathbf{A}_{j+1/2}^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u_j^n u_{j+1}^n + H_{j+1/2}^n & 2u_{j+1/2}^n \end{pmatrix} = (\mathcal{R}\Lambda\mathcal{L})_{j+1/2}^n, \quad (27)$$

с собственными значениями

$$\lambda_{k,j+1/2}^n = u_{j+1/2}^n \pm \sqrt{(u_{j+1/2}^n)^2 - u_j^n u_{j+1}^n + H_{j+1/2}^n}, \quad k=1,2, \quad H_{j+1/2}^n = (H_j^n + H_{j+1}^n)/2, \quad u_{j+1/2}^n = (u_j^n + u_{j+1}^n)/2,$$

$$\mathcal{R}_{j+1/2}^n = (\mathcal{L}_{j+1/2}^n)^{-1} = \frac{\lambda_{2,j+1/2}^n - \lambda_{1,j+1/2}^n}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\lambda_{1,j+1/2}^n & \lambda_{2,j+1/2}^n \end{pmatrix}.$$

Схема предиктор-корректор имеет вид [18]:

$$\hat{\mathbf{f}}_{j+1/2} = \left[ \mathbf{f} - \frac{\tau}{2} \left( \frac{1}{J} \mathcal{R}\mathcal{D}\bar{\Lambda}(\bar{\Lambda}\mathbf{P} - \mathcal{L}\mathbf{G}) \right) \right]_{j+1/2}^n, \quad (28)$$

$$\frac{(\mathbf{J}\mathbf{u})_j^{n+1} - (\mathbf{J}\mathbf{u})_j^n}{\tau} + \frac{(\hat{\mathbf{f}} - (x_r \mathbf{u})^n)_{j+1/2} - (\hat{\mathbf{f}} - (x_r \mathbf{u})^n)_{j-1/2}}{h} = \mathbf{G}_j^*, \quad (29)$$

$$\bar{\Lambda}_{j+1/2}^n = \Lambda_{j+1/2}^n - x_{r,j+1/2}^n \mathcal{E}, \quad \Lambda_{j+1/2}^n = \begin{pmatrix} \lambda_{1,j+1/2}^n & 0 \\ 0 & \lambda_{2,j+1/2}^n \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E} - \text{единичная матрица}, \quad \mathbf{P}_{j+1/2}^n = (\mathcal{L}\mathbf{u}_q)^n_{j+1/2},$$

$$\mathcal{D}_{j+1/2}^n = \begin{pmatrix} 1 + \theta_{j+1/2}^1 & 0 \\ 0 & 1 + \theta_{j+1/2}^2 \end{pmatrix}, \quad \text{функции } \theta_{j+1/2}^k \text{ вычисляются по формуле типа (16):}$$

$$\theta_{j+1/2}^k = \begin{cases} 0 & \text{при } |g_{j+1/2}^k| \leq |g_{j+1/2-s_k}^k| \quad \text{и } g_{j+1/2}^k \cdot g_{j+1/2-s_k}^k \geq 0, \\ \theta_{0,j+1/2}^k (1 - \xi_{j+1/2}^k) & \text{при } |g_{j+1/2}^k| > |g_{j+1/2-s_k}^k| \quad \text{и } g_{j+1/2}^k \cdot g_{j+1/2-s_k}^k \geq 0, \\ \theta_{0,j+1/2}^k & \text{при } g_{j+1/2}^k \cdot g_{j+1/2-s_k}^k < 0, \end{cases} \quad (30)$$

$$\xi_{j+1/2}^k = g_{j+1/2-s_k}^k / g_{j+1/2}^k, \quad g_{j+1/2}^k = (|\bar{\lambda}_k| (1 - C_k) p_k)_{j+1/2}^n, \quad C_{k,j+1/2}^n = \alpha (|\bar{\lambda}_k| / J)_{j+1/2}^n < 1, \quad \theta_{0,j+1/2}^k = 1 / C_{k,j+1/2}^n - 1,$$

$p_{k,j+1/2}^n$  - компоненты вектора  $\mathbf{P}_{j+1/2}^n$ ,  $\bar{\lambda}_{k,j+1/2}^n$  - диагональные элементы  $\bar{\Lambda}_{(j+1/2)}^n$ ,  $s_k = \text{sign} \bar{\lambda}_{(k,j+1/2)}^n$ ,

$$\mathbf{G}_j^* = \begin{pmatrix} 0 \\ H_j^* h_{q,j}^* \end{pmatrix}, \quad k=1,2, \quad H_j^* \text{ определяется как [19]}$$

$$\frac{H_j^* - \tilde{H}_j^n}{\tau/2} + \left[ \frac{1 + \theta^1}{J(\lambda_2 - \lambda_1)} (\bar{\lambda}_1 \lambda_2 H_q - \bar{\lambda}_1 (Hu)_q + \tilde{H}h_q) - \frac{1 + \theta^2}{J(\lambda_2 - \lambda_1)} (\lambda_1 \bar{\lambda}_2 H_q - \bar{\lambda}_2 (Hu)_q + \tilde{H}h_q) \right]_{j+1/2}^n = 0, \quad (31)$$

где используются центральные разности и обозначения  $\tilde{H}_j^n = (H_{j-1}^n + H_{j+1}^n)/2$ ,  $u_{q,j}^n = (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)/2h$ ,

функции  $\theta_j^k$  вычисляются по формуле (30), но по компонентам  $\mathbf{P}_j^n$  в целых узлах,  $h_{q,j}^* = (h_{j+1/2}^* - h_{j-1/2}^*)/h$ ,  $h_{\pm 1/2}^* = \frac{1}{4} [h(x_j^n) + h(x_{j\pm 1}^n) + h(x_j^{n+1}) + h(x_{j\pm 1}^{n+1})]$ . Для нелинейных уравнений

мелкой воды не удается строго обосновать свойство сохранения монотонности численного решения, поэтому особенно важны исследование свойств схемы и численное тестирование.

**Лемма 4.** Схема (28)-(31) сохраняет состояние покоя жидкости: если  $\eta_j^n \equiv 0$ ,  $H_j^n = h(x_j)$ ,  $u_j^n \equiv 0$ , то и  $\eta_j^{n+1} \equiv 0$ ,  $H_j^{n+1} = h(x_j)$ ,  $u_j^{n+1} \equiv 0$  [19].

**Лемма 5.** Для плоского горизонтального дна  $h(x) \equiv h_0 = \text{const}$  схема (28)-(31) сохраняет постоянное течение жидкости: если  $H_j^n \equiv H_0 = \text{const}$ ,  $u_j^n \equiv u_0 = \text{const}$ , то  $H_j^{n+1} \equiv H_0$ ,  $u_j^{n+1} \equiv u_0$  [19].

Для  $h(x) \equiv h_0 = \text{const}$  нелинейные уравнения мелкой воды имеют разрывное решение - движение устойчивого гидравлического скачка, обращенного вправо:

$$H(x,t) = \begin{cases} H_l & \text{при } x \leq x_0 + Wt, \\ H_r & \text{при } x > x_0 + Wt, \end{cases} \quad u(x,t) = \begin{cases} U_l & \text{при } x \leq x_0 + Wt, \\ U_r & \text{при } x > x_0 + Wt, \end{cases} \quad (32)$$

Где  $H_l > H_r$ ,  $W$  - скорость движения скачка,  $U_l = U_r + (H_l - H_r) \sqrt{(H_l + H_r)/(2H_l H_r)}$ ,  $W = U_r + \sqrt{(H_l / H_r)(H_l + H_r)}/2$ . На скачке выполняется соотношение  $W(H_r - H_l) = H_r U_r - H_l U_l$ . Скачок является стационарным, если  $W = 0$ .

**Лемма 6.** Схема (28)-(31) сохраняет стационарный скачок (32).

Результаты численного решения задачи о разрушении плотины на плоском горизонтальном дне с известным точным решением демонстрируют преимущества использования подвижных адаптивных сеток и энтропийной коррекции схемы. В данной работе во всех тестовых задачах адаптивная сетка строилась методом эквираспределения [15] с использованием неявной процедуры сглаживания управляющей функции.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Сергеева Ю.В., Хакимзянов Г.С. Об использовании дифференциального приближения при построении монотонных схем. Вычисл. технологии. Т. 9. Спец. выпуск: Тр. Совещания российско-казахстанской рабочей группы по вычислительным и информационным технологиям. 2004. С.139-149.
- [2] Shokin Yu.I., Sergeeva Yu.V., Khakimzyanov G.S. Construction of monotonic schemes by the differential approximation method. Rus. J. Numer. Anal. Math. Model. Vol.20. No.5. 2005. P.463-481.
- [3] Шокин Ю.И., Сергеева Ю.В., Хакимзянов Г.С. О монотонизации явной схемы предиктор-корректор. Вестник КазНУ. Математика, механика, информатика. Т.2. Спец. Выпуск. 2005. С.103-114.
- [4] Остапенко В.В. О монотонности разностных схем. Сибирский матем. журн. Т.39. №5. 1998. С.1111-1126.
- [5] Breuss M. An analysis of the influence of data extrema on some first and second order central approximations of hyperbolic conservation laws. ESAIM: Math. Model. Numer. Anal. Vol.39. No.5. 2005. P.965-993.
- [6] LeFloch P.G., Liu J.-G. Generalized monotone schemes, discrete paths of extrema, and discrete entropy conditions. Math. Comp. Vol.68. No.168. 1998. P.1025-1055.
- [7] Oleinik O. Discontinuous solutions of nonlinear differential equations // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol.26. 1957. P.95-172.
- [8] LeVeque R.J. Numerical methods for conservation laws. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2008.
- [9] Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction. Springer-Verlag, Berlin/New-York, 2009.
- [10] Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. J. of Comput. Phys. Vol.49. 1983. P.357-393.
- [11] Roe P.L. Self-adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws. SIAM J. Sci. Stat. Comput. Vol.13. No.2. 1992. P.611-630.
- [12] Osher T.S. Riemann solvers, the entropy condition, and difference approximation. SIAM J. Numer. Anal. Vol. 21. No. 2. 1984. P.217-235.
- [13] Tadmor E. Numerical viscosity and the entropy condition for conservative difference schemes. Math. Comp. Vol.43. No.168. 1984. P.369-381.
- [14] Яушев И.К. О численном расчёте нестационарных течений газа в одномерном приближении в каналах со скачком площади сечения. Изв. СО АН СССР. Техн. науки. Т.8. №2. 1967. С.39-48.

- [15] Хакимянов Г.С., Шокина Н.Ю. Некоторые замечания о схемах, сохраняющих монотонность численного решения. Вычисл. технологии. Т.17. №2. 2012. С.79-98.
- [16] Trulio J.G., Tigger K.R. Numerical solution of the one-dimensional hydrodynamic equations in an arbitrary time-dependent coordinate system. Tech. Rep. UCLR-6522. Univ. of California, Lawrence Radiation Laboratory. 1961.
- [17] Похилко В.И., Тишкин В.Ф. Однородный алгоритм расчёта разрывных решений на адаптивных сетках. Матем. моделирование. Т.6. №11. 1994. С.25-40.
- [18] Хакимянов Г.С., Шокина Н.Ю. Метод адаптивных сеток для одномерных уравнений мелкой воды. Вычисл. технологии. Vol.18. No.3. 2013. P.54-79.
- [19] Shokin Yu.I., Sergeeva Yu.V., Khakimzyanov G.S. Predictor-corrector scheme for the solution of shallow water equations. Rus. J. Numer. Anal. Math. Model. 2006. Vol.21. No.5. P.459-479.



# INFORMATION-MODEL REPRESENTATION OF ECOLOGICAL MONITORING CENTER FUNCTIONING FOR EMERGENCY SITUATIONS' PREVENTION

## ИНФОРМАЦИОННО-МОДЕЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ЦЕНТРА ЭКОЛОГИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА ДЛЯ ПРЕДУПРЕЖДЕНИЯ ЧРЕЗВЫЧАЙНЫХ СИТУАЦИЙ

---

*It is shown in the work realization of the component control sub-system of ecological monitoring center creation for emergency situations' prevention. It was developed the structural model consists of three parts. There is a task for evaluation of process time completed in the top of a tree the ecological monitoring center's functioning. It was built a production model for evaluation of program realization level for center's creation and the level of a goal achievement. A fuzzy knowledge base presents by forty seven fuzzy production rules.*

---

### ВВЕДЕНИЕ

В рамках реализации программы развития государственной системы предупреждения и ликвидации чрезвычайных ситуаций планируется создание центра экологического мониторинга для предупреждения чрезвычайных ситуаций (ЦЭМЧС) в г. Усть-Каменогорске. ЦЭМЧС является сложной системой с иерархической структурой.

Целью администрирования программы развития и функционирования ЦЭМЧС будет являться минимизация функции близости действительных и желаемых значений индикаторов изменения функций плановой реализации программы и фактической реализации.

Схема реализации компонента, представляющего собой подсистему управления, потребовала разработки оригинальной информационной технологии как системы научных и инженерных знаний, а также методов и моделей, обеспечивающих создание, сбор, передачу, хранение и обработку данных в процессе экологического мониторинга.

### СТРУКТУРНАЯ МОДЕЛЬ

С позиции теории систем и общей теории управления реализация ЦЭМЧС рассмотрена как сложная целенаправленная система с программно-целевым управлением, в структурную модель которой входят:  $1F$  - объект управления, представляющий комплекс мероприятий ЦЭМЧС;  $2F$  - субъект управления, которым является администратор ЦЭМЧС, осуществляющий деятельность, направленную на достижение целей ЦЭМЧС;  $3F$  - подсистема управления, задающая программу управления с выходной переменной цели субъекту управления.

Каждый из компонентов  $1F$ ,  $2F$ , и  $3F$  структурной модели является подсистемой и может быть декомпозирован. Количественные и качественные значения переменных  $Yt$  напрямую связаны с индикаторами реализации ЦЭМЧС, на которых определяется функция её результативности и эффективности реализации. Если обозначить через  $\varphi(z): \{U \times X\} \times \Omega$  функцию фактической реализации ЦЭМЧС для достижения цели  $z$ , а через  $\varphi^*(z)$  - функцию плановой реализации программы, то цель администрирования ЦЭМЧС - минимизировать функцию близости действительных и желаемых значений индикаторов  $\Delta(\varphi(z), \varphi^*(z))$  с помощью выбора обоснованных подсистемой  $3F$  решений: повышение оперативности контроля сроков завершения мероприятий; оптимизация перераспределения ресурсов, организационное управление для минимизации влияния внеш-

---

1 D. Serikbayev East-Kazakhstan State Technical University, Ust-Kamenogorsk city, the Republic of Kazakhstan

них факторов; оценка степени достижения цели; анализ результатов реализации ЦЭМЧС с выявлением негативных тенденций [1, 2].

Структурная модель функционирования ЦЭМЧС может быть представлена в виде иерархического дерева. Дуги дерева связывают вершины по логической схеме: основная цель - задачи, решение которых приводит к достижению цели - подзадачи, обеспечивающие выполнение задач - мероприятия, связанные с решением подзадач - проекты - объекты, на которых выполняются работы в рамках проектов. Проекты и выполняемые работы находятся на самом нижнем уровне иерархии и доступны для оценки их состояния извне, но чем выше уровень иерархии по дереву, тем более скрытым и нечетким становится состояние реализации, степень завершенности и результативности программы.

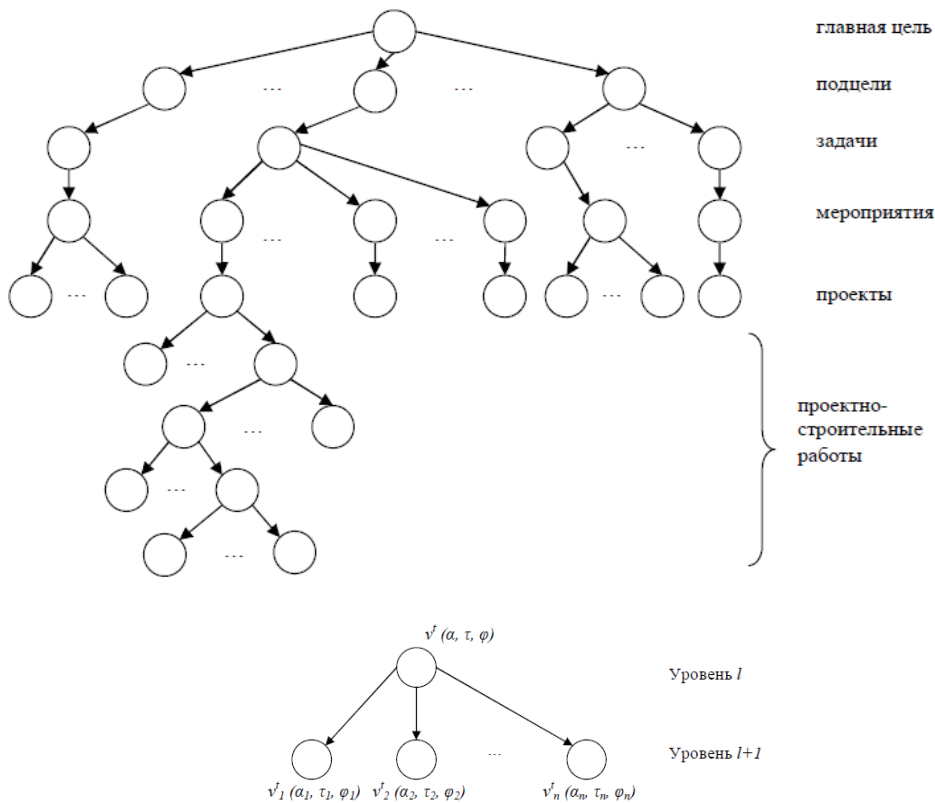


Рис. 1. Описание вершины  $v^l$  дерева в момент времени  $t$

Пусть  $t \geq 0$  некоторый момент функционирования процессов в вершинах дерева реализации ЦЭМЧС, каждая вершина дерева  $v$  с потомками одного уровня  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  характеризуется своим состоянием, которое задаётся набором переменных  $v^l(\alpha, \tau, \varphi)$ , где  $\alpha$  - объем выполненных работ или показатель степени завершенности программы;  $\tau$  - время, оставшееся до завершения процесса в вершине;  $\varphi$  - степень достижения цели.

Показатель степени завершенности  $\alpha$  количественно определяется как доля освоенных финансовых средств от сметной стоимости. Показатель степени завершенности  $m$ -ой вершины текущего  $l$ -го уровня  $\alpha_m^l$  вычисляется как сумма показателей элементов предыдущего (ниже расположенного) уровня

$$\alpha_m^l = \sum_{i \in \Gamma_m^l} k_i^{(l+1)} \alpha_i^{(l+1)} \text{ причем } \sum_{i \in \Gamma_m^l} k_i^{(l+1)} = 1 \quad (1)$$

Степень достижения цели  $\varphi$  в каждом элементе дерева есть функция, зависящая от доли освоения финансовых средств  $\alpha$  и от времени оценки  $t$ .

Выполнение процесса в каждой вершине  $v_j$  обеспечивает некоторый уровень выполнения процесса в вышестоящей вершине, но в различной степени, то есть функция вида  $\varphi_j(v) : V \rightarrow [0,1]$  выражает степень, с которой выполнение процесса в вершине  $v_j \in V$  обеспечивает выполнение процесса в вершине  $v$ .

Для оценки состояния вершины вводится лингвистическая переменная «Оценка экологического состояния» с функцией принадлежности  $\mu(x) = 1/(1+(x-A)^2)$ , связанная с выпуклым нормальным нечетким множеством и заданная терм-множеством {«удовлетворительно по основным показателям», «удовлетворительно в основном», «удовлетворительно в минимальном объеме», «в критическом состоянии», «неудовлетворительно»}.

Степень достижения цели в корневой вершине дерева реализации ЦЭМЧС определяется на основании значений данного показателя у дочерних вершин и рассчитывается в соответствии с принципом обобщения Заде как результат последовательного умножения нечетких чисел [3, 4].

### ЗАДАЧА ОЦЕНКИ ВРЕМЕНИ ЗАВЕРШЕНИЯ ПРОЦЕССА В ВЕРШИНЕ ДЕРЕВА ЦЭМЧС

Пусть  $(\tau^{(i)}, \alpha^{(i)})$ ,  $i=1,2,\dots,m$  - состояние вершины, аналогичной  $v$  в  $i$ -ом ранее завершеном объекте, данные мониторинга которого выступают объектом обучения. Оценка времени завершения процесса  $\tau$  в вершине  $v$  определяется как наибольшее из времен завершения процессов  $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$  в вершинах, предшествующих  $v$ , и времени  $\tilde{\tau}$ , прогнозируемого для некоторого объекта  $n+1$  по состоянию  $m$  объектов обучения:

$$\tau = \max(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \tilde{\tau}). \quad (2)$$

В работе оценка  $\tilde{\tau}$  вычисляется как некоторое приближение функции

$$\tilde{\tau} = F_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(x^*), \quad (3)$$

обеспечивающей

$$\inf_{x \in \{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}} \sum_{i=1}^m (F_{\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)}}(x) - \tau^{(i)}) \quad (4)$$

При условии

$$\alpha = \sum_{j=1}^m a_j, p_j / \sum_{j=1}^n p_j \quad (5)$$

где  $x^*$  - вектор искусственно введенных переменных;  $p_j$  - объемы работ для вершин-потомков. В конечном виде постановка сводится к задаче квадратичного программирования с  $n$  переменными и  $m$  нетривиальными ограничениями, для решения которой используются стандартные методы квадратичного программирования:

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^m \bar{a}_j^{(i)} x_j \geq \max \tau_j^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, m; x_j \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

### ПРОДУКЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ЦЭМЧС И СТЕПЕНИ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛИ

Для решения задачи используется нечеткая продукционная модель с набором правил, для формирования которых используются входные переменные  $t$ ,  $\tau$ ,  $\alpha$  и выходные переменные  $\omega$  и  $\varphi$ .

Переменная  $\tau$  - время, оставшееся до завершения процесса, с терм-множеством  $T1 = \{\text{«опережение»}, \text{«по плану»}, \text{«отставание»}\}$ . Переменная  $t$  - этап выполнения процесса с терм-множеством

$T2 = \{\text{«начало»}, \text{«в процессе»}, \text{«завершение»}\}$ . Переменная  $\alpha$  - доля освоенных финансовых средств от плана с терм-множеством  $T3 = \{\text{«полностью»}, \text{«более половины»}, \text{«менее половины»}, \text{«не освоено»}\}$ . Выходной переменной  $\omega$  является лингвистическая переменная «Состояние процесса» с терм-множеством  $T4 = \{\text{«выполнено»}, \text{«близко к завершению»}, \text{«приемлемое»}, \text{«проблемное»}, \text{«критическое»}\}$ . Выходной переменной  $\varphi$  является лингвистическая переменная «Степень достижения цели процесса» с терм-множеством  $T5 = \{\text{«цель достигнута»}, \text{«высокая степень достижения цели»}, \text{«средняя степень достижения цели»}, \text{«низкая степень достижения цели»}, \text{«цель не достижима»}\}$ .

Нечеткие множества заданы с помощью пакета Mathematica.

```
In[39]:= SetOptions@FuzzySet, UniversalSpace → 80, 20, 1<D;
In[40]:= FS1 = FuzzyTrapezoid@1, 8, 12, 17D;
In[41]:= FS2 = FuzzyBell@5, 3, 2D;
In[42]:= rel1 = SetsToRelation
Out[46]= {90.00159744, 0.00210406, 0.00282801, 0.00389105, 0.00550197,
0.00803492, 0.0121951, 0.0193919, 0.032635, 0.0588235, 0.114731,
1/7, 1/5, 0.240356, 2/7, 2/5, 3/7, 0.5, 4/7, 3/5, 5/7, 4/5, 0.835052, 6/7, 0.987805, 1.}
```

Рассмотрим построение центров четырех нечетких множеств. Функция кластеризации позволяет указать степень принадлежности каждого из значений на входе модели к определенному кластеру [5].

```
Out[69]= {{{8.80257, 8.45625, 7.72496}, {8.60842, 1.70315, 1.34927},
{1.91922, 1.9161, 2.53901}, {84.36615, 4.70241, 4.31657}},
{{0.00790454, 0.00245483, 0.00787974, 0.0200401, 0.00638034, 0.0193489,
0.0138087, 0.675572, 0.965732, 0.957304, 0.936261, 0.924364, 0.9852,
0.0225436, 0.00637423, 0.010978}, {80.0162631, 0.00670802, 0.0208705,
0.057455, 0.0079704, 0.0244519, 0.0179912, 0.0636494, 0.00973579,
0.0105433, 0.0178313, 0.0239293, 0.00414031, 0.90297, 0.961731, 0.935038}, {0.927363,
0.974613, 0.924737, 0.732182, 0.0195252, 0.0661418, 0.0263162,
0.0556566, 0.00691018, 0.00855686, 0.0136039, 0.0153974, 0.00310599,
0.033649, 0.0141819, 0.0221196}, {0.0484691, 0.0162238, 0.0465132,
0.190323, 0.966124, 0.890057, 0.941884, 0.205122, 0.0176218, 0.0235959,
0.0323038, 0.036309, 0.00755412, 0.0408375, 0.0177126, 0.0318645}},
{{{7.15306, 6.30536, 5.84949}, {7.93877, 4.64636, 4.82262},
{5.69922, 4.36545, 3.86212}, {5.30485, 4.48257, 4.57858}},
{{8.0429, 7.54342, 7.07821}, {7.76901, 4.66307, 4.28611}, {4.77792, 3.29263, 3.13574},
{4.39454, 3.83761, 3.77279}},
{{8.5597, 8.22325, 7.613}, {7.92331, 2.62504, 2.34509}, {4.02478, 2.42384, 2.4866}, {3.92328,
3.5844, 3.54958}}, {{8.73341, 8.3974, 7.70331}, {8.32764, 1.83272, 1.51549}, {2.50898,
2.29497, 2.5358}, {3.76241, 3.9794, 3.92443}},
{{8.77124, 8.42984, 7.71421}, {8.53991, 1.73997, 1.38123}, {2.05767, 2.03581, 2.48377},
{4.23674, 4.57599, 4.31832}}, {{8.79512, 8.45028, 7.72315}, {8.59628, 1.70953, 1.35416},
{1.94406, 1.93933, 2.5207}, {4.34704, 4.68528, 4.32733}}, {{8.80257, 8.45625, 7.72496},
{8.60842, 1.70315, 1.34927}, {1.91922, 1.9161, 2.53901}, {84.36615, 4.70241, 4.31657}}}
```

Функции принадлежности для входных и выходных переменных представлены нечеткими числами L-R-типа. Нечеткая база знаний представлена совокупностью из 47 нечетких продукционных правил, которые были сформированы последовательным перебором всех допустимых условий и следствий.

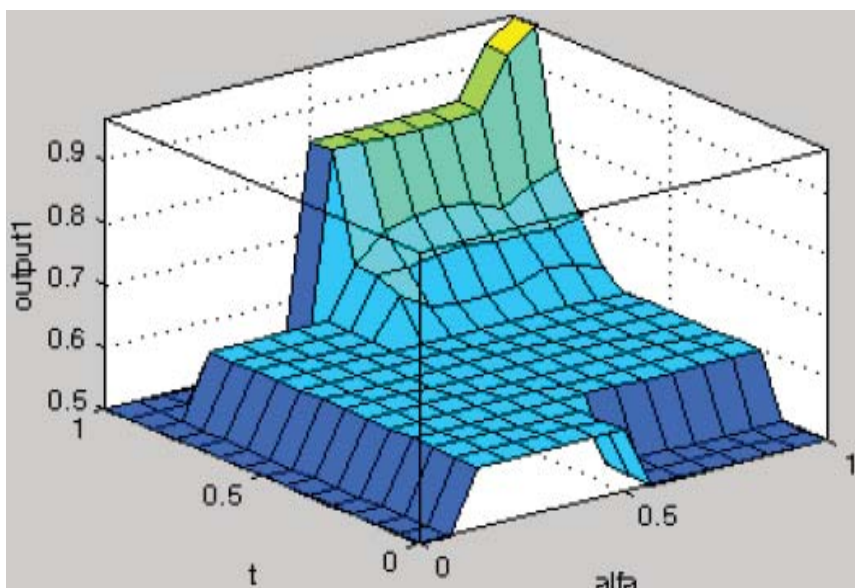


Рис. 2. Поверхность нечеткой модели для базы правил

В результате исследования разработан программно-информационный комплекс, реализующий решение поставленных задач, который подробно рассмотрен в монографии [5].

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Швец О.Я. Разработка информационной системы мониторинга чрезвычайных ситуаций в условиях стационарной работы предприятий. - совместный выпуск Вычислительные технологии, Вестник КазНУ им. аль-Фараби №13, часть 3. - Алматы - Новосибирск, 2008. - С. 308-312.
- [2] Сарсембаева А.М., Зайцев А.В. Компьютерный мониторинг объектов строительства // Современная техника и технологии ССТ 2005: материалы XI Международной научно-практической конференции студентов и молодых ученых, Россия, г. Томск, 2005. - с. 260-262
- [3] Швец О.Я., Мутанов Г.М. Математическое обеспечение трансфера информационных технологий для решения задач экологического мониторинга. Материалы II Международной научно-практической конференции: «Роль вузов в формировании инновационной экономики». - Усть-Каменогорск, 2009. - С. 143-148.
- [4] Уркумбаева А.М., Балова Т.Г. Математическая и информационная поддержка мониторинга реализации государственных программ // Вестник СГУ им. Шакарима, 2009, № 4, - с.155-159
- [5] Швец О.Я. Разработка информационной системы выявления чрезвычайных ситуаций. Мониторинг атмосферы городов. Saarbrücken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing (ISBN 978-3-659-24063-8), 2013. - 159 с.

# MULTISCALE COMPUTATIONAL MODEL FOR SIMULATION OF MECHANICAL BEHAVIOUR OF HETEROGENEOUS BRITTLE CERAMICS UNDER DYNAMIC LOADING

## МНОГОУРОВНЕВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ГЕТЕРОГЕННОЙ ХРУПКОЙ КЕРАМИКИ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

---

*In the present work, approach of computational mechanics of materials is used to investigate mechanisms of deformation and damage accumulation in brittle ceramics under dynamic loading. Multilevel computer simulation method is used for simulation of the mechanical behaviour of structured nanoceramics and ceramic composites. The computational models of the structured representative volume (SRVE) of ceramic composites is developed using the data of microscopic researches on meso-, micro -, and nanoscale levels. Results of numerical simulation of model ceramic materials subjected to stress pulse loadings are presented.*

---

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время для моделирования механической реакции структурированных систем на внешние физические воздействия используются три разновидности многоуровневого подхода: иерархический, моделирование с согласующимися граничными условиями, моделирование структурированного объема с заданием граничных условий на различных масштабных уровнях [1]. В указанных подходах для описания механического поведения структурных элементов разных масштабных уровней могут применяться как непрерывные, так и дискретные методы.

Достоверность результатов многоуровневого моделирования механической реакции систем со сложной структурой в условиях динамических воздействий определяется адекватностью описания двух процессов: - эволюции элементов структуры в объеме материала, - описания взаимодействия этих элементов. Многоуровневый подход позволяет разделить влияние указанных процессов на макромеханическую реакцию системы [1-3].

Конструкционная керамика относится к одному из наиболее сложных классов материалов, механическое поведение которых, существенно зависит от поровой, фазовой и зеренной структур, сформировавшихся в процессе производства изделия.

В настоящее время развитие непрерывных моделей применительно к керамическим материалам происходит, в основном, по пути описания дилатансионных эффектов с учетом особенностей изменения предельной поверхности по мере накопления необратимых деформаций либо с учетом эволюции трещинно-поровой структуры хрупкого материала (кинетические модели прочности).

В данной работе предлагается использовать подход многоуровневого моделирования для получения прогнозов механического поведения наноструктурированных керамических материалов, в которых под действием внешних воздействий зарождаются локализованные сдвиги, развиваются распределенные в объеме нано- и микротрещины, эволюционирует поровая субструктура. Поскольку механическое поведение хрупкой керамики при динамическом нагружении определяется зарождением и развитием трещин, т.е. эффектами локального нарушения сплошности среды на низких масштабных уровнях, для описания механической реакции на этих уровнях целесообразно использовать дискретный подход.

1 National Research Tomsk State University, Tomsk, Russia

2 Institute of Strength Physics and Materials Science of SB RAS, Tomsk, Russia

## ДВУХУРОВНЕВАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕМЕНТА КОНСТРУКЦИИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА С КЕРАМИЧЕСКОЙ МАТРИЦЕЙ

Двухуровневая вычислительная модель элемента конструкции из композиционного материала с керамической матрицей разработана с использованием подхода континуальной механики повреждаемых сред для описания процессов деформации и разрушения макроскопического тела и дискретно-континуального подхода для описания процессов деформации и разрушения элементарных объемов материала в процессе нагружения [4,5].

При использовании континуального подхода, достоверность прогноза механической реакции элемента конструкции зависит от адекватности определяющего уравнения среды и кинетического уравнения, описывающего процессы зарождения и развития поврежденности материальных частиц среды. Учет влияния структуры материала в феноменологических определяющих уравнениях и уравнениях кинетики повреждения для керамических материалов представляет серьезную сложность.

В рамках развиваемого многоуровневого подхода, вычислительная модель нагружаемого тела на макроскопическом уровне включала дискретную сеточную модель тела, а на мезоскопическом уровне - дискретную бессеточную модель структурированного объема.

В данной работе для описания деформации и разрушения тела на макроскопическом уровне использована сеточная модель, созданная в рамках метода конечных разностей.

Компоненты локального тензора скорости деформации в фазах композита определяются соотношением Стокса

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i), \quad (1)$$

где  $u_i$  - компоненты скорости материальных частиц (усредненных скоростей в RVE).

Уравнения сохранения в лагранжевой системе записаны для эффективных значений параметров

$$\dot{\rho} / \rho = (\rho / \rho_0) \nabla_i u_i, \quad (2)$$

$$\rho \frac{du_j}{dt} = -\nabla_i \sigma_{ij}, \quad (3)$$

$$\rho \dot{E} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}, \quad (4)$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + S_{ij}, \quad p = p(\rho, E), \quad (5)$$

где  $\rho_0$  - начальная массовая плотность,  $p$  - давление,  $S_{ij}$  - компоненты девиатора тензора напряжения,  $\sigma_{ij}$  - компоненты тензора напряжений,  $E$  - удельная внутренняя энергии; обозначены производные по времени,  $\nabla_i$  - оператор Гамильтона, *субстанциональные* производные по времени обозначены точками.

Для решения задачи об импульсном нагружении блока из композита  $Al_2O_3$ - $ZrO_2$  применялась конечно-разностная схема Рихтмайера [13]. Для описания механического поведения кристаллических фаз  $Al_2O_3$  и  $t$ - $ZrO_2$  использовались соотношения и численные значения параметров, приведенные в [4,5,8].

Поскольку конструкционные и композиционные керамические материалы на микроскопическом уровне являются структурированными, для определения их макромеханических свойств необходимо использовать минимальный объем для которого воспроизводятся статистические характеристики физико-механических свойств. Этот объем принято называть представительным элементарным объемом (Representative Volume Element - RVE) [6,7].

В рамках развиваемого подхода предполагается, что модельные RVE могут быть использованы для теоретического прогноза механических свойств материалов.

Представительный объем материала эквивалентен объему материальной частицы сплошной среды и имеет конечные геометрические размеры. Выбор минимальных размеров представительного объема должен обеспечивать, с одной стороны, получение одинаковых статистически усредненных значений физико-механических параметров для возможных внутренних структур, а с другой - независимость усредненных значений от граничных условий, задаваемых для RVE. Вопрос о существовании RVE для рассматриваемых структурированных твердых тел не является тривиальным.

Размеры RVE должны быть такими, чтобы быть меньше размеров тела, но настолько большим, что включать такое количество взаимодействующих структурных элементов более низкого уровня, которое обеспечивает возможность получения одинаковых статистически усредненных параметров физико-механических свойств.

Отметим, что геометрические размеры модельного RVE зависят не только от структуры материала, но и условий нагружения. Это обусловлено возможностью реализации коллективных явлений, приводящих к формированию блочной фрагментированной структуры, ветвлению микротрещин и др. на мезоскопическом структурном уровне.

В данной работе для создания модели RVE керамических материалов были использованы результаты исследования микроструктуры образцов керамических материалов на разных масштабных уровнях методами сканирующей электронной, оптической микроскопии, зондовой сканирующей микроскопии и рентгеновской томографии [5,8]. Полученные данные о поровой, зеренной и фазовой структурах керамических материалов на нано-, микро- и миллиметрового масштабных уровнях явились основой для разработки модельных структурированных RVE [4,5,8].

Для определения реакции тела на импульсное воздействие применялась 3D модель макроскопической пространственной области  $\Omega$ , имеющей объем  $V$  и поверхность  $\Gamma$ .

При построении конечно-разностной сетки пространственная область  $\Omega$ , занимаемая телом, разбивается на дискретные объемы  $V_i$  с поверхностями  $\tilde{\Gamma}_{int}^s$  (См. Рис. 1).

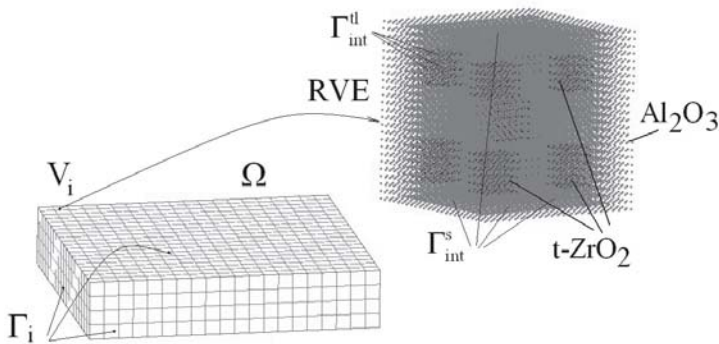


Рис. 1. Схема выделения структурных уровней

$$V = \bigcup_{i=1}^N V_i \cdot \quad (6)$$

Эти объемы должны иметь размеры, превышающие размеры представительного объема материала.

Граница  $\Gamma$  пространственной области  $\Omega$  разбивается на части  $\Gamma_i$ , на которых заданы граничные условия, определяющие внешние воздействия на тело.

Дискретным объемам  $V_i$  ставятся в соответствие модельные представительные объемы RVE с определенной организацией внутренней структуры. Для многофазных структурированных или композиционных материалов RVE представляет совокупность взаимосвязанных структурных со-



ставляющих, разделенных границами  $\tilde{A}_{int}^{sl}$  и обладающих различными физико-механическими свойствами. Поверхности раздела  $\tilde{A}_{int}^s, \tilde{A}_{int}^{sl}$  в общем случае не являются плоскими.

В рамках развиваемого подхода для моделирования механического отклика модельного RVE применяются бессеточные методы: метод гладких частиц (Smooth Particle Hydrodynamics), метод подвижных клеточных автоматов (Moveable Cellular Automata Method), либо метод дискретных элементов (Discrete Element Method) [9-12].

Выбор параметров пространственно-временной дискретизации обеспечивает сходимость численных решений в рассмотренных условиях нагружения. Шаг интегрирования по времени  $\Delta t_n$  определяется условием устойчивости Куранта [13]. Текущее значение шага используется для определения усредненных параметров состояния и усредненных параметров перемещения границ RVE на интервале времени  $[t_n, t_n + \Delta t]$ .

Механический отклик RVE на динамическое нагружение вычисляется на последовательности временных интервалов  $[t_n, t_n + \Delta t]$  с использованием метода сглаженных частиц (SPH) [9].

Пространственная область RVE заполняется дискретными частицами, физико-механические характеристики которых, соответствуют фазам. На внутренних границах пор формируется слой псевдо частиц [18].

Границы раздела между фазами в структурированном RVE являются условным поверхностям раздела между дискретными частицами разных фаз (см. Рис. 1).

При моделировании отклика RVE на динамическое нагружение используются, как правило, известные уравнения состояния для фаз, составляющих материал.

Необходимость в использовании определяющих уравнений для многокомпонентных и пористых сред отпадает. При использовании методов частиц для моделирования отклика RVE многофазных и пористых материалов на воздействия применяются уточненные алгоритмы расчета свободных и контактных поверхностей [17-18].

Таким образом, достоверность результатов многоуровневого моделирования зависит от адекватности описания механического отклика на уровне структурированных RVE.

При построении модельного RVE хрупких и квазихрупких материалов необходимо обеспечить соответствие статистических параметров распределения структурных параметров модели. Для этого целесообразно определить параметры распределения характеристик структурных элементов - средние статистические значения и параметры статистического распределения зерен, частиц фаз, пор, микротрещин и др.

Отметим, что в случае многомодальных распределений характерных геометрических размеров выделяемых структурных элементов, статистическая выборка может быть разбита на части, для которых могут быть введены одномодальные функции распределения. Этот метод был ранее предложен при построении модельных RVE пористых керамических материалов с бимодальным распределением размеров пор [5].

При определении размеров RVE и реализуемых в нем параметров структуры целесообразно использовать безразмерные параметры - объемные концентрации элементов структуры, нормированные геометрические параметры элементов структуры.

Объемная концентрация  $C_i$  структурных элементов, например, включений фазы  $i$  с идеализированной сферической формой определяется соотношением

$$C_i = \frac{n V_{inc}}{V} = \frac{n_i (4/3)\pi(d_i^3/8)}{a^3} = n_i (\pi/6)(\xi_i)^3, \quad (7)$$

где  $n_i$  - число структурных элементов  $i$ -го типа в RVE,  $\xi_i = d_i / a$ ,  $d_i$  - размер структурного элемента,  $a$  - характерный размер RVE кубической формы.

Размеры RVE для оценки модулей упругости двухфазных систем зависят от размеров частиц фаз,

разности значений модулей сдвига и объемного сжатия фаз и могут быть получены с использованием аналитических соотношений [15-16].

Характерный размер RVE кубической формы с ребром  $a = \max\{d_i / \xi_i\}$  должен быть достаточным для получения статистически усредненных параметров структуры и физико-механических параметров материала (модулей упругости, массовой плотности, прочностных параметров и др.).

При минимальном относительном размере частиц упрочняющих фаз  $\xi \leq 0,01$  их распределение в модельном RVE может быть регулярным либо стохастическим.

Для поликристаллической керамики модельные RVE должны правильно отражать относительный объем пор и трещин  $\xi$ , объемные концентрации зерен в  $i$  фазе  $C_{gi}$  и зернограницных фаз  $C_{gbi}$ , а также относительный объем областей тройных стыков зерен  $C_{tji}$

$$C_{gi} = \frac{(d_i - 2\delta)^2}{d_i^2}, C_{gb} = \frac{4(d_i - 2\delta)\delta}{d_i^2}, C_{tji} = \frac{4\delta^2}{d_i^2}, \xi = \frac{V_p}{V_{RVE}}, \quad (8)$$

где  $d_i$  - средний размер зерна  $i$  фазы,

$\delta$  - толщина межзеренной области,

$V_p$  - интегральный объем пор в представительном объеме,

$V_{RVE}$  - представительный объем материала.

Эффективная массовая плотность многофазной керамики  $\rho$  определяется в предположении, что плотность газа, заполняющего пору или полость микротрещины, мала по сравнению с плотностью твердой фазы  $\rho_k$ .

$$\rho = C^k \rho_k, \xi + \sum_{k=1}^n C^k = 1, \quad (9)$$

где  $C^k$  - объемная концентрация конденсированных фаз с массовой плотностью  $\rho_k$ ,

$\xi$  - относительный объем полостей микропор и микротрещин.

Параметр  $\xi$ , принимаемый за меру поврежденности материала, определяется

$$\xi = \xi_c + \xi_p = (V_c / V_i) + (V_p / V_i), \quad (10)$$

где  $V_i$  - объем RVE;  $V_c, V_p$  - части объема элементов, занимаемые трещинами и порами, соответственно.

Форма элементов структуры определяет форму внутренних контактных поверхностей  $\tilde{A}_{int}^s, \tilde{A}_{int}^{tl}$ , по которым происходит механическое взаимодействие между ними.

При динамическом нагружении деформация каждого элемента  $V_i$  в объеме тела происходит под действием напряжений, изменяющихся во времени. История нагружения  $V_i$  зависит от геометрической конфигурации тела и изменения во времени внешнего воздействия на поверхность тела. Однако для большинства динамических задач нет необходимости моделирования всех элементарных объемов  $V_i$ . В рамках обсуждаемого подхода возможно существенное сокращение числа модельных  $V_i$ , для которых проводится расчет механического отклика в процессе нагружения. Это обусловлено возможностью использования результатов моделирования отклика одинаковых модельных RVE при подобных процессах нагружения.

