

# Исследование пространственных возмущений на поверхности пленки жидкости, стекающей по вертикальному цилиндру

О.Ю. ЦВЕЛОДУБ<sup>1,2</sup>  
e-mail: tsvel@itp.nsc.ru

А.А. БОЧАРОВ<sup>3</sup>  
e-mail: theory@itp.nsc.ru

<sup>1</sup> *Новосибирский государственный университет*

<sup>2</sup> *Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе*

<sup>3</sup> *Новосибирский государственный аграрный университет*

Рассматриваются течения вязкой пленки жидкости по внешней поверхности вертикального цилиндра. Исследование волновых режимов в случае малых расходов и больших радиусов цилиндра сводится к анализу решений одного нелинейного эволюционного уравнения для толщины пленки. В работе приводятся некоторые характерные сценарии развития возмущений. Особый случай представляют начальные возмущения с определенными симметриями, которые сохраняются в процессе эволюции. В этом случае решения притягиваются к стационарно-бегущим решениям, обладающим такими же симметриями.

## 1. Введение и постановка задачи

Интерес к волновым режимам стекающих пленок вязких жидкостей, начиная с пионерских экспериментов П. Л. Капицы [1], не ослабевает у многих исследователей до сих пор. Уже при достаточно малых числах Рейнольдса, вследствие неустойчивости течения пленки с плоской свободной границей, на ее поверхности возникает сложная волновая картина. Относительно простое ламинарное течение волновой пленки демонстрирует большое разнообразие как регулярных, так и хаотичных волновых режимов. Использование при их изучении различных теоретических подходов позволяет получать интересные упрощенные модели, которые в то же время обладают достаточной универсальностью, так как появляются и в других разделах физики. Поэтому вязкие пленки жидкости можно рассматривать как уникальные объекты для изучения фундаментальных закономерностей развития нелинейных волновых структур. Как показывает большинство экспериментов, зарождающиеся двухмерные волны очень быстро становятся трехмерными и нерегулярными. Поэтому с физической точки зрения даже при изучении двухмерных волновых режимов нужно проводить исследование их на

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства России для государственной поддержки научных исследований проводимых под руководством ведущих ученых в российских вузах № 11.G34.31.0035 (ведущий ученый – В. Е. Захаров, ГОУ ВПО «Новосибирский государственный университет») и гранта Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-08-91333-ННИО-а).

устойчивость к трехмерным возмущениям. Несмотря на обилие теоретических и экспериментальных работ, посвященных исследованию волновых режимов на поверхности жидкости, в настоящее время трехмерные волновые режимы в стекающих пленках изучены далеко недостаточно.

Целью настоящей работы является исследование трехмерных волновых режимов, возникающих на поверхности пленки вязкой жидкости, стекающей по вертикальному цилиндру. В случае малых расходов и больших сил поверхностного натяжения эту проблему можно свести к исследованию одного уравнения для толщины пленки. В [2] при этих предположениях для цилиндров больших радиусов было получено одно нелинейное уравнение, которое для случая возмущений малой, но конечной амплитуды, описывает эволюцию отклонения толщины пленки от невозмущенного уровня. После некоторых преобразований это уравнение записывается в виде [3]:

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} + 4H \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + S^4 \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + S^2 \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2} \right)^2 = 0 \quad (1)$$

$$S = L/R = 1/(1 + 0.8Re/We\delta^2)^{1/2}$$

Здесь  $Re$  - число Рейнольдса,  $We$  - число Вебера,  $h_0$  - толщина невозмущенной пленки,  $R$  - радиус цилиндра,  $L$  - характерный масштаб возмущений,  $x$  - аксиальная цилиндрическая координата, ее направление совпадает с направлением вектора силы тяжести,  $\varphi$  - азимутальная цилиндрическая координата,  $\tau$  - безразмерное и преобразованное время, функция  $H$  - трансформированное определенным образом, обезразмеренное отклонение толщины пленки от невозмущенного уровня. Предположение об использовании цилиндров больших радиусов, означает, что справедливо неравенство -  $\delta = h_0/L \ll 1$ . Полагается также, что выполнено условие длинноволности возмущений, т.е. характерная длина возмущений свободной поверхности много больше толщины пленки -  $\varepsilon = h_0/L \ll 1$ .

Уравнение (1) записано в системе отсчета, движущейся со скоростью нейтральных аксиально-симметричных возмущений. В результате проведенных преобразований оно содержит один варьируемый параметр  $S$ , характеризующий геометрию цилиндра.

Из линейного анализа устойчивости тривиального решения  $H = 0$  уравнения (1) к возмущениям вида

$$H(x, \varphi, \tau) = \exp(i\alpha(x - c\tau))(\exp(in_\varphi\varphi) + \exp(-in_\varphi\varphi)) \quad (2)$$

следует, что оно неустойчиво, если волновые числа удовлетворяют условию

$$\alpha^2 + n_\varphi^2 S^4 - (\alpha^2 + n_\varphi^2 S^2)^2 > 0 \quad (3)$$

В выражении (2)  $\alpha$  - компонента волнового числа в направлении оси  $x$ ,  $n_\varphi$  - азимутальная компонента волнового числа. Из физических соображений, очевидно, что  $n_\varphi$  принимает только целочисленные значения. Из неравенства (3) следует, что неустойчивые волновые числа лежат внутри конечных интервалов  $(\alpha_{n1}, \alpha_{n2})$ .

## 2. Методы решения задачи

Метод численного нахождения стационарно-бегущих решений ( $H(x, \varphi, \tau) = H(\xi, \varphi, \cdot)$ ,  $\xi = x - c\tau$ ,  $c$  - фазовая скорость волны) уравнения (1) подробно описан в [4]. Отметим здесь, что фазовая скорость  $c$  является собственным значением задачи и для

заданных волновых чисел может принимать только дискретный набор значений. Метод исследования устойчивости стационарно–бегущих решений и использования этих результатов для анализа бифуркаций, т.е. ветвления новых решений, вполне аналогичен изложенному в работах [5, 6]. Поэтому поясним его здесь кратко на примере аксиально–симметричных решений  $H = H(\xi)$ .

Пусть  $H_0(\xi)$  – периодическое решение уравнения (1) с волновым числом  $\alpha$ . Для исследования его устойчивости подставим в (1)

$$H = H_0(\xi) + h(\xi, \varphi, \tau)$$

и линеаризуем его по возмущению  $h(\xi, \varphi, \tau)$ . Учитывая, что переменные  $\varphi$  и  $\tau$  не входят в уравнение для  $h(\xi, \varphi, \tau)$  явно, его решение представляется в виде:

$$h(\xi, \varphi, \tau) = \exp(i\alpha(-\gamma\tau))(\exp(in_\varphi\varphi) + \exp(-in_\varphi\varphi))h_1(\xi) \quad (4)$$

В результате для приходим к обыкновенному линейному уравнению с периодическими коэффициентами. Из теоремы Флоке следует, что физически разумные решения для этого уравнения, ограниченные на бесконечностях, имеют вид:

$$h_1(\xi) = \exp(iQ\alpha\xi)\phi(\xi)$$

где  $\phi(\xi)$  – периодическая функция того же периода, что и  $H_0(\xi)$ ;  $Q$  – вещественный параметр. Таким образом, исследование устойчивости аксиально–симметричных, стационарно–бегущих решений уравнения (1) сводится к изучению при различных значениях  $Q$  и  $n_\varphi$  спектра собственных значений  $\gamma$ , при которых уравнение для  $h_1(\xi)$  имеет периодические решения того же периода, что и  $H_0(\xi)$ . Как видно из (4), волна устойчива, если для любых значений  $Q$  и  $n_\varphi$  у всех  $\gamma$  вещественные части  $\gamma_r > 0$ . Новые стационарно–бегущие режимы ответвляются от решения  $H_0(\xi)$ , если в некоторой точке  $(\alpha, n_\varphi, Q)$  какое–нибудь из собственных значений  $\gamma$  обращается в ноль:  $\gamma(\alpha, n_\varphi, Q) = 0$ . Если  $\gamma_r(\alpha, n_\varphi, Q) = 0$ , а его мнимая часть не равна нулю  $-\gamma_i(\alpha, n_\varphi, Q) \neq 0$ , то возможно рождение нестационарных режимов.