Осреднение значений массовой плотности, компонент массовой скорости, компонент деформаций, давления и компонент девиатора тензора напряжения в RVE позволяет определить значение компонент тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ .

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{V_{RVE}} \sum_{k=1}^m \rho^k V^k. \quad (11)$$

$$\langle u_i \rangle = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m u_i^k, \quad (12)$$

где  $m$  - количество дискретных частиц, образующих модель RVE,  $\langle u_i \rangle$  - усредненные компоненты массовой скорости RVE,  $u_i^k$  - компоненты массовой скорости  $k$  частицы,  $V_{RVE}$  - текущий объем,  $V^k$  - объем  $k$  дискретной частицы.

Компоненты эффективных тензоров скорости деформации и скорости изгиба-кручения определяются формулами

$$\langle \dot{\varepsilon}_{ij} \rangle = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta \langle u_i \rangle}{\Delta x_j} + \frac{\Delta \langle u_j \rangle}{\Delta x_i} \right], \quad \langle \dot{\omega}_{ij} \rangle = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta \langle u_i \rangle}{\Delta x_j} - \frac{\Delta \langle u_j \rangle}{\Delta x_i} \right], \quad (13)$$

где  $\Delta x_i$  - усредненные значения текущих размеров модельного RVE в декартовой системе координат.

Компоненты тензора эффективных напряжений  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  определяются

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{\Delta E_{RVE}}{\Delta t \langle \dot{\varepsilon}_{ij} \rangle}, \quad (14)$$

где  $E_{RVE} = \sum_{k=1}^m E^k$  - суммарная удельная внутренняя энергия в RVE композита.

Вычисленные с помощью (14) величины  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  позволяют определить значения усредненного давления  $\langle p \rangle$  и компонент девиатора  $\langle S_{ij} \rangle$ . Эффективные значения модулей объемного сжатия и модуля сдвига могут быть определены с помощью метода, приведенного в [4]. Тогда, по вычисленным значениям эффективных деформаций и напряжений могут быть определены параметр повреждения, эффективные компоненты тензора неупругих деформаций и их инварианты. Вычисленные значения используются в качестве значений напряжений в узлах сетки конечных разностей на соответствующих интервалах времени  $[t_n, t_n + \Delta t]$ . Использование база расчетных значений  $\langle p(\rho, E) \rangle$ ,  $\langle S_{ij} \rangle$ , полученных для характерных условий нагружения на нескольких RVE, позволяет не повторять расчеты для разных элементов сетки.

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 2 показано расчетное поле скоростей дискретных частиц в модельном объеме RVE композиционного материала  $Al_2O_3 - 15\% ZrO_2$  при импульсном воздействии с амплитудой 15 ГПа. Модельный RVE имел размеры  $5,5 \times 5,5 \times 5,5$  мкм<sup>3</sup>. В RVE содержалось 9 частиц  $ZrO_2$  кубической формы с размером ребра 1,4 мкм. Для описания процесса деформации и разрушения RVE был использован метод гладких частиц SPH. Размеры дискретных частиц были выбраны равными 0,2 мкм. Импульс давления задавался на левой грани RVE. На противоположной границе были заданы периодические условия, обеспечивающие прохождение волны напряжения без отражения. На боковых гранях RVE были заданы условия обеспечивающие условия деформации RVE в плоской ударной волне.

Формирование напряженно-деформированного состояния при динамическом нагружении структурированного RVE происходит в результате распространения и взаимодействия волн напряжений. При этом поля массовой скорости, напряжений и деформаций в процессе нагружения являются неоднородными.

На рис. 3 показаны расчетные давления в частицах, образующих модельный RVE композита  $Al_2O_3 - 15\% ZrO_2$  за фронтом волны напряжения с амплитудой 15 ГПа.

В конце интервала времени нагружения формируется квазистационарное распределение давлений в дискретных частицах. Отметим, что выбранный шаг по времени  $\Delta t$  на макромеханическом уровне определяет последовательные интервалы времени нагружения RVE  $[t_n, t_n + \Delta t]$ . Расчет механического отклика RVE на этих интервалах осуществляется с более мелким временным шагом, что позволяет учитывать влияние быстропротекающих процессов разрушения и релаксации напряжений. Релаксация напряжений взаимодействия между дискретными частицами происходит

в результате разрыва связей при действии растягивающего напряжения. В данной работе применялся критерий разрыва связей

$$\sigma_1 \leq \sigma_t, \tag{15}$$

где  $\sigma_t$  – критическое значение главного растягивающего напряжения (соответствует значению предела прочности на растяжение кристаллической фазы).

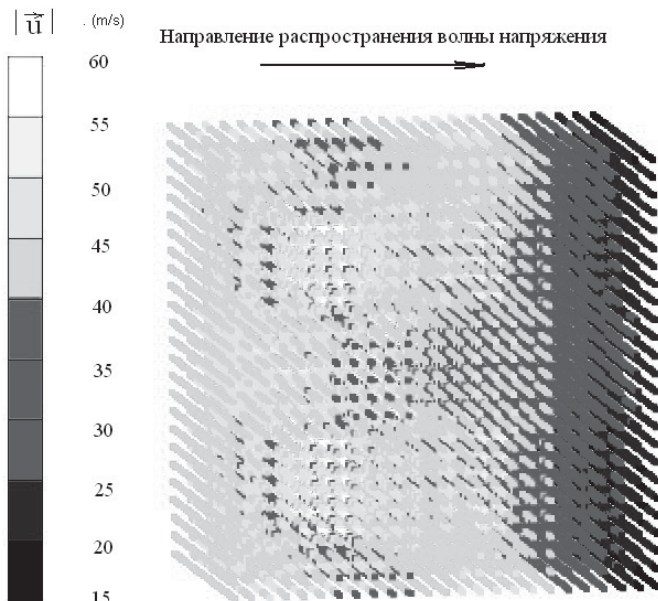


Рис. 2. Скорости дискретных частиц в RVE за фронтом волны напряжения

Значения  $\sigma_t$  для кристаллитов и поликристаллических объемов, как правило, различны. В рассмотренных керамических композитах  $\text{Al}_2\text{O}_3 - \text{ZrO}_2$  важную роль играют механизмы транскристаллитного (внутризеренного) разрушения, когда трещина пересекает зерна фаз. В этом случае величина  $\sigma_t$  составляет 0,2...0,4 от значения идеальной прочности кристаллической фазы на сдвиг  $\sigma_{\text{теор}}$ .

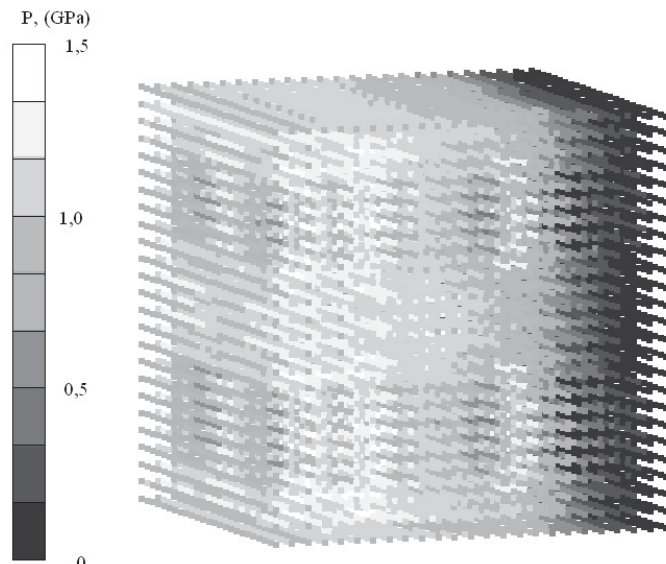


Рис. 3. Давление в RVE при импульсном нагружении

Идеальная прочность на сдвиг оксида алюминия составляет  $\sim 18,7$  ГПа, если принять справедливой оценку идеальной сдвиговой прочности для  $\text{Al}_2\text{O}_3$  в соответствии с формулой

$$\sigma_{\text{теор}} = 0,115 G, \quad (16)$$

где  $G$  – модуль сдвига,  $G = 163,6$  ГПа, при  $T = 293\text{K}$  и  $p = 0$ .

Зарождение и рост протяженности трещин сопровождается эффектами дилатансии и ростом неоднородности полей деформаций.

На рис. 4 показано распределение локальных значений массовой плотности в RVE в области взаимодействия волн разрезания.

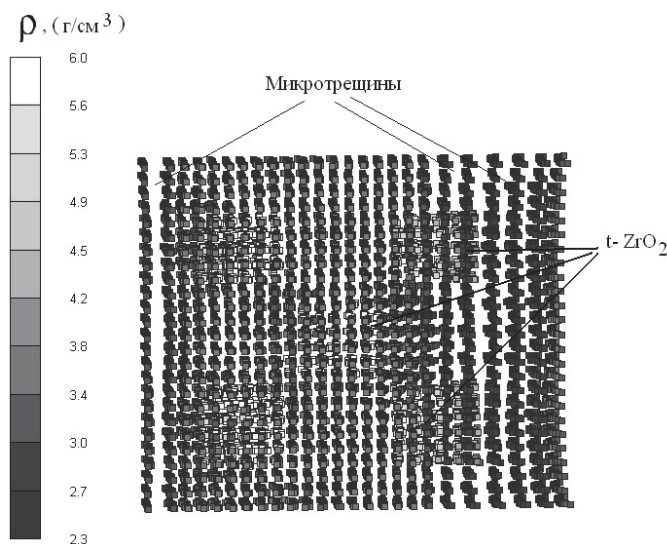


Рис. 4. Повреждения в RVE при импульсном нагружении

Расположение дискретных частиц свидетельствует, что под действием растягивающих напряжений в RVE зародились и начали распространяться по объему транскристаллитные микротрещины. Следует отметить, результаты моделирования свидетельствуют, что наличие микронных частиц  $\text{ZrO}_2$  препятствует зарождению микротрещин. Результаты моделирования согласуются с результатами исследований механического поведения  $\text{Al}_2\text{O}_3$  керамики и  $\text{Al}_2\text{O}_3 - \text{ZrO}_2$  композитов [19].

Разрушение хрупких керамических материалов с гетерогенной структурой определяется развитием повреждений их структуры на разных масштабных уровнях.

При интенсивных динамических воздействиях разрушение является результатом протекания процессов зарождения повреждений на микроскопическом уровне и формирования локализованных зон повреждений на мезоскопическом уровне. Поскольку на стадии развития повреждений эти материалы сохраняют сопротивление сдвигу, характер механического поведения материалов следует рассматривать как квазихрупкий.

При амплитудах импульсных воздействий, меньших предела упругости Гюгонио, в хрупкой гетерогенной керамике во фронте волны нагружения зарождаются микротрещины в областях локализованных сдвигов. Их интенсивный рост происходит под действием растягивающих напряжений в области взаимодействия волн разгрузки.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для моделирования деформации и разрушения тел из хрупких керамических материалов с гетерогенной структурой при интенсивных динамических воздействиях предложена двухуровневая

вычислительная модель.

На макромеханическом уровне механическая реакция определяется с помощью конечно-разностного решения задачи, сформулированной в рамках континуальной механики сред с повреждения. Вместо феноменологического определяющего уравнения для многофазных материалов с гетерогенной структурой связь кинематических и динамических параметров состояния предложено определять с использованием базы данных, полученных при численном моделировании отклика модельного представительного объема на воздействия.

Предложенный подход позволяет получать прогноз механической реакции квазихрупких тел из керамики с гетерогенной структурой на интенсивные динамические воздействия с амплитудами до нескольких десятков ГПа.

Модель была использована для изучения импульсного воздействия с амплитудами до 15 ГПа на керамические композиты  $Al_2O_3 - t-ZrO_2$  с микронными размерами частиц  $t-ZrO_2$ .

Показано, что наличие микронных частиц  $ZrO_2$  препятствует зарождению микротрещин в области действия растягивающих напряжений, что обеспечивает повышение откольной прочности  $Al_2O_3 - t-ZrO_2$  композиционных материалов по сравнению с соответствующими значениями для  $Al_2O_3$  керамики с эквивалентной пористостью.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят за финансовую поддержку исследований фонд РФФИ грант № 12-01-00805-а, грант № 14-01-31444мол\_а, Министерство образования и науки Российской Федерации, финансирующее выполнение НИР в рамках государственного задания ТГУ, а также стипендиальный фонд Президента Российской Федерации.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Gates T.S. et al. Computational materials: Multi-scale modeling and simulation of nanostructured materials. *Composites Science and Technology*. 2005. -Vol. 65. -P.2416-24346.
- [2] Li Y.Y. The multi-scale computational method for the mechanics parameters of the materials with random distribution of multi-scale grains. *Composites Science and Technology*. 2005. Vol. 65. P. 1447-1458
- [3] Kraft R.H. et al. Computational micromechanics of dynamic compressive loading of a brittle polycrystalline material using a distribution of grain boundary properties. *J. of Mech. and Phys. of Solids*. 2008. Vol. 56. P.2618-2641.
- [4] Скрипняк Е.Г., Скрипняк В.А., Козулин А.А., Скрипняк В.В. Моделирование деформации и разрушения композиционных керамических материалов с трансформационно-упрочненной матрицей при динамическом нагружении. *Известия ВУЗов. Физика*. 2010. Т. 53. № 12/2. С. 243-248.
- [5] Skripnyak E. G., Skripnyak V.A., Skripnyak V. V. Fracture of nanoceramics with porous structure at shock wave loadings. *Shock Compression of Condensed Matter. AIP Conf. Proc.* 2012. V. 1426. P. 965 -970.; doi: 10.1063/1.3686485.
- [6] Gitman I.M., Askes H., Sluys L.J. Representative volume: Existence and size determination. *Engineering Fracture Mechanics*. 2007. Vol. 74. P.2518-2534.
- [7] Xu W., Sun X., Li D., et. al. Mechanism-based representative volume elements (RVEs) for predicting property degradations in multiphase materials. *Computational Materials Science*. 2013.Vol. 68. P.152-159.
- [8] Скрипняк В.А., Скрипняк Е.Г., Чахлов С.В. Влияние технологических дефектов структуры на механические свойства субмикроструктурной керамики при высокоскоростной деформации. *Физическая мезомеханика*, 2004. Т.7 . Ч.1. С. 301-304.
- [9] Hu X.Y., Adams N.A. A multi-phase SPH method for macroscopic and mesoscopic flows. *Journal of Computational Physics*. 2006. Vol. 213. P. 844-861.
- [10] Oñate E., Owen R. *Particle-based methods: fundamentals and applications*. Springer, 2011.
- [11] Cundall P.A., Strack O. D. L. A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*. 1979. Vol. 29. P. 47-65.
- [12] Псахье С.Г., Дмитриев А.И., Шилько Е.В. и др. Метод подвижных клеточных автоматов как новое направление дискретной вычислительной механики. I. Теоретическое описание. *Физическая мезомеханика*. 2000. Т. 3. № 2. С. 5-13.
- [13] Роуч П. *Вычислительная гидродинамика*. М.: Мир. 1980.
- [14] Tran T. D.P., Pang S. D., Quek S. T. Does representative volume element exist for quasi-brittle composites? *Materials Sci. and Engineering A*. 2011. Vol. 528. P.7757- 7767.

- [15] Salmi M, Auslender F., Bornert M., Fogli M. Various estimates of Representative Volume Element sizes based on a statistical analysis of the apparent behavior of random linear composites // C. R. Mecanique. 2012. Vol. 340. P. 230-246.
- [16] Drugan W.J., Willis J.R. A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volume element size for elastic composites. J. of the Mech. and Phys. of Solids. 1996. Vol. 44. P. 497-524.
- [17] Campbell J., Vignjevic R., Libersky L. A contact algorithm for smoothed particle hydrodynamics. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2000. Vol. 184. P.49-65.
- [18] Roubtsova V., Kahawita R. The SPH technique applied to free surface flows. Computers & Fluids .2006. P. 1359-1371.
- [19] Tuan W.H., Chen R.Z., Wang T.C., et. al. Mechanical properties of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub> composites. Journal of the European Ceramic Society. 2002. Vol. 22. P. 2827-2833.

## DIMINISHED-ONE MODULO ( $2^n + 1$ ) MULTIPLIER DESIGN

---

*A technique, based on the residue number system (RNS) with operands in the diminished-1 number system, has been used in several applications which include digital signal processing (DSP), implementation international data encryption algorithm (IDEA), Fermat number transform (FNT), and so on. For implementation of these techniques, several designs for modulo  $2^n+1$  diminished-1 arithmetic blocks have been proposed. Modulo  $(2^n + 1)$  diminished-1 multiplication plays an important role in these arithmetic blocks. Existing algorithms for modulo  $(2^n + 1)$  diminished-1 multiplication use either recursive modulo  $(2^n + 1)$  addition, or regular binary multiplication integrated with the modulo reduction operation. This paper proposes an enhanced approach for the design modulo  $2^n + 1$  multipliers for diminished-1 operands with respect to those which have been already published. It is improved in a way that the proposed memoryless based multiplication can be decomposed into a number of small units. The architecture for the new multipliers consists of new partial product generator, inverted end-around-carry, carry-save-adder tree and one  $(2^n+1)$  adder.*

---

### INTRODUCTION

The Residue Number System (RNS) is a non-weighted integer system that perform decomposition of arithmetic operations into several independent sub-operations and therefore implies carry-free and high speed operations [5]. RNS is useful in several applications including Digital Signal Processing [14, 9], Image Processing [4], Fast Fourier Transform computation [10], cryptographic algorithms such as International Data Encryption Algorithm (IDEA) [7]. Moreover RNS is also inherently fault tolerant and makes diagnosis and correction of errors easier [8]. Apart from these, modulo  $(2^n + 1)$  multiplier is also one of the critical component applications in the area of Cryptographic algorithms like International Data Encryption Algorithm (IDEA) which is frequently used for secured data transmission and in Fermat Number Transform (FNT).

In residue arithmetic, the moduli set  $(2^n - 1, 2^n, 2^n + 1)$  has attracted attention because it is suitable for conversion of binary representation into RNS and vice versa. Using this set, for modulo  $(2^n - 1)$  and  $2^n$  operations, input operands are  $n$  - bit wide, but for the modulo  $(2^n + 1)$  operations, input are  $(n+1)$  - bits wide, which makes this modulo operation difficult and calls for special attention.

The diminished-1 representation of RNS binary numbers was introduced in [6] to speed up the modulo  $(2^n + 1)$  arithmetic operations. Since only  $n$  bits are required for the representation of any digit in RNS, the diminished-1 representation can lead to implementations with similar delay and area complexity as for modulo  $(2^n - 1)$  and  $2^n$  representations. A lot of papers on the design of modulo  $(2^n - 1)$  adders and multipliers for diminished-1 operands have already been published [13, 12, 11]. However, special treatment is required for operands equal to zero. Since this can lead to implementations with increased delay and area complexity, the efficient integration of zero handling into modulo  $(2^n + 1)$  arithmetic units is an open problem.

This paper proposes an enhanced approach for the design modulo  $2^n + 1$  multipliers for diminished-1 operands with respect to those which have been already published. It is improved in a way that the proposed memoryless based multiplication can be decomposed into a number of small units. The architecture for the new multipliers consists of new partial product generator, inverted end-around-carry, carry-save-adder tree and one  $(2^n + 1)$  adder.

Organization of the paper is as follows. After recalling the diminished-1 arithmetic in Section 2, the architecture of diminished-1 modulo  $(2^n + 1)$  multiplier is presented in section 3. Section 4 is an example and last section is conclusion.

<sup>1</sup> Faculty of Mathematics and Science, Kosovska Mitrovica, Serbia

<sup>2</sup> Faculty of electronic engineering, Nis, Serbia



## DIMINISHED-ONE ARITHMETIC

To represent all integers in RNS, using modulo  $(2^n+1)$ ,  $(n+1)$  bits are required. The additional bit is required in order to represent the number  $2^n=(-1)_{2^{n+1}}$ . To overcome the problem of performing binary arithmetic with this additional bit, a modified binary number system is used in order to avoid additions and multiplications involving the additional bit. This allows the additional bit to be only 1 when the number to be represented is 0, which can be achieved by subtracting 1 from the normal binary number. The advantage of this representation is that zero is uniquely identified by MSB=1, for which all arithmetic operations are inhibited.

The normal representation and this diminished-1 representation are indicated in the Table 1 for  $n = 4$ . When performing arithmetic for mod  $(2^n + 1)$  using diminished-1 system, all

**Table 1.** Correspondence between normal, binary and diminished-1 representations

Normal	Binary	Diminished-1
0	00000	1
1	00001	2
2	00010	3
3	00011	4
4	00100	5
5	00101	6
6	00110	7
7	00111	8
8	01000	9 (-8)
9 (-8)	01000	10 (-7)
10 (-7)	01010	11 (-6)
11 (-6)	01011	12 (-5)
12 (-5)	01100	13 (-4)
13 (-4)	01101	14 (-3)
14 (-3)	01110	15 (-2)
15 (-2)	01111	16 (-1)
16 (-1)	10000	0

input operands and the corresponding results are expressed in diminished-1 form. Let  $x'$  be diminished-1 representation of normal binary number  $x \in [0, 2^n]$ , namely

$$x' = \langle x - 1 \rangle_{2^n+1} \quad (1)$$

In (1), when  $x \neq 0$ ,  $x' \in [0, 2^n - 1]$  is an  $n$ -bit number, therefore  $(n + 1)$ -bit circuits can be avoided in this case. However, when  $x = 0$ ,  $x' = 2^n$  is an  $(n+1)$ -bit number. This leads to the special treatment for  $x' = 0$ . According to this representation, number  $x'$  is represented as  $x'_n X'$ , where  $x'_n$  is the zero indication bit and  $X' = x'_{n-1} x'_{n-2} \dots x'_0$  is the magnitude representation [3]. Ordinary addition in this number system can be obtained as follows [13]:

$$\begin{aligned} \langle x + y \rangle_{2^n+1} &= S \\ \langle \langle x' + 1 \rangle + \langle y' + 1 \rangle \rangle_{2^n+1} &= S' + 1 \\ \langle x' + y' + 1 \rangle_{2^n+1} &= S' \\ \langle x' + y' + \bar{C}_{out} \rangle_{2^n} &= S' \end{aligned} \quad (2)$$

where  $C_{in} = C_{out}$ . Diminished-one addition can be implemented by end-around-carry adder. Ordinary multiplication in this number system is performed as follows [2, 1]:

$$\begin{aligned}
\langle x \times y \rangle_{2^{n+1}} &= Q \\
(\langle x' + 1 \rangle \times \langle y' + 1 \rangle)_{2^{n+1}} &= Q' + 1 \\
\langle x' \times y' + x' + y' \rangle_{2^{n+1}} &= Q'
\end{aligned} \tag{3}$$

Number in diminished-one arithmetic is represented by (n+1) bits where the (n+1)-th bit is used to indicate zero.

### DIMINISHED-1 MODULO (2<sup>n</sup> + 1) MULTIPLICATION

The modulo (2<sup>n</sup> + 1) multiplication algorithm (3) can be easily adapted for the diminished-1 number representation of input operands and output product. Thereby, the two additional terms x' and y' have to be added in the modulo carry-save-adder, resulting in small increasing of area and delay. The special case of x'y' = 0 has to be treated separately and the constant correction term has to be adapted.

The architecture of the proposed modulo 2<sup>n</sup>+1 diminished-1 multiplier consists of three main blocks as it is shown in Figure 1. First block is a partial product generator, second is Wallace tree for partial product addition and finally there is binary adder for product generation.

In Wallace tree, the number of operands is reduced by a factor of 2/3 at each level. Let λ(l) be the maximal number of operands that can be added by an l-th level CSA tree, λ(l) = 3. Each CSA has three inputs and two outputs, hence the number of output times (3/2) will be the number of inputs, that is, the number of outputs in the upper level. If the number of outputs is not a multiple of 2, then {λ(l-1)}<sub>2</sub> indicates the number of extra outputs in the upper level. Hence λ(l) can be defined recursively as in Equation (4).

$$\lambda(l) = \left\lfloor \frac{\lambda(l-1)}{2} \right\rfloor \times 3 + \langle \lambda(l-1) \rangle_2 \tag{4}$$

The easier way is using the Equation (5)

$$\text{Number\_of\_levels} = \frac{\log\left(\frac{k}{2}\right)}{\log\left(\frac{3}{2}\right)}, \text{ for } k\left(\frac{2}{3}\right)^l \leq 2 \tag{5}$$

**Table 2.** Partial product generation modulo 2<sup>4</sup> + 1

2 <sup>6</sup>	2 <sup>5</sup>	2 <sup>4</sup>	2 <sup>3</sup>	2 <sup>2</sup>	2 <sup>1</sup>	2 <sup>0</sup>	
			$x_0' y_3'$	$x_0' y_2'$	$x_0' y_1'$	$x_0' y_0'$	= pp <sub>0</sub>
		$x_1' y_3'$	$x_1' y_2'$	$x_1' y_1'$	$x_1' y_0'$	$x_1' y_3'$	= pp <sub>1</sub>
	$x_2' y_3'$	$x_2' y_2'$	$x_2' y_1'$	$x_2' y_0'$	$x_2' y_3'$	$x_2' y_2'$	= pp <sub>2</sub>
$x_3' y_3'$	$x_3' y_2'$	$x_3' y_1'$	$x_3' y_0'$	$x_3' y_3'$	$x_3' y_2'$	$x_3' y_1'$	= pp <sub>3</sub>
			$x_3'$	$x_2'$	$x_1'$	$x_0'$	= x'
			$y_3'$	$y_2'$	$y_1'$	$y_0'$	= y'
			0	0	0	0	= cor

If the input residues are (n+1)-bits wide, the partial products for modulo 2<sup>n</sup>+1 multiple are arranged as n-bits wide vectors, because x'<sub>n</sub> (y'<sub>n</sub>) is a zero indicator, which is handled separately. The partial product generation for inputs of 5 bits width is shown in Table 2. Obviously, 4-bits x'<sub>3</sub>x'<sub>2</sub>x'<sub>1</sub>x'<sub>0</sub> (multiplier)

and 4-bits  $y'_3y'_2y'_1y'_0$  (multiplicand) are required for the representation of nonzero diminished-1 binary numbers.

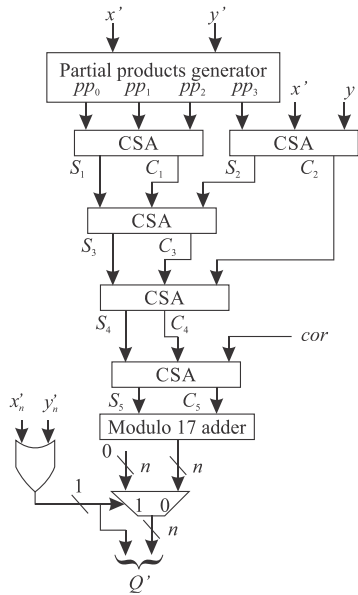


Fig. 1. Architecture of diminished-1 modulo  $2n + 1$  multiplier for  $n = 4$ .

In this multiplication, bits with weight greater than  $2^3$ , which are placed to the left of the straight line, are complemented and repositioned to the right of the line.

Assuming that the coefficient word length is 4-bits and input sample word length is 4-bits, in Fig. 1 is shown the hierarchical decomposition of Wallace tree logic. The partial sum are added by using five carry-save-adders (CSA) and modulo 17 adder realized as carry-propagate-adder with end-around-carry. Partial product is generated in parallel.

The principle of the proposed memoryless-based implementation of partial product generator is shown in Fig 2. It consists of  $n$  2-to-1 multiplexers, where  $n$  is the multiplier word length. Each of the MUX consists of  $n$  MUX cells (bit-level) working in parallel, where  $n$  is the word length of the multiplier ( $x'$ ). The partial product is generated by connecting zero and multiplier bit to the MUX inputs and multiplicand bit to the select input. This is well known OR logic gate implemented using 2-to-1 MUX. Finally, circular shifting  $s-1$  bits to the left of the MUX output, for  $1 \leq s \leq n$ , is performed. After circular shifting,  $s-1$  LSB bits are used as complement. Rotation  $n$  requires no logic: just connection of the wires appropriately.

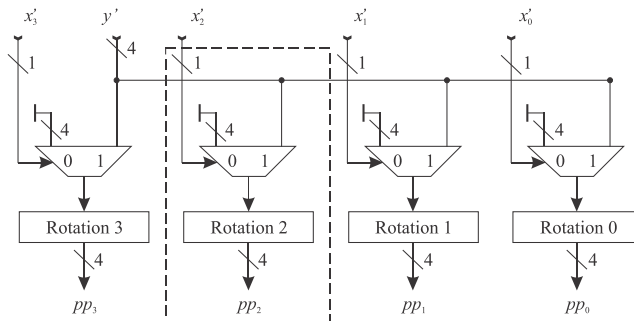


Fig. 2. Partial products generator for  $n = 4$ .

An implementation of the diminished-1 modulo 17 partial product generator for  $pp_2$  is shown in Figure 3. The small circles above the register represent a complement of the input bit. As it is shown, the rotat-

ing function is incorporated in the register by writing partial product bits in proper order.

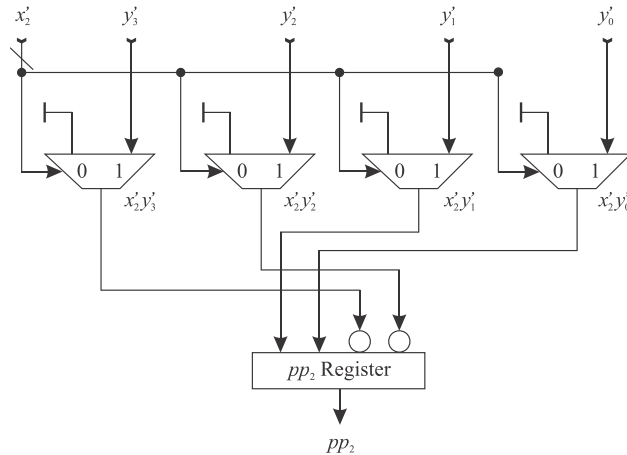


Fig. 3. A wiring diagram of partial product  $pp_2$  generator.

The addition of the partial product can be performed by either a  $(n + 1)$ - stage Carry-Save-Adder (CSA) array or by a Wallace tree, until a Carry and Sum vector pair is reached. It is well known that using a Wallace tree speed up the addition of the partial products. An implementation of the modulo  $(2^n + 1)$  multiplier, based on a Wallace tree, for addition of the diminished-1 operands. The small circles on the carry output of the adders represent a complemented carry output.

## CONCLUSION

In this paper, an improved method for the design modulo  $2^n + 1$  multipliers for diminished-1 operands is presented. It is upgraded in a way that the proposed memoryless based multiplication has been decomposed into a number of small units. To achieve high speed, new partial product generator combining with the Wallace tree is adopted for the multipliers. Future research includes the extension of this study to Xilinx chips, the power-figure measurement and a full characterization of each design option at layout level.

## ACKNOWLEDGEMENTS

This work was supported in part by the Serbian Ministry of Education and Science in the frame of the project 32009TR.

## REFERENCES

- [1] Chen, J. W., Yao, R. H., and Wu, W. J. Efficient modulo  $2^n + 1$  multipliers. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 19, 12 (Dec. 2011), 2149-2157.
- [2] Efstathiou, C., Vergos, H. T., Dimitrakopoulos, G., and Nikolos, D. Efficient diminished-1 modulo  $2^n + 1$  multipliers. *IEEE Transactions on Computers* 54, 4 (Apr. 2005), 491-496.
- [3] Efstathiou, C., Vergos, H. T., and Nikolos, D. Handling zero in diminished-one modulo  $2^n + 1$  adders. *Int. J. Electronics* 90, 2 (Feb. 2003), 133-144.
- [4] Fernandez, P. G., Ramirez, J., Garcia, A., Parrilla, L., and Lloris, A. A new RNS architecture for the computation of the scaled 2D-DCT on field-programmable logic. In *Proc. on Conference Record of the Thirty-Fourth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers* (Pacific Grove, CA, USA, Oct. 29-Nov.01, 2000), pp. 379-383.
- [5] Garner, H. L. The residue number system. *IRE Trans. Electronic Computer* EC-8, Issue 2 (June 1959), 140-147.
- [6] Leibowitz, L. M. A simplified binary arithmetic for the Fermat number transform. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* ASSP-24, 5 (Oct. 1976), 356-359.
- [7] Modugu, R., Kim, Y.-B., and Choi, M. Design and performance measurement of efficient IDEA (international data encryption algorithm) crypto-hardware using novel modular arithmetic components. In *Proc. on International Instrumentation and Measurement Technology Conference (I2MTC)* (Austin, TX, USA, May 03-06, 2010), pp. 1222-1227.

- [8] Pontarelli, S., Cardarilli, G. C., Re, M., and Salsano, A. Totally fault tolerant RNS based FIR filters. In Proc. on 14th IEEE International On-Line Testing Symposium, 2008. IOLTS '08. (Rhodes, Greece, July 07-09, 2008), pp. 192-194.
- [9] Stamenković, N., and Stojanović, V. Constant-coefficient FIR filters based on residue number system arithmetic. Serbian Journal of Electrical Engineering 9, 5 (Oct. 2012), 100-120.
- [10] Taylor, F. An RNS discrete fourier transform implementation. IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing 38, 8 (Aug. 1990), 1386-1394.
- [11] Vergos, H. T., Efstathiou, C., and Nikolos, D. High speed parallel-prefix modulo  $2^n + 1$  adders for diminished-one operands. In Proceedings of 15th IEEE Symposium on Computer Arithmetic (Vail, CO, USA, June 11-13, 2001), pp. 211-217.
- [12] Wang, Z., Jullien, G. A., and Miller, W. C. An efficient tree architecture for modulo  $2^n + 1$  multiplication. VLSI Signal Processing 14, 3 (Mar. 1996), 241-243.
- [13] Zimmermann, R. Efficient VLSI implementation of modulo  $(2n \pm 1)$  addition and multiplication. In Proceedings of the 14th IEEE Symposium on Computer Arithmetic (Adelaide, Australia, Apr. 1999), p. 158167.
- [14] Zivaljević, D., Stamenković, N., and Stojanović, V. Digital filter implementation based on the RNS with diminished-1 encoded channel. In Proc. on 35th International Conference on Telecommunications and Signal Processing (TSP P), 2012 (Prague, Czech Republic, July 03-04, 2012), pp. 662-666.

## LEVEL CROSSING RATE OF THE RATIO OF PRODUCT OF TWO $\alpha$ - $\mu$ RANDOM VARIABLES AND $\alpha$ - $\mu$ RANDOM VARIABLE

---

*In this paper the ratio of product of two  $\alpha$ - $\mu$  random variables and  $\alpha$ - $\mu$  random variable is considered. The expression for average level crossing rate of the considered ratio is derived. The expression for level crossing rate can be used for the evaluation of the average fade duration of wireless communication system operating over composite multipath  $\alpha$ - $\mu$  fading. Obtained result is presented graphically to show the influence of parameters of  $\alpha$ - $\mu$  distribution on average level crossing rate of the ratio of product of two  $\alpha$ - $\mu$  random variables and  $\alpha$ - $\mu$  random variable.*

---

### INTRODUCTION

In this paper we are considering the ratio of product of two  $\alpha$ - $\mu$  random variables and  $\alpha$ - $\mu$  random variable. The ratio of random variables is important performance measure which can be used in performance analysis of wireless communication systems operating over multipath fading environment in the presence of co-channel interference affected by multipath fading. In wireless communication system desired signal experiences short term fading. The short term fading is result of multipath propagation caused by reflection, refraction, diffraction and scattering of radio wave. There are many distributions which can be used to describe small scale signal envelope variation in multipath fading environments. Rayleigh, Rician, Nakagami-m, Nakagami-q distributions can be used to describe signal envelope fluctuation in linear multipath fading environment. In non-linear multipath fading environment signal envelope fluctuation can be well described using Weibull or  $\alpha$ - $\mu$  distribution. In cellular environments envelope variation of interference from distant cell can be well described using Rayleigh distribution and desired signal envelope variation can be described with Rician distribution since line-of-sight component can exist in cell. Signals from two or more channels on different location at the same frequency interfere. In interference limited environment, the interference power is sufficiently high compared to thermal noise power so the noise effect on system performance can be ignored.

In this paper, the desired signal and the interference signal suffer to  $\alpha$ - $\mu$  multipath fading. The  $\alpha$ - $\mu$  distribution can be used to describe small scale signal envelope variation operating over non-linear multipath fading environment. The  $\alpha$ - $\mu$  distribution consists of two parameters. Parameter  $\alpha$  is related to the nonlinearity of environment while the parameter  $\mu$  is associated with the number of clusters. The  $\alpha$ - $\mu$  distribution is general distribution, which means that other well-known distributions can be derived from  $\alpha$ - $\mu$  distribution as a special cases. By setting  $\alpha=2$ , Nakagami-m can be obtained from  $\alpha$ - $\mu$  distribution. For  $\alpha=1$ ,  $\alpha$ - $\mu$  distribution reduces to Weibull distribution. By setting  $\mu=1$  and  $\alpha=2$ , Rayleigh distribution is derived and for  $\mu=0.5$  and  $\alpha=2$ ,  $\alpha$ - $\mu$  approximates one sided Gaussian distribution.

In paper [1] the ratio of product of two random variables and random variable is considered. The probability density function (PDF) and cumulative distribution function (CDF) of this ratio are obtained. The product of two random variables in the nominator of the ratio can represent desired signal envelope which suffers from two multipath fadings. The random variable in denominator of the ratio can represent co-channel interference envelope subjected to multipath fading. In paper [2], the ratio of random variable and the product of two random variables is analyzed. The PDF and CDF of this ratio are determined. Obtained results in this paper can be used for evaluation of average fade duration of wireless communication system operating over multipath environment in the presence of co-channel interference affected by two multipath fadings. In paper [3], the ratio of two products of two random variable

---

<sup>1</sup> Faculty of Mathematics and Science, Kosovska Mitrovica, Serbia

<sup>2</sup> Faculty of Electronic Engineering, Nis, Serbia

is examined. Similarly, the PDF and CDF of this ratio are evaluated. Expressions obtained in this paper can be used for determination of the outage probability, the bit error probability and system capacity of wireless communication system operating over composite multipath fading in the presence of co-channel interference affected by two multipath fading, by using approach given in [4], [5].

In this paper the ratio of product of two  $\alpha$ - $\mu$  random variables and  $\alpha$ - $\mu$  random variable was taken into account. The average level crossing rate of the ratio is determined. The product of two random variables in the nominator of the ratio can represent desired signal envelope which suffers from two  $\alpha$ - $\mu$  multipath fading. The random variable in denominator of the ratio can represent co-channel interference envelope subjected to  $\alpha$ - $\mu$  multipath fading. To the best of author's knowledge the results obtained in this paper are not reported in open technical literature. The results for average level crossing rate obtained in this paper, can be used for evaluation of the average fade duration of wireless communication system operating over composite multipath fading environment in the presence of co-channel interference environment which suffer from  $\alpha$ - $\mu$  multipath fading.

### THE RATIO OF PRODUCTS OF TWO $\alpha$ - $\mu$ RANDOM VARIABLES AND ONE $\alpha$ - $\mu$ RANDOM VARIABLE

Random variable  $x$ ,  $y$  and  $z$  follow  $\alpha$ - $\mu$  distribution. The ratio of the product of two random variables  $x$  and  $y$  and random variable  $z$  is:

$$w = \frac{xy}{z}, x = \frac{wz}{y} \tag{1}$$

The relations between  $x$ ,  $y$  and  $z$  of  $\alpha$ - $\mu$  random variables and  $x_1, y_1$  and  $z_1$  of Nakagami- $m$  random variables are:

$$\begin{aligned} x &= x_1^{\frac{2}{\alpha}}, x_1 = x^{\frac{\alpha}{2}} \\ y &= y_1^{\frac{2}{\alpha}}, y_1 = y^{\frac{\alpha}{2}} \\ z &= z_1^{\frac{2}{\alpha}}, z_1 = z^{\frac{\alpha}{2}} \end{aligned} \tag{2}$$

After substituting (2) in (1), the ratio of product of two  $\alpha$ - $\mu$  random variables and  $\alpha$ - $\mu$  random variable becomes:

$$w^{\frac{a}{2}} = \frac{x_1 y_1}{z_1}, x_1 = \frac{w^{\frac{a}{2}} z_1}{y_1} \tag{3}$$

The first derivative of  $w$  is :

$$\frac{a}{2} \dot{w} w^{\frac{a}{2}-1} = \frac{y_1}{z_1} \dot{x}_1 + \frac{x_1}{z_1} \dot{y}_1 - \frac{x_1 y_1}{z_1^2} \dot{z}_1 \tag{4}$$

The squared Nakagami- $m$  random variable of  $x_1$  is:

$$x_1^2 = x_{11}^2 + x_{12}^2 + \dots + x_{12m}^2 \tag{5}$$

where  $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{12m}$  are independent Gaussian random variables which follow probability density function:

$$P_{x_{1i}}(x_{1i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_1}} e^{-\frac{(x_{1i})^2}{2\delta_1^2}}, i = 1, 2, \dots, 2m \tag{6}$$

where  $\delta_1^2$  is the variance of  $x_1$ . The first derivative of  $x_1$  is:

$$\dot{x} = \frac{1}{x_1} (x_{11} \dot{x}_{11} + x_{12} \dot{x}_{12} + \dots + x_{12m} \dot{x}_{12m}) \tag{7}$$

The squared Nakagami-m random variable of  $y_1$  is:

$$y_1^2 = y_{11}^2 + y_{12}^2 + \dots + y_{12m}^2 \quad (8)$$

where  $y_{11}, y_{12}, \dots, y_{12m}$  are independent Gaussian random variables.

$$P_{y_{1i}}(y_{1i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_1} e^{-\frac{(y_{1i})^2}{2\delta_1^2}}, i = 1, 2, \dots, 2m \quad (9)$$

where  $\delta_1^2$  is the variance of  $y_{1i}$ . The first derivative of  $y_1$  is:

$$\dot{y} = \frac{1}{y_1} (y_{11}\dot{y}_{11} + y_{12}\dot{y}_{12} + \dots + y_{12m}\dot{y}_{12m}) \quad (10)$$

The squared Nakagami-m random variable  $z_1$  is:

$$z_1^2 = z_{11}^2 + z_{12}^2 + \dots + z_{12m}^2 \quad (11)$$

where  $z_{11}, z_{12}, \dots, z_{12m}$  are independent Gaussian random variables with PDF's:

$$P_{z_{1i}}(z_{1i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_1} e^{-\frac{(z_{1i})^2}{2\delta_1^2}}, i = 1, 2, \dots, 2m \quad (12)$$

where  $\delta_1^2$  is the variance of  $z_1$ . The first derivative of  $z_1$  is:

$$\dot{z} = \frac{1}{z_1} (z_{11}\dot{z}_{11} + z_{12}\dot{z}_{12} + \dots + z_{12m}\dot{z}_{12m}) \quad (13)$$

By substituting (7), (10) and (13) in (4), the first derivative of  $w$  can be written in the form:

$$\begin{aligned} \dot{w} = & \frac{2}{aw^{\frac{\alpha-1}{2}}} \left( \frac{y_1}{x_1 z_1} (x_{11}\dot{x}_{11} + x_{12}\dot{x}_{12} + \dots + x_{12m}\dot{x}_{12m}) + \frac{x_1}{y_1 z_1} (y_{11}\dot{y}_{11} + y_{12}\dot{y}_{12} + \dots + y_{12m}\dot{y}_{12m}) \right) - \\ & - \frac{x_1 y_1}{z_1^3} (z_{11}\dot{z}_{11} + z_{12}\dot{z}_{12} + \dots + z_{12m}\dot{z}_{12m}) \end{aligned} \quad (14)$$

The first derivative of Gaussian random variable is Gaussian random variable. The linear transformation of Gaussian random variables is Gaussian random variable. Therefore, the  $\dot{w}$  is Gaussian random variable. The average value of  $\dot{w}$  is:

$$\begin{aligned} \overline{\dot{w}} = & \frac{2}{aw^{\frac{\alpha-1}{2}}} \left( \frac{y_1}{x_1 z_1} (x_{11}\overline{\dot{x}_{11}} + x_{12}\overline{\dot{x}_{12}} + \dots + x_{12m}\overline{\dot{x}_{12m}}) + \frac{x_1}{y_1 z_1} (y_{11}\overline{\dot{y}_{11}} + y_{12}\overline{\dot{y}_{12}} + \dots + y_{12m}\overline{\dot{y}_{12m}}) \right) - \\ & - \frac{x_1 y_1}{z_1^3} (z_{11}\overline{\dot{z}_{11}} + z_{12}\overline{\dot{z}_{12}} + \dots + z_{12m}\overline{\dot{z}_{12m}}) \end{aligned} \quad (15)$$

Since:

$$\begin{aligned} \overline{\dot{x}_{11}} = \overline{\dot{x}_{12}} = \dots = \overline{\dot{x}_{12m}} &= 0 \\ \overline{\dot{y}_{11}} = \overline{\dot{y}_{12}} = \dots = \overline{\dot{y}_{12m}} &= 0 \\ \overline{\dot{z}_{11}} = \overline{\dot{z}_{12}} = \dots = \overline{\dot{z}_{12m}} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

the mean of  $\overline{\dot{w}} = 0$

The variance of  $\dot{w}$  is:



$$\delta_{\dot{w}}^2 = \frac{4}{a^2 w^{\alpha-2}} \left( \frac{y_1^2}{x_1^2 z_1^2} (x_{11}^2 \delta \dot{x}_{11}^2 + x_{12}^2 \delta \dot{x}_{12}^2 + \dots + x_{12m}^2 \delta \dot{x}_{12m}^2) + \frac{x_1^2}{y_1^2 z_1^2} (y_{11}^2 \delta \dot{y}_{11}^2 + y_{12}^2 \delta \dot{y}_{12}^2 + \dots + y_{1m}^2 \delta \dot{y}_{12m}^2) \right) + \frac{x_1^2 y_1^2}{z_1^6} (z_{11}^2 \delta \dot{z}_{11}^2 + z_{12}^2 \delta \dot{z}_{12}^2 + \dots + z_{12m}^2 \delta \dot{z}_{12m}^2) \quad (17)$$

where:

$$\delta \dot{x}_{11}^2 = \delta \dot{x}_{12}^2 = \dots = \delta \dot{x}_{12m}^2 = \pi^2 f_m^2 \delta_1^2 = f_1^2$$

$$\delta \dot{y}_{11}^2 = \delta \dot{y}_{12}^2 = \dots = \delta \dot{y}_{12m}^2 = \pi^2 f_m^2 \delta_2^2 = f_2^2$$

$$\delta \dot{z}_{11}^2 = \delta \dot{z}_{12}^2 = \dots = \delta \dot{z}_{12m}^2 = \pi^2 f_m^2 \delta_3^2 = f_3^2$$

After substituting, the variance of  $\dot{w}$  becomes:

$$\delta_{\dot{w}}^2 = \frac{4}{a^2 w^{\alpha-2} y_1^2 z_1^2} (f_1^2 y_1^4 + f_2^2 z_1^2 w^\alpha + f_3^2 y_1^2 w^2) \quad (18)$$

Joint probability density function of  $w \dot{w} y_1$  and  $z_1$  is:

$$\begin{aligned} p_{w \dot{w} y_1 z_1} (w \dot{w} y_1 z_1) &= p_{\dot{w}} (\dot{w} / w y_1 z_1) \cdot p_{w y_1 z_1} (w y_1 z_1) = \\ &= p_{\dot{w}} (\dot{w} / w y_1 z_1) \cdot p_w (w / y_1 z_1) \cdot p_{y_1} (y_1) \cdot p_{z_1} (z_1) \end{aligned} \quad (19)$$

The conditional PDF of  $w$  is [7]:

$$p_w (w / y_1 z_1) = \left| \frac{dx_1}{dw} \right| p_{x_1} \left( \frac{\frac{\alpha}{2} z_1}{y_1} \right), \left| \frac{dx_1}{dw} \right| = \frac{a}{2} w^{\frac{\alpha}{2}-1} z_1 / y_1 \quad (20)$$

After substituting, previous expression becomes:

$$p_w (w / y_1 z_1) = \frac{\alpha}{2} w^{\frac{\alpha}{2}-1} z_1 / y_1 p_{x_1} \left( \frac{\frac{\alpha}{2} z_1}{y_1} \right) \quad (21)$$

The joint PDF of  $w \dot{w}$  is:

$$\begin{aligned} p_{w \dot{w}} (w \dot{w}) &= \int_0^\infty dy_1 \int_0^\infty dz_1 p_{w \dot{w} y_1 z_1} (w \dot{w} y_1 z_1) = \\ &= \frac{\alpha}{2} w^{\frac{\alpha}{2}-1} \int_0^\infty dy_1 \int_0^\infty dz_1 z_1 / y_1 p_{x_1} \left( \frac{\frac{\alpha}{2} z_1}{y_1} \right) p_{y_1} (y_1) p_{z_1} (z_1) p_{\dot{w}} (\dot{w} / w y_1 z_1) \end{aligned} \quad (22)$$

The average level crossing rate can be obtained as the average value of  $\dot{w}$ :

$$\begin{aligned} N_w &= \int_0^\infty d\dot{w} p_{w \dot{w}} (w \dot{w}) \dot{w} = \frac{\alpha}{2} w^{\frac{\alpha}{2}-1} \int_0^\infty dy_1 \int_0^\infty dz_1 z_1 / y_1 p_{x_1} \left( \frac{\frac{\alpha}{2} z_1}{y_1} \right) p_{y_1} (y_1) p_{z_1} (z_1) \int_0^\infty d\dot{w} p_{\dot{w}} (\dot{w} / w y_1 z_1) \dot{w} = \\ &= \frac{\alpha}{2} w^{\frac{\alpha}{2}-1} \int_0^\infty dy_1 \int_0^\infty dz_1 z_1 / y_1 p_{x_1} \left( \frac{\frac{\alpha}{2} z_1}{y_1} \right) p_{y_1} (y_1) p_{z_1} (z_1) \delta_w = \\ &= \int_0^\infty dy_1 \int_0^\infty dz_1 1 / y_1^2 p_{x_1} \left( \frac{\frac{\alpha}{2} z_1}{y_1} \right) p_{y_1} (y_1) p_{z_1} (z_1) \sqrt{y_1 f_1^2 + z_1^2 w^\alpha f_2^2 + y_1 w^3 f_3^2} \end{aligned} \quad (23)$$

Random variables  $x_1, y_1$  and  $z_1$  are Nakagami- $m$  distributed[8]:

$$\begin{aligned}
 p_{x_1}(x_1) &= \frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega_1}\right)^m x_1^{2m-1} e^{-\frac{m}{\Omega_1} x_1^2}, x_1 \geq 0 \\
 p_{y_1}(y_1) &= \frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega_2}\right)^m y_1^{2m-1} e^{-\frac{m}{\Omega_2} y_1^2}, y_1 \geq 0 \\
 p_{z_1}(z_1) &= \frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega_3}\right)^m z_1^{2m-1} e^{-\frac{m}{\Omega_3} z_1^2}, z_1 \geq 0
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

After substituting, the expression for level crossing rate of the ratio of product of two  $\alpha$ - $\mu$  random variables and  $\alpha$ - $\mu$  random variable becomes:

$$\begin{aligned}
 N_w &= \frac{8}{(\Gamma(m))^3} \left(\frac{m}{\Omega_1}\right)^m \left(\frac{m}{\Omega_2}\right)^m \left(\frac{m}{\Omega_3}\right)^m w^{\alpha m - \frac{a}{2}} \cdot \int_0^\infty dy_1 \int_0^\infty dz_1 \cdot \\
 &\cdot y_1 z_1^{4m-2} e^{-\frac{m}{\Omega_1} \left(\frac{\alpha}{w^2} z_1\right)^2} e^{-\frac{m}{\Omega_2} y_1^2} e^{-\frac{m}{\Omega_3} z_1^2} \sqrt{y_1 f_1^2 + z_1^2 w^\alpha f_2^2 + y_1 w^3 f_3^2}
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Obtained expression for average level crossing rate of the ratio of product of two  $\alpha$ - $\mu$  random variables and  $\alpha$ - $\mu$  random variable can be used for evaluation of average fade duration of wireless communication system with dual SIR based selection combining diversity operating over composite multipath  $\alpha$ - $\mu$  non-linear fading environment in the presence of co-channel interference subjected to  $\alpha$ - $\mu$  multipath fading.

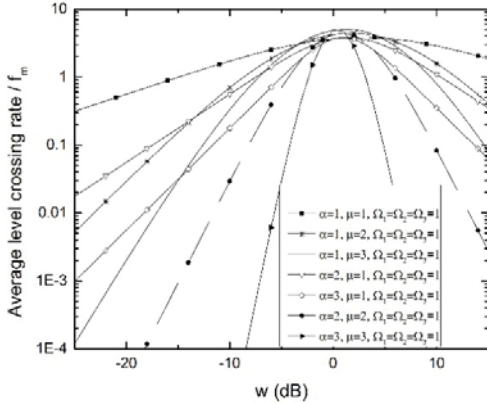


Fig. 1. LCR for dif. parameter  $\alpha$  and  $\mu$  ( $m = \mu$ )

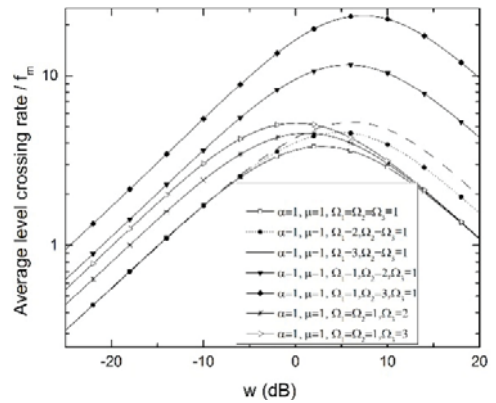


Fig. 2. LCR for dif. parameters  $\Omega_1, \Omega_2$  and  $\Omega_3$

Figure 1 shows the normalized average level crossing rate of the ratio of product of two  $\alpha$ - $\mu$  random variables and  $\alpha$ - $\mu$  random variable for different values of fading parameters  $\alpha$  and  $\mu$ . As  $\alpha$  increases, the normalized average LCR decreases and also as  $\mu$  increases, the normalized average LCR decreases, which means that fades occur less frequently. In Figure 2, the influence of average power is in focus. The average LCR becomes higher with increase of  $\Omega$ .

## CONCLUSION

In this paper the ratio of product of two  $\alpha$ - $\mu$  random variables and  $\alpha$ - $\mu$  random variable is considered. Average level crossing rate of this ratio is determined. The product of two  $\alpha$ - $\mu$  random variables can represent desired signal envelope which suffer simultaneously to two  $\alpha$ - $\mu$  multipath fadings. The  $\alpha$ - $\mu$

random variable in the denominator of the ratio can represent interference signal envelope subjected to  $\alpha$ - $\mu$  multipath fading. The ratio of product of two  $\alpha$ - $\mu$  random variables and  $\alpha$ - $\mu$  random variable is signal to interference envelope ratio of wireless communication system operating over composite  $\alpha$ - $\mu$  multipath fading in the presence of co-channel interference affected also to  $\alpha$ - $\mu$  multipath fading. The obtained results for average level crossing rate are graphically presented and can be used for evaluation of average fade duration of the proposed wireless communication system.

## REFERENCES

- [1] E. Mekic, M. Stefanovic, P. Spalevic, N. Sekulovic, A. Stankovic, "Statistical Analysis of Ratio of Random Variables and Its Application in Performance Analysis of Multihop Wireless Transmissions", *MATHEMATICAL PROBLEMS IN ENGINEERING*, 2012, article ID 841092.
- [2] E. Mekic, N. Sekulovic, M. Bandjur, M. Stefanovic, P. Spalevic, "The distribution of ratio of random variable and product of two random variables and its application in performance analysis of multi-hop relaying communications over fading channels *PRZEGLAD ELEKTROTECHNICZNY*, 2012, vol. 88 br. 7A, str. 133-137.
- [3] A. Matovic, E. Mekic, N. Sekulovic, M. Stefanovic, M. Matovic and C. Stefanovic, "The distribution of the ratio of the products of two independent  $\alpha$ - $\mu$  variates and its application in the performance analysis of relaying communication systems", *MATHEMATICAL PROBLEMS IN ENGINEERING*, 2013.
- [4] M. K. Simon, M. S. Alouini, *Digital Communication over Fading Channels*, USA: John Wiley & Sons, 2000.
- [5] J. Proakis, "Digital Communications", 4th ed. New York: McGraw-Hill, 2001.
- [6] I. Gradshteyn, I. Ryzhik. *Tables of Integrals, Series, and products*. Academic Press, New York, 1994.
- [7] Sekulovic, Nikola M, Stefanovic Mihajlo C "Performance of Dual Branch SSC Receiver in Correlated alpha-mu Fading Channels", *WIRELESS PERSONAL COMMUNICATIONS*, 2012, vol. 65 br. 1, str. 143-156.
- [8] Panajotovic Aleksandra S , Sekulovic Nikola M , Stefanovic Mihajlo C , Draca Dragan Lj, "Average Level Crossing Rate of Dual Selection Diversity over Correlated Unbalanced Nakagami-m Fading Channels in the Presence of Cochannel Interference", *Article, IEEE COMMUNICATIONS LETTERS*, 2012, vol. 16 br. 5, str. 691-693.

## SOME SIMULATION METHODS FOR RECEIVE SATELLITE ANTENNA INSTALLING ANGLES EVALUATION

---

*This paper presents some analytical performance criterion characteristics of receive satellite antenna dishes, also including the numerical calculation of the angles necessary for their installation. The influence of antenna dish size, carrier signal frequency and antenna efficiency on satellite link performance measures is also considered, while the installing parameters are calculated for different satellites which can be physically visible from selected user location.*

---

### INTRODUCTION

The design of an antenna system plays a powerful role in improving the performance and reducing the required transmit power for wireless link layer designs [1]. In satellite communications, receive antenna system properties (including reflectors, feeds, mounts, servo controls, converters, modems and monitor and control software) are very important [2] because satellite orbits are very distant from the Earth. The receive satellite antenna collects weak signal from satellite and removes noise as far as possible, providing higher receiving signal quality. The design of an antenna system [2, 3] involves deciding how much antenna gain is needed and specifying amplifiers and receivers for a specific signal-to-noise ratio (SNR). For a given power density, the antenna gain determines the power into the receiver. The choice of the antenna gain for acceptable performance is very important because small values of antenna gain implies the noisy signal, but if the antenna gain is too large, the signal will be distorted due to saturation of the receiver.

Satellite systems provide voice, data and broadcast services with widespread, often global, coverage to high-mobility users as well as to fixed sites. Satellite communication networks have the same basic architecture as cellular systems [3-5], except that the cell base-stations are satellites orbiting the Earth. The satellite orbits are characterized [6] by their distance from the Earth: low-earth orbits (LEO) at 500-2000 km, medium-earth orbits

(MEO) at 10.000 km and geosynchronous orbits (GEO) at 36.000 km. Geosynchronous satellites have a large coverage area that is stationary over time, since the Earth and satellite orbits are synchronous [7], while the satellites with lower orbits have smaller coverage areas changing over time, so satellite handoff is needed for stationary users or fixed point service.

The most well-known reflector antenna used in satellite communications is the parabolic reflector antenna commonly known as a satellite dish antenna. Parabolic reflectors are characterized with a very high gain (30-40 dB) and low cross-polarization [8]. The smaller dish antennas typically operate between 2 and 28 GHz, while the large dishes can operate in lower frequency bands.

Parabolic dish antenna consists of a feed antenna (which is usually a horn antenna with a circular aperture) pointed towards a parabolic reflector [9]. The dish is at latest several wavelengths in diameter, but the diameter can be the order of hundred wavelengths for very high gain dishes (gain over 50 dB). The distance between the feed antenna and the reflector is typically several wavelengths as well. An offset-feed dish antenna is a type of parabolic antenna, usually used in satellite communications [10]. The purpose of offset antenna dish design is to move the feed antenna and its supports out of the incoming radio-waves path.

Current research on antennas focuses on making antennas smaller, particularly in communications for personal wireless communication devices [8].

---

1 High School of Electrical Engineering and Computer Science, Belgrade, Serbia

2 Faculty of Electronic Engineering, Nis, Serbia

A lot of work is performed on numerical modeling of antennas [8-11], so their properties can be predicted before they are built or tested. Future trends include developing even higher gain satellite antennas with greater efficiencies in terms of frequency reuse or higher satellite systems capacity.

Since the performance of modern satellite communication systems can be significantly improved by the employment of high quality directive antennas, this paper discusses the dependency of antenna gain and directionality on different parameters, also including some practical implementation methods important for installing the receive satellite antenna dish.

### RECEIVE SATELLITE DISH ANTENNA PROPERTIES

The parabolic shape of a dish antenna is designed to capture incoming satellite signal and focus it to a central focal point, where it is concentrated and fed to a feedhorn [1]. The feedhorn is a waveguide shaped in the form a cylindrical structure usually, and positioned at or near the focal point of parabolic dish antenna. The waveguide directs the incoming signal to a low-noise-block-down-converter (LNB) which is a transducer that converts electromagnetic waves into electric signal and shifts the frequency into the lower band. In most home use satellite dishes, the feedhorn and the LNB are integrated into one device. The gain or received signal power is dependent on the perfection of the dish shaping and the waveguide matching.

The gain of parabolic antenna is modeled by the following equation [1]:

$$G = G_{\max} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot S_{\text{eff}} \quad (1)$$

where  $\lambda = c/f$  presents a carrier signal wavelength, while effective antenna area  $S_{\text{eff}}$  depending on antenna efficiency  $\eta$  and antenna diameter  $D$  is defined as:

$$S_{\text{eff}} = \eta \cdot S = \eta \frac{\pi D^2}{4} \quad (2)$$

Substituting (2) into (1) yields:

$$G = G_{\max} = \eta \left( \frac{\pi D}{\lambda} \right)^2 \quad (3)$$

Antenna efficiency typically takes values from 0.5 to 0.75.

A parabolic dish antenna can provide very high gain at microwave frequencies, but only with very sharp beamwidths. To achieve an optimum gain a careful attention to detail is required, including checking the parabolic surface accuracy with a template, matching the feedhorn to the  $f/D$  ratio of the dish and locating the phase center of the feedhorn at the focus. The higher values of gain, describing the amount of energy radiated by the main lobe versus the amount energy radiated by an isotropic antenna, implies the more focused radio signal and the narrower beamwidth.

The half-power (-3 dB) beamwidth  $2\theta_{\text{3dB}}$ , which is another important dish property, presents an angle (in degrees) between the half-power point of the main lobe. This angle, presenting the width of the main lobe at -3 dB, can be, for the value  $\eta=0.55$ , calculated as:

$$2\theta_{\text{3dB}} = 70 \frac{\lambda}{D} \quad [^\circ] \quad (4)$$

The parabolic antenna gain dependency on angle of boresight  $\theta$  is given with [8]:

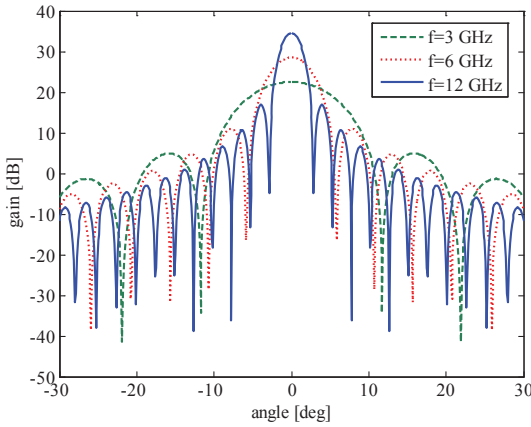
$$G(\theta) = G_{\max} \left( \frac{2J_1(x)}{x} \right)^2 \quad (5)$$

where  $J_1(x)$  presents first order Bessel function [12] with argument  $x$  defined as [8]:

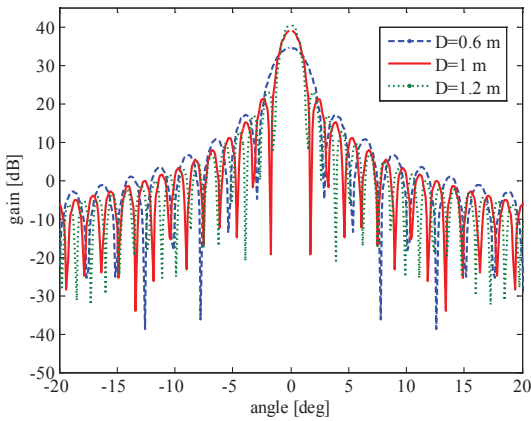
$$x = \frac{\pi D}{\lambda} \cdot \sin \theta \quad (6)$$

The parabolic antenna radiation pattern, describing its sensitivity as a function of angle from boresight axis, is presented in Fig. 1. and Fig. 2, in the case when carrier frequency and antenna diameter are varied, respectively.

Comparing the results from Fig. 1. and Fig. 2. it can be concluded that antenna radiation pattern heavily depends on carrier signal frequency and antenna dish size.



**Fig. 1.** The gain of parabolic antenna versus angle from boresight axis, for different values of carrier signal frequency



**Fig. 2.** The gain of parabolic antenna versus angle from boresight axis, for different values of antenna diameter

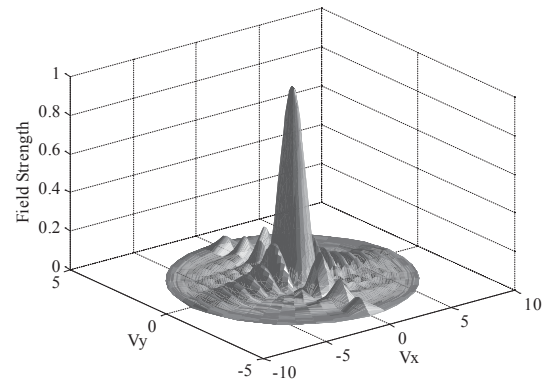
In satellite communications, the circular antenna aperture is often used, but sometimes the rectangular antenna apertures are also applied. Fig. 4. and Fig. 5. present the three-dimensional (3D) pattern of field strength for different rectangular and circle aperture dimensions, as a function of the independent variables  $v_x$  and  $v_y$ . The quantities  $v_x$  and  $v_y$ , for rectangular aperture dimensions  $a$  and  $b$  are defined as:

$$v_x = \frac{a}{\lambda} \sin \theta \cos \phi, \quad v_y = \frac{b}{\lambda} \sin \theta \sin \phi \quad (7)$$

As the polar angles vary over  $0 < \theta < 90^\circ$  and  $0 < \phi < 360^\circ$ , the quantities  $v_x$  and  $v_y$  vary over limits  $-a/\lambda < v_x < a/\lambda$  and  $-b/\lambda < v_y < b/\lambda$ , for rectangular aperture dimensions  $a$  and  $b$ .

Fig. 4. shows the 3D pattern of field strength as a function of the independent variables  $v_x$  and  $v_y$  defined by (7). The separability of the pattern in

$v_x$ - $v_y$  plane is evident, as it is illustrated in Fig. 4.

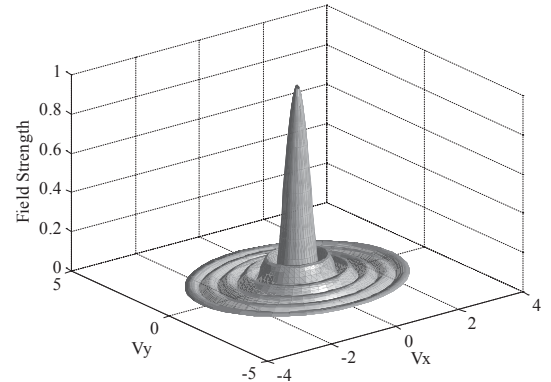


**Fig. 3.** The 3D pattern of field strength for rectangular aperture dimensions  $a=8\lambda$  and  $b=4\lambda$

For the circular aperture with radius  $a$ , the quantities  $v_x$  and  $v_y$  are defined as:

$$v_x = \frac{a}{\lambda} \sin \theta \cos \phi, \quad v_y = \frac{a}{\lambda} \sin \theta \sin \phi \quad (8)$$

while the 3D pattern of field strength for circular aperture, as a function of independent variables  $v_x$  and  $v_y$  defined by (8) is presented in Fig. 5.



**Fig. 4.** The 3D pattern of field strength for circular aperture radius  $a=3\lambda$ .

The visible region is the circle, in  $v_x$ - $v_y$  plane, as it is illustrated in Fig. 5.

## SOFTWARE TOOLS FOR SATELLITE ANTENNA DISH INSTALLATION

The satellite dish installation includes adjusting the orientation (elevation - vertical angle as well as azimuth - horizontal angle). The program *Satellite Antenna Alignment* is used to calculate the angles necessary for installing satellite dishes. The

geographical coordinates of the location where the dish will be installed are entered, as it is presented in Fig. 5 for user position in Belgrade. The calculation of azimuth and elevation for choice ASTRA 1C satellite is given, but it could be done for all satellites physically visible from this location.

The azimuth presents the direction to the satellite in degrees from the clockwise direction to the North, while the elevation is an angle (in degrees) between the direction of the signal from the satellite and a tangential plane to the Earth surface in the location.

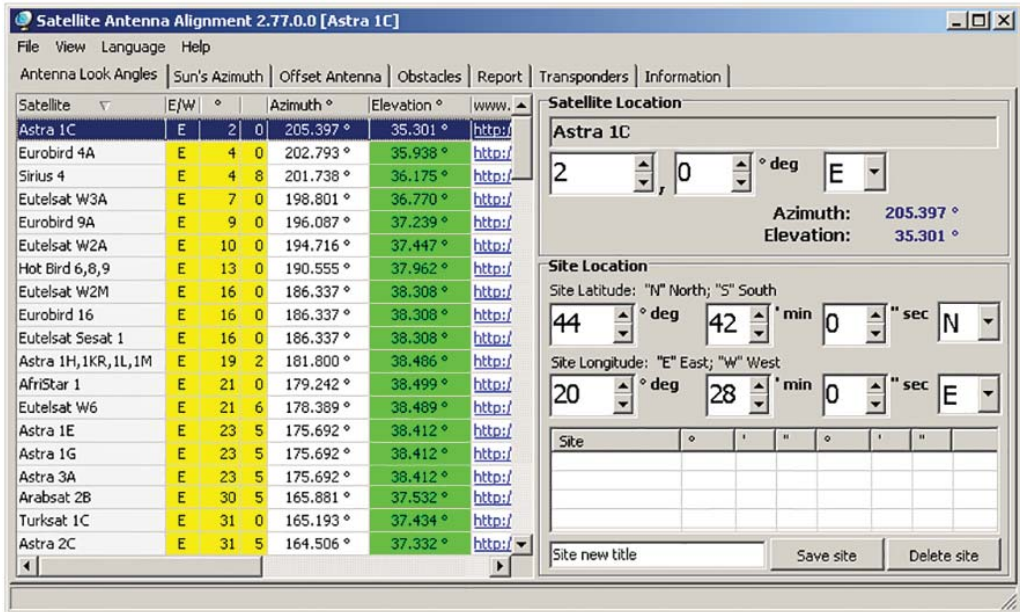


Fig. 5. Calculation of the azimuth and elevation angle using *Satellite Antenna Alignment* from user location in Belgrade and choice ASTRA 1C satellite

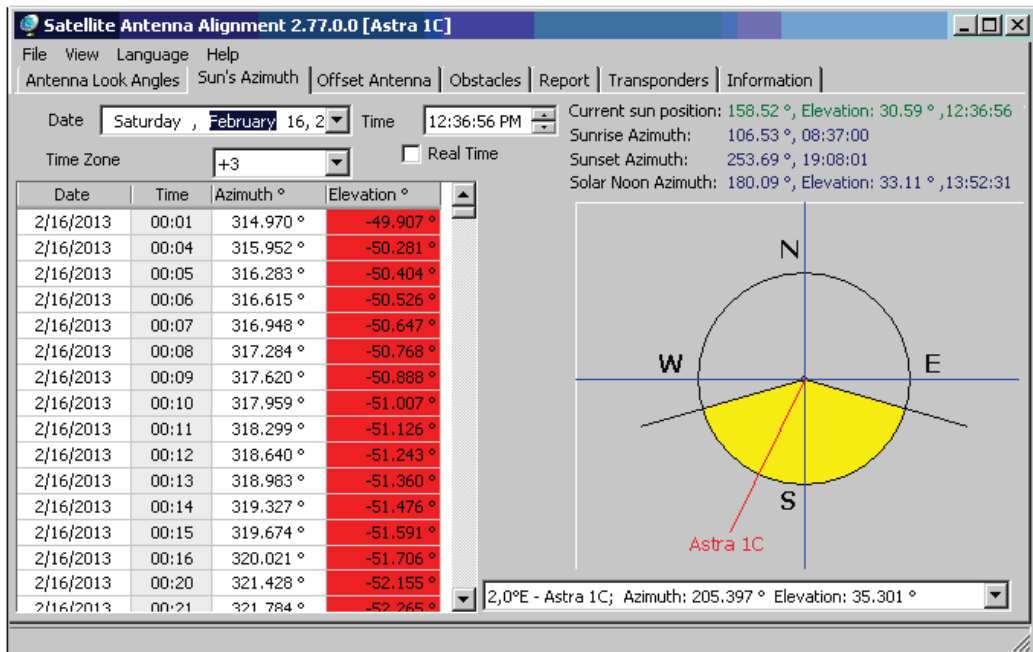


Fig. 6. Calculation of the Sun's azimuth using *Satellite Antenna Alignment* from user location in Belgrade

The calculation of the Sun's azimuth is given in Fig. 6, for the location coordinates specified as in Fig. 5. Both the azimuth and the elevation angles are calculated for the Sun at the current moment of time. After finding the Sun's azimuth (for the current day, or another day on which the dish installation is planned) that is the most close to the azimuth of the chosen satellite (ASTRA 1C), user can turn the dish to the Sun at the specified moment of time, because the Sun's azimuth coincides with the azimuth of the satellite at this moment.

An interactive program *Satellite Antenna Align-*

*ment* is used for installing an offset-feed satellite dish antenna, which also has the feed at the focus of the parabola, but the reflector forms only a section of the parabola. The feed of the offset-feed antenna is not on the boresight, resulting that none of the radiated beam is blocked by the feed horn. After entering the size of dish (height and width), the exact elevation for the dish is calculated, as it is presented in Fig. 7. The calculation illustrated in Fig. 7 is done for offset-feed receive satellite dish width 0.8 m and height 1 m, while the estimated angle values are given in degrees.

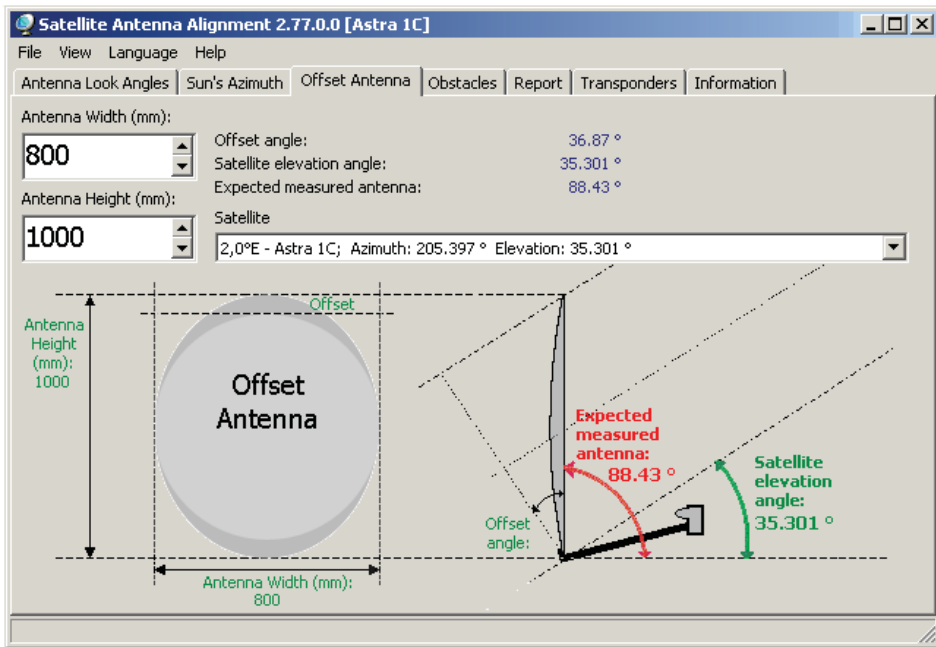


Fig. 7. Calculation of the angles necessary for installing satellite offset dish (height 1 m and width 0.8 m) using *Satellite Antenna Alignment* from user location in Belgrade

This program allows users to evaluate the dish installing angles quite precisely, also including the possibility to take into account a lot of additional factors which are important when a satellite dish is installed. These factors include various obstacles (buildings, trees), the landscape, the altitude, transponder orientation, polarization, etc.

There are many applications that can be used to show or predict the satellites position at any given moment, from the user location, which is very important for satellite selection. Satellite tracker *Orbitron* or *SatExplorer* are usually used interactive applications, including the possibility for selected

satellites to be tracked all in the same time. The orbit informations and database of satellite frequencies are also given, as it is illustrated in Fig. 8. *Orbitron* satellite tracker includes many additional program functions and settings, like time synchronization when *Orbitron* starts, setting Acquisition of Signal (AoS) elevation limit, radar viewpoint with different rotations, including full interactive mode for viewpoint, as it is illustrated in Fig. 8. Real-time mode and simulation mode are available, including extended map and interface settings, with AoS notification which enables every satellite to be automatically marked as active when this option is checked.



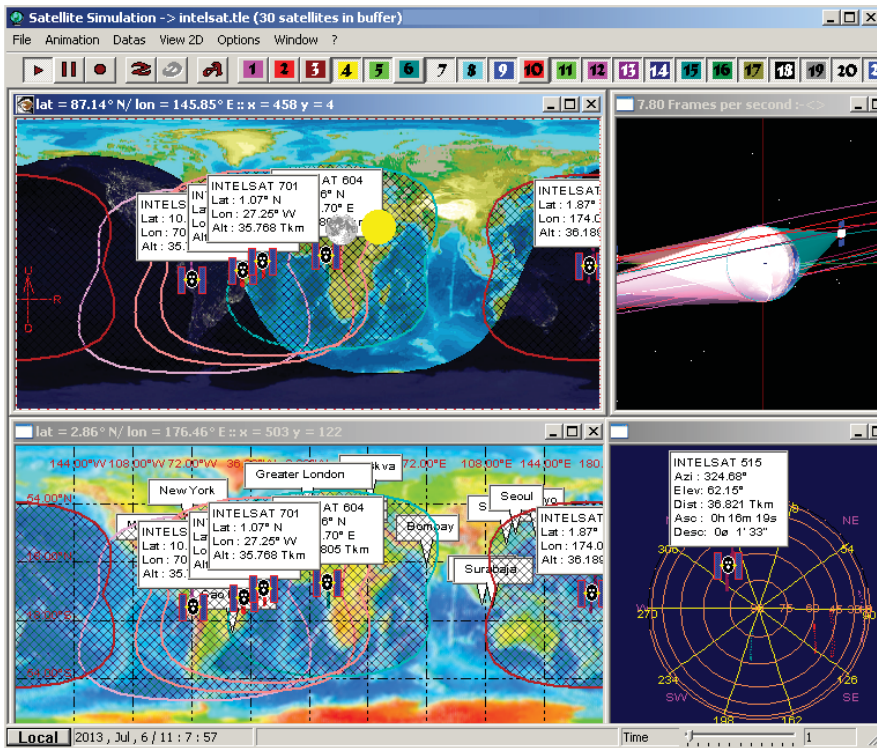


Fig. 8. Satellite tracking system showing the satellite positions at any specified moment

## CONCLUSION

Since high quality and cost-effective receive satellite antennas are very popular products, designing the sophisticated technological antenna system parts is constantly being developed and introduced, also including the practical implementation optimization. This paper presents some software tools for numerical modeling of receive satellite antenna installing parameters, while the effect of different parameters on antenna gain and directionality is also analyzed.

## REFERENCES

- [1] Pratt T, Bostian C, Allnut J. Satellite Communications. 2<sup>nd</sup> ed., John Wiley&Sons Inc., 2003.
- [2] Tranter W, Shanmugan K, Rappaport T, Kosbar K. Communication Systems Simulation with Wireless Applications. Prentice Hall, 2004.
- [3] Proakis J. Digital Communications. 3<sup>rd</sup> ed., McGraw-Hill, 1999.
- [4] Lee W.Y.C. Mobile Cellular Communications. McGraw-Hill Book Co., New York, 1989.
- [5] Stuber G.L. Principles of Mobile Communications. 2<sup>nd</sup> ed., Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [6] Roddy D. Satellite Communications. 4<sup>th</sup> ed., McGraw-Hill, 2006.
- [7] Elbert B. Introduction to Satellite Communications. 3<sup>rd</sup> ed., Artec House, 2008.
- [8] Dybdal B. Communication Satellite Antennas: System Architecture, Technology, and Evaluation. McGraw-Hill, 2009.
- [9] Evans B.G. Satellite Communication Systems. 3<sup>rd</sup> ed., The Institution of Engineering and Technology, UK, 2008.
- [10] Kolawole M. Satellite Communication Engineering. Marcel Dekker Inc., 2002.
- [11] Stefanovic H, Savic A, Veljkovic S, Milic D. Numerical modeling of receive satellite antenna installing parameters. International Journal of Science, Innovation and New Technology-IJSINT, Vol.1. No.6. 2013. P.19-25.
- [12] Abramowitz M, Stegun I. Handbook of Mathematical Functions. NBS, Washington, 1972.

## MATHEMATICAL MODEL FOR RELIABILITY CALCULATION ON MODEL EXAMPLE

Mathematical model for reliability calculation is presented in this paper, theoretically and on the model example. Transport of ground and coal at the surface coal dig in "Kostolac", Serbia, is performed using transportation belts, 3 - 5 kilometres in length. The system of BTR is composed by bagger, transporter and remover. The system BTM is composed by bagger, transporter and mill. Transporter belt during circular movement is suspended on carry - rollers, during transport of weight and on support - rollers, without weight. Two or three carry - rollers, or three support-rollers make a garland. Garland (5 carry and 3 supporting) are build into a section and they enable the movement of belt over them. The number of sections depends on the transportation system length. Reliability of these systems depends on the reliability of carry and support rollers. In order to determine the reliability of BTR and BTM systems, mathematical model for reliability calculation is developed in this paper. Reliability analysis of carry and supporting rollers was performed using the method of Fault Tree Analysis - FTA and method of Reliability Block Diagrams - RBD to determine the function of rollers reliability. In this paper the determining of Function of Rollers reliability is described using the FTA method with failure elements of rollers. Function of reliability is determined on the basis of the defined Block reliability diagram in the case where all the constructive elements of rollers are in roller operations - the complex relationship, and when some of the elements are in failure mode - the quasi-complex relationship.

Keywords: Mathematical Model, Reliability Calculation, Fault Tree Analysis, Reliability Block Diagram, Reliability Function, Complex Relationship, Quasi-Complex Relationship

### INTRODUCTION

PD Power plant and Surface coal dig (hereinafter TE-KO) in Kostolac-Serbia, is not producing bearing and supporting transportation rollers for tailings and coal transportation systems, fig. 1., 2. In order to provide reliable functioning of the DBT-Dredge-Belt-Tray and DBG-Dredge-Belt-Grinder system, TE-KO has to provide rollers with high reliability in order to reduce system slowdown, i.e. TE-KO must purchase reliable rollers from the producers. But, prior to roller installation (exploitation) into transport systems DBT and DBG it is necessary to determine the reliability level of various roller producers and decide about purchasing rollers from a producer with the highest roller reliability level.

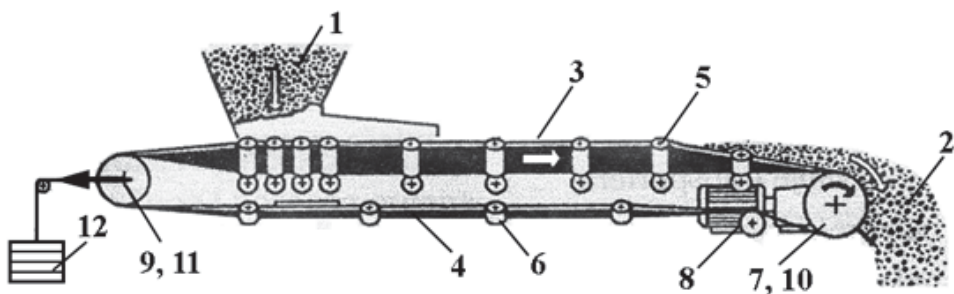


Fig. 1. Scheme of the Belt system (1. loading place, 2. unloading place, 3. bearing side of the belt, 4. reversible side of the belt, 5. bearing rollers, 6. supporting rollers, 7. driving drum, 8. driving engine, 9. reversible drum, 10. unloading drum, 11. clamp drum, 12. clamp device).

1 Faculty of Construction Management, Belgrade, Serbia

2 Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, Serbia

3 Faculty of Natural Sciences and Mathematics, K. Mitrovica, Serbia

Having this in mind, for purposes of determining the roller quality regarding reliability within laboratory conditions (at the producer and TE-KO reception control) as well as in exploitation, this study is dealing with:

- reliability analysis of roller components,
- reliability analysis of roller components and rollers themselves, as well as of the system, by applying the Fault Tree Analysis - FTA,
- reliability analysis of rollers as a system by applying the Reliability Block Diagrams-RBD method,
- determination of the roller function reliability.



**Fig. 2.** Coal transportation system - Kostolac, Serbia

## **ROLLER RELIABILITY**

The reliability analysis of roller components and rollers themselves as a system within laboratory and exploitation conditions is implying following [4]:

- determination of reliability characteristics (reliability function, uncertainty function, frequency function, failure intensity function, operating duration, intermediate operating duration, i.e. intermediate lifetime, empiric reliability characteristics, theoretical reliability characteristics),
- determination of failure distribution principle, and
- adoption of failure distribution principle.

## **FAULT TREE ANALYSIS**

On fig. 4 and in the consequent text You can find illustration of FTA [4, 5, 6] together with graphics of Fault Tree-FT-failure skeleton construction, top, below subtop and basic events-failure of roller parts, failure rate of top, below top and basic events-failures and roller reliability.

Before all and within the scope of failure skeleton analysis a failure skeleton has been created based on

construction drawings, Fig. 3, and an estimation of potential failure of roller parts. The failure skeleton of the bearing roller is shown on fig. 4. The construction of the bearing roller FT-failure skeleton may completely be applied to the supporting roller.

Upon FT adoption a qualitative roller failure analysis has been made. Following top event has been determined: „Failure of bearing roller- $D_V$ ”. Subsequently below top events-failures have been determined, fig. 4:

- $D_{K1'}$  failure of roller body,
- $D_{K2'}$  failure of roller shaft,
- $D_{K3'}$  failure of roller ball bearing,
- $D_{K4'}$  failure of roller sealing group,
- $D_{K1.1'}$  failure of roller cilinder,
- $D_{K1.2'} = D_{K1.3'}$  failure of roller housing,
- $D_{K3.1'} = D_{K3.3'}$  failure of roller bearing,
- $D_{K3.2'} = D_{K3.4'} = D_{K4.1'} = D_{K4.2'}$  failure of roller sealing group,
- $D_{K4.1.1'}$  failure of internal sensor elements,
- $D_{K4.1.2'}$  failure of rubber ring,
- $D_{K4.1.3'}$  failure of push ring,
- $D_{K4.1.4'}$  failure of sealing ring, and
- $D_{K4.1.5'}$  failure of sealing oil ring.

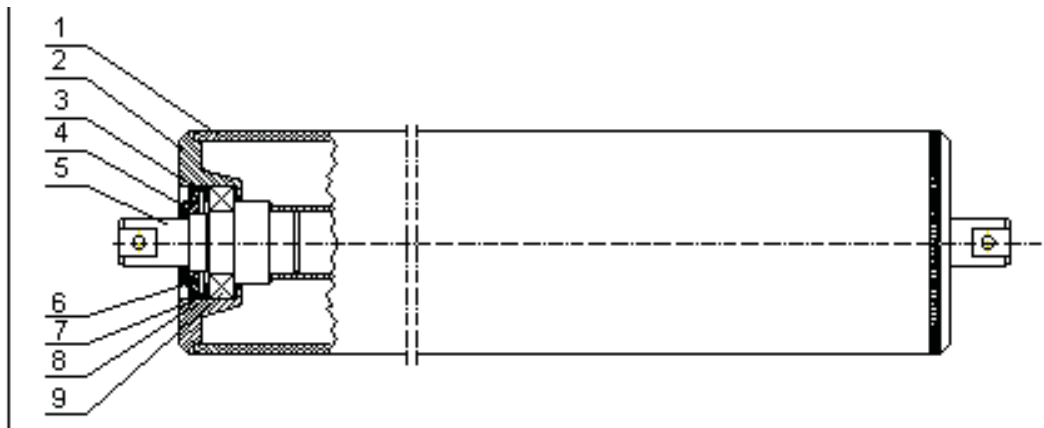


Fig. 3. Bearing roller (1. cylinder part of the roller body; 2. lateral side of the roller body; 3. internal sensor elements; 4. shield; 5. shaft; 6. cover; 7. sealing ring; 8. oil sealing oil ring; 9. ball bearing).