Обобщение метода анализа устойчивости на случай пространственных решений очевидно.

Для нахождения нестационарных решений уравнения (1) функция  $H(x, \varphi, \tau)$  представляется в виде пространственного ряда Фурье:

$$H(x, \varphi, \tau) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} H_{nm}(\tau) \exp(in\alpha x + imn_\varphi\varphi). \quad (5)$$

После подстановки (5) в уравнение (1) получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений на Фурье–гармоники  $H_{nm}(\tau)$ . Полагая, что все  $H_{nm}(\tau)$  с индексами  $n \geq N, m \geq M$  равны нулю, приходим к ее конечномерному аналогу:

$$\frac{dH_{nm}}{d\tau} = (\alpha^2 n^2 + n_\varphi^2 S^4 m^4 - (\alpha^2 n^2 + n_\varphi^2 S^2 m^2)^2) H_{nm} - 2i\alpha n \sum_{n_1=N-n}^N \sum_{m_1=M-m}^M H_{n_1, m_1} H_{n-n_1, m-m_1}, \quad (6)$$

$$n = 1, \dots, N; \quad m = 0, 1, \dots, N.$$

### 3. Результаты численных расчетов

Результаты расчетов стационарно–бегущих волн показывают, что пространственное семейство решений с азимутальным волновым числом  $n_\varphi = 1$  ответвляется от тривиального решения  $H \equiv 0$  в окрестности нейтрального волнового числа  $\alpha_n = (1 - 2S^2)^{1/2}$ . Это семейство будем называть первым пространственным семейством (семейством  $I$ ). Область неустойчивых волновых чисел  $\alpha$  в этом случае лежит в интервале  $(0, \alpha_n)$ . Для

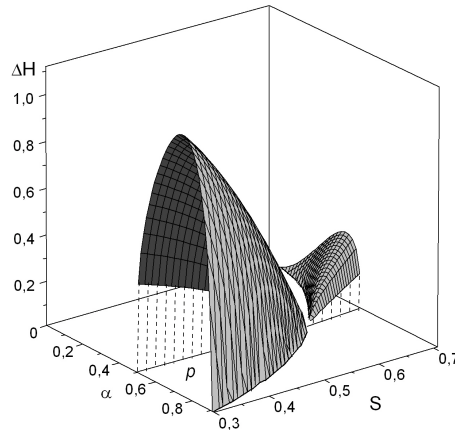


Рис. 1. Зависимость амплитуда решений первого пространственного семейства решений от волнового числа  $\alpha$  и параметра  $S$

этого семейства зависимость амплитуды решений  $\Delta H = H_{max} - H_{min}$  от волнового числа  $\alpha$  и параметра  $S$  представлена в виде поверхности на рис. 1. Из этого рисунка видно, что в случае, когда  $\alpha_n > 0.5$ , первое пространственное семейство непрерывно продолжается внутрь области неустойчивости, и, наоборот, в случае, когда  $\alpha_n < 0.5$ , это семейство продолжается в область устойчивости тривиального решения  $H \equiv 0$  к малым трехмерным возмущениям. При  $\alpha_n = 0.5$  семейство вырождается в решение с нулевой амплитудой. Фазовая скорость волн с этого семейства тождественно равна нулю. Линия  $p$  на рис. 1 является проекцией края поверхности "амплитуд решений  $\Delta H$ " на плоскость  $(\alpha, S)$ . При значениях  $\alpha, S$ , принадлежащих этой линии, трехмерные волны семейства  $I$  вырождаются в аксиально–симметричные волны с удвоенным волновым числом  $2\alpha$ . Оказывается, что эти волны принадлежат аксиально–симметричному семейству решений, ответвляющемуся от тривиального решения в окрестности точки  $\alpha = 1$ . Это семейство будем называть первым аксиально–симметричным семейством (семейством  $Ia$ ). Процесс ветвления от семейств  $I$  и  $Ia$  новых пространственных стационарно–бегущих семейств подробно рассмотрен в [4]. Решения первого стационарно–бегущего пространственного семейства имеют три симметрии  $A_i (i = 1, 2, 3)$ , которые для функции  $H(x, \varphi)$  при определенном выборе начала координат имеют вид