Based on the analysis of potential failures the conclusion is that a certain „Roller failure -  $D_V$ ” will set in if following fails, too, picture 4:

- roller body or
- roller shaft or
- roller ball bearing or
- roller sealing group.

An expression for determination of top event „failure of bearing roller -  $D_V$ ” has been developed with following configuration (1), (2), (3), (4) and (5) based on stated top- $D_V$  and stated below top- $D_{K_i}$  events-failures.

$$\begin{aligned}
D_V &= D_{K1} \cup D_{K2} \cup D_{K3} \cup D_{K4} = (D_{K1.1} \cup D_{K1.2} \cup D_{K1.3}) \cup D_{K2} \cup \\
&\cup (D_{K3.1} \cup D_{K3.2} \cup D_{K3.3} \cup D_{K3.4}) \cup (D_{K4.1} \cup D_{K4.2}) = \\
&= (D_{K1.1} \cup D_{K1.2} \cup D_{K1.3}) \cup D_{K2} \cup (D_{K3.1} \cup D_{K3.2} \cup D_{K3.3} \cup D_{K3.4}) \cup \\
&\cup (D_{K4.1.1} \cap D_{K4.1.2} \cap D_{K4.1.3} \cap D_{K4.1.4} \cap D_{K4.1.5})
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
D_{K1} &= D_{K1.1} \cup D_{K1.2} \cup D_{K1.3} = \\
&= (D_1 \cup D_2 \cup D_3) \cup (D_4 \cup D_5 \cup D_6 \cup D_7) \cup (D_4 \cup D_5 \cup D_6 \cup D_7)
\end{aligned} \tag{2}$$

$$D_{K2} = D_8 \cup D_9 \cup D_{10} \cup D_{11} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
D_{K3} &= D_{K3.1} \cup D_{K3.2} \cup D_{K3.3} \cup D_{K3.4} = \\
&= (D_{12} \cup D_{13} \cup D_{14} \cup D_{15}) \cup D_{K4.1} \cup (D_{12} \cup D_{13} \cup D_{14} \cup D_{15}) \cup D_{K3.4}
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
D_{K4} &= D_{K4.1} \cup D_{K4.2} = \\
&= D_{K4.1.1} \cap D_{K4.1.2} \cap D_{K4.1.3} \cap D_{K4.1.4} \cap D_{K4.1.5} = (D_{16} \cup D_{17} \cup D_{18}) \cap \\
&\cap (D_{19} \cup D_{20} \cup D_{21}) \cap (D_{22} \cup D_{23} \cup D_{24}) \cap (D_{25} \cup D_{26} \cup D_{27}) \cap \cap (D_{28} \cup D_{29} \cup D_{30})
\end{aligned} \tag{5}$$

Upon shifting  $D_{K1'}$ ,  $D_{K2'}$ ,  $D_{K3'}$ ,  $D_{K4'}$ , as well as  $D_{K1.1'}$ ,  $D_{K1.2'}$ ,  $D_{K1.3'}$ ,  $D_{K3.1'}$ ,  $D_{K3.2'}$ ,  $D_{K3.3'}$ ,  $D_{K3.4'}$ ,  $D_{K4.1'}$ ,  $D_{K4.1.1'}$ ,  $D_{K4.1.2'}$ ,  $D_{K4.1.3'}$ ,  $D_{K4.1.4'}$ ,  $D_{K4.1.5'}$  the resulting event-failure of the bearing roller is caused by failure of roller parts- $D_i$  which can be expressed by the equation for determination of the top event - $D_{V'}$  in the form of

$$\begin{aligned}
D_{V'} &= D_{K1} \cup D_{K2} \cup D_{K3} \cup D_{K4} = \\
&= [(D_1 \cup D_2 \cup D_3) \cup (D_4 \cup D_5 \cup D_6 \cup D_7) \cup (D_4 \cup D_5 \cup D_6 \cup D_7)] \cup \\
&\cup [(D_8 \cup D_9 \cup D_{10} \cup D_{11})] \cup (D_{12} \cap D_{13} \cup D_{14} \cup D_{15}) \cup \\
&\cup [(D_{16} \cup D_{17} \cup D_{18}) \cap (D_{19} \cup D_{20} \cup D_{21}) \cap (D_{22} \cup D_{23} \cup D_{24}) \cap \\
&\cap (D_{25} \cup D_{26} \cup D_{27}) \cap (D_{28} \cup D_{29} \cup D_{30})] \cup (D_{12} \cap D_{13} \cup D_{14} \cup D_{15}) \cdot \\
&\cdot [(D_{16} \cup D_{17} \cup D_{18}) \cap (D_{19} \cup D_{20} \cup D_{21}) \cap (D_{22} \cup D_{23} \cup D_{24}) \cap (D_{25} \cup D_{26} \cup \\
&\cup D_{27}) \cap (D_{28} \cup D_{29} \cup D_{30})]
\end{aligned} \tag{6}$$

The precedent expression has following meanings:

- $D_{V'}$ , failure of bearing roller,
- $D_{K1'}$ ,  $D_{K2'}$ ,  $D_{K3'}$ ,  $D_{K4'}$ , failure of body, shaft, bearing and roller sealing group, respectively,
- $D_{K1.1'}$ ,  $D_{K1.2'}$ ,  $D_{K1.3'}$ ,  $D_{K3.1'}$ ,  $D_{K3.2'}$ ,  $D_{K3.3'}$ ,  $D_{K3.4'}$ ,  $D_{K4.1'}$ ,  $D_{K4.2'}$ , failure of cylinder, housing, bearing and roller sealing group, respectively,
- $D_{K4.1.1'}$ ,  $D_{K4.1.2'}$ ,  $D_{K4.1.3'}$ ,  $D_{K4.1.4'}$ ,  $D_{K4.1.5'}$ , failure of internal sensor elements, rubber ring, push ring, sealing ring, and sealing oil ring, respectively,
- $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{15}, D_{16}, D_{17}, D_{18}, D_{19}, D_{20}, D_{21}, D_{22}, D_{23}, D_{24}, D_{25}, D_{26}, D_{27}, D_{28}, D_{29}, D_{30}$ , failure or deformity, weld cracking, cylinder corrosion; weld cracking, corrosion, deformity, damage to the housing fitting (for bearings); weld cracking, branch deformity, pipe deformity, damage to the housing fitting (for bearings) of the shaft, corrosion, jamming, splashing, no bearing lubrication; deformity, broken, rigid internal sensor elements; deformed, broken, aged rubber ring; deformed, battered, broken push sealing ring; deformed, battered, broken sealing ring; deformed, battered, broken oil ring, respectively.

Based on **events** expressed from (1) to (6) **the probability of events-failures** of the bearing roller is as follows:

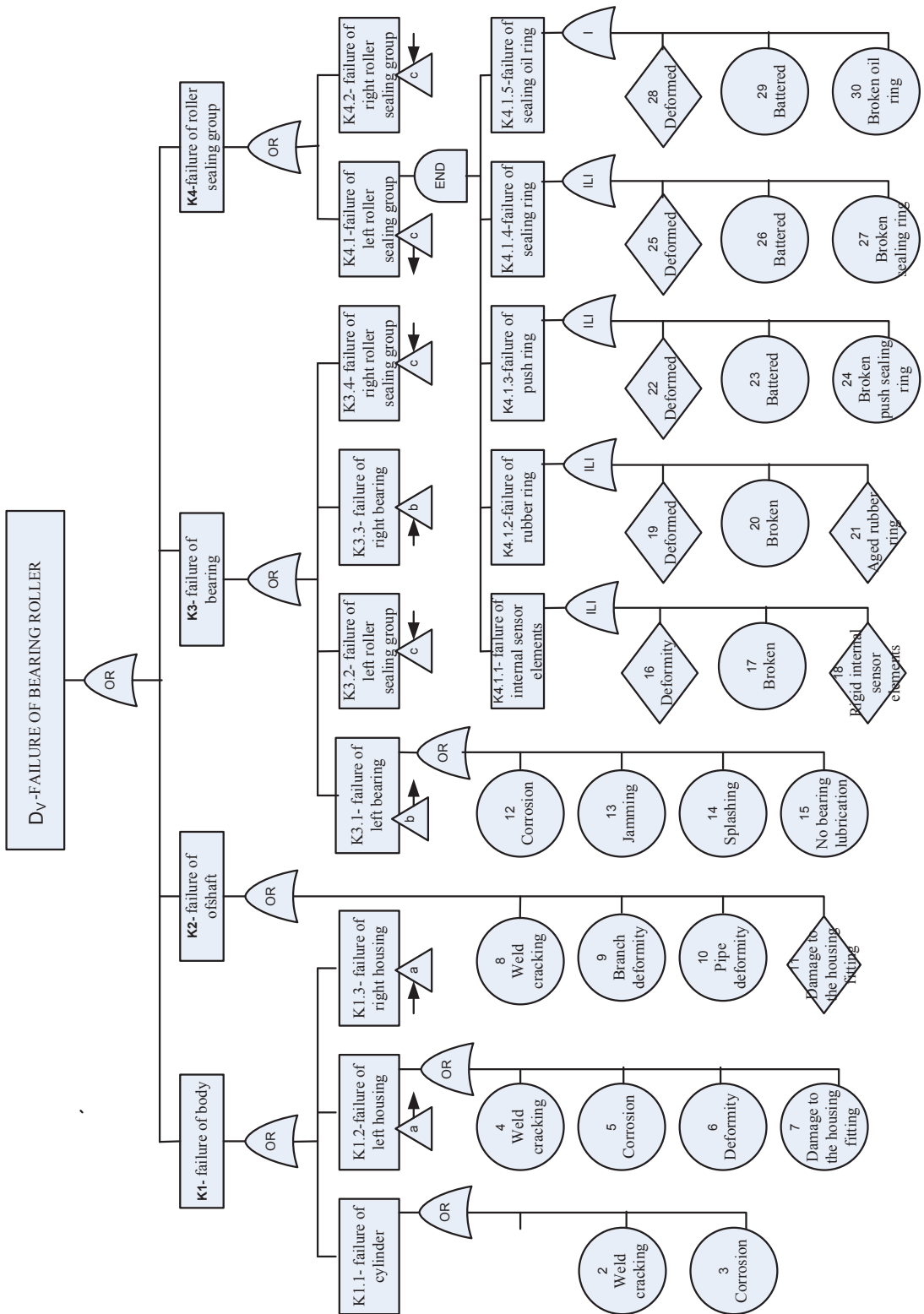


Fig. 4. Fault tree of bearing roller

$$\begin{aligned}
P(D_V) &= P(D_{K1} \cup D_{K2} \cup D_{K3} \cup D_{K4}) = \\
&= P\left[(D_{K1.1} \cup D_{K1.2} \cup D_{K1.3}) \cup D_{K2} \cup (D_{K3.1} \cup D_{K3.2} \cup D_{K3.3} \cup D_{K3.4}) \cup \right. \\
&\cup (D_{K4.1} \cup D_{K4.2})\left.] = P\left[(D_{K1.1} \cup D_{K1.2} \cup D_{K1.3}) \cup D_{K2} \cup (D_{K3.1} \cup D_{K3.2} \cup D_{K3.3} \cup D_{K3.4}) \cup \right. \\
&\cup (D_{K4.1.1} \cap D_{K4.1.2} \cap D_{K4.1.3} \cap D_{K4.1.4} \cap D_{K4.1.5})\left.] = \tag{7} \\
&= P\left\{\left[(D_1 \cup D_2 \cup D_3) \cup (D_4 \cup D_5 \cup D_6 \cup D_7) \cup (D_4 \cup D_5 \cup D_6 \cup D_7)\right] \cup \right. \\
&\cup \left[(D_8 \cup D_9 \cup D_{10} \cup D_{11})\right] \cup (D_{12} \cap D_{13} \cup D_{14} \cup D_{15}) \cup \\
&\cup \left[(D_{16} \cup D_{17} \cup D_{18}) \cap (D_{19} \cup D_{20} \cup D_{21}) \cap (D_{22} \cup D_{23} \cup D_{24}) \cap (D_{25} \cup D_{26} \cup D_{27}) \cap \right. \\
&\cap (D_{28} \cup D_{29} \cup D_{30})\left.] \cup (D_{12} \cap D_{13} \cup D_{14} \cup D_{15}) \cup \left[(D_{16} \cup D_{17} \cup D_{18}) \cap \right. \\
&\left. \cap D_{19} \cup D_{20} \cup D_{21}) \cap \cap (D_{22} \cup D_{23} \cup D_{24}) \cap \cap D_{25} \cup D_{26} \cup D_{27}) \cap \cap (D_{28} \cup D_{29} \cup D_{30})\left. \right\}
\end{aligned}$$

Accepting that failures of shaft, roller body and bearing are mutually independent and exclusive, and failures of bearings and sealing group interdependent, the probability of roller failure based on the expression (7) reads:

$$\begin{aligned}
P(D_V) &= P(D_{K1} \cup D_{K2} \cup D_{K3} \cup D_{K4}) = \\
&= P(D_{K1}) + P(D_{K2}) + P(D_{K3}) + P(D_{K4}) - P(D_{K3} \cap D_{K4}) = \\
&= P(D_{K1}) + P(D_{K2}) + P(D_{K3}) + P(D_{K4}) - P\left[(D_{K3.1} \cup D_{K3.2} \cup D_{K3.3} \cup D_{K3.4}) \cap \right. \\
&\cap (D_{K4.1.1} \cap D_{K4.1.2} \cap D_{K4.1.3} \cap D_{K4.1.4} \cap D_{K4.1.5})\left.] = \tag{8} \\
&= P(D_1) + P(D_2) + P(D_3) + 2\left[P(D_4) + P(D_5) + P(D_6) + P(D_7)\right] + P(D_8) + P(D_9) + P(D_{10}) + \\
&+ P(D_{11}) + 2\left[P(D_{12}) + P(D_{13}) + P(D_{14}) + P(D_{15})\right] + 2\left[P(D_{16}) \cdot P(D_{17}) \cdot P(D_{18}) \cdot P(D_{19}) \cdot \right. \\
&\cdot P(D_{20}) \cdot P(D_{21}) \cdot P(D_{22}) \cdot P(D_{23}) \cdot P(D_{24}) \cdot P(D_{25}) \cdot P(D_{26}) \cdot P(D_{27}) \cdot P(D_{28}) \cdot P(D_{29}) \cdot \\
&\cdot P(D_{30})\left.] - 2\left[P(D_{12}) \cdot P(D_{16}) \cdot P(D_{17}) \cdot P(D_{18}) \cdot P(D_{19}) \cdot P(D_{20}) \cdot P(D_{21}) \cdot P(D_{22}) \cdot \right. \\
&\cdot P(D_{23}) \cdot P(D_{24}) \cdot P(D_{25}) \cdot P(D_{26}) \cdot P(D_{27}) \cdot P(D_{28}) \cdot P(D_{29}) \cdot P(D_{30})\left.]
\end{aligned}$$

With following meanings:

- $P(D_V)$ , failure probability of bearing roller,
- $P(D_{K1}), P(D_{K2}), P(D_{K3}), P(D_{K4})$ , failure probability of body, shaft, bearing and roller sealing group, respectively,
- $P(D_{K1.1}), P(D_{K1.2})=P(D_{K1.3}), P(D_{K3.1})=P(D_{K3.3}), P(D_{K3.2})=P(D_{K3.4})=P(D_{K4.1})=P(D_{K4.2})$ , failure probability of cylinder, housing, bearing and roller sealing group, respectively,
- $P(D_1), P(D_2), P(D_3), P(D_4), P(D_5), P(D_6), P(D_7), P(D_8), P(D_9), P(D_{10}), P(D_{11}), P(D_{12}), P(D_{13}), P(D_{15}), P(D_{16}), P(D_{17}), P(D_{18}), P(D_{19}), P(D_{20}), P(D_{21}), P(D_{22}), P(D_{23}), P(D_{24}), P(D_{25}), P(D_{26}), P(D_{27}), P(D_{28}), P(D_{29}), P(D_{30})$ , failure probability, i.e. deformity, weld cracking, cylinder corrosion; weld cracking, corrosion, deformity, damage to the housing fitting (for bearing); weld cracking, branch deformity, pipe deformity, damage to the shaft fitting (for bearing), corrosion, jamming, splashing, no bearing lubrication; deformity, cracking, rigid internal sensor elements; deformity, cracking, aged rubber ring; deformity, battering, cracking of push sealing, ring; deformity, battering, cracking of sealing ring; deformity, battering, cracking of oil ring, respectively.

Having in mind that the probability of the product event-failure (from  $P(D_{12})$  to  $P(D_{30})$ ) gates  $K_3$  and  $K_4$  can be ignored as they represent quantities of a low order (multiplicity of probability 23 subparts), the probability expressed by equation (8) can be specified in form,

$$\begin{aligned}
P(D_V) &= P(D_{K1} \cup D_{K2} \cup D_{K3} \cup D_{K4}) = \\
&= P(D_1) + P(D_2) + P(D_3) + 2[P(D_4) + P(D_5) + P(D_6) + P(D_7)] + \\
&+ P(D_8) + P(D_9) + P(D_{10}) + P(D_{11}) + 2[P(D_{12}) + (PD_{13}) + P(D_{14}) + P(D_{15})] + \\
&+ 2[P(D_{16}) \cdot P(D_{17}) \cdot P(D_{18}) \cdot P(D_{19}) \cdot P(D_{20}) \cdot P(D_{21}) \cdot P(D_{22}) \cdot P(D_{23})P(D_{24})P(D_{25}) \cdot \\
&\cdot P(D_{26}) \cdot P(D_{27}) \cdot PD_{28}) \cdot P(D_{29}) \cdot P(D_{30})]
\end{aligned} \tag{9}$$

By knowing the probability of event-failure of roller parts  $P(D_i)$  it is possible to determine the probability of roller failure- $P(D_V)$ . The reliability of the roller  $R_V(t)$  in this form is determined based on this probability,

$$R_V(t) = 1 - P(D_V) \tag{10}$$

### BLOCK DIAGRAM AND FUNCTION OF ROLLER RELIABILITY

Based on parts which are constructually forming the roller and way of functioning of the roller itself the conclusion is that the roller is representing an order connection [6] from the point of defining the reliability block diagram. Which means that the roller is failing if some part or groups of the roller are failing. In other words, if the roller body or roller shaft or ball bearing or sealing group (consisting of five parts) is failing, then the roller is failing as a system, too.

This means that all parts: roller body and shaft, left bearing and left sealing group as well as right bearing and right sealing group are accurate i.e. functioning without damages. Based on this conclusion the reliability block diagram has been defined and displayed on Fig. 5.

Based on the block diagram of function reliability, the roller reliability is:

$$R_V(t) = R_T(t) \cdot R_O(t) \cdot R_L(t) \cdot R_{ZGL}(t) \cdot R_D(t) \cdot R_{ZGD}(t) \cdot R_D(t) \cdot R_{ZGD}(t) \tag{11}$$

Assuming that the reliability of the left bearing is equal to the reliability of the right bearing and the reliability of the left sealing group is equal to the right sealing group, as they are made of the same material, the reliability function in form of expression (11) can be red in following form,

$$R_V(t) = R_T(t) \cdot R_O(t) \cdot (R_L(t))^2 \cdot (R_{ZG}(t))^2 \tag{12}$$

With following meanings:

- $R_V(t)$ , roller reliability,
- $R_T(t)$ , roller body reliability,
- $R_O(t)$ , roller shaft reliability,
- $R_{LL}(t)=R_{LD}(t)=R_L(t)$ , reliability of left (LL), right (LD), i.e. ball bearing (L) of the roller,
- $R_{ZGL}(t)=R_{ZGD}(t)=R_{ZG}(t)$ , reliability of left (ZGL), right (ZGD), i.e. sealing group (ZG) of the roller,
- changeable times (of functioning of single roller parts and the roller).

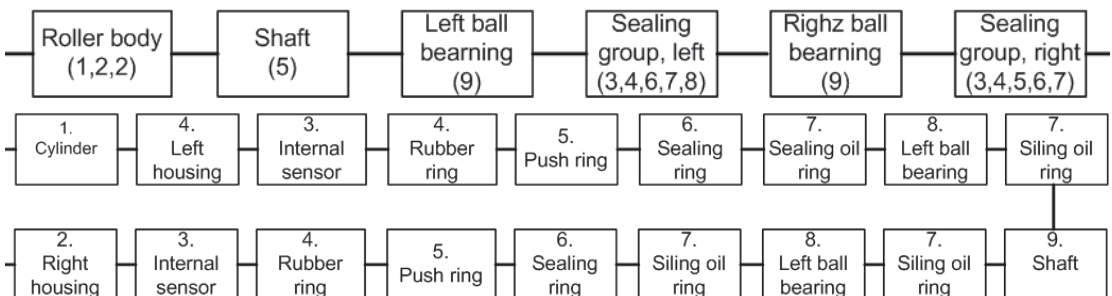


Fig. 5. Block diagram of roller reliability



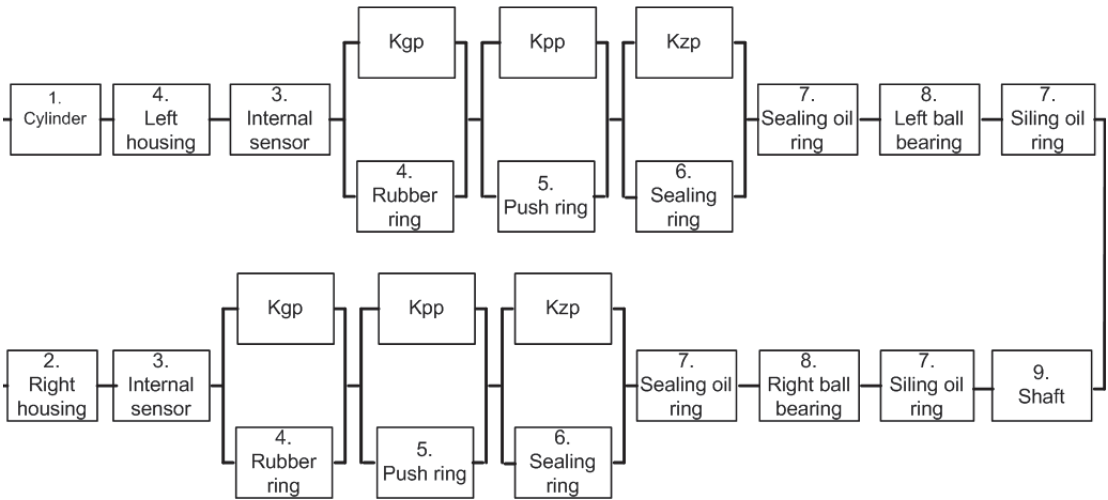


Fig 6. Block diagram of roller reliability with quasi order connection of sealing group parts

Through further analysis of roller construction parts, especially of the sealing group, the reliability diagram may be defined from the point of following criteria:

- a roller failure sets in if any part cancels which means any part of a roller, namely or cylinder, or shaft, or left housing, or left internal sensors, or left rubber ring, or left push ring, or left sealing ring., or left sealing oil ring, or left ball berning, or left sealing oil ring, or right sealing oil rin, or right ball berning, right sealing oil ring, or right push ring, or right rubber ring, or right internal sensors, or right housing;
- a roller failure sets in if any part of the roller cancels and one of the parts of the roller sealing group, namely or cylinder, or shaft, or left housing, or left internal sensors, and left rubber ring, and left push ring, and left sealing ring, or left sealing oil ring, or left ball berning, or left sealing oil ring, or right sealing oil ring, or right ball berning, right sealing oil ring, and right sealing ring, ang right push ring, and right rubber ring, or right internal sensors, or right housing.

The Block diagram relevant to the case under a) is displayed on Fig 5, and the case under b) on picture 6. (for the sealing group as quasi order connection of parts: rubber ring, pushing and sealing ring).

Reliability function:

- relevant to case under a) is:

$$R_V(t) = R_T(t) \cdot R_O(t) \cdot (R_L(t))^2 \cdot R_{UPL}(t) \cdot R_{GPL}(t) \cdot R_{PPL}(t) \cdot R_{ZPL}(t) \cdot R_{PL}(t) \cdot R_{PL}(t) \cdot R_{PL}(t) \cdot R_{UPD}(t) \cdot R_{GPD}(t) \cdot R_{PPD}(t) \cdot R_{ZPD}(t) \cdot R_{PD}(t) \cdot R_{PD}(t) \quad (13)$$

Assuming that the reliability of the left are equal to the right internal sensor elements, the reliability of the left is equal to the right rubber ring, the reliability of the left is equal to the right push ring, the reliability of the left is equal to the right sealing ring and the reliability of the left ist equal to the right ring, as they are made of the same material, the reliability function in form of the expression (13) may be written in following form,

$$R_V(t) = R_T(t) \cdot R_O(t) \cdot (R_L(t))^2 \cdot (R_{UP}(t)) \cdot (R_{GP}(t))^2 \cdot (R_{PP}(t))^2 \cdot (R_{ZP}(t))^2 \cdot (R_P(t))^4 \quad (14)$$

- relevant to case under b) is:

$$R_V(t) = R_T(t) \cdot R_O(t) \cdot (R_L(t))^2 \cdot R_{UPL}(t) \cdot [1 - (1 - R_{GPL}(t)(1 - K_{GPL})) \cdot [1 - (1 - R_{PPL}(t)(1 - K_{PPL})) \cdot [1 - R_{ZPL}(t)(1 - K_{ZPL})] \cdot R_{PL}(t) \cdot R_{PL}(t) \cdot R_{UPD}(t) \cdot [1 - (1 - R_{GPD}(t)(1 - K_{GPD})) \cdot [1 - (1 - R_{PPD}(t)(1 - K_{PPD})) \cdot [1 - R_{ZPD}(t)(1 - K_{ZPD})] \cdot R_{PD}(t) \cdot R_{PD}(t) \quad (15)$$

Assuming that the reliability of parts of the left and right sealing group is equal to the reliability function of the quasi order connection of the sealing group within the reliability function of the roller reads:

$$R_V(t) = R_r(t) \cdot R_o(t) \cdot (R_L(t))^2 \cdot (R_{UP}(t))^2 \cdot [1 - (1 - R_{GP}(t)(1 - K_{GP}))^2] \cdot [1 - (1 - R_{PP}(t)(1 - K_{PP}))^2] \cdot [1 - R_{ZP}(t)(1 - K_{ZP})]^2 \cdot (R_P(t))^4 \quad (16)$$

In preceding expressions the meanings are:

- $R_{UPL}(t)=R_{UPD}(t)=R_{UP}(t)$ , reliability of the left (UPL), right (UPD) internal sensor elements (UP) of the roller,
- $R_{GPL}(t)=R_{GPD}(t)=R_{GP}(t)$ , reliability of the left (GPL), right (GPD), rubber ring (GP) of the roller,
- $R_{PPL}(t)=R_{PPD}(t)=R_{PP}(t)$ , reliability of the left (PPL), right (PPD) push ring (PP) of the roller,
- $R_{ZPL}(t)=R_{ZPD}(t)=R_{ZP}(t)$ , reliability of the left (ZPL), right (ZPD) push ring (ZP) of the roller,
- $R_{PL}(t)=R_{PD}(t)=R_P(t)$ , reliability of the left (PL), right (PD), roller ring (P),
- KGP, KPP, KZP parameter of the quasi order connection (fictional element) of the rubber ring, push ring and sealing ring, respectively.

## CONCLUSIONS

For the evaluation of the roller reliability and its components the way of evaluation presented in this study will be applied. By implementation of the quoted way purchasing of quality rollers is provided. We are emphasizing that this is applicable under exploitation as well as under laboratory conditions. For quality evaluation in laboratory conditions a simulation of practice conditions will be applied at a test table which is specially designed and made for these purposes. Beside the displayed test table (picture 2) another test table is in progress on which the contamination of real exploitation conditions will be simulated under laboratory conditions (rain, sand, dust, soil, snow, low temperatures). Everything stated is for purposes of providing and installation of reliable rollers into BTR-Bagger-transporter-remover and BTM-bagger-transporter-mill systems whereby the slowdown costs of these systems are significantly reduced because of the rollers (primarily the bearing and supporting rollers).

## ACKNOWLEDGEMENTS

This study is part of the project TR35030 and TR35029 participated by the Serbian Ministry of Science and Technology between the years 2011-2014.

## REFERENCES

- [1] R. Mitrović, G. Ivanović, M. Tasić, D., Jovanović, and Group author., TR35029 'Development of methodologies for improvement of operational performance, reliability and energy efficiency of machine systems used in the resource industry' - Project report, Ministry of Education and Science of the Republic of Serbia, (2011).
- [2] R. Mitrovic, Z. Stamenic, Z. Miskovic, M. Tasic, D. Jovanovic, Installation for carrier roller idlers of belt conveyors testing on the open pit mining, Proceedings of the 7th International Scientific Conference - Research and development of Mechanical Elements and Systems - IRMES, (2011), Zlatibor, Serbia, 383-388.
- [3] R. Mitrovic, Z. Stamenic, Z. Miskovic, M. Tasic, Laboratory installation for belt conveyor idlers testing on servo hydraulic testing machine Zwick HB-250, Proceedings of the 7th International Scientific Conference - Research and development of Mechanical Elements and Systems - IRMES, (2011), Zlatibor, Serbia, 371-376.
- [4] G. Ivanovic, R. Mitrovic, D. Jovanovic, M. Tasic, Research and determination of coal transportation conveyer idlers reliability, Proceedings of the International conference KODIP-2011, Herceg Novi, Montenegro, (2011).
- [5] G. Ivanović, P. Popović, M. Stojović, M. (1992) Fault Tree Applied to vehicle design, International Journal of Vehicle Design, Vol. 15, Nos 3/4/5, pp. 416-424, Milton Keins, 1994., ISSN 0143-3369, IF 0,018 (1992).
- [6] G. Ivanović, D. Stanivuković, I. Beker, Reliability of tehcnical Systems, University of Novi Sad Faculty of Novi Sad, University of Belgrade, Faculty of Mechanical Engineering, Militari Difens, Srbija. (2010).

## SOFTWARE IMPLEMENTATION OF THE MODEL OF GAME THEORY IN MARKETING DECISIONS

---

*In this paper it considers an application of game theory, especially a model of antagonistic game, which we applied in some cases of marketing decisions, or, in general case, in conflicts that might arise in the market. A mathematical model which we considered is closely related to model of linear programming, theory of probability and statistics. In addition, for the model described in this paper we was done the original software's solution, i.e. the procedure implemented in statistical programming language „R“, that simulates given model.*

---

### INTRODUCTION

Mathematical modeling as a process is increasingly spreading to different areas, both natural and social sciences, especially economics. The reason for this is certainly a very turbulent movements, crises and conflicts that occur in the various forms of the local economy at the global level. Contemporary problems in the financial market, especially the high-intensity conflicts that are still very valid, are good motivation for an exact, mathematical way to solve very difficult and intricate problems of the economy at the present, when the crisis spread to most developed world economies. That is why modern marketing has developed methods and models of advertising products, but they certainly can be improved by taking into account first of all the possible reaction of market competition. It is well known that consumers their decision to purchase a particular product often made under very aggressive, sometimes irritating influence of various media, especially television, sometimes because of their persistence and aggression consumers may be caused by a counter. Therefore, the problem of marketing advertising management as well as advertising their products should pay particular attention to the way they have been presented. Zaber products mainly optimizes the cost of advertisement with the expected effects which should produce among consumers, while, on the other hand, must be taken into all of the activities of competitors. Empirical fact that the competition will certainly react as the advertising campaign of a product is affected by the demand for the same or similar products with the competing companies, which, ultimately, creates a conflict situation in the market. The final outcome of the conflict depends primarily on the selection and combination of strategies that are positioned two antagonistic sides chosen. The choice of inappropriate strategies and, accordingly, the wrong business decisions in such circumstances certainly result in a decrease in demand, and on the other side and loss of market position that a company has.

Game theory in operations research is widely used, especially in the optimization of various conflict situations (see for example [3], [6]) and is thus closely related to decision theory. Mathematical models created in game theory allows the analysis of different situations in which the outcome of the game by two or more players do not depend only on one of them, but the expected reactions of other participants in the game. So if we are to compare this with the decision-making managers, it is clear that their decisions are clearly interdependent. From the perspective of game theory goal of every player is a timely response to action opponents in order to achieve a better result. Fundamental problem is finding the appropriate criteria for the selection of the optimal strategy. In this case it is necessary to make a distinction between pure and mixed strategies. Specifically, in a pure strategy players for the each situation of the game  $G$  choose exactly one of the options that are available to them. However, in the mixed strategy choice of players is not identical in every situation, which in turn means that the

---

1 Faculty of Sciences and Mathematics, Kosovska Mitrovica, Serbia

2 Faculty of Economics, Kosovska Mitrovica, Serbia

3 Faculty of Management, Zajecar, Serbia

mixed strategy consists of the shares of the different choices. Depending on the media in which two competing firms advertise, they certainly have access to a number of strategies. Payments in the model of matrix game  $G$  is created based on the estimated effects of all possible combinations of strategies in relation to percentage change in the market share of one of the players. The main feature of which will be further considered in the simulation consists of a percentage of participation, where we assume that the random variables that they represent a normal distribution whose parameters have to be estimated on the basis of relevant data, while generating appropriate numerical values can be realized with appropriate software package on the computer.

Since the matrix form of payment in the game  $G$  whose elements are simulated values of percentage market share of each of them, the model can be transformed into a linear programming model, and as such an appropriate method to solve linear programming ( $LP$ ). After the implementation of appropriate procedures, i.e. simulations and solving  $LP$ - problem, the next step consists in forming the frequency distribution of appropriate strategies, and then for each of the arithmetic mean of the distribution is calculated. Finally, in this way the output from a share strategies that provide the greatest gains in the set game  $G$ . We will continue to deal with these issues in order to develop an original model based on game theory that can be applied to business decision-making in marketing and in this way, at least, and management. For the application of the model developed the original software as logistical support to operationalize and greatly facilitates its implementation.

## MODEL CONSTRUCTION

Mathematical tools that we need to describe the decision problems in marketing, using game theory applies primarily to concepts of non-coitional, antagonistic, matrix game of a zero sum. More precisely, these concepts we can describe formally as it is follows:

**Definition 1.** *Non-coitional game* is the system  $G = \langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I} \rangle$ , where  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  represents the set of *players*,  $S_i, i \in I$  are the sets of *strategies* of  $i$ -th player, and

$$f_i : \prod_{i \in I} S_i \rightarrow \mathbf{R} \quad (1)$$

are, so called, *the gains functions*, i.e. the limited functions which shows “the profit” of  $i$ -th player in some situation  $x \in \prod_{i \in I} S_i$ .

**Definition 2.** Non-coitional game  $G$ , defined in (1), is a *finite game* if all sets of strategies  $S_i$  are finite. Finite non-coitional game is a *bi-matrix game* if  $I = \{1, 2\}$ , i.e. there are only two players in the game  $G$ .

**Definition 3.** Non-coitional game  $G$ , defined in (1), is a *game of a zero sum* if for any situation  $x \in \prod_{i \in I} S_i$  it is valid

$$\sum_{i \in I} f_i = 0.$$

Non-coitional game with a zero sum and two players is called *an antagonistic game*.

**Definition 4.** Antagonistic bi-matrix game is called a *matrix game*.

Therefore, in a matrix game, two players in the conflict situation have access to a finite number of different strategies whose choice of different events occurring in the game. In addition, the gain of one player is equivalent to the loss of another, and collectively, the “gain” of both players is zero. All strategies, as well as the individual gains of one, or the loss of another player, enters the game matrix payments, which generally takes the form

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Here, each horizontal line represents a choice of one of the  $m$  possible strategies of the first player, and the vertical line to select one of  $n$  strategies of the other player. Finally, our payment matrix elements  $a_{ij}, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ , are the value of the gains of the first player, or losses of the other player in the selection of appropriate strategies, i.e. in certain game situations. In the following, we will notice the matrix game  $G$  with matrix payments  $A$  as  $G_A$ . The basic principle of optimization in matrix games, as well as no matter where antagonistic game, is the principle that consists in the realization of the so-called, *situation of equilibrium*. This principle requires that in the game  $G_A$  choose it  $i^*$  row and  $j^*$  column of matrix  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  so it is valid

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}.$$

This, in fact, means that the first player, by choosing the optimal strategy  $i^*$  provides certain, guaranteed gain  $a_{i^*j^*}$ , no matter which strategy  $j$  choice his opponent. Similarly, the second player, assuming the rational behavior, choosing an optimal strategy  $j^*$  whose selection provides maximum value of loss  $a_{i^*j^*}$ . In this way,  $i^*$  and  $j^*$  are the *optimal pure strategy* in the game  $G_A$ , while  $a_{i^*j^*}$  is the *saddle point*, i.e. the *optimal value* of the game  $G_A$ , denoted as

$$v^* = v(G_A) = a_{i^*j^*}.$$

In a game where there is a unique optimal strategies both of players can not of improve their score by changing strategies, and such a game in a *state of equilibrium*. For these games then we say than have a clean (optimal) strategies, and thus, matrix game completely resolved.

## MATRIX GAMES WITH MIXED STRATEGIES

If the game matrix  $A$  there is no saddle point, players have not the choice of optimal (pure) strategies that enable a single set limit profit or loss. Determining the optimal strategies of players then are based on introduction the random elements in the game, which is reflected in the formation of a series of probability with which each of them chooses a particular strategy. So, they do not choose just one strategy, but for more of them, with a certain probability, and such choice of two or more pure strategies is called a *mixed strategy*. Suppose that the first player, who can have  $m$  strategies, each of which can be selected with probabilities  $p_1, \dots, p_m$ , and we will denote the appropriate probabilities of selection one of  $n$  strategies of other player with  $q_1, \dots, q_n$ . These values, of course, satisfy the non-negativity conditions  $p_i \geq 0, q_j \geq 0$ , as well as the conditions

$$\sum_{i=1}^m p_i = \sum_{j=1}^n q_j = 1,$$

because both of players will most sure choose at least one of the offered strategies. Probabilities of all possible choices of the strategies above are representing the mixed strategies of given matrix game. The optimal mixed strategies in zero-sum games between two players can be determined in several ways. However, one of the lengthiest ways of solving these games was to express them as a linear programming problem, which will also create the opportunity for a software implementation of the model. For this purpose, we introduce the following terms:

**Definition 5.** Matrix games  $G_A$  and  $G_B$ , with matrices  $A$  and  $B$  of the same size  $m \times n$ , called *affine-equivalent* if there exists  $k > 0$  and  $\tau \in \mathbb{R}$ , such that

$$B = k \cdot A + \tau \cdot \mathbf{1}_{m \times n},$$

where  $\mathbf{1}_{m \times n}$  is matrix of the same size as the matrices  $A$  and  $B$ , such that all their elements are equal to one.

It is easily verifying that affine-equivalent games have the same set of optimal strategies, where

$$v(G_A) = k \cdot v(G_B) + \tau.$$

In the special case when  $k = 1$ , the games  $G_A$  and  $G_B$  we will call *an equivalent games*. Then, the general procedure to finding optimal mixed strategy is based on the direct application of the *LP* principles. In addition, based on the above concepts, the arbitrary matrix game  $G_A$ , specifics with a game matrix  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ , we can assume that  $\min(a_{ij}) \geq 0$ . Otherwise, if the condition of non-negativity is not fulfilled, we will solve equivalent game with matrix

$$A' = A + \tau \cdot \mathbf{1}_{m \times n}$$

where  $\tau = |\min(a_{ij})|$ .

Now, we can formulate a *LP* model for the first player, where the coordinates of the vector  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)^T$  are probabilities that the first player chooses its strategies  $i=1, \dots, m$ . Let us introduce the vector

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^T = \frac{1}{v(\mathbf{p})} \cdot \mathbf{p},$$

where

$$v(\mathbf{p}) = \min \left( \sum_{i=1}^m p_i a_{i1}, \sum_{i=1}^m p_i a_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^m p_i a_{in} \right).$$

It can be shown (see, for instance [1], [2], [5], [7]) that the optimal value of the game is  $v^* = \max v(\mathbf{p})$ , and that is to find the optimal mixed strategy  $\mathbf{p}^* = (p_1^*, \dots, p_m^*)^T$  equivalent to solving the following *LP* problem:

Find the optimal, minimum value of the function

$$(\min) F_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m x_i = \frac{1}{v^*},$$

as per system of constrains  $A^T \cdot \mathbf{x} \geq \mathbf{1}_{n \times 1}$ .

Similarly, we can construct an appropriate *LP* model of the other player. To this end, denote with  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T$  the probabilities of choice some of its strategies  $j=1, \dots, n$ , and

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T = \frac{1}{v(\mathbf{q})} \cdot \mathbf{q},$$

where

$$v(\mathbf{q}) = \max \left( \sum_{j=1}^n q_j a_{1j}, \sum_{j=1}^n q_j a_{2j}, \dots, \sum_{j=1}^n q_j a_{mj} \right).$$

Based on such a set of conditions, we have the problem of the maximum:

Find the optimum, the maximum value of the function

$$(\max) F_2(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n y_j = \frac{1}{v^*},$$

as per system of constrains  $A \cdot \mathbf{y} \leq \mathbf{1}_{m \times 1}$ .

Obviously, this is a *LP* problem which is dual to the problem of minimum described above. After determine the system of vector  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ , that they represent the required optimum solutions of the *LP* problem, the optimal mixed strategy for the first and second players are, respectively,

$$\mathbf{p}^* = v^* \cdot \mathbf{x}^*, \quad \mathbf{q}^* = v^* \cdot \mathbf{y}^*,$$

where

$$v^* = \frac{1}{F_1(\mathbf{x}^*)} = \frac{1}{F_2(\mathbf{y}^*)}.$$

On this way, the problem of finding optimal mixed strategy of an arbitrary matrix game is entirely resolved.

### THE PARAMETERS OF MARKET SHARE

Immediately prior to application of the model of the game theory in marketing decision, it is necessary to designate the percentage value of the market share, which represents the elements of the matrix payment of the game  $G_A$ . These values, in general, cannot be safely and reliably. For this reason, they are usually defined as random variables that are at least approximately normally distributed. Density function in this case is given by

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbf{R},$$

where  $\mu \in \mathbf{R}$  and  $\sigma > 0$  are the parameters of normal distribution which need to be determined. Specifically, management assesses their values, thus narrowing the choice of some strategy which is not optimal. In order to achieve this, it is important to take into account all the necessary information on which to assess changes in the market share of the company. In this way, they get the rated values of the parameters  $\mu_{ij} \in \mathbf{R}$  and  $\sigma_{ij} > 0$  of normally distributed random variables  $a_{ij}$ . They suit to each particular situation in matrix game  $G_A$  with the matrix of payment  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ , and we can write

$$a_{ij} \sim N(\mu_{ij}, \sigma_{ij}^2) \Leftrightarrow a_{ij} \sim \mu_{ij} \pm \sigma_{ij}.$$

In the next step, using a software application that simulates the decision-making model, we can access to LP program, which is implemented as a series of  $T$  successive simulations, where, for example  $T = 100, 150, 200, \dots$  Each simulation individually, i.e. all realized values of the variables  $a_{ij}$  represents the probability of changes in market share expressed as a percentage, which appears as a last combination of appropriate strategies first and second players in the game  $G_A$ . By solving this model, we come to the optimal strategies, determined on the basis of a given set of simulations. Obviously, obtained strategies are somewhat various and that enabling the formation of their frequency distribution. After that, the optimal strategies of the appropriate model are determined as the means of the established distribution.