$$\begin{aligned}
 A_1 : H(\lambda/2 - x, \varphi) &= -H(x, \varphi) \\
 A_2 : H(-x, \varphi + \pi) &= -H(x, \varphi) \\
 A_3 : H(x + \lambda/2, \varphi + \pi) &= H(x, \varphi)
 \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь  $\lambda$  – длина волны в направлении оси  $x$ . Если этими симметриями обладает начальное возмущение, то они сохраняются в процессе эволюции так же и у любых функций,

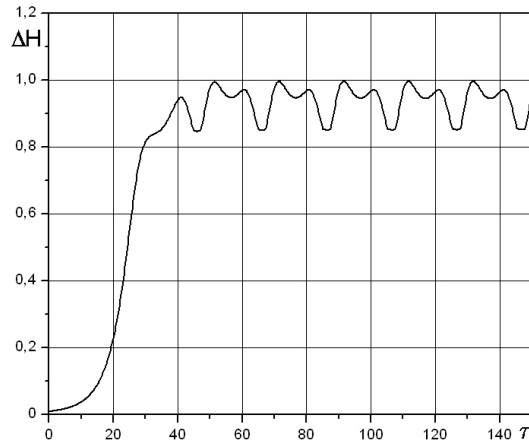


Рис. 2. Зависимости амплитуды от времени нестационарного решения, притягивающегося к осциллирующему волновому режиму.  $\alpha = 0.52, S = 0.4$ .

являющихся решениями уравнения (1). Информация о стационарно-бегущих решениях уравнения (1), позволяет лучше понять особенности эволюции некоторых нестационарных решений. Наиболее полно удается это сделать в случаях, когда начальные