### SOFTWARE IMPLEMENTATION AND APPLICATION OF THE MODEL

As an illustration, consider two companies, for example RODA and IDEA, which share a particular segment of the consumer goods market. To increase market share, we assume that the management of both companies launch campaign to advertising their products. Given that the total sales of limited purchasing power of consumers, it is the demand of one of the company can only increase the downloading of the market share held by the competitor, so it is essential to choose the right advertising strategy. It can further be assumed that the managements of both companies start advertising campaigns in each of the three possible media: newspapers, radio and television. In this way, we can form a matrix payment format  $3 \times 3$ , which includes the estimated value of all the effects, i.e. all possible combinations of strategies with percentage change in the market share of the company, as well as the estimated value of the standard deviation of market effects. Suppose that the matrix payment company RODA as the first, the underlying IDEA as the other player, outlining the estimated value of the expectation and standard deviation of the percentage change in its market share, as follows:

$$A \sim \begin{bmatrix} 0,5 \pm 0,1 & 2,5 \pm 0,3 & -1,5 \pm 0,2 \\ 1,5 \pm 0,2 & -0,5 \pm 0,1 & 0,5 \pm 0,1 \\ -0,5 \pm 0,1 & 0,5 \pm 0,1 & 1,5 \pm 0,2 \end{bmatrix}.$$

Thus, the elements of the payment matrix  $A$  are obtained in a random way, as the realization of a

normally distributed random variables, described above. In addition, business strategies of company RODA are arranged as a rows, and a strategies of other company IDEA by columns of matrix  $A$ . For both companies the appropriate strategies are their decision to advertise their products, respectively, in the press (the first rows and columns), followed by radio (the other rows and columns), and at the end of the TV (the third rows and columns). That, precisely, it means that the value  $a_{11} \sim 0,5\% \pm 0,1\%$  is the percentage of increase in the market share of the first player, i.e. RODA company, in relation to the firm IDEA, as other player, if both choose their strategies as advertising in newspapers. Similarly, the next value  $a_{12} \sim 2,5\% \pm 0,3\%$  shows the percentage of the market share of company RODA if it chooses advertising in newspapers, and competitive company advertising on the radio, etc.

In this way, we have created the necessary conditions for the application of the above procedure to find the optimal strategies of the two opposing companies. Formally, this procedure can be shown by the algorithm which consists of the following iterative steps:

**Step 1:** For  $k = 1, 2, \dots, T$  repeat the following steps.

**Step 2:** Compute the  $k$ -th realization of the game's matrix  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ , where  $a_{ij} \sim N(\mu_{ij}, \sigma_{ij}^2)$ , and denote such realization as  $A[k] = [a_{ij}[k]]_{m \times n}$ .

**Step 3:** If  $\tau = \min_{i,j} a_j[k] < 0$ , then  $A[k] \leftarrow A[k] + |\tau|$ .

**Step 4:** Find the minimum of objective function  $F_1(\mathbf{x})$  under linear constrains  $A[k]^T \cdot \mathbf{x} \geq \mathbf{1}_{n \times 1}$ . Denote the solution of this minimization problem as  $\mathbf{x}^*[k]$  and obtained minimum as  $F_1(\mathbf{x}^*) = F_1^*[k]$ .

**Step 5:** Similarly as above, solve a dual problem, i.e. find the maximum of function  $F_2(\mathbf{y})$  under constrains  $A[k] \cdot \mathbf{y} \leq \mathbf{1}_{m \times 1}$  and denote this solution as  $\mathbf{y}^*[k]$ .

**Step 6:** Compute  $\mathbf{p}^*[k] = \mathbf{u}^*[k] \cdot \mathbf{x}^*[k]$  and  $\mathbf{q}^*[k] = \mathbf{u}^*[k] \cdot \mathbf{y}^*[k]$ , where  $\mathbf{u}^*[k] = F_1^*[k]^{-1}$ .

**Step 7:** Next  $k$ .

**Step 8:** Find the empirical distributions of vector sequences  $\mathbf{p}^*[k]$ ,  $\mathbf{q}^*[k]$ , and numeric sequence  $\mathbf{u}^*[k]$ . Take theirs means as estimates of optimal strategies of the both players and the game's value, respectively.

Software's implementation of the algorithm above is realized by the original authors' code, i.e. the procedure written in statistical programming language „R“. For this purpose, we used a random numbers generators algorithm to generate the members of matrix sequence  $A[k]$ , as well as the Nelder-Mead's method of constrained optimization, also implemented in „R“. Using these procedures in our model, after  $T = 100$  simulations of normal distributed random variables  $a_{ij}$ , we obtained the estimated values of optimal strategies  $\mathbf{p}^*$  and  $\mathbf{q}^*$ , as well as estimates of the game's value  $\mathbf{u}^*$ .

**Table 1.** Summary statistics of the optimal strategies and the game's value.

Statistics	Game's value	Optimal strategies: 1. PLAYER			Optimal strategies: 2. PLAYER		
		$P_1^*$	$P_2^*$	$P_3^*$	$q_1^*$	$q_2^*$	$q_3^*$
Min.	0.1580	0.1207	0.2768	0.1112	0.3333	0.3333	0.3333
1st Qu.	0.4126	0.1740	0.3779	0.3158	0.3333	0.3333	0.3333
Median	0.4699	0.2044	0.4106	0.3804	0.3333	0.3333	0.3333
3rd Qu.	0.5244	0.2340	0.4692	0.4347	0.3333	0.3333	0.3333
Max	0.6867	0.3429	0.6687	0.5499	0.3333	0.3333	0.3333
<b>Mean</b>	<b>0.4600</b>	<b>0.2067</b>	<b>0.4290</b>	<b>0.3643</b>	<b>0.3333</b>	<b>0.3333</b>	<b>0.3333</b>
St.Dev.	0.1058	4.23E-02	8.59E-02	8.93E-02	1.51E-08	1.91E-08	1.28E-08



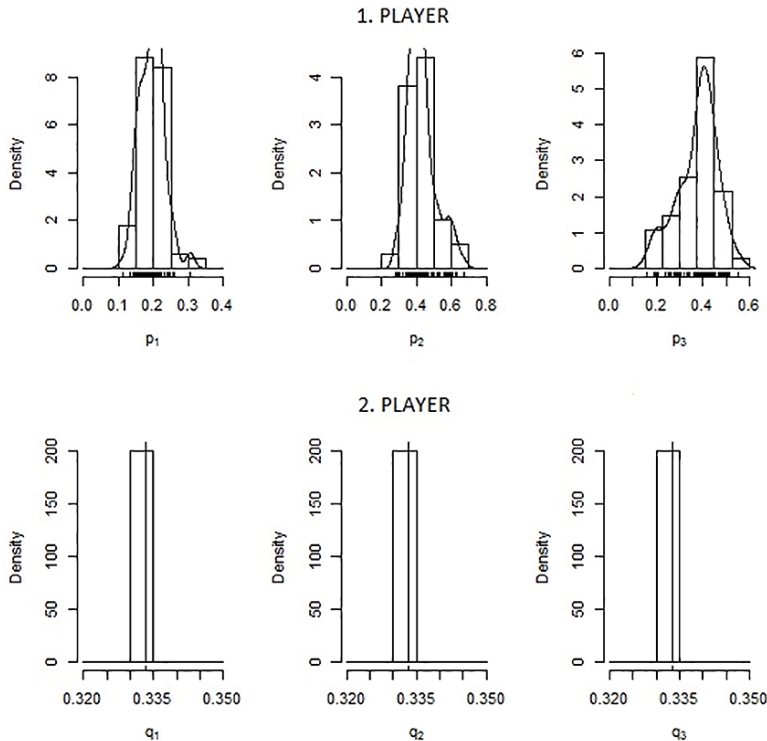


Fig. 1. Empirical densities of the optimal strategies.

In the next step, we examined their stochastic properties, i.e. we funded the empirical distributions of realizations of  $\mathbf{p}^*$  and  $\mathbf{q}^*$ , interpreted as realizations of some random variables with the appropriate (unknown) distribution. The empirical distributions (histograms with the appropriate empirical densities functions) of the obtained estimates are shown in Fig. 1. As we can see, the estimates of the first player's strategies (company RODA) show some variability, in dependence on the realized values of normally distributed random variables  $a_{ij}$  in matrix  $A[k]$ . On the other hand, it is obviously that estimated values of the second player's optimal strategies (company IDEA) are uniformly distributed, i.e. all of them have the same, equal "probability of success."

Similar conclusion we can get from the summary statistics which are shown in Table 1. Here, for the optimal strategies sequences  $p^*[k]$ ,  $q^*[k]$ , as well as the sequence  $u^*[k]$ , we computed some of the "usual" statistics: minimums, maximums, median, quartiles, means and standard deviations. Especially, we took the means of these series as estimated, optimal values, i.e. percentage amount of funds that each company should invest in proper form advertisements. The optimal strategy of the firm RODA can be expressed as vector

$$\mathbf{p}^* = (0.2067, 0.4290, 0.3643)^T$$

which components represent the percentage amount of funds that the company needs to invest, respectively, in advertising in newspapers, on radio and television. On the other hand, the optimal strategy of the other player, companies IDEA, as a solution of the dual problem is

$$\mathbf{q}^* = (0.3333, 0.3333, 0.3333)^T$$

So, this company with equal probability should be chosen by any pure strategy, i.e. with the same means and the same advertising investments in each of these media. Finally, in the realized model obtained the average optimal value games  $u^* = 0.4600$ . This means that the company RODA, in the "ideal" case, obtained 0.46% of the market held by its rival. In contrast, for the other company IDEA the same obtained value of game  $u^*$  is the minimum value of the loss of market, expressed as percentages.

## REFERENCES

- [1] Binmore K. Game Theory-A Very Short Introduction. Oxford University Press Inc, New York. 2007.
- [2] Božinović M., Stojanović V. Mathematical Methods and Models in Economics of Companies. VEŠ, Leposavić. 2005.
- [3] Božinović M., Stojanović V. The Appliance of the Games Theory in Solution of the Ecological Conflict. Proceeding by Conference SYM-OP-IS 2007. P.27-30.
- [4] Božinović M.. Researsh Operation, Faculty of Economics, Kosovska Mitrovica. 2012.
- [5] Carmichael F. A Guide to Game Theory. Pearson Education Limited. Harlow. 2005.
- [6] Jones A. J. Games Theory-Mathematical Models of Conflict. Mathematics and its Application. Chichester, E. Horwood. 1980.
- [7] Воробьев, Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игр. Наука, Москва. 1984.

## USING METADATA TO QUERY THE DATABASE ON THERMAL ECONOMY OF RUSSIA THROUGH THE INTERNET

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТАДААННЫХ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ЗАПРОСОВ К БАЗЕ ДАННЫХ ПО ТЕПЛОВОМУ ХОЗЯЙСТВУ РОССИИ ЧЕРЕЗ ИНТЕРНЕТ

The paper discusses the Project implemented by Energy System Institute SB RAS and aimed to solving problems related to the development of Russia's heat economy. In this paper, the data-processing system (DPS) means a software tool that provides collection, transfer, processing, storage and output of digital data that reflect the technical and economic characteristics of different objects. The lower level objects of the DPS are statistical data of heat and power plants. The top level objects - the administrative territorial division of Russia: economic regions, districts, territories and republics. The aim of this work is to develop the DPS to monitor the status of HPP and forecasting of thermal economy of Russia and its regions.

#### ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена проекту, поддерживаемому Институтом Систем Энергетики СО РАН для решения задач развития теплового хозяйства (ТХ) России и её регионов [1]. В основе проекта лежит проблемно-ориентированная база данных.

В исследованиях развития ТХ наиболее трудоёмким является процесс обработки большого объема разнородной информации, собранной за различные временные периоды и слабоструктурированной из-за постоянно меняющихся социально-экономических условий в стране [2].

Для решения поставленной задачи автором был предложен новый подход к созданию информационно-вычислительной системы (ИВС), содержащей в себе сервер базы данных с технико-экономическими, социальными и климатическими показателями работы различных объектов теплоэнергетики.

На нижнем уровне **объектами** базы данных ИВС являются тепло и электрогенерирующие предприятия, а на верхнем уровне - административно-территориальные деления страны: экономические районы, области, края, республики, Рис. 1.



Рис. 1. Схема работы ИВС

**Целью** настоящей работы является разработка ИВС для мониторинга состояния объектов теплоэнергетики и прогнозирования развития ТХ России, а также реализация проблемно-ориентированной БД для поддержки исследований в области теплоснабжающих систем.

<sup>1</sup> Melentiev's Energy System Institute SB of RAS, Irkutsk, Russia

Основными положениями в данной работе являются:

1. Использование концепции проектирования MVC (Model-View-Controller) как основы архитектуры ИВС.
2. Технология массовой загрузки данных с идентификацией объектов среди слабоструктурированных данных [3].
3. Использование конструктора параметризованных запросов.
4. Технология доступа к хранилищу данных с использованием метаданных для формирования запросов через Интернет.

## АРХИТЕКТУРА

Архитектура ИВС представлена четырьмя основными функциональными компонентами:

1. Хранилище данных, включающее в себя: сервер базы данных Firebird; источники статистической информации, представленные в виде различных таблиц и др.
2. Подсистема массовой загрузки данных - ETL («extract, transform, load - извлечение, преобразование, загрузка») - один из основных процессов в управлении хранилищами данных, который включает в себя: извлечение данных из внешних источников; их преобразование; и загрузка в базу данных.
3. Подсистема управления - состоит из программных модулей осуществляющих автоматизированную обработку данных (с участием пользователя).
4. Подсистема представления (интерфейсы ИВС) - обеспечивает вывод структурированной информации в любой заданной форме - в виде сводных таблиц, графиков, экранных форм и прочее.

Концептуально схему работы ИВС можно представить в рамках архитектуры проектирования MVC - Model-View-Controller (Модель-Представление-Управление), Рис. 2.

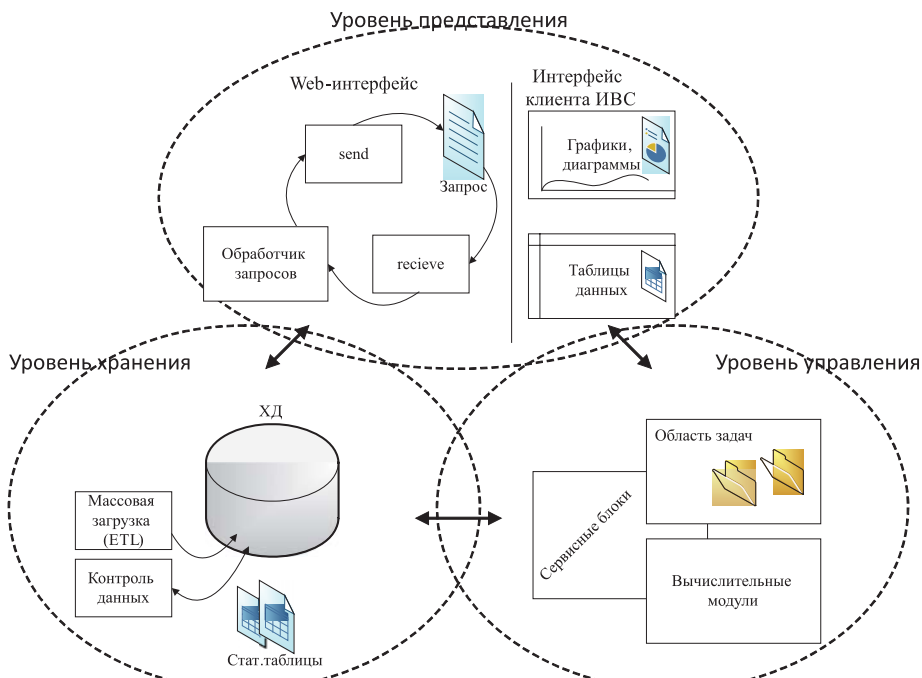


Рис. 2. Концептуальная схема ИВС на основе MVC-архитектуры

## ТЕХНОЛОГИЯ МАССОВОЙ ЗАГРУЗКИ ДАННЫХ

Основной объем базы данных ИВС составляет статистическая информация о работе крупных теплоэлектростанций (ТЭС) России, количество которых достигает более 2000 и каждая из них имеет несколько десятков показателей.

Выделяются такие показатели, как номинальная мощность ТЭС, значения выработанной и отпущенной ими энергии за год, количество и тип затраченного топлива, удельные расходы топлива на отпущенное тепло и электроэнергию и другие.

По разным причинам возникают проблемы идентификации объектов в таблицах:

1. Меняются количество и формат таблиц, отражающих основные показатели работы ТЭС.
2. Изменяются наименования ТЭС.
3. Изменяется порядок и расположение ТЭС в таблицах.
4. ТЭС в таблицах не проиндексированы.

Так как любая БД предполагает целостность структуры, хранящихся в ней данных, необходимо иметь удобный инструмент для автоматизированного массового ввода [4].

Для решения этих проблем в работе была применена объектно-ориентированная модель данных.

В основе подхода лежит реструктурирование данных в отдельные досье на каждый объект. Досье можно представить в виде редактируемой таблицы, которая содержит набор параметров изучаемого объекта и их значения, разбитые по годам.

**Таблица 1.** Содержимое досье ТЭС-1 города Макаров

Условное обозначение	Наименование показателя	Значение показателя			
		1990	1991	1992	...
Станция	Название станции	ТЭС г.Макаров			
Нуст., кВт	Номинальная установленная электрическая мощность станции	25000   25000   25000			
Wотп, тыс.кВт.ч	Отпуск электроэнергии станцией	84199   71280   30203			
Qстанции Гкал	Установленная тепловая мощность	331440   316000   133446			
Газ, т.у.т.	Расход газа, тонн условного топлива	0   0   0			
Уголь, т.у.т.	Расход угля, тонн условного топлива	109936   106959   43541			
...	...	...			

Такой способ массовой загрузки данных исключает практически любую возможность ошибок при вводе, и позволяет формировать временные тренды по электростанциям в БД, даже если название электростанции в корне поменялось. Предложенный подход также может применяться для универсального представления разных типов статистических данных. На Рис. 3 представлена блок-схема работы ETL.

## ТЕХНОЛОГИИ

В ходе анализа потребностей исследователей в данной предметной области был разработан специальный конструктор запросов для ИВС, который является в своем роде шаблоном для создания сложных параметризованных запросов к БД.

Благодаря использованию конструктора пользователи ИВС вовсе не оперируют понятиями SQL-запросов, а лишь формируют таблицу с необходимыми полями. Таким образом, работа с ИВС не зависит от программиста, и у пользователей нет необходимости в специализированных знаниях для составления низкоуровневых запросов на SQL, Рис. 4.

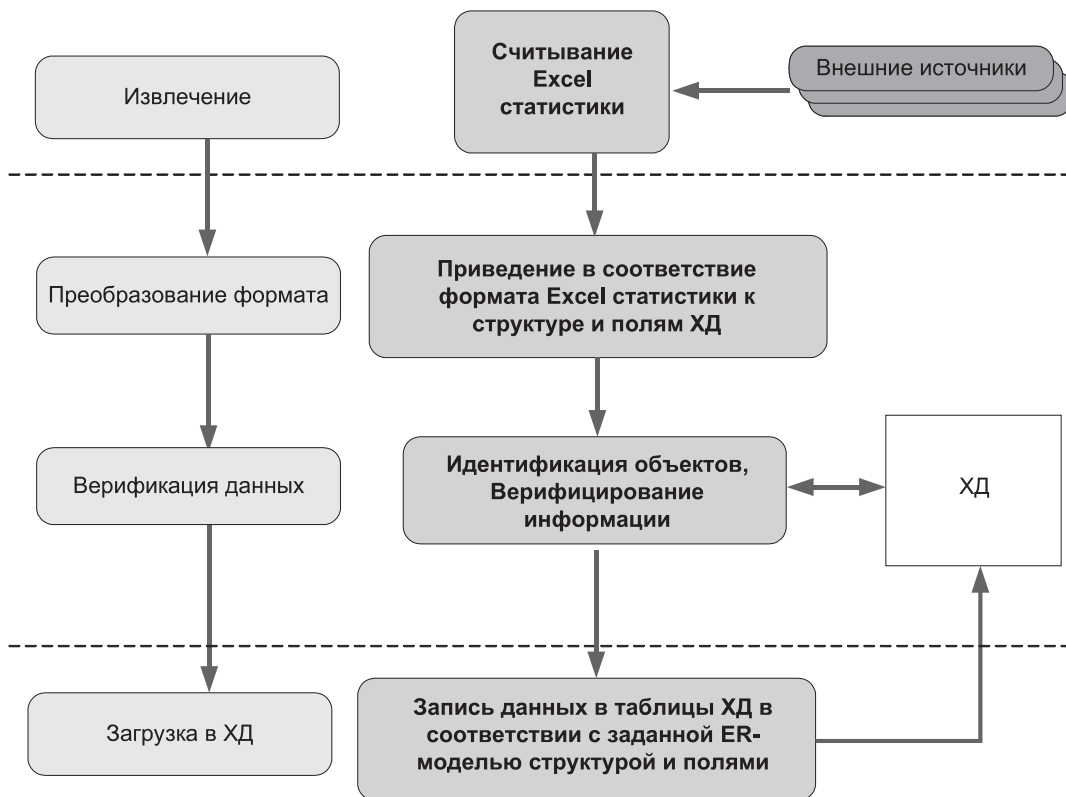


Рис. 3. Блок-схема работы ETL

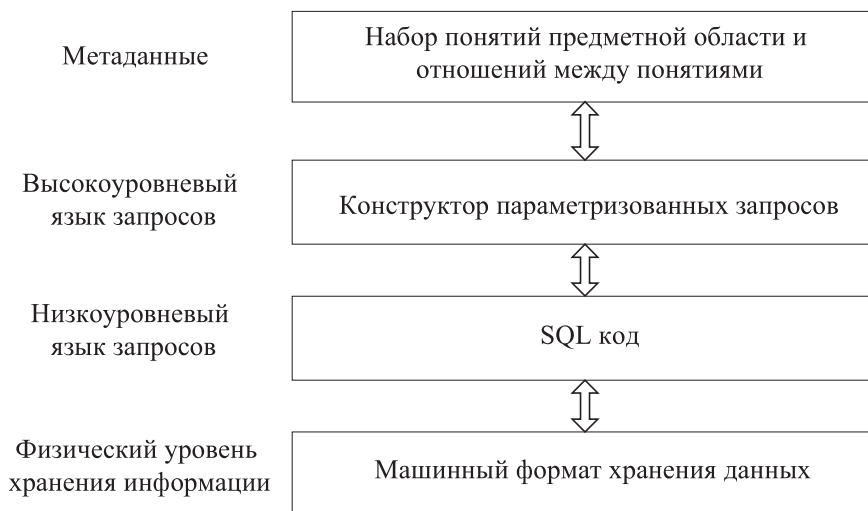


Рис. 4. Уровни представления запросов к БД

Такой подход позволяет формировать довольно сложные параметризованные запросы, во время исполнения которых происходят специальные вычисления, такие как интерполяция значений, математические отношения между показателями (сумма, разность, произведение, деление и прочие), Рис. 5.

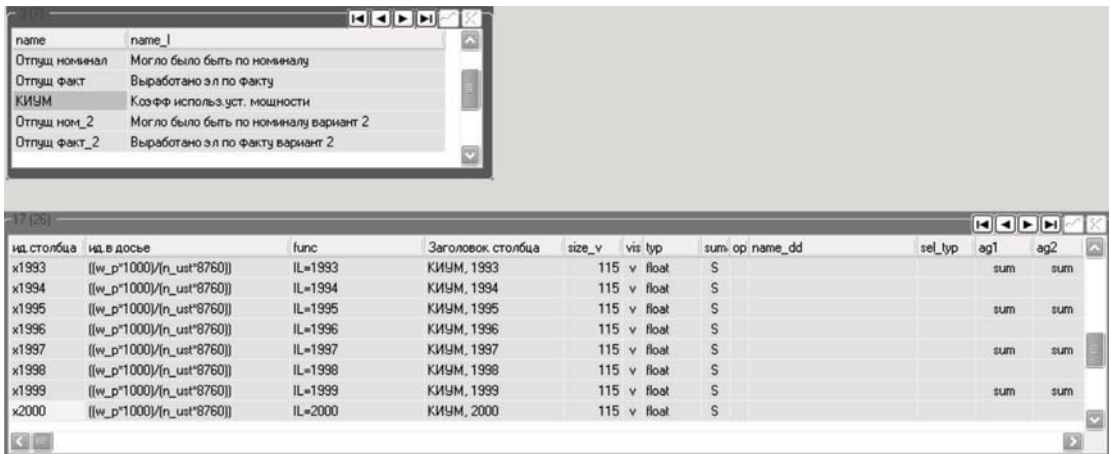


Рис. 5. Конструктор запроса (в интерфейсе ИВС)

## МЕТАДАННЫЕ

Автором предложена технология построения запросов к БД ИВС с использованием метаданных, состоящая из следующих этапов:

1. Выбор уровня исследуемого объекта (территориально-административные объекты, ТЭС и др.).
2. Построение списка необходимых параметров - выбор показателей объектов.
3. Формализация - описание параметров запроса к базе данных. Предлагается использовать метаданные для описания параметров запроса с применением RDF (Resource Description Framework) [5,6,7].
4. Проверка достоверности полученных результатов, дополнение и редактирование запроса.

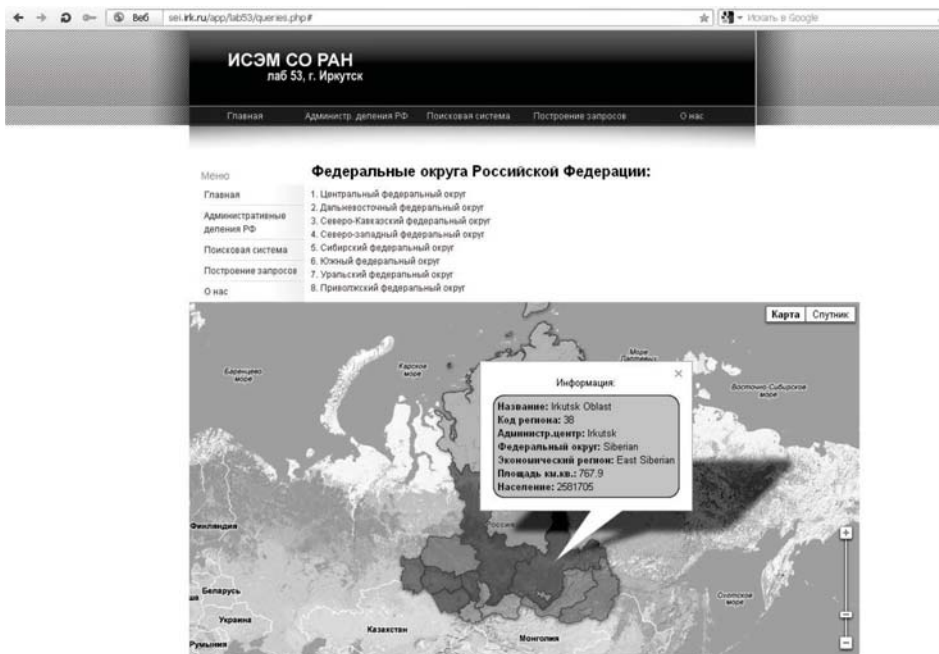


Рис. 6. Выбор исследуемого территориального объекта страны

Термин *метаданные* здесь - это описание данных в базе в заданных терминах предметной области.

Предложенная технология позволяет исследователям составлять запрос к базе данных ИВС непосредственно с любого компьютера, имеющего доступ в Интернет, при этом, оперируя лишь терминами предметной области, предложенными через web-интерфейс ИВС.

Для иллюстрации процесса выполнения запросов к БД через Интернет были выбраны следующие параметры: «отпуск тепла» и «отпуск электроэнергии» всеми теплоэлектростанциями в Иркутской области, Рис. 6, 7.

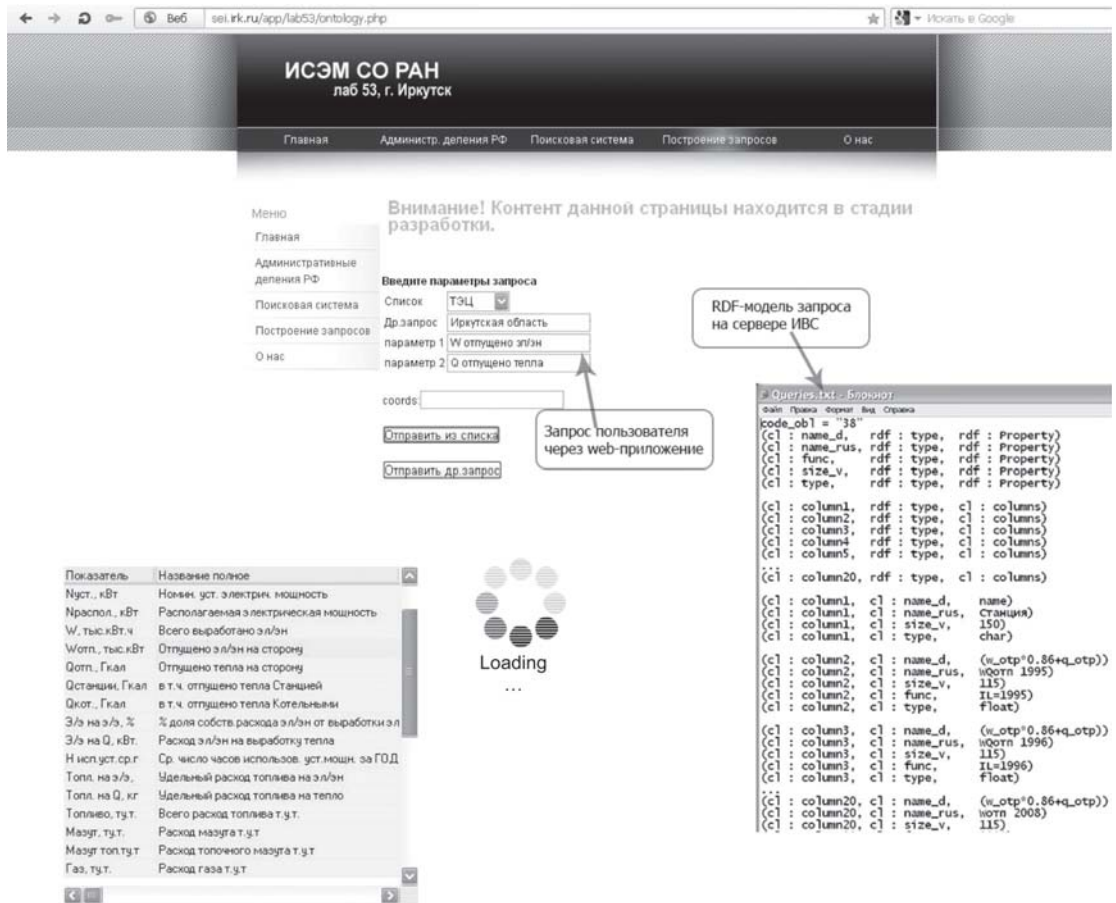


Рис. 7. Выбор параметров объекта и составление запроса.

Схема построения запроса состоит из следующих этапов:

- 1 этап - формирование запроса. Для каждого запроса на сервере формируется RDF файл с метаданными.
- 2 этап - чтение и исполнение. Приложение ИВС, запущенное на сервере, анализирует RDF и формирует непосредственный SQL-запрос к БД.
- 3 этап - формирование результата. Результатом обработки запроса в ИВС на сервере формируется ответ в виде таблицы, карты, графика или диаграммы, после чего Интернет-страница обновляется и пользователь получает искомый результат, Рис. 8.



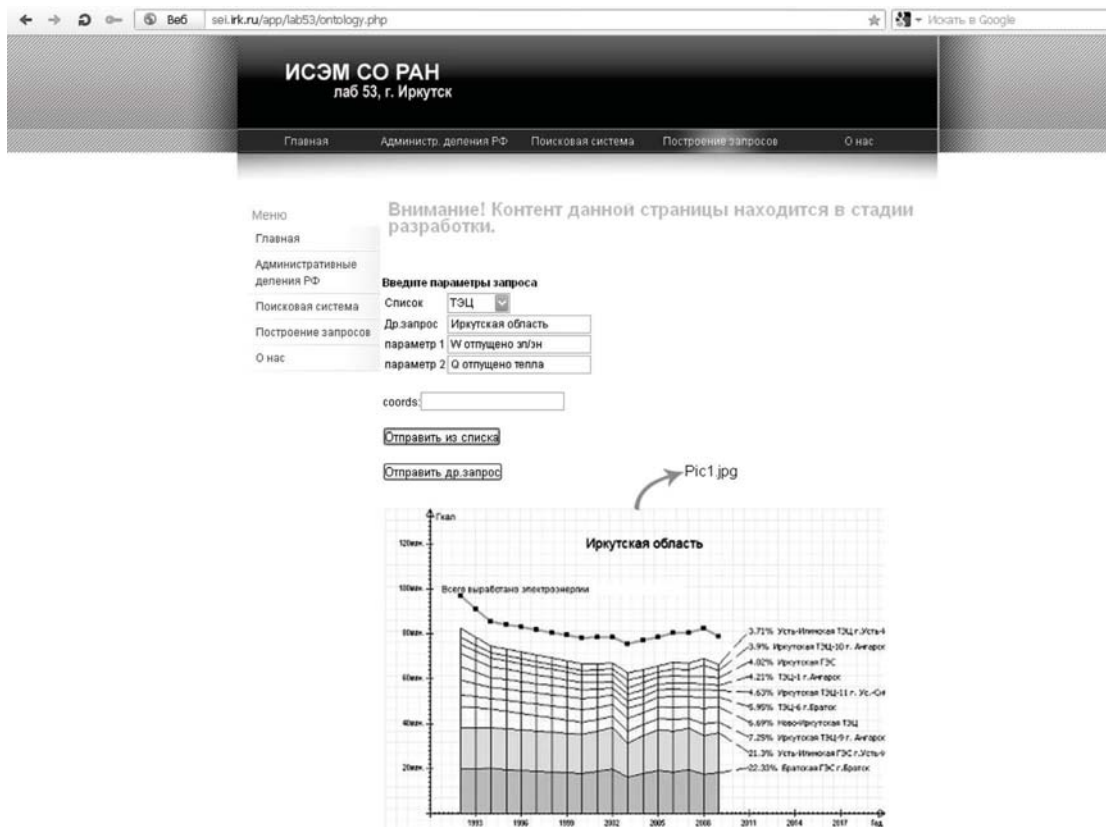


Рис. 8. Результат выполнения запроса к базе данных ИВС

Таким образом, разработанный автором web-интерфейс ИВС, дает возможность пользователям:

1. получать эффективный доступ к информации из хранилища данных ИВС, не прибегая к помощи программистов, не имея навыков работы с базами данных и специфических знаний для создания SQL-запросов,
2. формировать запросы, непосредственно через Интернет, независимо от операционной системы и программного обеспечения пользователя.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Предложен новый, современный взгляд на проблему анализа и обработки большого объема информации. Разработаны основные компоненты ИВС для решения задач развития ТХ России.

Предложенный автором способ обработки данных значительно упрощает расчеты, сокращает фактическое время на составление прогнозов в энергетике, и позволяет повысить достоверность результатов.

Особенностями предложенных автором методических принципов построения ИВС являются:

1. Разработка технологии однозначной идентификации теплоэлектростанций среди слабоструктурированных данных;
2. Создание конструктора параметризованных запросов, который позволяет пользователям ИВС составлять запросы, не вдаваясь в подробности структуры БД;
3. Разработка технологии доступа к хранилищу данных через интернет, что позволяет получать необходимую информацию, не имея специальных навыков работы с SQL.

Опыт использования разработанной автором ИВС в исследованиях задач развития теплового хозяйства России был применен сотрудниками ИСЭМ СО РАН при выполнении проекта, поддерживаемого грантом РФФИ № 13-07-00297 А.

Одной из практических работ, выполненных с помощью ИВС, было проведение ретроспективного анализа структуры «отпуска тепла и электроэнергии» по всем теплоэлектростанциям Иркутской области [8].

На рис. 9 и 10 представлены график и количественная диаграмма ретроспективы отпуски тепла «Qотп» всеми ТЭС по Иркутской области за последние 20 лет.

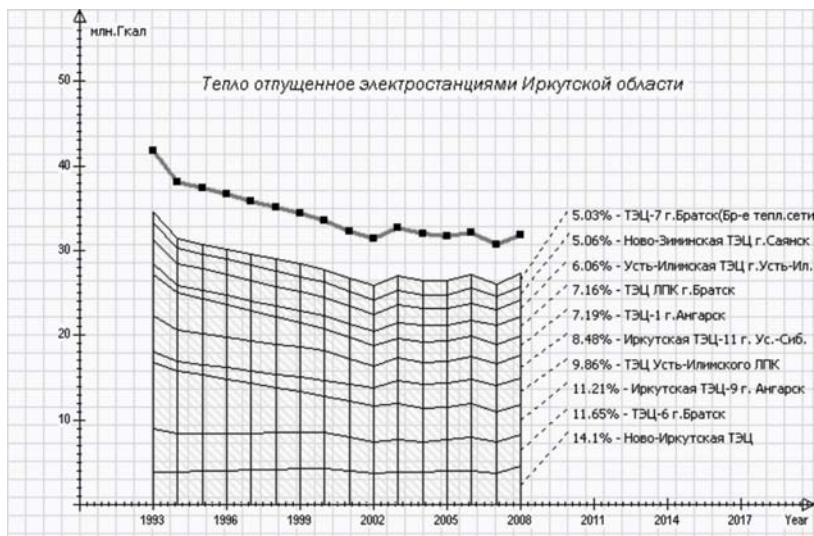


Рис. 9. Структура отпуски тепла по Иркутской области с 1993- по 2008 гг.

На основании построенного в ИВС графика можно говорить, тенденции снижения количества отпускаемого тепла крупными ТЭС Иркутской области. В частности это связано с закрытием большого числа основных потребителей тепла - промышленных предприятий и заводов, исчезновение большой доли сельского хозяйства и прочего.



Рис. 10. Сравнительные диаграммы отпуски тепла по Иркутской области за 1993 и 2008гг.

Из построенных в ИВС сравнительных диаграмм можно сказать о процентном вкладе каждой ТЭС в общее производство тепла в регионе. Так наблюдается снижение доли Иркутской ТЭЦ-9 по состоянию на 1993- год - порядка 18,5 % от общего вклада к 2008- году - 11,2 %. В то время как производственные характеристики Ново-Иркутской ТЭЦ наоборот увеличились с 9,3 % до 14,1 %. Результаты работы были применены в ИСЭМ СО РАН при проведении ряда вычислительных экспериментов с использованием ИВС, связанных с развитием теплоснабжения России, применительно к различным территориям и объектам теплоэнергетики.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Федяев А.В., Федяева О.Н. Комплексные проблемы развития теплоснабжающих систем. - Новосибирск: Наука, 2000. 256 с.
- [2] Мастепанов А.М. Топливо-Энергетический Комплекс России на рубеже веков. Часть 2. М.: Energy, 2009. 251 с.
- [3] Трофимов И.Л. Особенности Информационно-вычислительной системы для обработки и представления данных по теплоэлектростанциям России // Системные исследования в энергетике / Труды молодых ученых ИСЭМ СО РАН. Выпуск 41 - Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2011. - стр.162-170.
- [4] Трофимов И.Л. Автоматизированная обработка статистической информации по электростанциям страны. Труды XIII Байкальской Всероссийской конференции. Часть II. - Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2010. - стр.152-158.
- [5] Тим Бёрнс Ли, Дан Коннолли, World Wide Web Consortium (W3C). Notation3 (N3): a readable RDF syntax. URL: <http://www.w3.org/TeamSubmission/n3/>, дата обращения: 28.03.2012г.
- [6] OWL Web Ontology Language Guide. W3C Recommendation. 10 February 2004. - Режим доступа: <http://www.w3.org/TR/owl-guide>, свободный
- [7] Resource Description framework (RDF), - Режим доступа: <http://www.w3.org/RDF/>, свободный.
- [8] Трофимов И.Л., Стенников В.А. Способ представления и обработки статистической информации по тепловым электростанциям России. / И.Л. Трофимов, В.А. Стенников // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. - Иркутск: ИргУПС. - 2012. - №35.

## LEVERAGING INTERNET MARKETING CAMPAIGNS THROUGH SOCIAL NETWORK ANALYSIS

---

*This paper presents a method of applying social networking and semantic Web technologies in internet marketing. The research subjects are methods and principles of data collection from social networks and their subsequent enrichment with semantic Web technologies using several Web services and APIs. Current trends, practices, problems, and limitations of direct marketing are analyzed, and used to enhance the marketing processes. The model is implemented and tested by developing and using a Web application in direct marketing processes of Faculty of Organizational Sciences.*

---

### INTRODUCTION

Social network sites such as MySpace, Facebook, Twitter and LinkedIn have attracted millions of users since their appearance. People have integrated these sites into their daily practices. Social media is extremely popular at present and its monetization has been discussed in publications but not in details. The most frequently used approach to making money using social media is online advertising [1].

Marketing on social networking sites (internet marketing), is not a substitute for traditional marketing and should be treated as a complement to other marketing activities. Social media networking is part of a trend known as Web 2.0. Its expansion changes the way users and developers use Web, and has a tremendous impact on the way companies conduct marketing.

Social marketing is a popular and effective way of getting information essential for the success of business. One of the most important advantages of social networks, which can contribute to the success of the companies, is creating an interactive contact with the customers. It gives the companies an opportunity to talk with customers on a personal level. They can gain a better understanding of the customer's needs and requirements by directly following them. They can use this information to build effective relationships with customers, which is usually difficult or impossible to achieve through traditional marketing methods. The challenge is to use all information in an appropriate manner and in a meaningful way for the

company. One of the benefits of marketing using social networks is that social marketing can be an inexpensive way to promote a company rather than putting together a huge marketing team or a prohibitive budget.

This paper presents a model for utilization of social networking for gathering data about target groups and execution of Internet marketing campaigns. The main goal of this paper is the improvement of Internet marketing processes by using social networks. In order to achieve this goal, the processes of data gathering, presentation, semantic enrichment, and direct marketing are utilized. The model is implemented and tested by developing and using a Facebook application in direct marketing processes of Faculty of Organizational Sciences' E-business Lab.

### THEORETICAL BACKGROUND

Web 2.0 presents technologies that enable users to communicate with each other, to create, organize and share any type of content using social networks [2]. There is an explanation why Web 2.0 is social media that holds such potentials [3]. Firstly, Web 2.0 applications engage customers in creative process by producing and distributing information through writing, content sharing, social networking and social bookmarking. Secondly, it also encourages viral marketing - dissemination of marketing messages by the customers. The time needed to exchange experiences between large numbers of users is also reduced. Web 2.0 presents a variety of networking tools and technologies

---

<sup>1</sup> Faculty of Organizational Science, Belgrade, Serbia

that emphasize the social aspects of the Internet as a channel for collaboration and communication [4]. Social media include Internet based applications with technological foundation of Web 2.0 that enables creation and exchange of user generated content [5]. Based on their application type social media could be divided into five categories: blogs and podcasts, social networks, communities, content aggregators, virtual worlds [6]. Social network sites are Web-based services that enable people to build public or semi-public profiles within a limited system and to declare a list of users with whom they would like to share their interests [7]. They represent virtual spaces for social interaction, public affirmation, and making relationships with friends or colleagues. Online social networks can be described as a global virtual community that connects a group of people in one place where they can exchange ideas and opinions, communicate, chat, date, make a business or personal contacts or maintain existing relationships. Structure of the social networking sites is made out of members, that can be represented as nodes on a network graph, that share interests such as ideas, friends, Web links, likes, dislikes [8].

Companies can use social media in a various ways for business purposes [6]. For the beginning, companies have to understand all the options that social media have to offer and include them into PR ability. It is important to target potential market and reach online customers by PR, who should pass messages about products and save costs compared to traditional marketing approach. Following step is actively listening the customer's thinking. People like to exchange experiences about products or services that they used, and compare expectations and opinions after testing it, through forums, blogs, and online communities. All this information is high quality and low cost market resource for the company. Utilizing social media as direct and personalizing one-to-one marketing tool should help companies to increase interactions with customers.

There are key questions that have to be considered before launching social media strategy for product or service promotion [3]. First one is for those conducting promotion. It is important to know priorities of targeted population, also to

identify level of how often population using social media and consider their habits and behaviors while using it. Cost-benefit analysis should present to the company the financial costs associated with social media approach and to inspect possibility of reducing costs using social media marketing. Companies have to reconsider how social media implementation suit and improve corporate objectives and corporate strategy, and how difficult is to implement it.

Web 3.0 is the new perspective of the World Wide Web that helps transform Web sites into Web services, unstructured information into structured information, and replace existing software platforms with a new generation of platforms as a service. Web 3.0, the third generation of Web technologies and services, is about meaning of data and accents a machine-facilitated understanding of information on the Web. The development of Web 3.0 focuses on adding metadata or information to describe the content of the Web, which provides an intelligent level to the Web site, enables user to communicate completely with the machines and enables machines to communicate with each other. The Semantic Web idea emerged from the confluence of several communities such as artificial intelligence, hypertext and Web developers. The Semantic Web is an approach to encoding and publishing information in ways that makes it easier for computers to understand. DBpedia is a site that can be considered a flagship of semantic web. It contains data from the better-known Wikipedia site in a semantically annotated form intended for use by the machines. DBpedia analyzes the Wikipedia's pages, extracts and publishes structured data from them. DBpedia was extended with a live extraction framework that allows direct changes of the knowledge base. Live extraction framework has a capability of processing tens of thousands changing per day in order to consume the continuous stream of Wikipedia updates [9].