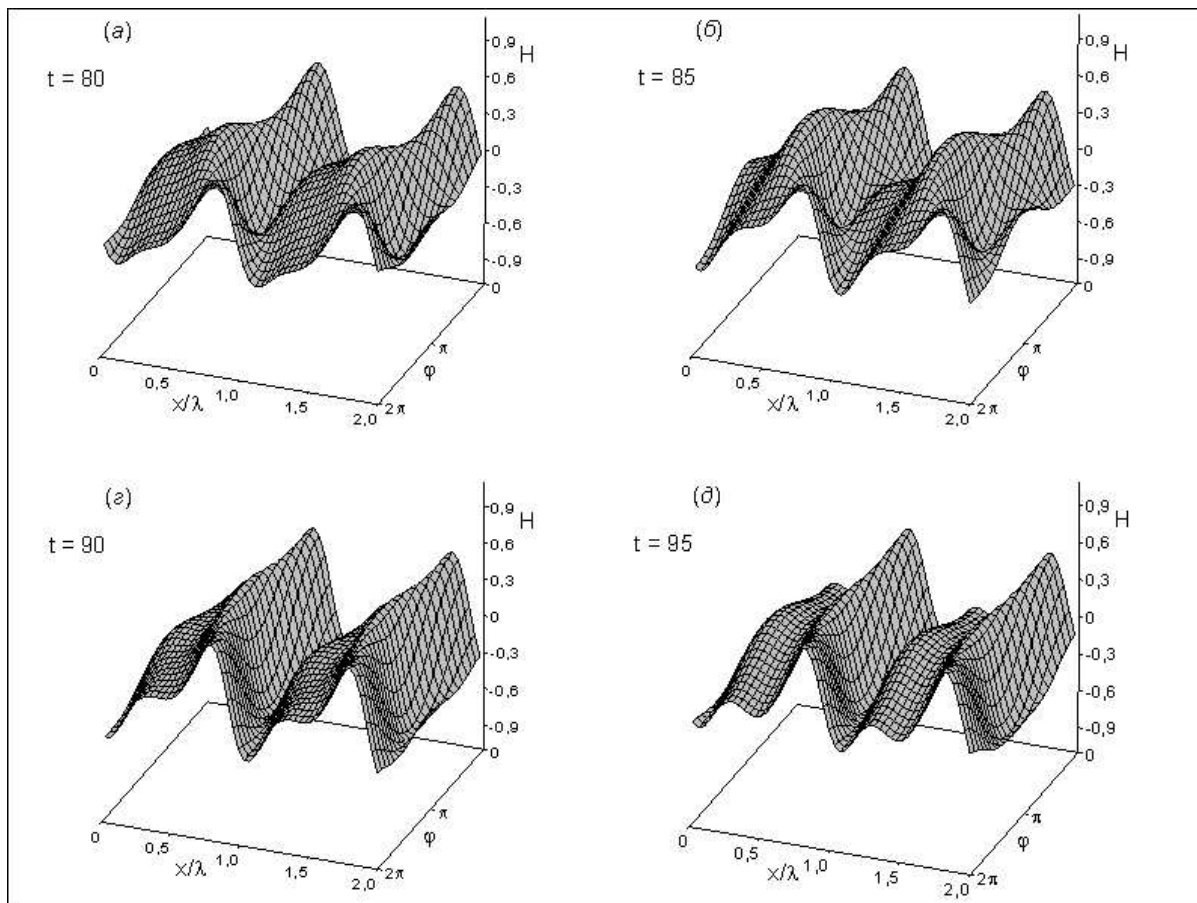


Рис. 3. Профили волн нестационарного решения, представленного на рис. 2.

возмущения лежат в области умеренных волновых чисел  $\alpha \sim 0.5 \div 1$ . Это обусловлено

прежде всего тем, что в области умеренных волновых чисел имеется лишь несколько стационарно–бегущих семейств решений, каждое из которых можно однозначно охарактеризовать симметриями (7).

В работе представлены типичные примеры различных эволюционных перестроек для таких волновых чисел. С уменьшением волнового числа происходит быстрый рост числа стационарно–бегущих семейств решений, в результате чего поведение нестационарных решений становится существенно более сложным и практически хаотическим.

На рис. 2 приведен пример эволюции начального возмущения к осциллирующей во времени волне. Такой волновой режим отвечает от стационарно–бегущего семейства в точке, для которой у одного из собственных значений обращается в ноль  $\gamma_r$ . Но при этом его мнимая часть  $\gamma_i(\alpha, n_\varphi, Q) \neq 0$ . Пример временной зависимости амплитуды для такого типа решения с волновым числом показан на рис. 2. Как видно из этого рисунка, период колебаний данного волнового режима равен примерно 20 единицам безразмерного времени  $\tau$ . Профили волн такого решения в последовательные моменты времени, принадлежащие одному временному периоду, показаны на рис. 3.

#### 4. Заключение

Представленные результаты демонстрируют, как в области, в которой существует лишь небольшое число стационарно–бегущих семейств решений, удается выявить и проанализировать типичные сценарии эволюции начальных возмущений. Для рассматриваемого уравнения (1) этот анализ основывается на наличии или отсутствии сохраняющихся в процессе эволюции симметрий исследуемых решений, которыми однозначно классифицируются волновые режимы.

#### Список литературы

- [1] КАПИЦА П.Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // ЖЭТФ. 1948. т.18. вып.1. С.3-28.
- [2] SHLANG T., SIVASHINSKY G.J. Irregular flow of a liquid film down a vertical column // J.Phys. 1982. V.43. №43. P.459-466.
- [3] ЦВЕЛОДУБ Спиральные волны на поверхности пленки, стекающей по поверхности цилиндра // ПМТФ. 1994. Т. 35. № 6. С. 56-63.
- [4] БОЧАРОВ А.А., ЦВЕЛОДУБ О.Ю. Волновые режимы течения вязкой пленки, стекающей по вертикальному цилиндру // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 2. С. 176–183.
- [5] TSVELODUB O.YU., TRIFONOV YU.YA. On steady-state traveling solutions of an evolution equation describing the behaviour of disturbances in active dissipative media // Physica D. 1989. Vol.39. P.336-351.
- [6] TSVELODUB O.YU., KOTUCHENKO L.N. Spatial wave regimes on a surface of thin viscous liquid film // Physica D. 1993. Vol. 63. P.361-377.