## **SOCIAL NETWORKING-BASED MODEL FOR INTERNET MARKETING CAMPAIGNS**

Social networks represent an excellent medium for improving the performance of educational institutions on the Internet, the reputation and image creation [10]. In this paper, we present an

improved model of conducting internet marketing campaigns that is based around acquiring information from the Facebook social network and using it to directly target a specific group of individuals. The presented model was applied at the E-business Lab by designing a simple implementation based on an existing Facebook application in order to test the feasibility of presented model. This implementation was used to develop an experimental marketing campaign for the E-business Lab. The campaign targeted students and graduates of undergraduate programs that could potentially be interested in attending master and doctoral studies offered by the E-business Lab.

The main idea is that a Facebook application, offering some useful service to the users, can also be used to collect data from them and use it as a basis to construct a generic profile of a target group. The marketer can then utilize this profile in the decision-making process in order to generate appropriate marketing ads. Collected data is

stored in the database and is used to single out common characteristics of potential users of a product or service that is offered by the owner of the application. The list is forwarded to marketers and presented visually using graphs; the marketers can review it and choose a target group for direct Facebook advertising according to the common characteristics identified in the data set. Marketers can further enrich available data using DBpedia or another similar linked data repository, and gain new understanding about the data. The application itself can also make direct posts on the users timeline if a more direct marketing approach is desired. These posts can be made based on some predefined logic, or initiated manually by the marketer; the second option is preferred since all interaction needs to be performed carefully. The model is presented in figure 1, with some elements in the model represented using screenshots from the actual implementation that is outlined later.

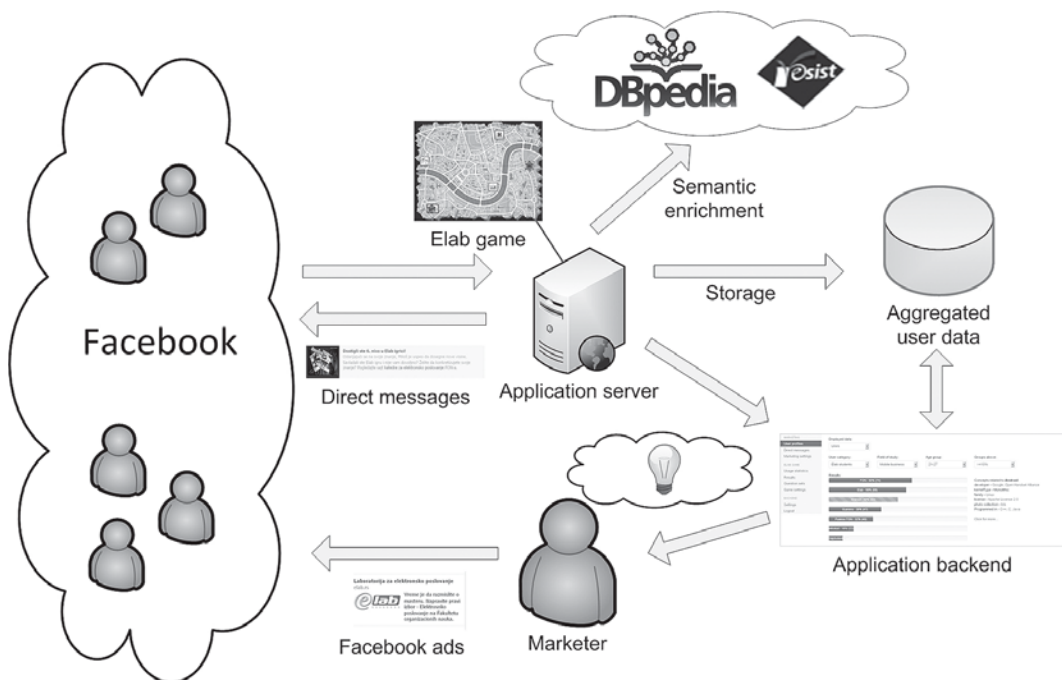


Fig. 1. Model of Internet marketing campaign

The campaign that was developed based on this model took into consideration the characteristics and constraints of the educational context, and the existing courses offered by the E-business Lab. E-business Lab conducts courses on all levels

of studies (undergraduate, master, PhD) and provides students with various services in the area of internet technologies. Its primary goal is improvement of teaching and learning processes by using modern technologies and utilizing distance edu-

cation to support traditional methods of teaching. In accordance to its goals, the E-business Lab possesses an educational Facebook application that allows Facebook users to go through some of the E-business Lab's educational materials in the form of a game. This application was adjusted to implement the presented model.

The application uses environment familiar to the students (Facebook) and the edutainment principle to make learning easier [11]. It can be accessed both by the students enrolled in E-business Lab's online courses, and by other individuals on Facebook. The first group of users is identified automatically by their e-mail address by comparing it those used for E-business Lab's online courses. If the email is not found, the user is assumed to be from the second group. When the application detects the type of the user, it assigns questions of suitable difficulty from the Moodle database. Users not enrolled in Moodle courses are presented with easier questions as a method of introduction to the field of study. This simple, fun way of presenting educational content enables them to become familiar with E-business Lab's courses and,

perhaps, enroll in its master or doctoral programs. The game starts when the user selects a field of study he is interested in. The game then presents available tests, the "library" where teaching materials can be accessed, and other options - finding other users in the game, viewing a high score list, inviting friends to play, or using the forum or the help desk to discuss the game. When enough correct answers to questions are given, the user can proceed to the next level. The questions themselves are extracted from the existing E-business Lab's electronic courses. User's level is displayed on a special map and the progress spends his "energy", which can be replenished in a "virtual shop" and the "reading room", with both offering some additional features to the user. When users that do not attend E-business Lab's courses finish the game, they receive suggestions about courses that would suit them best. The suggestion is based on their results; if they achieved good results, links to appropriate E-business Lab's courses are supplied; if the results were not so good, links to some basic educational resources used in E-business Lab's courses are given.

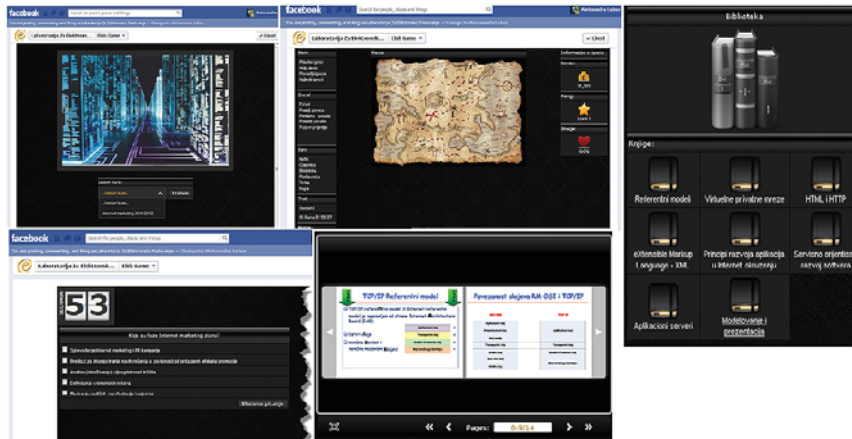


Fig. 2. Different screens of the E-business Lab Game application

This application was improved to collect relevant data from the users Facebook profiles. Naturally, users are asked for consent upon installation of the application, and are also reminded about the privacy policy every time they access the game. The policy states that information stays confidential and is not traceable back to the individual user, being only stored and used anonymously, in the form of aggregated data.

All of the gathered data can be accessed by the marketer through the backend of the application. The backend is shown in Figure 3. Two groups of options are available - one concerning the marketing functionalities of the application and other related to the actual game. The latter group of options contains game usage statistics, high scores and average results, options for question set customization, and general game settings. These op-

tions are not explained further since they are not directly related to the marketing aspect of the application. The marketing group of options allows marketers to review aggregated user profiles and

to customize the messages sent out to users, as well as make some other general changes to the behavior of the gathering functions of the application.

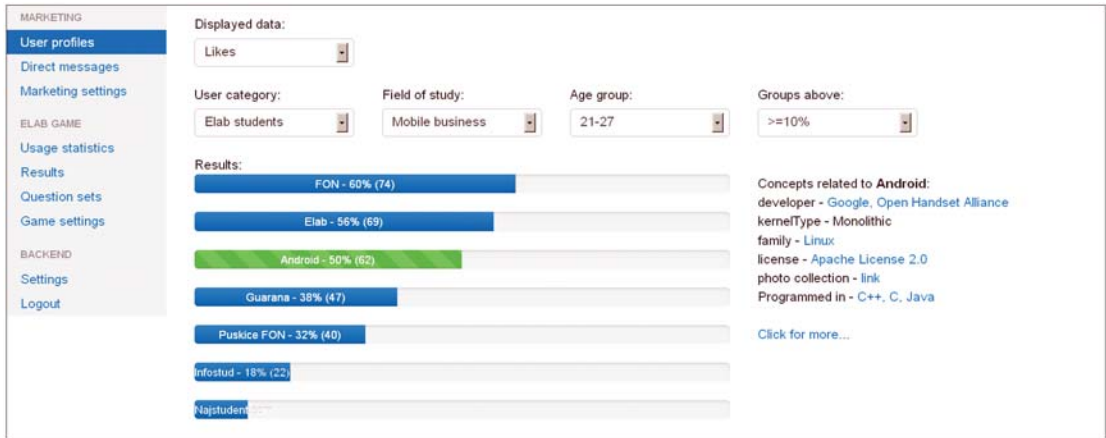


Fig. 3. Backend of the application showing the section for review of aggregated user profiles

Statistics that are gathered about the users include their likes, education, and general area of residence (e.g. city or a geographical region). This data is presented in the form of several bars showing concepts most commonly appearing on users profiles. The marketer can select which group of concepts he wishes to display. If, for instance, users are grouped by their likes, the bars will display names of most commonly liked concepts on the bars, along with the percentage of users and their absolute number (shown in Figure 3). The data set can be narrowed using the available filters: user category, field of study, age group, and percentage of appearance among users.

The most important filter is the “user category” filter that contains two categories - users confirmed as E-business Lab’s students and other users. Both categories are of interest - having a profile of the E-business Lab’s students can be used to adjust learning materials and services offered by E-business Lab to better accommodate existing students. It can also be used to extrapolate the profiles of potential future students, since they would likely have profiles to an extent similar to the existing users. The “others” category can give a more direct insight into the types of individuals interested in courses offered by E-business Lab, with the downside being that this category might contain a far more wide demographic. This is where the other filters are useful. The results

can be filtered by the field of study that the users selected when starting the game, by the age group (especially important for pinpointing potential students), and only top result groups can be shown, thereby eliminating those that appear only a few times.

When analyzing most common likes, there is a possibility that the marketer will not properly understand the significance of underlying trends, hidden behind their manifestation in the form of likes. For this reason, an option of enriching available concepts using DBpedia was added - the marketer can select any of the presented bars and the relations of corresponding liked term will be displayed on the right side, along with links that offer more information.

The previous steps provide a foundation for an Internet marketing campaign. A good online strategy can provide superior results and can be a lot more successful than traditional forms of marketing. Analysis and selection of the most relevant target audience for ad placement and demographic segmentation were performed for E-business Lab’s campaign. Using the generated profiles, ads need to be placed through the mechanisms available in the social network from which the data was gathered. Activities of projecting an optimal number of ads, defining the advertising structure, and scheduling optimal budget need to be performed. For Facebook ads it is important that their design



must have clear and understandable content, and be interesting to potential users in order to pull them in and make them click on the ad. The image has 100x100 pixels and has to be attractive enough for users to wish to read advertisement. When the potential user clicks on the Facebook ad it leads to the landing page shown in Figure 4a). Part of campaign is creating the special “tabs” or sub-pages on Facebook that are located in the top

right corner of the page, right under the “cover” image. The role of these tabs is to provide information to the incoming users, and it is the first page that they will see when they click on one of the ads that were placed to the targeted population. Example page and tabs that are created can be seen in Figure 4b). Facebook page of E-business Lab is also improved by following the user’s profile and adjusting it to their interests.



Fig. 4. a) E-business Lab's landing page

b) Facebook page of E-business Lab

## CONCLUSION

This paper provides a description of a model for execution of Internet marketing campaigns via social networks and Facebook in particular. The model requires that a useful social networking application already exists in order to use it as a source for gathering data from consenting users and construct generic profiles of target groups. The entire model was implemented in an educational context, for marketing educational courses to potential students through an educational game. This is a perspective for performing successful business and it allows an organization to follow trends, which is exceedingly important in today's market. The power of social marketing is huge and the opportunities for both future research and commercialization are endless. Some potential directions for improvement of the presented model are expansion to other social networks besides Facebook and construction of richer profiles, with more detailed presentation of relations between measured data. Semantic web can also be better utilized and a model of more thorough integration of data gathering with the inner working of the base application (e.g. educational game) should be defined. Privacy concerns should also be addressed in more detail in future works.

## REFERENCES

- [1] Kim W., Jeong O.R. & Lee S.W. On Social Web Sites. Information Systems. Vol.35. No.2. 2010. P.215-236.
- [2] Lehtimäki T., Salo J., Hiltula H. & Lankine M. Harnessing Web 2.0 for Business to Business Marketing- Literature Review and an Empirical Perspective from Finland. Faculty of Economics and Business Administration, University of Oulu Working Papers, No.29. 2009.
- [3] Thackeray R., Neiger B.L., Hanson C.L. & Mckenzie J.F. Enhancing Promotional Strategies within Social Marketing Programs: Use of Web 2.0 Social Media. Health Promotion Practice. Vol.9. No.4. 2008. P.338-343.
- [4] Dabbagh N. & Reo R. Back to the future: Tracing the Roots and Learning Affordances of Social Software. Web 2.0-Based E-Learning: Applying Social Informatics for Tertiary Teaching. Hershey, PA: IGI Global. 2010. P.1-20.
- [5] Kaplan A.M. & Haenlein M. Users of the World, Unite! The Challenges and Opportunités of Social Media. Business Horizons, Vol.53. No.1. 2010. P.59-68.
- [6] Constantinides E. & Fountain S.J. Web 2.0: Conceptual Foundations and Marketing Issues. Journal of Direct, Data and Digital Marketing Practice. Vol.9. No.3. 2008. P.231-244.
- [7] Boyd D.M. & Ellison N.B. Social Network Sites: Definition, History, and Scholarship. Journal of Computer-Mediated Communication. Vol.13. No.1. 2007. P.210-230.
- [8] Westland, J.C. Critical Mass and Willingness to Pay for Social Networks. Electronic Commerce Research and Applications. Vol.9. No.1. 2010. P.6-19.
- [9] Hellmann S., Stadler C. & Lehmann J. DBpedia Live Extraction. On the Move to Meaningful Internet Systems:

OTM. 2009. P.1209-1223.

- [10] B. Radenković, M. Despotović-Zrakić, A. Labus, M. Vulić, Marketing of Educational Institution on Social Networks. International Scientific Conference: Digitalisation of Cultural and Scientific Heritage, University Repositories and Distance Learning, Proceedings of abstracts. 30 September - 02. October 2011.
- [11] A. Labus, K. Simić, M. Vulić, M. Despotović-Zrakić, Z. Bogdanović, An Application of Social Media in eLearning 2.0. 25th Bled eConference eDependability: Reliable and Trustworthy eStructures, eProcesses, eOperations and eServices for the Future, 17-20 Jun 2012. Bled. Slovenia. P.557-572.

## PERIODIC SOLUTION OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATION

The theory of periodic functions has been developed in connection with problems of differential equations, stability theory, dynamical systems and so on. The applications include not only ordinary differential equations, but also partial differential equations or equations in Banach and Hilbert spaces. In this paper we use Fourier series to find conditions for existence and uniqueness of periodic solutions of inhomogeneous differential equation of the second order on Hilbert space.

**Key words and Phrases:** Periodic solution, Fourier series, second-order differential equation

### INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

A real function  $f$  is said to be periodic if there is some real number  $T > 0$ , called period, such that  $f(x) = f(x + nT)$  for each  $n \in \mathbb{N}$ .

Let  $X$  be a general Hilbert space,  $C[-l, l], l > 0$  is space of part-by-part continuous functions on segment  $[-l, l]$  and let  $f : C[-l, l] \rightarrow X$  be periodic and absolute continuous function. For such functions are defined Fourier coefficients:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Fourier series of a function  $f \in C[-l, l], l > 0$  states

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right). \quad (2)$$

Substituting values of coefficient (1), partial sum (2) transforms into

$$S_n(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) D_n(t-x) dt, \quad (3)$$

where  $D_n(u) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)}{2 \sin \frac{u}{2}}$  is Dirichlet's kernel. The formulae (3) may also be written as

$$S_n(x) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x+u) D_n(u) du.$$

We now give some basic properties of Fourier coefficients of functions on Hilbert spaces. For more details we refer the reader to [1]-[3].

**Lemma 1.** Let  $X$  be a Hilbert space and let  $f(t)$  be a functions on  $C([-l, l], X)$ . Then Fourier series of each part-by-part function  $f$  converges in mean to that function.

**Lemma 2.** If Fourier coefficients  $a_0, a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$  of functions  $f \in C([-l, l], X)$ , are defined by relations

$$(1), \text{ then Parseval equality is applied } \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f^2(x) dx.$$

**Lemma 3.** If function  $f \in C([-l, l], X)$  has all Fourier coefficients equals to zero, then  $f \equiv 0$ . If func-

<sup>1</sup> Faculty of Sciences and Mathematics, Kosovska Mitrovica, Serbia

<sup>2</sup> Faculty of Mechanical Engineering, Kraljevo, Serbia

tions  $f, g \in C([-l, l], X)$  have Fourier series which all appropriate coefficients are mutually equal, then  $f \equiv g$ .

**Lemma 4.** For  $2l, l > 0$  periodical function  $f \in C^1([-l, l], X)$ , Fourier series (2) of function  $f$  absolutely and uniformly converges in that function.

**Lemma 5.** Let  $2l, l > 0$  periodical function  $f \in C^p([-l, l], X)$ , has  $p$  of continuous derivatives and let on  $[-l, l]$  has part-by-part continuous derivative  $f^{(p+1)}$ . Then series  $\sum_{n=0}^{\infty} n^p (|a_n| + |b_n|)$  converges. If  $p > 0$  then Fourier series of function  $f$  can  $p$ -times differentiate term by term on  $[-l, l]$ .

**Lemma 6.** Let  $f \in C([-l, l], X)$  and let (2) is its Fourier series. Then (regardless of whether that series converges or not) for all  $x \in [-l, l]$  applies

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \left( a_n \cos \frac{nt}{l} + b_n \sin \frac{nt}{l} \right) dt,$$

where the last series converges uniformly at  $[-l, l], l > 0$ .

## MAIN RESULTS

Along this paper,  $A$  is the generator of a strongly continuous cosine family of bounded linear operator,  $\{C(t), t \in \mathbb{R}\}$ , on a Banach space  $X$  and  $S(t)$  represents a strongly continuous sine function associated with  $\{C(t), t \in \mathbb{R}\}$ , which is defined by

$$S(t)x = \int_0^t C(s)x ds, x \in X, t \in \mathbb{R}.$$

In this paper we considered second order abstract Cauchy problem

$$\begin{cases} x''(t) = Ax(t) + h(t), 0 \leq t \leq l \\ x(0) = x_0, x'(0) = x_1, \end{cases} \quad (4)$$

where  $h: [0, l] \rightarrow X$  is an almost periodic function.

The function  $x \in C^1([0, l], X)$  is called a mild solution of the Cauchy problem (4) if it satisfies the formula

$$x(t) = C(t)x_0 + S(t)x_1 + \int_0^t S(t-s)h(s)ds, 0 \leq t \leq l. \quad (5)$$

When  $x_0 \in E = \{x | C(t)x \text{ is once continuously differentiable function of } t\}$ ,  $x'(\cdot)$  is continuous and

$$x'(t) = AS(t)x_0 + C(t)x_1 + \int_0^t C(t-s)h(s)ds, 0 \leq t \leq l. \quad (6)$$

If  $x \in C^2([0, l], X)$  satisfies (4), then it is called a strict solution.

It is known [1] that study the problem of existence of second order Cauchy problem cannot be covered, in general, by going back to first order problems. However, in this paper characterizations analogues to results [2] are obtained.

The next results generalizes Lemma 1 in [2].

**Theorem 1.** Let  $A$  be generator of a strongly continuous cosine function defined in Banach space  $X$ . Let  $h: [0, l] \rightarrow X$  be a continuous and almost periodic function in  $X$  with  $\|h\| = \sup_{t \in [0, l]} \|f(t)\| < \infty$ . Then

equation (4) has almost  $l$ -periodic mild solution  $x(t)$  if and only if  $h_n \in \text{Range} \left( \frac{4\pi^2 n^2}{l^2} + A \right)$  for  $n \in \mathbb{Z}$ ,

and

$$\inf \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \|x_n\|^2 \mid \left( \frac{4\pi^2 n^2}{l^2} + A \right) x_n = -h_n \right\} < \infty. \quad (7)$$

**Proof.** Since  $x(t)$  is a  $l$ -periodic mild solution corresponding to  $h(t)$ , then the Fourier coefficients of  $h$  and  $x$  satisfy equation

$$\left( \frac{4\pi^2 n^2}{l^2} + A \right) x_n = -h_n.$$

It follows that  $h_n \in \text{Range} \left( \frac{4\pi^2 n^2}{l^2} + A \right)$ . Since the function  $x(t)$  is continuously differentiable it is obvious that  $x'(t) \in C([0, l], X)$ . Hence, the Fourier coefficients of  $x'(t)$  can be written as  $x'(t) = \frac{2\pi n}{l} i x_n$ . Finally, from

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi^2 n^2}{l^2} \|x_n\|^2 = \int_0^l \|x'_n(t)\|^2 dt < \infty,$$

follows (7), which is supposed to show.

Now let us prove the reverse inclusion is true. Let  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence for which is  $\left( \frac{4\pi^2 n^2}{l^2} + A \right) x_n = -h_n$  and  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi^2 n^2}{l^2} \|x_n\|^2 < \infty$ . Define

$$h_N(t) = \sum_{n=-N}^N h_n \exp\left(\frac{2\pi n}{l} it\right), x_N(t) = \sum_{n=-N}^N x_n \exp\left(\frac{2\pi n}{l} it\right)$$

where  $h_n$  is Fourier coefficients of  $h$ . Then  $h_N$  converge to  $h(t)$  in  $L^2([0, l], X)$ . By assumption  $x_N(t)$  converge to certain function  $x(t)$  in  $L^2([0, l], X)$ . Moreover, for  $N > M, (N, M \in \mathbb{N})$  we have

$$\begin{aligned} \|x_N(t) - x_M(t)\| &= \left\| \sum_{n=-N}^{-(M+1)} x_n + \sum_{n=M+1}^N x_n \right\| \leq \sum_{n=-N}^{-(M+1)} \|x_n\| + \sum_{n=M+1}^N \|x_n\| \leq \\ &\leq \left( \sum_{n=-N}^{-(M+1)} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{n=-N}^{-(M+1)} n^2 \|x_n\|^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{n=M+1}^N \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{n=M+1}^N n^2 \|x_n\|^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

as  $N, M \rightarrow \infty$ , which implies that  $x_N(t)$  converges to function  $x(t)$  uniformly. In particular  $x$  is  $l$ -periodic function.

It remains to show that  $x(t) \in C^1([0, l], X)$  is almost periodic solution of Cauchy problem (4). To do this it is enough to show the convergence of the function  $x_N$ .

Since  $x_N(t)$  is a  $l$ -periodic mild solution of (4), from (5) and (6) it follows

$$\begin{aligned} x_N(t) &= C(t)x_N(0) + S(t)x'_N(0) + \int_0^t S(t-v)h_N(v)dv, 0 \leq t \leq l \\ &= C(t-s)x_N(s) + S(t-s)x'_N(s) + \int_s^t S(t-\tau)h_N(\tau)d\tau, 0 \leq s, t \leq l \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} x'_N(t) &= AS(t)x_N(0) + C(t)x'_N(0) + \int_0^t C(t-\tau)h_N(\tau)d\tau, 0 \leq t \leq l \\ &= C'(t-s)x_N(s) + C(t-s)x'_N(s) + \int_s^t C(t-\tau)h_N(\tau)d\tau, 0 \leq s, t \leq l. \end{aligned} \quad (9)$$

Expression (8) and (9) multiply by  $C'(t-s)$  and  $C(t-s)$  respectively. Subtracting the results we obtain

$$C(t-s)x'_N(t) - C'(t-s)x_N(t) = x'_N(s) + \int_s^t C(\tau-v)h_N(\tau)d\tau. \quad (10)$$

Integrating (10) over interval  $[s, s+1]$  we have

$$\int_s^{s+1} C(t-s)x'_N(t)dt - \int_s^{s+1} C'(t-s)x_N(t)dt = x'_N(s) + \int_s^{s+1} \int_s^t C(\tau-v)h_N(\tau)d\tau. \quad (11)$$

From the second integral on the left side of equality (10), integration by part we obtain

$$\int_s^{s+1} C'(t-s)x_N(t)dt = (C(1)-C(0))x_N(s) - \int_s^{s+1} C(t-s)x'_N(t)dt.$$

Finally, from (11) it follows

$$2 \int_s^{s+1} C(t-s)x'_N(t)dt - (C(1)-C(0))x_N(s) = x'_N(s) + \int_s^{s+1} \int_s^t C(\tau-v)h_N(\tau)d\tau \quad (12)$$

for  $s, t \in [0, l]$ .

By assumption,  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi^2 n^2}{l^2} \|x_n\|^2 < \infty$ , that is for  $x'_N(t) = \frac{2\pi n}{l} ix_n$  we get  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|x'_n\|^2 < \infty$ . This implies that  $x_N(t)$  converges in  $L^2([0, l], X)$ . Hence, from (12) it follows the convergence in  $C([0, l], X)$ . The proof is complete.  $\square$

**Theorem 2.** Let  $X$  be Hilbert space and  $A$  be generator of a strongly continuous cosine function. Then for each continuous and almost periodic function  $h : [0, l] \rightarrow X$ , equation (4) has almost  $l$ -periodic

mild solution  $x(t)$  if and only if  $\left\{ -\frac{4\pi^2 n^2}{l^2} \right\} \subseteq \rho(A)$  and there exist a constant  $C$  such that

$$\left\| n \left( \frac{4\pi^2 n^2}{l^2} + A \right)^{-1} \right\| \leq C.$$

**Proof.** Based on Theorem 1, directly follows the second part of the assertion. To prove the inverse, suppose that  $h(t)$  is continuous function on  $[0, l]$  and  $x(t)$  is  $l$ -periodic solution of (4), corresponding to  $h(t)$ . Then the Fourier coefficients of  $h$  and  $x$  satisfy equation

$$\left( \frac{4\pi^2 n^2}{l^2} + A \right) x_n = -h_n, n \in \mathbb{Z}.$$

By assumption,  $\left\{ -\frac{4\pi^2 n^2}{l^2} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \rho(A)$ . Let  $x'_n$  be the Fourier coefficients of  $x'$ . Then  $x'_n = \frac{2\pi n}{l} ix_n$ ,

with  $x_n = -\left( \frac{4\pi^2 n^2}{l^2} + A \right)^{-1} h_n$ . Hence, for every continuous function  $h : [0, l] \rightarrow X$  we have

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi^2 n^2}{l^2} \left\| \left( \frac{4\pi^2 n^2}{l^2} + A \right)^{-1} h_n \right\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|x'_n\|^2 = \int_0^l \|x'(t)\|^2 dt < \infty.$$

Suppose that  $\left\| n \left( \frac{4\pi^2 n^2}{l^2} + A \right)^{-1} \right\| \rightarrow \infty$  when  $n \rightarrow \infty$ . Then for sequence  $(n_k)_k$  with

$\left\| n_k \left( \frac{4\pi^2 n_k^2}{l^2} + A \right)^{-1} \right\| \rightarrow \infty$  as  $n_k \rightarrow \infty$ , we can find a subsequence  $(n_{k_j})$  such that for each  $n_{k_j}$  there

is  $h_{n_{k_j}}$  with  $\|h_{n_{k_j}}\| = 1$  and  $\left\| n_{k_j} \left( \frac{4\pi^2 n_{k_j}^2}{l^2} + A \right)^{-1} h_{n_{k_j}} \right\| > k_j^2$ . With  $g_{n_{k_j}} = \frac{1}{k_j^2} h_{n_{k_j}}$  we define a new function.

Then  $\|g_{n_{k_j}}\| = \frac{1}{k_j^2}$  and  $\left\| n_{k_j} \left( \frac{4\pi^2 n_{k_j}^2}{l^2} + A \right)^{-1} g_{n_{k_j}} \right\| > 1$ . It implies that  $\sum_{k_j=0}^{\infty} g_{n_{k_j}} \exp\left(-\frac{2\pi k_j}{l} it\right)$  uniformly converges in  $C([0, l], X)$ .

Hence  $g = \sum_{k_j=0}^{\infty} g_{n_{k_j}} \exp\left(-\frac{2\pi k_j}{l} it\right) \in C([0, l], X)$  and  $\sum_{k_j=0}^{\infty} \left\| \frac{2\pi n_{k_j}}{l} \left( \frac{4\pi^2 n_{k_j}^2}{l^2} + A \right)^{-1} g_{n_{k_j}} \right\| = \infty$ . This is con-

tradictory to assumption and proof of theorem is complete.  $\square$

## REFERENCES

- [1] Fattorini H. "Second order linear differential equations in Banach spaces", North Holland Mathematics Studies (108), 1985
- [2] Lizama C., "Mild almost periodic solutions of abstract differential equations", J. Math. Anal. Appl. 143 (1989), pp. 560-571
- [3] Zygmund A., "Trigonometric series", Volume 1, Cambridge University Press, 1959
- [4] Adnađević D., Kadelburg Z., Matematička analiza II, Matematički fakultet Beograd, Krug, 2011

# APPLICATION OF TRIPLE COINCIDENT POINT RESULTS IN G METRIC SPACES TO INTEGRAL EQUATIONS

*In this paper we have developed a new method of reducing tripled coincidence and tripled fixed point results in (ordered) G-metric spaces to the respective results for mappings with one variable, even obtaining (in some cases) more general theorems. Our results generalize, extend, unify and complement recently tripled coincidence point theorems established by Hassen Aydi et al.*

**Key words and Phrases:** G-metric spaces, tripled coincidence point, partial ordering

## INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

The new notion of G-metric space was introduced by Mustafa and Sims [10] in 2004. G-metric space is generalized metric space in which every triplet of elements a non-negative real number is assigned. A motivation behind introducing the G-metric space was to give a modified version of the Banach contractive principle. Several authors studied the fixed point problem in partially ordered G-metric space [1], [4], [5], [6], [7], [8], [9]. We start by recalling some definitions and properties of these spaces.

A G -metric on a nonempty set  $X$  is a function  $G : X^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  such that for all  $x, y, z \in X$

- p1.  $G(x, y, z) = 0$  if  $x = y = z$
- p2.  $0 < G(x, y, z)$  for all  $x, y, z \in X$ , with  $x \neq y$
- p3.  $G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$  for all  $x, y, z \in X$ , with  $y \neq z$
- p4.  $G(x, y, z) = G(x, z, y) = G(y, z, x) = \dots$ , (symmetry in all three variables)
- p5.  $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$  for all  $x, y, z, a \in X$ .

A G -metric space is a pair  $(X, G)$  such that  $X$  is nonempty set and  $G$  is G -metric on  $X$ .

Let  $(X, G)$  be a G -metric space and let  $\{x_n\}$  be a sequence of points in  $X$ . A point  $x \in X$  is said to be the limit of a sequence  $\{x_n\}$  if  $\lim_{n, m \rightarrow \infty} G(x, x_n, x_m) = 0$ . The sequence  $\{x_n\}$  is said to be a G -Cauchy sequence if, for every  $\varepsilon > 0$ , there is a positive integer  $N$  such that  $G(x_n, x_m, x_l) < \varepsilon$ , for all  $n, m, l \geq N$ . A pair  $(X, G)$  is said to be G -complete (or a complete G -metric space) if every G -Cauchy sequence in  $(X, G)$  is G -convergent in  $X$ .

Denote with  $\Psi$  the family of nondecreasing functions  $\psi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ , with  $\psi(t) < t$  for  $t > 0$  and  $\lim_{t \rightarrow r^+} \psi(r) < t$  for each  $t > 0$ .

In G -metric space  $(X, G, \preceq)$  let  $F : X^3 \rightarrow X, g : X \rightarrow X$ . The mapping  $F$  has the mixed g -monotone property if for any  $x, y, z \in X$

$$\begin{aligned} gx_1 \preceq gx_2 &\Rightarrow F(x_1, y, z) \preceq F(x_2, y, z), \text{ for } x_1, x_2 \in X, \\ gy_1 \preceq gy_2 &\Rightarrow F(x, y_1, z) \succeq F(x, y_2, z), \text{ for } y_1, y_2 \in X, \\ gz_1 \preceq gz_2 &\Rightarrow F(x, y, z_1) \preceq F(x, y, z_2), \text{ for } z_1, z_2 \in X. \end{aligned}$$

Note that, if  $g = i_X$  -identity mapping then  $F$  has a mixed monotone property.

It is clear that if  $(X, \preceq)$  is a partially ordered set then  $(X^3, \subseteq)$  is also partially ordered with:

$$(x, y, z) \subseteq (a, b, c) \Leftrightarrow x \preceq a \wedge y \preceq b \wedge z \preceq c.$$

<sup>1</sup> Faculty of Sciences and Mathematics, Kosovska Mitrovica, Serbia

<sup>2</sup> Department of Mathematics, Sahad University of Technology, Tabriz, Iran



An element  $(x, y, z) \in X^3$  is called a tripled coincidence point of mappings  $F : X^3 \rightarrow X$  and  $g : X \rightarrow X$  if  $F(x, y, z) = gx, F(y, z, y) = gy, F(z, y, x) = gz$ , while  $(gx, gy, gz) \in X^3$  is said a tripled point of coincidence of mappings  $F$  and  $g$ . Moreover,  $(x, y, z)$  is called a tripled common fixed point of  $F$  and  $g$  if and only if  $F(x, y, z) = gx = x, F(y, x, y) = gy = y$  and  $F(z, y, x) = gz = z$ .

Mappings  $f, g : X \rightarrow X$  are said to be compatible in a  $G$ -metric space  $(X, G)$  if  $G(fgx_n, gfx_n, gfx_n) \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ , whenever  $\{x_n\}$  is a sequence in  $X$  such that  $\lim_{n \rightarrow \infty} fx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} gx_n$  in  $(X, G)$ .

For more details about  $G$ -metric space we refer the reader to [2], [4], [9], [10], [13].

## SOME RESULTS IN PARTIALLY ORDERED $G$ METRIC SPACE

In this section we prove certain new fixed point results in partially ordered  $G$ -metric space.

**Lemma 1.** In  $G$ -metric space  $(X, G)$  let  $\{x_n\}$  be a sequence in  $X$  such that  $\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) = 0$ . If  $\{x_n\}$  is not a Cauchy sequence in  $(X, G)$ , then there exist  $\varepsilon > 0$  and two sequences  $\{m_k\}$  and  $\{n_k\}$  of positive integers such that  $m_k > n_k > k$  such that the following four sequences tends to  $\varepsilon^+$  when  $k \rightarrow \infty$ :

$$G(x_{m_k}, x_{n_k}, x_{n_k}), G(x_{m_k}, x_{n_k-1}, x_{n_k-1}), G(x_{m_k+1}, x_{n_k}, x_{n_k}), G(x_{n_k-1}, x_{m_k+1}, x_{m_k+1}).$$

**Proof.** Suppose that  $\{x_n\}$  is not a Cauchy sequence in  $(X, G)$ . Then there exist  $\varepsilon > 0$  and sequences  $\{m_k\}$  and  $\{n_k\}$  of positive integers such that  $m_k > n_k > k$  and  $G(x_{m_k}, x_{n_k}, x_{n_k}) \geq \varepsilon$ , and they can be chosen so that  $n_k$  is always the smallest possible, i.e.,  $G(x_{m_k}, x_{n_k-1}, x_{n_k-1}) < \varepsilon$ . Now, applying (p5), we have that

$$\varepsilon \leq G(x_{m_k}, x_{n_k}, x_{n_k}) \leq G(x_{m_k}, x_{n_k-1}, x_{n_k-1}) + G(x_{n_k-1}, x_{n_k}, x_{n_k}) < \varepsilon + G(x_{n_k-1}, x_{n_k}, x_{n_k}).$$

Passing to the limit as  $k \rightarrow \infty$  we get that  $\lim_{k \rightarrow \infty} G(x_{m_k}, x_{n_k}, x_{n_k}) = \varepsilon^+$ . Now, again by (p5),

we have  $G(x_{m_k}, x_{n_k}, x_{n_k}) \leq G(x_{m_k}, x_{n_k-1}, x_{n_k-1}) + G(x_{n_k-1}, x_{n_k}, x_{n_k})$  and  $G(x_{m_k}, x_{n_k-1}, x_{n_k-1}) \leq G(x_{m_k}, x_{n_k}, x_{n_k}) + G(x_{n_k}, x_{n_k-1}, x_{n_k-1})$ . Passing to the limit as  $k \rightarrow \infty$  we get that  $\lim_{k \rightarrow \infty} G(x_{m_k}, x_{n_k-1}, x_{n_k-1}) = \varepsilon^+$ . The proof for the remaining two sequences is similar.  $\square$

Assertions similar to the Lemma 1 were used in the frame of metric spaces in the course of proofs of several fixed point results in various papers ( see, e.g., [12]).

**Lemma 2.** Let  $(X, G, \preceq)$  be a partially ordered  $G$ -metric space and  $f$  and  $g$  be two self mappings on  $X$ . Assume that there exist  $\psi \in \Psi$  such that

$$G(fx, fy, fz) \leq \psi(\max\{G(gx, gy, gz), G(gu, gv, gw), G(ga, gb, gc)\}), \quad (1)$$

for all  $x, y, z, u, v, w, a, b, c \in X$  for which  $gx \preceq gu \preceq ga \wedge gy \succeq gv \succeq gb \wedge gz \preceq gw \preceq gc$  or  $gx \succeq gu \succeq ga \wedge gy \preceq gv \preceq gb \wedge gz \succeq gw \succeq gc$ . If the following conditions hold:

- (i)  $f$  is a  $g$ -nondecreasing with respect to  $\preceq$  and  $fX \subset gX$ ;
- (ii) there exists  $x_0 \in X$  such that  $gx_0 \preceq fx_0$ ;
- (iii)  $f$  and  $g$  are continuous and compatible and  $(X, G)$  is a complete;

then  $f$  and  $g$  have a coincidence point in  $X$ .

**Proof.** If  $gx_0 = fx_0$  then is a coincidence point of  $f$  and  $g$ . Therefore, let  $gx_0 \preceq fx_0$ . Since  $fX \subset gX$  we obtain Jungck sequence  $y_n = fx_n = gx_{n+1}$  for all  $n \in \mathbb{N}_0$  where  $x_n \in X$  and by induction we get that  $y_n \preceq y_{n+1}$ . If  $y_n = y_{n+1}$  for some  $n \in \mathbb{N}$  then  $x_n$  is a coincidence point of  $f$  and  $g$ . Therefore, suppose

that  $y_n \neq y_{n+1}$  for each  $n$ . Now, we shall prove that  $G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}) \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ , and that  $\{y_n\}$  is Cauchy sequence.

Indeed, by putting  $x = u = a = x_n, y = v = b = x_{n+1}, z = u = c = x_{n+1}$ , in (1) we get

$$\begin{aligned} G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}) &= G(fx_n, fx_{n+1}, fx_{n+1}) \leq \psi(G(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1})) = \\ &= \psi(G(y_{n-1}, y_n, y_n)) < G(y_{n-1}, y_n, y_n), \end{aligned}$$

that is, exists  $\lim_{n \rightarrow \infty} G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}) = G^* \geq 0$ . If  $G^* > 0$  we get

$$G^* = \lim_{n \rightarrow \infty} G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(G(y_{n-1}, y_n, y_n)) = \lim_{G(y_{n-1}, y_n, y_n) \rightarrow (G^*)^+} \psi(G(y_{n-1}, y_n, y_n)) < G^*,$$

which is a contradiction. Hence, we obtain that  $\lim_{n \rightarrow \infty} G(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}) = 0$ .

Further, by using Lemma 1. we shall prove that  $\{y_n\}$  is a Cauchy sequence. Suppose this is not the case. Then, by Lemma 1. there exist  $\varepsilon > 0$  and two sequences  $\{m_k\}$  and  $\{n_k\}$  of positive integers such that the sequences tend to  $\varepsilon^+$  when  $k \rightarrow \infty$ :

$$G(y_{m_k}, y_{n_k}, y_{n_k}), G(y_{m_k}, y_{n_k-1}, y_{n_k-1}), G(y_{m_k+1}, y_{n_k}, y_{n_k}), G(y_{n_k-1}, y_{m_k+1}, y_{m_k+1}).$$

Putting  $x = x_{m_k+1}, y = x_{n_k}, z = x_{n_k}$  in (1) we have

$$G(fx_{m_k+1}, fx_{n_k}, fx_{n_k}) \leq \psi(G(gx_{m_k+1}, gx_{n_k}, gx_{n_k})),$$

that is,  $G(y_{m_k+1}, y_{n_k}, y_{n_k}) \leq \psi(G(y_{m_k}, y_{n_k-1}, y_{n_k-1}))$ . Letting  $k \rightarrow \infty$ , we have

$$\varepsilon \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(G(y_{m_k}, y_{n_k-1}, y_{n_k-1})) = \lim_{G(y_{m_k}, y_{n_k-1}, y_{n_k-1}) \rightarrow \varepsilon^+} \psi(G(y_{m_k}, y_{n_k-1}, y_{n_k-1})) < \varepsilon.$$

Hence, utilizing obtained limits and the property of function  $\psi \in \Psi$ , we get  $\varepsilon < \varepsilon$ , which is a contradiction. We have proved that  $\{y_n\}$  is a Cauchy sequence in  $(X, G)$ .

Now by (iii) since  $(X, G)$  is a complete then there exists  $z \in X$  such that  $y_n \rightarrow z$ . Then we have  $G(fx_n, z, z) \rightarrow 0$  and  $G(gx_n, z, z) \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ , and because when  $n \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} G(fz, gz, gz) &\leq G(fz, fgx_n, fgx_n) + G(fgx_n, gz, gz) \leq \\ &\leq G(fz, fgx_n, fgx_n) + G(fgx_n, gfx_n, gfx_n) + G(gfx_n, gz, gz) \rightarrow \\ &\rightarrow G(fz, fz, fz) + 0 + G(gz, gz, gz) = 0 \end{aligned}$$

it follows that  $z$  is a coincidence point for  $f$  and  $g$ .  $\square$

**Theorem 1.** Let  $(X, G, \preceq)$  be a partially ordered  $G$ -metric space and  $F: X^3 \rightarrow X$  and  $g: X \rightarrow X$ . Assume that there exist  $\psi \in \Psi$  such that

$$\begin{aligned} &\max \{G(F(x, y, z), F(u, v, w), F(a, b, c)), G(F(y, x, y), F(v, u, v), F(b, a, b)), \\ &G(F(z, y, x), F(w, v, u), F(c, b, a))\} \leq \\ &\leq \psi(\max \{G(gx, gu, ga), G(gy, gv, gb), G(gz, gw, gc)\}), \end{aligned} \tag{2}$$

for all  $x, y, z, u, v, w, a, b, c \in X$  for which  $gx \preceq gu \preceq ga \wedge gy \succeq gv \succeq gb \wedge gz \preceq gw \preceq gc$  or  $gx \succeq gu \succeq ga \wedge gy \preceq gv \preceq gb \wedge gz \succeq gw \succeq gc$ . Assume that  $F$  and  $g$  satisfy the following conditions:

- (a1)  $F(X^3) \subset g(X)$ ;
- (a2)  $F$  has the mixed  $g$ -monotone property;

- (a3)  $F$  and  $g$  are continuous and compatible and  $(X, G)$  is a complete;  
 (a4) there exist  $x_0, y_0, z_0 \in X$  such that

$$gx_0 \preceq F(x_0, y_0, z_0) \wedge gy_0 \succeq F(y_0, x_0, y_0) \wedge gz_0 \preceq F(z_0, y_0, x_0) \text{ or}$$

$$gx_0 \succeq F(x_0, y_0, z_0) \wedge gy_0 \preceq F(y_0, x_0, y_0) \wedge gz_0 \succeq F(z_0, y_0, x_0).$$

Then  $F$  and  $g$  have a tripled coincidence point.

**Proof.** Let  $T_F : X^3 \rightarrow X^3$  and  $T_g : X^3 \rightarrow X^3$  be a mappings defined by

$T_F(x, y, z) = (F(x, y, z), F(y, x, y), F(z, y, x))$  and  $T_g(x, y, z) = (gx, gy, gz)$ . It is clear that  $(x, y, z)$  is a tripled coincidence point of  $F$  and  $g$  if and only if  $(x, y, z)$  is coincidence point for mapping  $s T_F$  and  $T_g$ . Define  $G_1 : X^3 \times X^3 \times X^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$  by

$$G_1((x, y, z), (u, v, w), (a, b, c)) = \max \{G(x, u, a), G(y, v, b), G(z, w, c)\}.$$

Then,  $(X, G_1)$  is a new  $G$ -metric space. The contractive condition (2) for the mappings  $F$  and  $g$  is now equivalent to the following condition

$$G_1(T_F(Y), T_F(V), T_F(A)) \leq \psi(G_1(T_g(Y), T_g(V), T_g(A)))$$

for the mappings  $T_F$  and  $T_g$ . The proof is further immediately consequence of Lemma 2.  $\square$

### MAIN RESULT

Motivated by the work in [14] we study the existence and uniqueness of solutions for system of nonlinear integral equations using the results proved in the previous section.

Let  $X = C([0, T], \mathbb{R})$  be a set of real continuous functions on  $[0, T], T > 0$ . We equip the space  $X$  with partial ordering defined by  $x \preceq y \Leftrightarrow x(t) \preceq y(t)$  for all  $t \in [0, T]$  and all  $x, y \in X$ . For fixed  $T \in \mathbb{R}^+$ , for each  $s, t \in [0, T]$  define a mapping  $G_s : X^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$  by

$$G_s(x, y, z) = \sup_{s, t \in [0, T]} e^{-S(t, s)} |x(t) - y(t)| + \sup_{s, t \in [0, T]} e^{-S(t, s)} |y(t) - z(t)| + \sup_{s, t \in [0, T]} e^{-S(t, s)} |z(t) - x(t)|$$

for all  $x, y, z \in X$ . It is clear that  $(X, G_s, \preceq)$  is partially ordered complete  $G$ -metric space.

Consider the system of nonlinear integral equations

$$\begin{aligned} x(t) &= p(t) + \int_0^T e^{-S(t, s)} [f(s, x(s)) + k(s, y(s)) + h(s, z(s))] ds, \\ y(t) &= p(t) + \int_0^T e^{-S(t, s)} [f(s, y(s)) + k(s, x(s)) + h(s, y(s))] ds, \\ z(t) &= p(t) + \int_0^T e^{-S(t, s)} [f(s, z(s)) + k(s, y(s)) + h(s, x(s))] ds, \end{aligned} \tag{3}$$

and let  $H : X^3 \rightarrow X$  be defined by

$$H(x, u, v)(t) = p(t) + \int_0^T e^{-S(t, s)} [f(s, x(s)) + k(s, u(s)) + h(s, v(s))] ds. \tag{4}$$

We assume that

- (b1)  $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is continuous  
 (b2)  $p : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is continuous  
 (b3)  $S : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  is continuous

there exist function  $\varphi \in \Psi = \left\{ \varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \varphi(t) < t \text{ and } \lim_{r \rightarrow t^+} \varphi(r) < t, t > 0 \right\}$ , such that for all

$x, y, u, v, a, b \in X$  for which  $x \preceq y, u \preceq v, a \preceq b$  we have

$$\begin{aligned} & [f(s, x(s)) - f(s, y(s))] + [k(s, u(s)) - k(s, v(s))] + [h(s, a(s)) - h(s, b(s))] \leq \\ & \leq \frac{1}{3} e^{S(t,s)} \varphi \left( \frac{1}{3} e^{-S(t,s)} [(x(s) - y(s)) + (u(s) - v(s)) + (a(s) - b(s))] \right), \end{aligned}$$

for  $s, t \in [0, T]$  and  $f(s, x(s)) \leq f(s, y(s)), k(s, u(s)) \leq k(s, v(s)), h(s, a(s)) \leq h(s, b(s))$ .

there are exists continuous functions  $x_0, y_0, z_0$  from  $[0, T]$  to  $\mathbb{R}$  for which

$$x_0 \preceq H(x_0, y_0, z_0) \wedge y_0 \succeq H(y_0, x_0, y_0) \wedge z_0 \preceq H(z_0, y_0, z_0)$$

or

$$x_0 \succeq H(x_0, y_0, z_0) \wedge y_0 \preceq H(y_0, x_0, y_0) \wedge z_0 \succeq H(z_0, y_0, z_0).$$

**Theorem 2.** Under assumptions (b1) - (b5) system of integral equations (3) has a solution in  $X = C([0, T], \mathbb{R})$  for all  $t \in [0, T]$ .

**Proof.** Consider the mapping  $H : X^3 \rightarrow X$  defined by (4). Then from (b4) we deduce that

$H$  has the mixed monotone property. Assume that for  $x, y, z, u, v, w, a, b, c \in X$  we have

$gx \preceq gu \preceq ga \wedge gy \succeq gv \succeq gb \wedge gz \preceq gw \preceq gc$  or  $gx \succeq gu \succeq ga \wedge gy \preceq gv \preceq gb \wedge gz \succeq gw \succeq gc$ .

Since  $H$  has the mixed monotone property, we obtain

$$\begin{aligned} H(u, v, w) & \preceq H(a, b, c) \preceq H(x, y, z), H(y, x, y) \preceq H(b, a, b) \preceq H(v, u, v), \\ H(z, y, x) & \preceq H(c, b, a) \preceq H(w, u, v). \end{aligned}$$

Then,

$$\begin{aligned} G_S(H(x, y, z), H(a, b, c), H(u, v, w)) & = \sup_{s,t \in [0, T]} \exp(-S(t, s))(H(x, y, z) - H(a, b, c)) + \\ & + \sup_{s,t \in [0, T]} \exp(-S(t, s))(H(a, b, c) - H(u, v, w)) + \\ & + \sup_{s,t \in [0, T]} \exp(-S(t, s))(H(x, y, z) - H(u, v, w)), \\ G_S(H(y, x, y), H(b, a, b), H(v, u, v)) & = \sup_{s,t \in [0, T]} \exp(-S(t, s))(H(b, a, b) - H(y, x, y)) + \\ & + \sup_{s,t \in [0, T]} \exp(-S(t, s))(H(v, u, v) - H(b, a, b)) + \\ & + \sup_{s,t \in [0, T]} \exp(-S(t, s))(H(v, u, v) - H(y, x, y)), \\ G_S(H(z, y, x), H(c, b, a), H(w, u, v)) & = \sup_{s,t \in [0, T]} \exp(-S(t, s))(H(c, b, a) - H(z, y, x)) + \\ & + \sup_{s,t \in [0, T]} \exp(-S(t, s))(H(w, u, v) - H(c, b, a)) + \\ & + \sup_{s,t \in [0, T]} \exp(-S(t, s))(H(w, u, v) - H(z, y, x)). \end{aligned}$$

From (b4) we deduce

$$\begin{aligned}
& \exp(-S(t,s))(H(x,y,z) - H(a,b,c)) = \exp(-S(t,s)) \int_0^T \exp(-S(t,s)) \left[ (f(s,x(s)) - f(s,y(s))) \right. \\
& \quad \left. + (k(s,u(s)) - k(s,v(s))) + (h(s,a(s)) - h(s,b(s))) \right] dS \leq \\
& \leq \frac{1}{3} \exp(-S(t,s)) \int_0^T \psi \left( \frac{1}{3} \exp(-S(t,s)) \left[ (x(s) - a(s)) + (y(s) - b(s)) + (z(s) - c(s)) \right] \right) dS \leq \\
& \leq \frac{1}{3} \exp(-S(t,s)) \int_0^T \psi \left( \frac{1}{3} \left[ \sup_{s,t \in [0,T]} \exp(-S(t,s)) (x(s) - a(s)) + \sup_{s,t \in [0,T]} \exp(-S(t,s)) (y(s) - b(s)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sup_{s,t \in [0,T]} \exp(-S(t,s)) (z(s) - c(s)) \right] \right) dS \leq \\
& \leq \frac{1}{3} T \exp(-S(t,s)) \psi \left( \frac{1}{3} \left[ \sup_{s,t \in [0,T]} \exp(-S(t,s)) (x(s) - a(s)) + \sup_{s,t \in [0,T]} \exp(-S(t,s)) (y(s) - b(s)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sup_{s,t \in [0,T]} \exp(-S(t,s)) (z(s) - c(s)) \right] \right) \leq \\
& \leq \frac{1}{3} \psi \left( \frac{1}{3} \left[ \sup_{s,t \in [0,T]} \exp(-S(t,s)) (x(s) - a(s)) + \sup_{s,t \in [0,T]} \exp(-S(t,s)) (y(s) - b(s)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sup_{s,t \in [0,T]} \exp(-S(t,s)) (z(s) - c(s)) \right] \right) \leq \\
& \leq \frac{1}{3} \psi \left( \frac{1}{3} [G(x,u,a) + G(y,v,b) + G(z,w,c)] \right) \leq \frac{1}{3} \psi \left( \max \{G_S(x,u,a), G_S(y,v,b), G_S(z,w,c)\} \right).
\end{aligned}$$

Similarly, we obtain

$$\begin{aligned}
& \sup_{s,t \in [0,T]} \exp(-S(t,s))(H(a,b,c) - H(u,v,w)) \leq \frac{1}{3} \psi \left( \max \{G_S(x,u,a), G_S(y,v,b), G_S(z,w,c)\} \right), \\
& \sup_{s,t \in [0,T]} \exp(-S(t,s))(H(x,y,z) - H(u,v,w)) \leq \frac{1}{3} \psi \left( \max \{G_S(x,u,a), G_S(y,v,b), G_S(z,w,c)\} \right).
\end{aligned}$$

Therefore we have

$$\begin{aligned}
& G_S(H(x,y,z), H(a,b,c), H(u,v,w)) \leq \psi \left( \max \{G_S(x,u,a), G_S(y,v,b), G_S(z,w,c)\} \right), \\
& G_S(H(y,x,y), H(b,a,b), H(v,u,v)) \leq \psi \left( \max \{G_S(x,u,a), G_S(y,v,b), G_S(z,w,c)\} \right), \\
& G_S(H(z,y,x), H(c,b,a), H(w,v,u)) \leq \psi \left( \max \{G_S(x,u,a), G_S(y,v,b), G_S(z,w,c)\} \right).
\end{aligned}$$

Hence,

$$\begin{aligned}
& \max \{G_S(H(x,y,z), H(a,b,c), H(u,v,w)), G_S(H(y,x,y), H(b,a,b), H(v,u,v)), \\
& \quad G_S(H(z,y,x), H(c,b,a), H(w,v,u))\} \leq \psi \left( \max \{G_S(x,u,a), G_S(y,v,b), G_S(z,w,c)\} \right).
\end{aligned}$$

On the other hand, by (b5) there are continuous functions  $x_0, y_0, z_0 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  for

which,  $x_0 \preceq H(x_0, y_0, z_0) \wedge y_0 \succeq H(y_0, x_0, y_0) \wedge z_0 \preceq H(z_0, y_0, z_0)$  or  $x_0 \succeq H(x_0, y_0, z_0) \wedge y_0 \preceq H(y_0, x_0, y_0) \wedge z_0 \succeq H(z_0, y_0, z_0)$ . Thus, all the hypotheses of Theorem 1 are satisfied and hence the system of integral equations (3) has solution in  $X = ([0, T], \mathbb{R})$ .  $\square$

## REFERENCES

- [1] M. Abbas, M. Ali Khan, S. Radenović, Some periodic point results in generalized metric spaces, *Applied Mathematics and Computation* 217 (2010) 4094-4099.
- [2] M. Abbas, T. Nazir, S. Radenović, Common fixed point of generalized weakly contractive maps in partially ordered G-metric spaces, *Appl. Math. Comput.* (2012), <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2012.03.022>
- [3] A. Amini - Harandi, Coupled and tripled fixed point theory in partially ordered metric spaces with applications to initial value problem, *Mathematical and Computer Modelling* (2011), doi:10.1016/j.mcm.2011.12.006
- [4] H. Aydi, E. Karapinar, W. Shatanawi, Tripled common fixed point results for generalized contractions in ordered generalized metric spaces, *Fixed Point Theory and Applications* 2012, 2012:101, doi: 10.1186/1687-1812-2012-101
- [5] H. Aydi, M. Postolache, W. Shatanawi, Coupled fixed point results for  $(\psi, \phi)$ -weakly contractive mappings in ordered G-metric spaces, *Computers and Mathematics with Applications* (2011), doi:10.1016/j.camwa.2011.11.022
- [6] H. Aydi, E. Karapinar, W. Shatanawi, Tripled fixed point results in generalized metric spaces, *Journal of Applied Mathematics* Volume 2012, Article ID 314279, 10 pages, doi:10.1155/2012/314279.
- [7] H. Aydi, B. Damjanović, B. Samet, W. Shatanawi, Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered G-metric spaces, *Mathematical and Computer Modelling* (2011), doi:10.1016/j.mcm.2011.05.059.
- [8] Yeol JE Cho, B. E. Rhoades, Reza Saadati, Bessem Samet, Wasfi Shatanawi, Nonlinear coupled fixed point theorems in ordered generalized metric spaces with integral type, *Fixed Point Theory and Applications* 2012, 2012:8, doi: 10.1186/1687-1812-2012-8.
- [9] Z. Kadelburg, H. K. Nashine, and S. Radenović, Common coupled fixed point results in partially ordered G-metric spaces, *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications* Volume 4 Issue 2 (2012), Pages 51-63.
- [10] Z. Mustafa and B. Sims, A new approach to generalized metric spaces, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, Volume 7, Number 2, 2006, 289-297.
- [11] N. V. Luong, N. X. Thuan, Coupled fixed point theorem in partially ordered G-metric spaces, *Mathematical and Computer Modelling* (2011), doi:10.1016/j.mcm.2011.10.058
- [12] S. Radenović, Z. Kadelburg, D. Jandrić and A. Jandrić, Some results on weak contraction maps, *Bulletin of Iranian Mathematical Society*, Available Online from 30 March 2011.
- [13] S. Radenovic, S. Pantelic, P. Salimi, J. Vujakovic, A note on some tripled coincidence point results in G-metric spaces, *International Journal of Mathematical Sciences and Engineering Applications*, ISSN 0973-9424, Vol. 6, No. VI (2012), pp. 23-38.
- [14] M. A. Alghamdi, N. Hussain, P. Salimi, Fixed point and coupled fixed point theorems on b-metric-like spaces, *Journal of Inequalities and Applications* 2013, 2013:402, doi: 10.1186/1029-242X-2013-402, 1-24

## APPLICATION OF EXPERT SYSTEMS IN TECHNICAL DIAGNOSTICS OF MOTOR VEHICLES

---

*This study presents the development of an expert system for use in technical diagnostics of motor vehicles. A set of examples was gathered on laboratory exercises at the School of electrical engineering and computer science applied studies in Belgrade. Data set analysis and determination of rules was carried out using Weka data mining software in Java. The web user interface (WUI) is based on eXpertise2Go expert system shell.*

---

### INTRODUCTION

During 1980s Bosch, Siemens, Magneti Marelli and other automotive manufacturers independently developed modern digital control systems for use on most types of vehicles. As the physical processes on vehicles are very slow compared to the speed of microcontrollers, there was a lot of free processor time to be used for other purposes than controlling the engine. That led to the creation of self-diagnosis systems. [1]

The expected advantage of self-diagnosis was the autonomous detection of faults on the vehicle systems. It was supposed that the automotive technicians didn't need to determine the reason of the problem any more, but to simply replace the defective part. Sadly, the praxis proved this expectations to be wrong. Even nowadays with the improved sensors and microcontrollers only around 25% of faults are properly determined by the self-diagnosis system. In other cases a skilled technician is needed to determine the source of the problem with or without informations given by self-diagnosis system. Education and specialization of an automotive technician is a long process and significant expense for either small or large automotive company. In response to the market demands automotive software developers included guided troubleshooting into existing software solutions.

The main disadvantage of guided troubleshooting is the fact that it wasn't created by experienced technicians who solved the particular problems but by engineers. The result is that there are no specific problem solutions for the exact vehicle model. The only given informations are the generalized and hypothetical conclusions based on recursion of if-then algorithm.

### LABORATORY EXERCISES

On the School of electrical engineering and computer science applied studies in Belgrade exists a study program Automation and vehicle control systems. The courses associated with automotive subject matter besides theory lectures include compulsory laboratory exercises. The objective is to acquaint students with real-life malfunctions on a vast range of vehicles. During past few years over 100 different passenger cars and vans were the subject of diagnostics and experimenting. Most of the vehicles came with at least one problem. The causes of the majority of problems were determined and the solutions to those problems were recommended to the vehicle owners. Furthermore the records describing the problems and the causes were kept. The records include owners complaint, descriptions of diagnostic steps with additional diagnostic software screenshots. The screenshots contain live ECU (Engine Control Unit) data, oscilloscope snapshots, fault codes etc. These documents hold enough data for an experienced automotive technician to conclude the reason of the malfunction without performing tests themselves. As mentioned, in the course of the diagnostic process different dedicated testing softwares were utilised. For example Fig 1. depicts the way of conducting a relative compression test by way of measuring starter current during prolonged engine starting.

---

<sup>1</sup> School of Electrical Engineering and Computer Science Applied Studies, Belgrade, Serbia

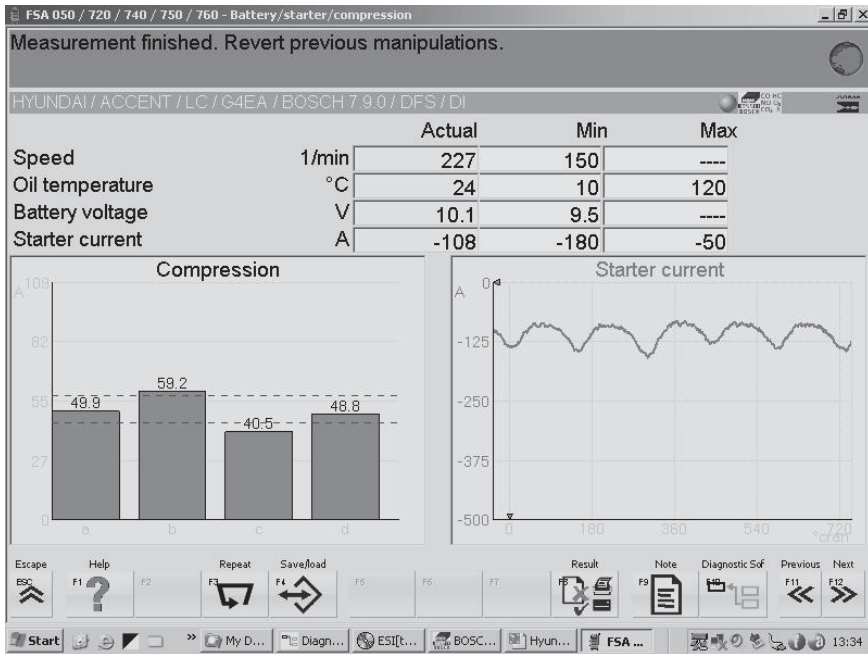


Fig. 1. Relative compression test

## SET OF EXAMPLES

When creating a set of examples it is of utmost importance to properly define attributes. Too many attributes with little relevance may result in ambiguous conclusions. Too few attributes and there will be no conclusions at all. With complete diagnostic records in which the emphasis is on the tests that led to the cause of the problem it is not too difficult to extract the right attributes. Nevertheless, a lot of knowledge and experience is needed to separate the important information from the rest. Looking through the records it may be noticed that some tests recur more than other and that the results of these tests often uncover the root of the problem. After a few iterations the following attributes distinguished:

- **fuel type** - the type of the power source either fuel or electric energy. The values are: gasoline, diesel, LPG, hybrid and electric;
- **compression pressure** - measuring compression pressure shows the overall condition of engine cylinders, pistons, piston rings, piston rods and valves. The measurement has two results: compression pressure greater than the minimal value and lower than minimal value. In the set of examples this values may be represented with normal and low respectively;
- **cylinder leakage** - this measurement is similar to the measurement of the compression pressure. The difference is that it may be determined where exactly is the compression pressure leaking. Therefore cylinder leakage test is usually performed if the measured compression pressure is low. The important notice is that if compression pressure is low the leakage doesn't have to be high, but high leakage is a certain indicator that compression pressure is low. The values in the set of examples are: low, inlet valve, exhaust valve and cylinder/piston/rings;
- **blue exhaust smoke** - presence of blue exhaust smoke allude to the consumption of engine oil. The values are true and false.
- **black exhaust smoke** - a lot of carbon particles colour the exhaust fumes black. This is a certain indicator that the fuel mixture is too rich. The values are true and false;



- **fuel consumption** - there are many reasons for high fuel consumption. Coinciding with another symptom narrows the possibilities. The values are high and normal;
- **cranking** - when turning the ignition lock to the start position the engine should start turning which sounds loudly. The absence of cranking (turning) usually implies that there is something wrong with electrical installation. This attribute is closely tied with the next two. The values are true for cranking and false if nothing is happening;
- **battery voltage drop** - if battery voltage is high enough but drops considerably when starting the engine then the battery is worn out. The value true stands for the presence of voltage drop and false means that the voltage is stable during cranking;
- **starting** - engine starting process can be successful and unsuccessful. The values are true and false respectively
- **starting temperature** - for the cases when the engine doesn't start the temperature is an important information, especially for diesel engines. It also makes a difference when diagnosing starting failure on gasoline engine when the spark is missing. The values are low and operating;
- **misfire** - a misfire is the absence of mixture ignition inside the cylinder. The reasons are many and the values are true if the misfire occurs and false if it doesn't happen;
- **knocking** - knocking sound from the engine is commonly the effect of early ignition. The damage it can inflict to the engine is immense. Similarly to the previous attribute if knocking occurs the value is true and if it doesn't the value is false;
- **spark** - on gasoline engines there are two main requirements for successful starting and running: fuel and spark. The values are true for the presence and false for the absence of spark;
- **fuel pressure** - fuel pressure needs to be high enough for engine to start and run smoothly. The value normal stands for adequate pressure and low for pressure lower than expected;
- **vibrations** - vibrations evaluation is the basic diagnostic test. If the engine vibration level is high the value is high and if it is normal the value is normal;
- **performance** - it is very difficult to rate the engine performance since it depends on subjective assessment of owner or technician because the measurement equipment is very expensive. However, this information is often significant and should be taken into account. The values are normal and poor;
- **overheating** - if the engine is overheating the value is true otherwise the value is false;
- **cause** - finally, this attribute tells the reason of the malfunction. Since the engine and control system are complex the list of values is adequately long. The values are: IV (inlet valve), EV (exhaust valve), spark plugs, glow plugs, crankshaft sensor, injectors, ECU, cylinder mechanically, ignition coil, fuel pump, battery and starter.

With the attributes defined the next step is to classify the examples and build the ARFF file type database. There are a few ways of creating the dataset and the chosen one is by using text editor and Weka Explorer application. In ARFF database the examples are written in rows with values separated by commas. Therefore it is easy to edit the set of examples in a spreadsheet application using text to columns function and saving data as CSV (comma separated values) file type.

## MACHINE LEARNING

Since the objective is to create an expert system for assistance in technical diagnostics the derived rules must come with an explanation. The C4.5 algorithm developed by Ross Quinlan uses the concept of information entropy to build a decision tree. [2] In Weka Data Mining software a classifier named PART is used to build a partial C4.5 decision tree in every iteration. The most certain leaf of every decision tree is then turned into a rule. For the gathered dataset the PART classifier generated the decision list

presented in the Table 1:

**Table 1.** The decision list

<b>Rule №</b>	<b>Rule description</b>
Rule 1	<i>cranking = false AND battery voltage drop = true: battery (10/0)</i>
Rule 2	<i>cranking = true AND starting = false AND fuel pressure = low: fuel_pump (7/0)</i>
Rule 3	<i>cranking = false AND battery voltage drop = false: starter (7/0)</i>
Rule 4	<i>compression pressure= low AND blue exhaust smoke = true: cylinder_mechanically(7/0)</i>
Rule 5	<i>black exhaust smoke = true: injectors (5/0)</i>
Rule 6	<i>fuel type = diesel AND cranking = true AND starting = false AND starting temperature = low AND fuel pressure = normal: glow_plugs (3/0)</i>
Rule 7	<i>fuel type =gasoline AND cranking = true AND starting = false AND starting temperature =operating: crankshaft_sensor (3/0)</i>
Rule 8	<i>fuel type =gasoline AND cranking = true AND starting = false AND starting temperature =low:ignition_coil (3/1)</i>
Rule 9	<i>knocking = true: spark_plugs (3/1)</i>
Rule 10	<i>: ECU (5/2)</i>

## WEB USER INTERFACE

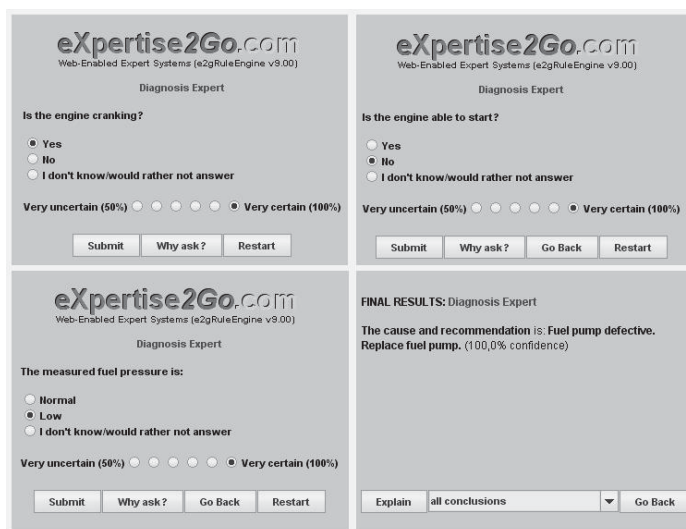
The translation of rules to the eXpertise2Go expert system shell is very simple. There is no need for more than basic programming skills. First the rules are written using the notation shown in the following example:

```
RULE [Battery]
IF [cranking] = "No" AND [battery voltage drop] = "Yes"
THEN [The cause and recommendation] = "Battery defective. Replace battery." @ 100
```

Where the last number is the prediction certainty in percents. Then the questions are defined similarly:

```
PROMPT [cranking] MultChoice CF
"Is the engine cranking?" "Yes" "No"
```

Finally, the web user interface layout parameters are defined and the Expert system is ready to use as displayed on the Fig. 2.



**Fig. 2.** Expert system web user interface (WUI)

## **CONCLUSION**

This paper describes the early development of an Automotive diagnostic expert system. Though the dataset is relatively small the resulting decision support system is already useful for teaching students. The next step is creating a service network where the users both benefit from the expert system and improve it by sending useful informations.

## **REFERENCES**

- [1] Robert Bosch GMBH, Gasoline-Engine Management, 3<sup>rd</sup> edition, Wiley, New York, 2006
- [2] John Ross Quinlan, C4.5: Programs for Machine Learning, Mogan Kaufmann Publishers, San Mateo, 1993

# INTEGRAL SEMI-LAGRANGIAN APPROACH FOR TWO-DIMENSIONAL CONTINUITY EQUATION

---

*We deal with two-dimensional continuity equation equipped with suitable known coefficients, initial and boundary conditions. To solve this problem we describe integral semi-lagrangian approach based on exact equality of two spatial integrals over domains located at the neighboring temporal levels. Presented scheme has theoretical justification about convergence with first order of accuracy. Introduced algorithm allows to avoid algebraic relation between temporal and spatial steps which traditionally implied by Courant-Friedrichs-Lewy condition for numerical methods.*

---

## INTRODUCTION

Many physical phenomena in transport processes are modelled by time dependent hyperbolic conservation laws. Finite volume schemes provide well-established conservative methods for solving the governing advection equations. Moreover, high-order finite volume schemes were developed in order to treat high gradients and discontinuities of the solution [1-5]. The analysis of available standard methods for hyperbolic equations is typically dominated by time step restrictions, mainly for the sake of their stability. In contrast to Eulerian schemes, Lagrangian particle methods require often less restrictive conditions on the time step. A more comprehensive discussion on these and related aspects concerning Eulerian versus Lagrangian schemes for hyperbolic conservation laws is offered in the textbooks [6-8].

During the last two decades the numerical algorithms for advection equation based on semi-lagrangian approach have been rapidly developing. Initially these algorithms were developed with a view to application in climate prediction [9-12]. But now they are using widely for multidimensional fluid dynamics applications [13]. Considerable effort has been made recently in order to construct conservative semi-Lagrangian methods [13-18]. In some of these papers [10, 13-15] presented methods work with a rectangular grid which is fixed throughout the simulation. For instance Scroggs and Semazzi [13] presented a semi-Lagrangian finite volume method for a system of conservation laws in which they attempted to satisfy the discrete conservation relation exactly. However, the numerical results demonstrate that their scheme is not fully conservative, despite the claims given in the article. Usually boundary nodes are not taken in consideration and convergence are proving by numerical experiment without theoretical justification.

In this paper we describe integral semi-lagrangian approach based on exact equality of two spatial integrals over domains located at the neighboring temporal layers. For presented scheme we make theoretical justification of convergence with first order of accuracy. Furthermore theorem which permits to take into account a volume of substance passed through a boundary is presented.

## THE PROBLEM STATEMENT AND THE MAIN THEOREM

Consider the continuity equation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(u\rho)}{\partial x} + \frac{\partial(v\rho)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

in the domain  $[0, T] \times D$  with  $D = [0, 1] \times [0, 1]$ . Functions  $u(t, x, y)$ ,  $v(t, x, y)$  are known in  $[0, T] \times D$  and smooth enough. We suppose for simplicity that  $\forall t \in [0, T]$  the following conditions are satisfied:

---

<sup>1</sup> Institute of Computational Modeling of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences

<sup>2</sup> Beihang University, Beijing, China

$$u(t, x, y)|_{y=0} = v(t, x, y)|_{y=0} = 0, \quad u(t, x, y)|_{y=1} = v(t, x, y)|_{y=1} = 0 \quad (2)$$

and

$$u(t, x, y)|_{x=1} \geq 0. \quad (3)$$

For unknown function  $\rho(t, x, y)$  the following initial and boundary data are defined:

$$\rho(t, x, y)|_{t=0} = \rho_{\text{init}}(x, y), \quad \rho(t, x, y)|_{x=0} = \rho_{\text{left}}(t, y) \quad (4)$$

where  $\rho_{\text{init}}(x, y)$ ,  $\rho_{\text{left}}(t, y)$  are known and smooth enough.

To introduce the numerical algorithm, firstly use two temporal layers  $t_{k-1}$ ,  $t_k \in [0, T]$  with time step  $\tau = t_k - t_{k-1} > 0$ . At temporal level  $t_k$  consider an arbitrary straight-edges quadrangle  $\Omega$  with four nodes  $(t_k, x_n, y_n)$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$ . For each quadrangle edge at segment  $t \in [t_{k-1}, t_k]$  we construct the “characteristic surface”  $S_n$  consisting of characteristics (or trajectory paths) of equation (1) with beginning at this edge. All four surface  $S_n$  cross the plane  $t = t_{k-1}$  and carve in it a curvilinear quadrangle  $Q$  with curved edges  $C_n$  (Fig. 1). If  $\Omega$  is located near boundary of domain  $[0, T] \times D$ ,

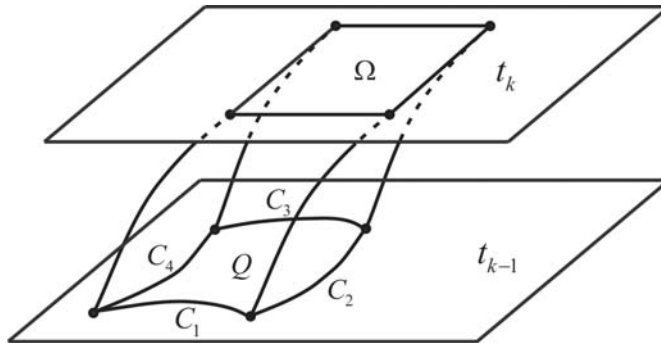


Fig. 1. Curvilinear quadrangle  $Q$

surfaces  $S_n$  can cross the boundary. In this case we may get a triangular, quadrangular or pentagonal domain  $I$ . Since it does not cause principal changes, we consider only the most common situation with quadrangular domain  $I$  (Fig. 2). For  $\Omega$ ,  $Q$  and  $I$  the follow statement is valid.

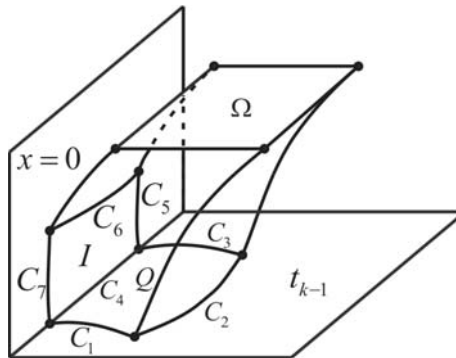


Fig. 2. Boundary quadrangle  $I$

**Theorem 1.** For smooth solution of problem (1) - (4) we have the equality

$$\int_{\Omega} \rho(t_k, x, y) d\Omega = \int_Q \rho(t_{k-1}, x, y) dQ + S(I)$$

$$\text{where } S(I) = \begin{cases} \int_I \rho(t, 0, y) u(t, 0, y) dI, & \text{if } I \neq \emptyset \text{ at the plane } x = 0, \\ 0 & , \text{if } I = \emptyset. \end{cases}$$

### SIMPLE SEMI-DISCRETE APPROXIMATION

Now construct mesh  $D_h$  in plane  $Oxy$ . For simplification we use the uniform mesh  $D_h$  with nodes  $(x_i, y_j)$ :  $x_i = ih$ ,  $y_j = jh$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, N$ , and meshsize  $h = 1/N$  (see Fig. 4). Then we divide time segment  $[0, T]$  by  $M + 1$  points  $t_k = k\tau$   $k = 0, 1, 2, \dots, M$ , with time step  $\tau = T/M$  where  $M \geq 1$ . Suppose that the (approximate) discrete solution  $\rho^h(t_{k-1}, x, y)$  at time level  $t_{k-1}$  is already known and we need to construct the approximate solution at time level  $t_k$ . For this purpose we need to take square  $\Omega_{i,j}^{k-1}$  with four nodes  $(x_i \pm h/2, y_j \pm h/2)$  and apply the Theorem 1. Thus we get

$$\int_{x_i-1/2}^{x_i+1/2} \int_{y_j-1/2}^{y_j+1/2} \rho(t_k, x, y) dy dx = \int_{Q_{i,j}^{k-1}} \rho(t_{k-1}, x, y) dQ + S(I_{i,j}^{k-1}). \quad (5)$$

To compute integrals in (5) we use the bilinear interpolation [19] introduced by basic functions  $\psi_{p,q}(x, y) = \varphi_p(x)\varphi_q(y)$  where

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} (x - x_{p-1})/h, & \text{if } x \in (x_{p-1}, x_p] \subset [0, 1], \\ (x_{p+1} - x)/h, & \text{if } x \in (x_p, x_{p+1}] \subset [0, 1], \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

Thus  $\forall r = 0, \dots, M$  in each square  $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$  we define interpolation  $\rho_{\text{int}}^h(t_r, x, y)$  of discrete function  $\rho^h(t, x, y)$  by formula

$$\rho_{\text{int}}^h(t_r, x, y) = \sum_{q=j}^{j+1} \sum_{p=i}^{i+1} \rho_{p,q}^r \psi_{p,q}(x, y) \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}], y \in [y_j, y_{j+1}]. \quad (6)$$

To compute  $S(I_{i,j}^{k-1})$  in (5) we also use bilinear interpolation  $(\rho u) \approx (\rho u)_{\text{int}}$ , where

$$(\rho u)_{\text{int}}(t, 0, y) = \sum_{q=j}^{j+1} \sum_{r=k-1}^k \rho_{\text{left}}(t_r, y_q) u(t_r, 0, y_q) \psi_{r,q}(t, y) \quad \forall (t, y) \in [t_{k-1}, t_k] \times [y_j, y_{j+1}].$$

So instead of exact equality (5) we get an approximate one with property

$$\int_{x_i-1/2}^{x_i+1/2} \int_{y_j-1/2}^{y_j+1/2} \rho_{\text{int}}^h(t_k, x, y) dy dx \approx \int_{Q_{i,j}^{k-1}} \rho_{\text{int}}^h(t_{k-1}, x, y) dQ + S^h(I_{i,j}^{k-1}) \quad (7)$$

$$\text{where } S^h(I) = \begin{cases} \int_I (\rho u)_{\text{int}}(t, 0, y) dI, & \text{if } I \neq \emptyset \text{ at the plane } x = 0, \\ 0 & , \text{if } I = \emptyset. \end{cases}$$

Left-hand side of (7) can be changed with second order of accuracy:

$$\int_{x_i-1/2}^{x_i+1/2} \int_{y_j-1/2}^{y_j+1/2} \rho_{\text{int}}^h(t_k, x, y) dy dx \approx h^2 \rho(t_k, x_i, y_j). \quad (8)$$

To compute right-hand side of (7) we need to construct some approximation for domains  $Q_{i,j}^{k-1}$  and  $I_{i,j}^{k-1}$ . Since both domains are quadrangles with curved sides, we demonstrate the approximation only

for  $Q_{i,j}^{k-1}$ . Approximation of  $I_{i,j}^{k-1}$  we can get by the same way. For this purpose consider four additional points  $(x_i \pm h/2, y_j)$  and  $(x_i, y_j \pm h/2)$  of square  $\Omega_{i,j}$  at temporal level  $t_k$  and denote each of eight nodes by  $A_n(x_n, y_n)$   $n=1, \dots, 8$ . From each  $A_n$  construct corresponding characteristics to time level  $t_{k-1}$  which produces a point  $B_n$  (Fig. 3). To compute coordinates of point  $B_n$  approximately it's

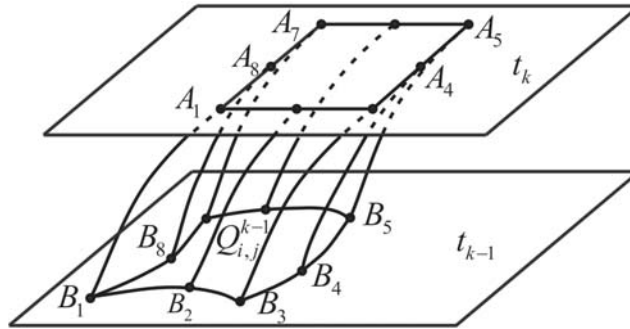


Fig. 3. Curvilinear quadrangle approximation

enough to solve the following system of ordinary differential equation:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}_n}{dt} = u(t, \tilde{x}, \tilde{y}), \\ \frac{d\tilde{y}_n}{dt} = v(t, \tilde{x}, \tilde{y}), \end{cases} \quad t \in [t_{k-1}, t_k]$$

with initial data

$$\tilde{x}_n(t_k) = x_n, \quad \tilde{y}_n(t_k) = y_n$$

by the Runge-Kutta method [20] with fourth order of accuracy. Thus we compute the approximate coordinates  $B_n^h(\tilde{x}_n(t_{k-1}), \tilde{y}_n(t_{k-1}))$  of point  $B_n$ . All nodes  $B_n^h$  are producing the straight-edges polygon (octagon)  $P_{i,j}^{k-1}$  which we treat as quadrangle with four parabolic edges (Fig. 3, 4). Considered domain  $P_{i,j}^{k-1}$  approximates  $Q_{i,j}^{k-1}$ . By the same way we can construct polygon  $L_{i,j}^{k-1}$  which approximates  $I_{i,j}^{k-1}$ .

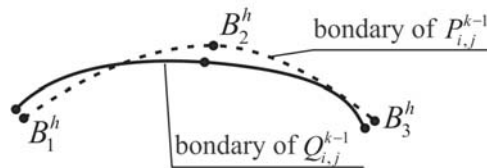


Fig. 4. Approximation of nodes and edges

Thus with help of (6) - (8) to compute the approximate solution  $\rho^h(t, x, y)$  at temporal level  $t_k$  we put

$$\rho^h(t_k, x_i, y_j) = \frac{1}{h^2} \int_{P_{i,j}^{k-1}} \rho_{\text{int}}^h(t_{k-1}, x, y) dP + \frac{1}{h^2} S^h(L_{i,j}^{k-1}). \quad (9)$$

To evaluate convergence we use the discrete analogue of norm in space  $L_1(D)$ :

$$\|\rho^h\|_{L_1}^h = \sum_{i,j=1}^{N-1} |\rho_{i,j}^h| h^2.$$

For numerical solution computed by (9) the following theorem is valid.

**Theorem 2.** For sufficiently smooth solution  $\rho(t, x, y)$  of problem (1)-(4) and discrete solution  $\rho^h(t, x, y)$

computed by (9) we have the following estimate:

$$\|\rho(t_k, \cdot) - \rho^h(t_k, \cdot)\|_{L_1}^h \leq k(c_1 h^2 + c_2 h \tau^2), \quad \forall k = 0, 1, \dots, M,$$

with constants  $c_1$  and  $c_2$  independent of  $k$ ,  $h$  and  $\tau$ .

**Corollary 1.** *If the conditions of Theorem 2 are satisfied, for  $t_k = T$  we have:*

$$\|\rho(T, \cdot) - \rho^h(T, \cdot)\|_{L_1}^h \leq T(c_1 h^2 / \tau + c_2 h \tau).$$

**Corollary 2.** *If in addition to Theorem 2 we put  $\tau = \tilde{c} h$ , then*

$$\|\rho(T, \cdot) - \rho^h(T, \cdot)\|_{L_1}^h \leq c_3 T h.$$

Thus according to Corollary 2 we get the convergence of first order. Note that this approach does not require the validity of tedious time-step restriction.

### BALANCE EQUATION

Traditionally [1, 2] integral law of mass conservation has the following form:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_D \rho dD = - \oint_{\Sigma} (\rho u, \rho v) \cdot \vec{n} d\Sigma,$$

where  $\Sigma$  - the boundary of domain  $D$ ,  $\vec{n}$  - the vector of external normal. Since  $D = [0, 1] \times [0, 1]$  and due to conditions (2), balance equation transforms to the following equality:  $\forall k = 1, \dots, M$

$$\int_D \rho(t_k, x, y) dD = \int_D \rho(t_{k-1}, x, y) dD + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_0^1 (\rho u)(t, 0, y) dy dt - \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_0^1 (\rho u)(t, 1, y) dy dt. \quad (10)$$

Consider an arbitrary straight-edges rectangle  $E$  located in the effluent domain  $[t_{k-1}, t_k] \times [0, 1]$  laying in the plane  $x = 1$  (Fig. 5). By the described above algorithm we can get the curvilinear quadrangle  $W$

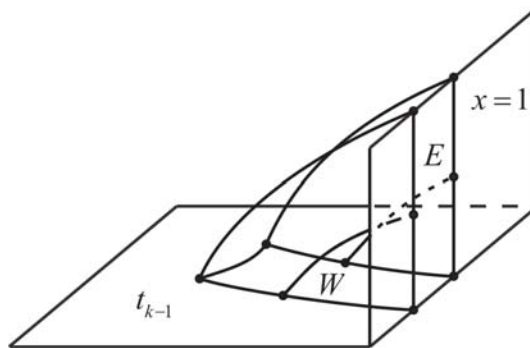


Fig. 5. Right boundary quadrangle  $W$

located in domain  $D$  at temporal level  $t_{k-1}$ . Similar to the Theorem 1 the following statement is valid.

**Theorem 3.** For smooth solution of problem (1)-(4) we have the equality

$$\int_E (\rho u)(t, 1, y) dE = \int_W \rho(t_{k-1}, x, y) dW.$$

Let define  $\forall j = 1, \dots, N-1$   $E_j^{k-1} = [y_j - h/2, y_j + h/2] \times [t_{k-1}, t_k]$ ,  $E_0^{k-1} = [y_0, y_0 + h/2] \times [t_{k-1}, t_k]$  and  $E_N^{k-1} = [y_N - h/2, 1] \times [t_{k-1}, t_k]$ . Union of all domains  $Q_{i,j}^{k-1}$  and  $W_j^{k-1}$  completely covers the domain  $D$ :

$\bigcup_{i,j=0}^N Q_{i,j}^{k-1} \cup \bigcup_{j=0}^N W_j^{k-1} = D$ . Thus due to theorem 3 equality (10) can be transformed to the following form:



$$\int_D \rho(t_k, x, y) dD = \int_D \rho(t_{k-1}, x, y) dD + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_0^1 (\rho u)(t, 0, y) dy dt - \int_{W^{k-1}} \rho(t_{k-1}, x, y) dW,$$

where  $W^{k-1} = \bigcup_{j=0}^N W_j^{k-1}$ . By showed above algorithm each quadrangle  $W_j^{k-1}$  can be approximated by

some quadrangle  $R_j^{k-1}$  with three parabolic edges (Fig. 5). In this case the follow theorem is valid.

**Theorem 4.** For smooth solution of problem (1)-(4)  $\forall k = 1, \dots, M$  the approximate solution  $\rho^h(t_k, \cdot)$  satisfies the equality:

$$\int_D \rho_{\text{int}}^h(t_k, x, y) dD = \int_D \rho_{\text{int}}^h(t_{k-1}, x, y) dD + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_0^1 (\rho u)_{\text{int}}^h(t, 0, y) dy dt - \int_{R^{k-1}} \rho_{\text{int}}^h(t_{k-1}, x, y) dR,$$

where  $R^{k-1} = \bigcup_{j=0}^N R_j^{k-1}$ .

This theorem shows the validity of discrete analog of balance equation in each time layer.

## CONCLUSION

Today there are a lot of algorithms from the family of semi-lagrangian methods. The main advantage of these methods consists in absence of algebraic condition for a time step. Thus we can provide numerical modeling with greater time step and smaller computational time. So such algorithms are convenient for problems with large value of velocities. Nevertheless most of semi-lagrangian methods have no theoretical justification of convergence. Presented method based on square grid only and use accessory algorithms which make computation more resource-intensive. Nevertheless such complication allows us to make theoretical justification of convergence with first order of accuracy. Furthermore theorem which permits to take into account volume of substance passed through a boundary is presented.

## ACKNOWLEDGEMENTS

The work was supported by Russian Foundation of Fundamental Researches, grant № 14-01-31203.

## REFERENCES

- [1] Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.Ya., Kraiko A.N., Prokopov G.P. Numerical solving of multidimensional gas dynamics problems Moscow: Science publ., 1976. (In Russian)
- [2] Godunov S.K. Mathematical physics equations. Moscow: Science publ., 1979. (In Russian)
- [3] Levy D., Puppo G., Russo G. Central WENO Schemes for Hyperbolic Systems of Conservation Laws, Math. Model. Numer. Anal., Vol. 33, 1999, P. 547-571.
- [4] LeVeque R.J. Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems (Cambridge Texts in Applied Mathematics). Cambridge University Press, 2002.
- [5] Clain S., Diot S., Loubère R. A High-Order Polynomial Finite Volume Method for Hyperbolic System of Conservation Laws with Multi-Dimensional Optimal Order Detection (MOOD), Journal of computational Physics, Vol. 230, 2011, P. 4028-4050.
- [6] Durrant D.R. Numerical Methods for Wave Equations in Geophysical Fluid Dynamics. Springer, New York, 1999.
- [7] LeVeque R.L. Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge University Press, 2002.
- [8] Morton K.W. Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems. Chapman & Hall, London, 1996.
- [9] Staniforth A., Cote J. Semi-Lagrangian Integration Schemes for Atmospheric Model - a Review, Monthly weather review, Vol. 119, 1991, P. 2206-2223.
- [10] Priestley A. A Quasi-Conservative Version of The Semi-Lagrangian Advection Scheme, Monthly weather review, Vol. 121, 1993, P. 621-629.
- [11] Ritchie H. Semi-Lagrangian Advection on a Gaussian Grid, Monthly weather review, Vol. 116, 1987, P. 608-619.
- [12] Robert A., Yee T., Ritchie H. A Semi-Lagrangian and Semi-Implicit Numerical Integration Scheme for Multilevel Atmospheric Models // Monthly weather review, Vol. 113, 1985, P. 388 - 394.

- [13] Scroggs J.S., Semazzi F.H.M. A Conservative Semi-Lagrangian Method for Multidimensional Fluid Dynamics Applications, Numer. Meth. Part. Diff. Eq., Vol. 11, 1995, P. 445-452.
- [14] Phillips T.N., Williams A.J., Conservative Semi-Lagrangian Finite Volume Schemes, Numer. Meth. Part. Diff. Eq., Vol. 17, 2001, P. 403-425.
- [15] Laprise J.P.R., Plante A. A Class of Semi-Lagrangian Integrated-Mass (SLIM) Numerical Transport Algorithms. Monthly Weather Review, Vol. 123, 1995, P. 553-565.
- [16] Lentine M., Gretarsson J.T., Fedkiw R. An Unconditionally Stable Fully Conservative Semi-Lagrangian Method, Journal of Computational Physics, Vol. 230, 2011, P. 2857-2879.
- [17] Takizawa K., Yabe T., Nakamura T. Multi-Dimensional Semi-Lagrangian Scheme That Guarantees Exact Conservation, Comput. Phys. Commun. Vol. 148 (2), 2002, P. 137-159.
- [18] Iske A. Conservative Semi-Lagrangian Advection on Adaptive Unstructured Meshes, Numer. Meth. Part. Diff. Eq. Vol. 20, 2004, P. 388-411.
- [19] Krulov V.I. Approximate Computation of Integrals, Moscow: Science publ., 1967. (In Russian)
- [20] Novikov E.A. Explicit Methods for Stiff Problems. Novosibirsk: Science publ., 1997. (In Russian)

## PROBLEM OF CREATION OF THE SOFTWARE FOR REALIZATION OF INTERVAL ALGORITHMS

---

*The review of actual problems of the interval analysis is provided in work, the description of the interface of two packages of the interval algorithms aimed at reduction of degree of need of acquaintance to features of realization of interval methods at the expense of use of the mechanism of overloads, a giving the chance automatic choice of option of interval arithmetics and the corresponding method is given.*

---

### PROBLEM OF REALIZATION OF INTERVAL ALGORITHMS

Interval methods [1-4] cause now the increasing interest of researchers, as a way of modeling in the conditions of non-determination of data when amplitude of their fluctuation has limited character. In some cases interval methods are considered in a context of alternative methods to probability-statistical methods and methods of the theory of indistinct sets [5]. It is possible to note that the specified interest to interval methods in turn initiates works on creation of new interval methods and various options of the interval arithmetician (IA) [2-4] which would consider features of these or those tasks and would give the tool for adequate research of some process. Descriptions of new treatments of interval number arising from practical requirements, rules corresponding the arithmetician can be found in extensive literature according to the interval analysis or interval mathematics [4] as some authors characterize this new direction in applied mathematics. In the traditional interval analysis the following problems are allocated:

- research of a set of interval numbers, as some structure and defined in a suitable way the interval-valued of functions, as some set of displays of a set of interval numbers in itself;
- construction and justification of adequacy of interval models for specific objectives within the corresponding calculation of intervals;
- construction, justification and research of properties of interval algorithms;

- software creation for realization of interval algorithms.

This work is devoted to a problem of creation of the software for realization of interval algorithms.

Now various ways of the organization of interval calculations on the COMPUTER (electronic computer) are developed, concrete systems and libraries are created.

However the available considerable list of versions of the software, consisting of in own way effective realization of application of methods of interval mathematics, has multivendor character. This circumstance not only demands studying of concrete approaches in realization of algorithms for the purpose of their use, but in some cases doesn't present to "the wide user" the satisfactory interface. First of all, it is expressed in limited possibility of a variation of basic options interval the arithmetician. Other important feature of set of this realization is lack of possibility of an operational overload of methods in the conditions of multidimensional numerical experiment and release of the user from need of detailed studying of the most interval mathematics. When it is a question of release of the user from need of acquaintance to bases of the interval analysis and carrying out some preparatory work by their assignment on COMPUTER (electronic computer) "shoulders", from the point of view of a paradigm modular it was accepted to speak about relevance or need of creation of some package of applied programs (PAP) (some algorithmic system or the generator of programs), making automatic creation of interval algorithms and consisting of the

---

1 National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan

2 Navoiy state pedagogical institute, Navoiy, Uzbekistan

3 Nukus state pedagogical institute, Nukus, Uzbekistan

subprogrammes modules developed on the modular principle [6].

At algorithmization of methods of the interval analysis essential difficulties arise because of impracticality of COMPUTERS (electronic computers) hardware to the accounting of specific requirements of interval calculation. These requirements are caused by that in the course of generation of concrete interval algorithms on the COMPUTERS (electronic computer) there is a need for subprogram machine interval arithmetics, for calculation of values the interval-valued of functions and in some analytical transformations. It should be noted that in the majority of offered interval algorithms it is supposed that the user has to have acquaintance to bases of the interval analysis, be able to carry out some preparatory work. This circumstance in a certain measure limits a circle of users of interval methods. Package of applied programs (PAP) here is understood as the standard concept of a package, i.e. set of programs and the system means necessary for the solution of a certain class of tasks. If there is a hardware realization of interval operations and calculation the interval-valued of functions in the form of microprograms who allows to reduce time of performance of interval and arithmetic operations, that, obviously, writing and debugging of programs in terms of the interval analysis becomes considerably simpler and accelerated process of calculations. Lack of hardware realization of interval operations does necessary inclusion in a package "libraries of serving modules" which can conditionally be broken into three groups.

Modules of machine interval arithmetics belong to the first group, it is possible to carry modules of interval calculation of elementary functions to the second group. Modules of special and logical interval operations make the third group of library. Depending on the package purposes the list of library of serving modules can be expanded or squeezed.

#### **OBJECT-ORIENTED APPROACH AT REALIZATION INTERVAL ALGORITHMS**

In [2] it is given, possibly, a little outdated, the analysis of options of realization of interval arithmetics according to Moore and some options of interval arithmetics offered for various purposes.

It reflects a paradigm of modular programming dominating during this period. As for direct realization of concrete algorithm, the majority of researchers solved this problem, creating programs modeling computing process by a partition of interval expressions on appeals to the corresponding subprogrammes [7-8]. In work [8] problem of release of the user from need of detailed possession of methods of the interval analysis was solved by creation of the corresponding M-matrixes.

Analyzing the publications which have appeared for the period passed after an exit of often quoted work [2], it is possible to note not only a variety of the studied questions of the interval analysis and a variety of appendices of interval methods, but also a tendency in development of new options of news agency and a combination of various news agencies at the solution of a specific objective, creation of packages of interval algorithms. For example, in work [9] in the analysis of interval computing processes in IR space, along with operation of subtraction according to Moore, so-called non-standard subtraction across Markov that allows the author to consider cases of exact performance of operations is entered and to receive the improved estimates of growth of errors of calculations. In works of other authors the choice specifically option of news agency plays an essential role. For example, in [10] at the solution of a problem of internal estimation of sets of decisions of systems of the linear algebraic equations with interval coefficients, the author uses Kaukher's generalized interval arithmetics. It not only is natural to an objective, but also results in essential advantages of developed interval algorithms.

Therefore, there is a need for a choice of concrete option of interval arithmetics and creation of the corresponding software providing automation of such choice at realization of interval algorithms. The following task was specifically formulated: to create a package of interval algorithms on realization of calculation of value of algebraically admissible expression with a choice of suitable option of interval arithmetics.

The concept of object-oriented programming most conveniently realized in language C++, assumes possibility of automatic switching of process of calculations from one option of interval arithmetics in another on condition of preserva-

tion of record of the most algebraically admissible expression. The corresponding package [11] in which the modules realizing algorithms of operations of one of the following options interval arithmetic, namely, news agency “according to Moore”, news agency “across Markov”, Kahane’s news agency, Kaukher’s news agency, news agency of circular interval numbers, and also their options for complex interval numbers, are realized in the form of classes was developed for the solution of the specified task. Such mechanism allows, without changing a design of algebraically admissible expressions, to overload the corresponding algorithms chosen by news agency. Thus the user needs to know only properties of chosen option of news agency or experimentally to choose the most convenient option of news agency for the solution of this task. Thus, the user has an opportunity to make computing experiment not only for various initial data, but also to establish the preferable computing environment, without changing the designs realizing computing algorithm. Besides, owing to conceptual openness of a package, the user has possibility of independent extension of the list specified the arithmetician. As idea development on automation of application of various options of news agency there was a problem of creation of a package of interval algorithms for a wide range of users [12].

The real package of interval algorithms is developed on the basis of the principles of object-oriented programming. As it possesses open architecture, the complex of programs for calculation of values of interval algebraically admissible expressions is integrated into it within various interval the arithmetician” described above “. On the other hand this option of a package of interval algorithms unlike some other packages of interval algorithms not only differs variety basic interval the arithmetician, but also that at his development authors tried to adhere to the principle of friendliness. In this case the principle of friendliness is understood not only in simplicity and convenience of the interface, but also a readiness of enough of software expanding, a circle of users by interval methods. In particular, within a package users not familiar with methods of the interval analysis, are given opportunity of carrying out a certain number of computing experiments. Thus it is enough to write down tasks, using usu-

al mathematical expressions. In this option of a package, the user has opportunity to solve interval methods a number of problems of the calculus mathematics which is basic for much algorithms solving specific problems. Besides, the user has opportunity to adjust a package on application of new algorithms, remaining within habitual language designs.

In our case is a class of tasks of the interval analysis or a class of material tasks which need to be solved within the interval analysis. System means are regular means of the COMPUTERS (electronic computer) operating systems. The module is understood as the program issued as function in C++, realizing on the COMPUTER (electronic computer) some finished fragment of computing process of the solution of a specific objective which consists in calculation of expressions both with valid, and with interval numbers.

#### **STRUCTURE AND FUNCTIONALITY OF A PACKAGE INTERVAL ALGORITHMS**

As it was noted above in language C++ the package focused on a wide range of users is created. In this package thematically same algorithms are issued in the form of classes. Process of development of a package was based on the principles of object-oriented programming, added by operators of statements of tasks who are close to the standard language. He gives the chance to the user to carry on dialogue with a package. In particular, the user has possibility of creation of the specific integrated program, combining appeals to package modules with execution of own codes.

It should be noted that development of set of the programs “Package of Interval Algorithms for the Wide User” was carried out on the basis of the principle of friendliness. In this case the principle of friendliness is understood not only in simplicity and convenience of the interface, but also a readiness of enough of the software expanding a circle of users with interval methods. Except existence of enough of the algorithms intended for the solution of tasks on condition of limited fluctuation of nondeterministic data, the user has opportunity to overload interval arithmeticians on the basis of the corresponding mechanism from means C++ [13]. This circumstance allows to expand a range of options of computing experiment,

focusing a choice, both basic arithmetics, and a suitable method on the substantial part of the initial task, having uncertainty of various types. In essence here it is a question of two interconnected packages [11,12] which set of methods the arithmetician or solutions of new tasks with non-deterministic parameters is open for independent and independent replenishment as required applications of new options interval. Considering this circumstance, will there be a speech below about the integrated package created by association of methods from [11] and [12] within one sample class [13].

That circumstance is essential that the user is given opportunity of carrying out a certain number of computing experiments, without requirement of profound acquaintance to methods of the interval analysis. Thus it is enough to write down tasks, using usual mathematical expressions. In this option of the package realized by means C++ on the basis of the principles of object-oriented programming [13], the user has opportunity to solve interval methods a number of problems of calculus mathematics and to adjust a package on application of new algorithms, remaining within habitual language designs.

Numerical experiments in interval mathematics plays a special role as within calculation of intervals the user at the solution of the task can not only "edit" applied mathematical model, choose suitable algorithm, correct machine algorithm, that is the program as it occurs at the solution of tasks material methods, but to trace results of a variation of separate parameters. Once again we will note in the course of computing experiment in our case the user has opportunity to choose suitable interval arithmetics, if necessary with little effort to edit, more precisely, to change a set of methods of the corresponding class.

Possibilities of the real package created in language C++ with use of the principles of object-oriented programming, allow to predict rather wide range of users as it is added by operators of statements of tasks who are close to the standard language. He gives the chance to the user to carry on dialogue with a package. In particular, the user has opportunity to indicate the need of the interval solution of a task, to receive the interval formulation of a problem of a legible look. As op-

erators of a problem definition have natural not algorithmic character, the software of language of inquiries has to be such that some program which is completely satisfying users for the formulation of a task was result of processing of inquiries, as it is offered to potential users of this package. The user, interactions with a package, forms initial information on a task in an unlimited natural language, and a package, analyzing this information, builds interval model of a task of signs of entrance information, solves an interval problem.

This option of a package for a wide range of users includes modules for the solution of the following tasks in interval statement:

1. Choice and testing of basic interval arithmetics for computing experiment.
2. Problems of interval matrix algebra.
3. Algebra of interval polynoms.
4. Roots of polynomials with interval coefficients.
5. Interval option of a solution of the problem of own values.
6. Decision of the interval systems of the linear algebraic equations (ISLAE).
7. Problems of linear programming in interval statement.
8. The solution of a task of Cauchy for the ordinary differential equations.

In the instruction to packages on examples it is shown as convenience of structure of the interface of a package, so large number of possible applications of packages, and also rules and methods of their use are provided. When testing of packages those algorithms or methods which are described and proved in numerous works on the interval analysis were chosen. In most cases, especially for cases with small dimensions of a task when the effect of promotion didn't lead to informational content loss, it was possible to receive satisfactorier results and substantial interpretations in comparison with use of known packages in literature or complexes of programs, including INAN1 [8] package.

So, for example at calculations on dynamics of distribution of a uniform ecotoxicant in the conservative environment [14], reduction of volume of an ecotoxicant of the volume having on conventional

unit or approach of an indicator of purity of unit of volume to a conditional indicator of purity (the red line) was shown to determination of efficiency of nature protection measures. Thus, the specified bottom and top curves show that the environment saturation ecotoxicant, at realization of the appropriate nature protection measures determined by level of investment, will come nearer to an indicator “a catastrophic threshold” - above the red line a green zone. The substantial sense of the interval decision can be formulated so: concentration of an ecotoxicant on the controlled period of time  $[0, T]$  won't fall below the threshold determined by the relevant interval decision, but to those will be closer to a green zone, than factors suppressing a pollutant will be more intensive.

## REFERENCES

- [1] Moore R.E. “Interval Analysis”.-Englewood Cliffs. N.J. : Prentice-Hall, 1966.
- [2] Kalmykov S. A., Shokin Yu.I. Yuldashev Z.Kh. Methods of the interval analysis. - Novosibirsk: Science, 1986. - 224c.
- [3] Jaulin Luc, Kieffer Michel, Didrit Olivier, Walter Eric Applied interval analysis. - M.; Izhevsk: Institute of computer researches, 2005. - 468 pages.
- [4] Shary S. P. Finite-dimensional interval analysis. Institute of computing technologies of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science. XYZ publishing house. 2010 . - 603c.
- [5] Diligensky N.V., Dymov L.G. Sevastyanov P. V. Indistinct modeling and multicriteria optimization of production systems in the conditions of uncertainty: technology, economy, ecology. M.: “Mechanical engineering publishing house – 1”, 2004. - 397c.
- [6] Nazirov Sh. A. Yuldashev Z.Kh. About one option of automation of application of the interval methods, based on the modular principle//the Modular analysis. - Novosibirsk: ITPM FROM Academy of Sciences of the USSR, 1978. - S.55-61.
- [7] Christ H. Realisierung einer Maschinenintervallarithmetik auf beliebigen ALGOL -60 Compilern. Elektron Rechenanlagen, 10, 217-222, 1968.
- [8] Shokin Yu.I., Bazarov M.B., Kalmykov S.A., Yuldashev Z.Kh. Package of the applied INAN-1 programs for automatic creation of interval algorithms of the solution of the ordinary differential equations//State fund of algorithms and programs. USSR, reg No. 50760000299. - 13p. ;-Annotation in: Algorithms and programs. - M.:1987. - production. No. 1. - S.21-22.
- [9] Ibragimov A.A. Interval and analytical methods in mathematical modeling: Dis. ... candidate. the physical. - a math. sciences. - Tashkent: NUUZ. 2002. - 141p.
- [10] Shary S. P. Interval algebraic tasks and their numerical decision: Diss. ... doctor of physical and mathematical sciences - Novosibirsk, 2000.
- [11] Yuldashev Z.Kh. Ibragimov A.A. Kalkhanov P. J. Complex of programs for calculation of values of interval algebraically admissible expressions within various interval the arithmetician. It is registered in the state register of the computer programs of the Republic of Uzbekistan, the Certificate on official registration of the computer programs No. DGU 02202, Tashkent, 19.05.2011.
- [12] Yuldashev Z.Kh. Ibragimov A.A. Kalkhanov P. J. Package of interval algorithms for the wide user. It is registered in the state register of the computer programs of the Republic of Uzbekistan, the Certificate on official registration of the computer programs No. DGU 02201, Tashkent, 19.05.2011.
- [13] Strastrup B. Programming language C++: Special prod./ The lane with English - M.: Publishing house BING; SPb.: Nevsky dialect, 2001.
- [14] Yuldashev Z.Kh. Khudayberganov O. J. Kalkhanov P. J. Modeling of purpose of penalties for environmental pollution in the conditions of non-determination of parameters. “Computing and Information Technologies in Science, Equipment and Education” conference works Pavlodar on September 20-22 2006y.344-346 p.

# ON NUMERICAL SOLUTION OF NAVIER-STOKES EQUATIONS WITH INFINITE BOUNDARY CONDITIONS

## О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ СИСТЕМ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ НА УДАЛЕННЫХ ГРАНИЦАХ

---

*The unsteady-state incompressible Navier-Stokes equations in two-dimensions with infinite boundary conditions are solved numerically using «rotation-stream function» formulation. The numerical integral relation is used to transfer infinite boundary condition to finite area. The incomplete approximation method with a multiparametric optimization is used for the Poisson's equation solution on the every discrete time step. Test cases are presented.*

---

### ВВЕДЕНИЕ

Как известно, при численном решении задач гидродинамики постановка краевых условий является одним из ключевых моментов. Существует множество подходов задания граничных значений неизвестных функций в зависимости от типа границы, используемой формулировки исходной дифференциальной системы уравнений, а также от используемого численного алгоритма [1],[2]. Одной из наиболее трудных проблем является постановка численных краевых условий в задачах с удаленными границами. Целью настоящей работы является, во-первых, численный перенос краевого условия с удаленной границы на границу расчетной области в плоских симметричных задачах протекания, и, во-вторых, реализация явной градиентной итерационной схемы с групповой оптимизацией параметров для решения полученной дискретизированной системы уравнений Навье-Стокса.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Основные уравнения, описывающие плоское течение однородной вязкой несжимаемой жидкости имеют следующий вид (все величины обезразмерены):

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \Delta \vec{V}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0, \quad (2)$$

или в переменных «вихрь-функция тока»:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \omega = \frac{1}{Re} \Delta \omega, \quad (3)$$

$$\Delta \psi = -\omega, \quad (4)$$

где  $\vec{V}$  - вектор скорости,  $P$  - давление,  $Re$  - число Рейнольдса,  $\omega$  - вихрь,  $\psi$  - функция тока. Будем считать, что течение жидкости происходит в некоторой односвязной области  $G$  с границей  $\partial G = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  на временном промежутке  $[0, T]$ , где  $\Gamma_1$  - входная граница и твердые стенки,  $\Gamma_2$  - удаленная граница. Для систем (1),(2) и (3),(4) заданы некоторые начальные условия. Поле вектора скорости на границе области течения (включая удаленную границу) задано известными функциями времени [3].

---

<sup>1</sup> Kemerovo State University, Kemerovo, Russia



## ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Введем в области  $G$  разностную сетку  $G_h$ . Ограничимся случаем, когда область течения представляет собой плоский симметричный канал произвольной формы, и имеет одну входную границу - участок втекания жидкости, и одну удаленную границу - участок вытекания жидкости (Рис. 1).

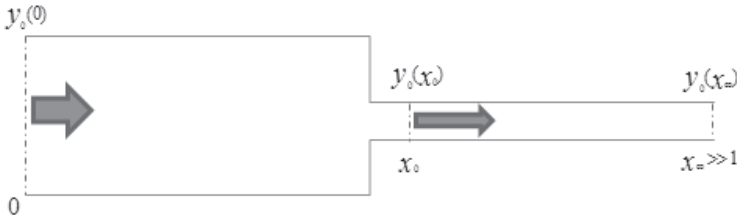


Рис. 1. Геометрия области течения жидкости.

Для численного задания граничных значений функции вихря  $\omega$  на  $\Gamma_1$  будем использовать формулы Тома первого порядка точности. Для переноса краевого условия с удаленной границы  $(x_{\infty}, y)$  на некоторую границу конечной области  $(x_0, y)$  последовательно проинтегрируем уравнение переноса вихря (3) по  $x, y$  и  $t$  на отрезках  $[x_0, x_{\infty}]$ ,  $[-y_0(x), y_0(x)]$  и  $u[t, t + \Delta t]$  соответственно, где  $\Delta t$  - дискретный шаг по времени. Учитывая условие симметрии, и, пренебрегая величинами порядка  $\Delta t$ , получим

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{-y_0}^{y_0} u(x_0, y, t) \omega(x_0, y, t) dy dt - \frac{1}{Re} \int_t^{t+\Delta t} \int_{-y_0}^{y_0} \frac{\partial \omega(x_0, y, t)}{\partial x} dy dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{-y_0}^{y_0} u(x_{\infty}, y, t) \omega(x_{\infty}, y, t) dy dt, \quad (5)$$

где  $u$  - касательная составляющая вектора скорости. Интегральное соотношение (5), являющееся прямым следствием исходного уравнения и краевого условия на удаленной границе, примем за краевое условие для  $\omega$  на границе конечной области  $(x_0, y)$  в момент времени  $t$ . Граничные значения функции тока  $\psi$  на  $\Gamma_1$  вычисляются путем интегрирования вдоль границы соответствующего профиля скорости. Уравнение (4) связывает значения функций тока и вихря во всей области  $G$ , поэтому для функции тока на границе расчетной области  $(x_0, y)$  ставится краевое условие, являющееся следствием аппроксимации уравнения Пуассона внутри области с учетом полученных ранее значений функции вихря.

## МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для численного решения уравнения переноса вихря (3) будем использовать схему стабилизирующей поправки и метод продольно-поперечной прогонки. Аппроксимируя на сетке  $G_h$  уравнение Пуассона (4) внутри и на границе расчетной области, получим дискретную задачу для функции тока, которую на каждом шаге по времени можно записать как систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$Au = f \quad (6)$$

где  $u, f \in R^m$ ,  $A$  - линейный оператор:  $R^m \rightarrow R^m$ . В настоящей работе для решения разностных задач, аппроксимирующих уравнение Пуассона, предлагается использовать итерационный метод, впервые применимый в [4] и затем развитый в [5], который показал высокую эффективность при решении стационарных уравнений Навье-Стокса. Для решения системы (6), следуя [5], построим следующий итерационный процесс:

$$u^{n+1/2} = u^n - \tau_{n+1} [Au^n - f], \quad (7)$$

$$u_0^{n+1} = u^{n+1/2},$$

$$u_k^{n+1} = u_{k-1}^{n+1} - \sum_{i \in S_k} \alpha_{n+1}^i z_i^n, k = 1, 2, \dots, l,$$

$$u^{n+1} = u_l^{n+1},$$

где  $u^0$  - произвольный вектор из  $R^m$ ,  $\tau_{n+1}$ ,  $\alpha_{n+1}^i$  - итерационные параметры,  $S_k$  - непересекающиеся подмножества (группы) множества всех индексов, такие что  $\bigcup_k S_k = S$ ,  $z_i^n$  - векторы из  $R^m$  с одной ненулевой  $i$ -ой компонентой. Оптимальные итерационные параметры  $\tau_{n+1}$  и  $\alpha_{n+1}^i$  в (7) определяются из условия минимума норм векторов невязок  $r^{n+1/2}$  и  $r_k^{n+1}$  соответственно. Как показано в [5], при таком выборе итерационный процесс (7) является сходящимся при любом начальном приближении и произвольном неособенном операторе  $A$ . Для определения оптимальных значений  $\alpha_{n+1}^i$  при каждом  $k = 1, 2, \dots, l$  необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений вида:

$$\begin{pmatrix} (Az_{k_1}^n, Az_{k_1}^n) & (Az_{k_1}^n, Az_{k_2}^n) & \dots & (Az_{k_1}^n, Az_{k_{p_k}}^n) \\ (Az_{k_2}^n, Az_{k_1}^n) & (Az_{k_2}^n, Az_{k_2}^n) & \dots & (Az_{k_2}^n, Az_{k_{p_k}}^n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (Az_{k_{p_k}}^n, Az_{k_1}^n) & (Az_{k_{p_k}}^n, Az_{k_2}^n) & \dots & (Az_{k_{p_k}}^n, Az_{k_{p_k}}^n) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_{n+1}^{k_1} \text{ (12)} \\ \alpha_{n+1}^{k_2} \text{ (13)} \\ \dots \text{ (14)} \\ \alpha_{n+1}^{k_{p_k}} \text{ (15)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Az_{k_1}^n, r_k^{n+1} \\ Az_{k_2}^n, r_k^{n+1} \\ \dots \\ Az_{k_{p_k}}^n, r_k^{n+1} \end{pmatrix} \quad (8)$$

где  $k_i \in S_k$ ,  $i = 1, 2, \dots, p_k$  и  $\sum_{k=1}^l p_k = m$ . Отметим, что чем большее количество индексов  $k_i$  участвует в группах  $S_k$  (т.е. чем больше  $p_k$ , или меньше  $l$ ), тем большую эффективность алгоритма (7) следует ожидать. Вместе с тем, при увеличении размерности групп  $S_k$  увеличивается и размерность системы (8), решение которой в общем случае по степени сложности эквивалентно решению исходной системы (6). Однако заметим, что оператор системы (6) не является произвольным, а есть некоторая аппроксимация дифференциального оператора Лапласа, и, следовательно, его матрица имеет блочно-ленточную структуру. Например, в простейшем случае, когда область расчета есть параллелепипед, матрица оператора имеет только семь ненулевых диагоналей. Очевидно, что в силу такой структуры матрицы оператора многие из величин  $(Az_i^n, Az_j^n)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, m$  равны нулю. Следовательно, всегда возможно так выбрать группы  $S_k$ , что для каждого  $k$  матрица системы (8) будет иметь диагональный вид и нахождение величин  $\alpha_{n+1}^i$  не составит труда [5]. Рассмотрим отдельно случай, когда имеется всего лишь одна группа индексов, совпадающая с множеством всех индексов  $S$ . Можно показать, что в этом случае, метод (7) сойдется к точному решению системы (6) за одну итерацию. Для определения оптимальных итерационных параметров  $\alpha_{n+1}^i, i = 1, 2, \dots, m$  необходимо решить систему (8), размерность которой в данном случае совпадает с размерностью исходной системы. В такой постановке эта задача эквивалентна исходной. Но в качестве  $z_i^n$  можно брать не единичные векторы, а такие, что  $(Az_i^n, Az_j^n) = 0, i, j = 1, 2, \dots, m, i \neq j$ , при этом матрица системы (8) вновь будет иметь диагональный вид. Иначе говоря, для достижения этой цели необходимо построить ортогональную систему векторов  $\tilde{z}_j^n, j = 1, 2, \dots, m$  в пространстве  $R_{A^*A}^m$  со скалярным произведением  $(A^*Az, z), z \in R^m$ . Как известно, задача ортогонализации системы векторов в общем случае эквивалентна по степени сложности задаче решения системы линейных уравнений. Однако такой подход в нашем случае обладает рядом значительных преимуществ: во-первых, в силу упомянутой выше блочно-ленточной структуры матрицы исходного оператора  $A$  часть векторов  $z_i^n$  уже ортогональны в  $R_{A^*A}^m$ ; во-вторых, если однажды по-

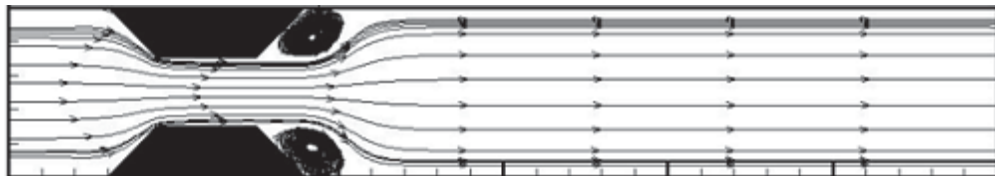
строить указанную ортогональную систему векторов, то ее можно применять и в последующем для решения системы (6) при условии, что оператор  $A$  не изменился; в-третьих, можно решить задачу построения векторов обеспечивающих не диагональный, а, например, трехдиагональный (не представляющий труда для обращения) вид матрицы системы (8), что значительно экономит вычислительные затраты. Отметим, что разностный оператор систем уравнений для давления и функции тока не изменяется при переходе от слоя к слою по времени, а также сохраняет структуру своей матрицы при увеличении количества ячеек расчетной области. Этот факт позволяет построить достаточно эффективный алгоритм (7) с помощью оптимального выбора групп  $S_k$ , включив в каждую из них максимально возможное число индексов. При проведении тестовых расчетов очень экономичным оказывается применение ортогональной системы векторов  $z_j^n, j = 1, 2, \dots, m$ , обеспечивающей сходимость процесса (7) за одну итерацию к точному решению системы (6). Построив такую систему ортогональных векторов на первом шаге по времени, затратив на это существенное количество ресурсов, ее можно использовать не только для мгновенного решения систем уравнений (6) на последующих временных слоях, но и для проведения новых расчетов, например, при других числах Рейнольдса или краевых условиях.

### РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

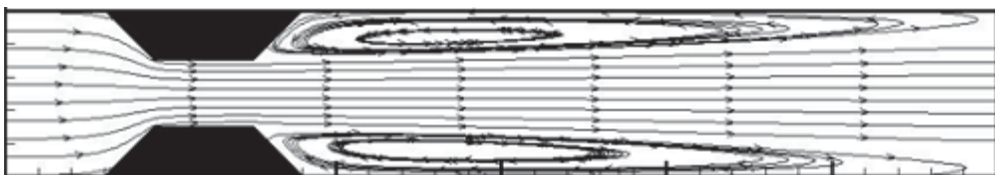
Для проверки эффективности предложенных способа переноса краевого условия и метода решения дискретизированных систем уравнений были проведены численные расчеты задачи о течении вязкой однородной несжимаемой жидкости в плоском диффузоре при умеренных и больших числах Рейнольдса. Расчетная область в этом случае представляет собой плоский диффузор длиной  $L=6$  и высотой  $H=1$ . Скорость входного и выходного (на удаленной границе) потоков имеет симметричный параболический профиль и задается своим максимальным значением с помощью функции  $U(t)$ . Верхняя и нижняя стенки неподвижны и непроницаемы. На Рис. 2. приведены линии тока при  $U(t)=1, Re=400, h=0.02, \Delta t=0.01$  в различные моменты времени, демонстрирующие фазы начала, развития и установления течения.



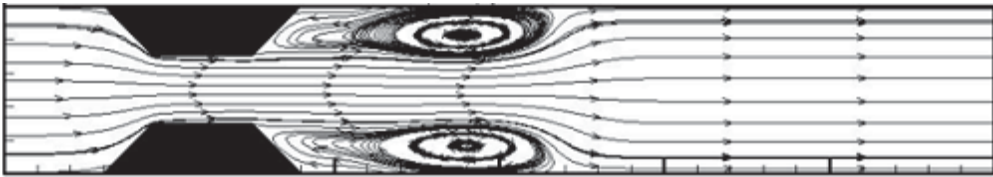
а)  $t = 0.02$



б)  $t = 1.4$



в)  $t = 15.82$



г)  $t = 21.02$

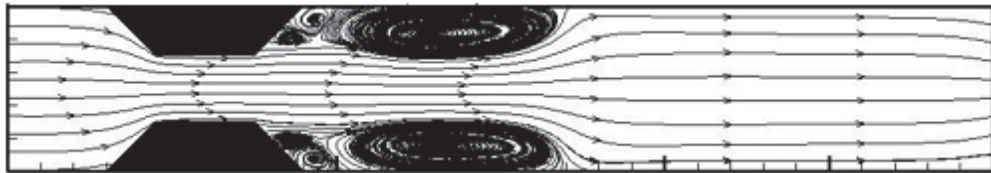
Рис. 2. Линии тока течения в плоском диффузоре при  $U(t)=1$ ,  $Re=400$ ,  $h=0.02$ ,  $\Delta t = 0.01$ .

Расчеты показали, что при умеренных числах Рейнольдса в задаче протекания имеет место установление течения с ростом значений времени.

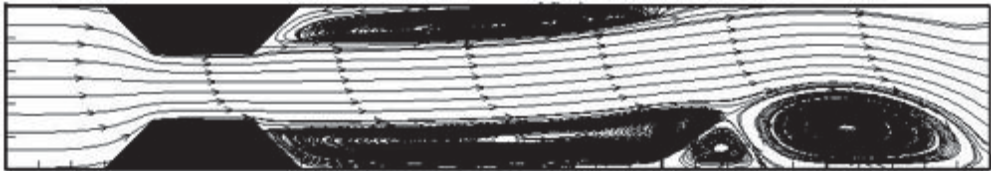
На Рис. 3. приведены линии тока течения при  $U(t)=1$ ,  $Re=1200$ ,  $h=0.02$ ,  $\Delta t=0.01$  в различные моменты времени, связанные с фазами начала, развития, и возникновения неустановившегося режима течения.



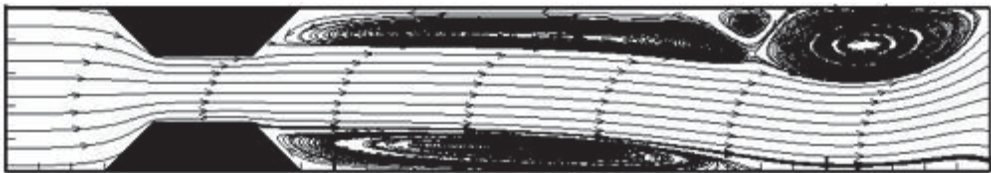
а)  $t = 0.02$



б)  $t = 1.4$



в)  $t = 15.82$



г)  $t = 21.02$

Рис. 3. Линии тока течения в плоском диффузоре при  $U(t)=1$ ,  $Re=1200$ ,  $h=0.02$ ,  $\Delta t = 0.01$

Результаты расчетов показывают, что, по достижению критического значения числа Рейнольдса  $Re=1200$ , начиная с некоторого момента времени, поток попеременно прижимается к верхней и нижней стенкам выходного отверстия, и течение не переходит в стационарный режим (на что также указывают некоторые исследователи [6],[7]). Необходимо отметить, что в данном случае наряду с неустановившимся периодическим характером движения жидкости (на Рис. 4 приведен график распределения по времени вихревой характеристики в фиксированной точке) течение является несимметричным, несмотря на полную симметрию исходной постановки задачи.

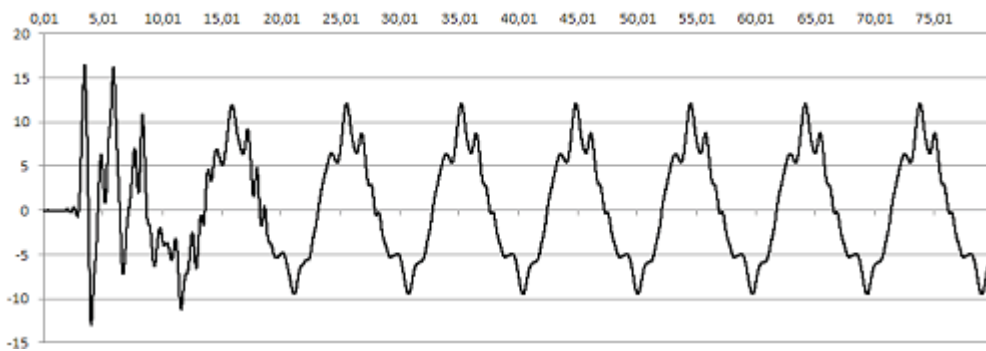


Рис. 4. График функции вихря при  $X = 5.5$ ,  $Y = 0.5$  в задаче о течении в плоском диффузоре при  $Re=1200$ ,  $U(t)=1$ ,  $h=0.02$ ,  $\Delta t = 0.01$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании численных экспериментов можно сделать вывод о том, что предложенный способ переноса граничных условий позволяет получать решения в нестационарных симметричных задачах с условиями на удаленных границах. Произвести серийные численные расчеты и сделать соответствующие выводы стало возможным благодаря использованию эффективного итерационного метода неполной аппроксимации с групповой оптимизацией параметров для решения систем линейных алгебраических уравнений, возникающих на каждом шаге по времени в результате аппроксимации уравнения Пуассона для функции тока. Используя алгоритм глобальной оптимизации, удалось свести временные затраты к минимуму и обеспечить устойчивость вычислительного процесса.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Роуч П. Вычислительная гидродинамика: Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 616 с.
- [2] Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984, 519 с.
- [3] Белоліпецкий В.М., Костюк В.Ю., Шокин Ю.И. Математическое моделирование течений стратифицированной жидкости. Новосибирск: Наука, 1991. 170 с.
- [4] Захаров Ю.Н. Многошаговые схемы с вариационной оптимизацией итерационных параметров Новосибирск, 1980 (Препр. ИТиПМ СО АН СССР. С. 12-14).
- [5] Захаров Ю.Н. Градиентные итерационные методы решения задач гидродинамики. Новосибирск: Наука, 2004. 238 с.
- [6] Пухначев В.В. Симметрии в уравнениях Навье-Стокса // Успехи механики, № 6, 2006. С. 3-76.
- [7] Волков П.К. О природе движения жидкости // Вестник Югорского Государственного Университета, Выпуск 2 (21), 2011. С. 8-28.



CIP - Каталогизација у публикацији  
Народна библиотека Србије, Београд

004(082)

КОНФЕРЕНЦИЈА Математичке и информационе технологије (2013 ; Врњачка Бања, Бечићи)

Zbornik radova Konferencije MIT [Matematičke i informacione tehnologije] 2013 : [[održane] u Vrnjačkoj Banji od 5. do 9. septembra i u Bečićima od 10. do 14. septembra 2013. godine] / [urednik Dragan Aćimović]. - Kosovska Mitrovica : Prirodno-matematički fakultet ; Novosibirsk : Institute of Computational Technologies, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2014 (Kraljevo : Ofsetpres). - 756 str. : ilustr. ; 25 cm

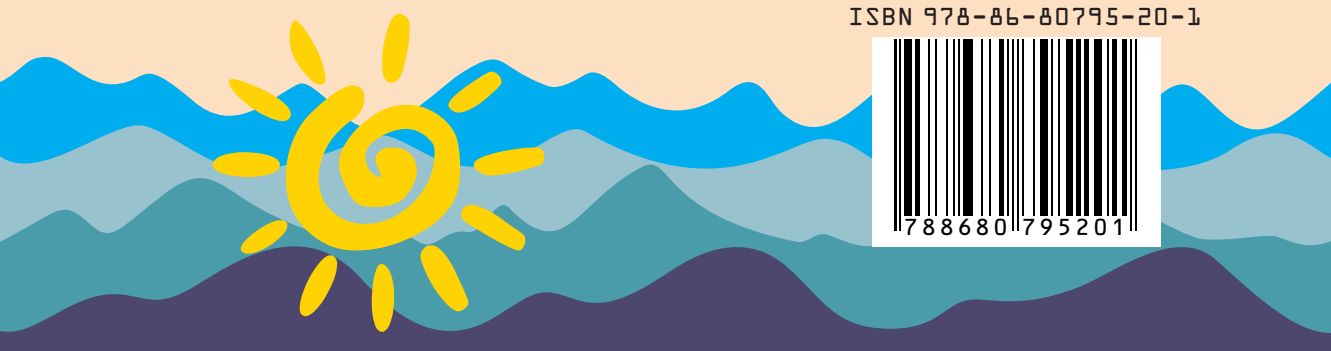
Radovi na srp., engl. i rus. jeziku. - Tekst ćir. i lat. - Tiraž 100. - Str. 6: Predgovor / Hranislav Milošević.  
- Napomene uz tekst. - Bibliografija uz svaki rad. - Summaries.

ISBN 978-86-80795-20-1 (PMF)

1. Аћимовић, Драган [уредник], 1969-

а) Информациона технологија - Зборници

COBISS.SR-ID 206790412



ISBN 978-86-80795-20-1

