[1]

Моделирование нелинейных волн на поверхности тонкой пленки жидкости, обтекаемой турбулентным потоком газа

Д.Г. Архипов
e-mail: theory@itp.nsc.ru

О.Ю. Цвелодуб
e-mail: tsvel@itp.nsc.ru
Новосибирский государственный университет
Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе

Выведена новая система уравнений для моделирования динамики длинноволновых возмущений на поверхности тонкого горизонтального слоя вязкой жидкости, обдуваемого турбулентным потоком газа. Продемонстрировано, что система сводится к одному уравнению для специальной функции, аналогичной гидродинамической функции тока, с соответствующими граничными условиями. В случае малых числах Рейнольдса система сведена к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению для толщины пленки.

1. Введение и постановка задачи

Совместное течение жидкости и газа - классическая задача гидродинамики. Применительно к задачам теплофизики и химической технологии часто имеет место турбулентное течение газа над тонким, покрытым волнами слоем жидкости. Решение этой проблемы в полной сопряженной постановке связано со значительными вычислительными трудностями, поэтому зачастую выделяют два этапа моделирования: определение напряжений газа на поверхности пленки и последующий расчет эволюции волн в жидкости. Скорость жидкости значительно меньше характерной скорости газа, поэтому поверхность раздела полагают жесткой и неподвижной. Кроме того, вследствие малости толщины пленки, влияние возмущений границы раздела на скорости в газе, можно считать линейным. В силу этого задача вычисления нормальных и касательных напряжений газа на поверхности сводится к рассмотрению отдельных пространственных гармоник.

В данной работе рассматривается второй этап исследования совместного течения – моделирование динамики нелинейных волн на горизонтальной пленке жидкости в известном поле напряжений на границе раздела фаз. Постановка задачи включает уравнения Навье–Стокса с соответствующими кинематическими и динамическими граничными условиями. В ней серьезной проблемой является то, что положение подвижной

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства России для государственной поддержки научных исследований проводимых под руководством ведущих ученых в российских вузах № 11.G34.31.0035 (ведущий ученый – В.Е. Захаров, ГОУ ВПО «Новосибирский государственный университет») и гранта Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-08-91333-ННИО-а).

границы заранее неизвестно и определяется в процессе решения. Целью работы было получение модельной системы уравнений, описывающей эволюцию длинноволновых возмущений границы раздела при умеренных числах Рейнольдса жидкости, в которой проблема неизвестной границы в некотором смысле решена.

Если исключить из рассмотрения эффекты уноса капель и пятнообразования, то область течения жидкости является односвязной. Наличие поверхностного натяжения обеспечивает отсутствие острых кромок на поверхности пленки. В этих условиях функция $y = h(x,t)$, определяющая положение точек границы области является однозначной, и существует непрерывно дифференцируемое преобразование координат, отображающее область течения жидкости в полосу постоянной толщины:

$$x = x, \qquad \eta = y/h(x,t), \qquad t = t. \tag{1}$$

Новые переменные (1) не ортогональны, поэтому обычная формулировка уравнений движения в векторной форме неприменима. По этой причине часто ограничиваются простой заменой переменных в исходных уравнениях без преобразования векторов и тензоров (см., например, [1]). В результате получаются системы уравнений для декартовых компонент скорости жидкости. Эти компоненты, разумеется, не образуют вектор в новой криволинейной системе координат (1).

Другой способ выполнить преобразование (1) предполагает использование новых переменных в уравнениях, записанных в тензорной, инвариантной относительно систем координат, форме. Однако для этого необходима система уравнений движения жидкости в полном четырехмерном пространстве, где одной из координат является время. В физике такая система известна, как система уравнений релятивистской гидродинамики [2]. Тензорные обозначения позволяют переходить в произвольную подвижную систему координат, а применение ключевой идеи общей теории относительности – гравитация не меняет уравнений движения, а влияет только на метрику пространства – элегантно решает проблему внешней силы тяжести. Записав уравнения в новых криволинейных координатах покомпонентно, и ограничиваясь первым членом разложения по малому параметру (отношение скорости жидкости к скорости света), в длинноволновом пределе мы приходим к системе [3]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2h)}{\partial x} + \frac{\partial(uvh)}{\partial \eta} = -\frac{h}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\eta}{h}\frac{\partial p}{\partial \eta}\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\mu}{\rho h}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\
\frac{\partial p}{\partial \eta} = -\rho g h \\
\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial \eta} = 0
\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь h – толщина пленки, u и v – контрвариантные компоненты продольной и поперечной скорости, соответственно, ρ – плотность, μ – динамическая вязкость жидкости.

Из граничного условия покоя жидкости на гиперповерхности $\eta = 0$ следует:

$$u(x,0,t) = 0, \qquad v(x,0,t) = 0 \tag{3}$$

На гиперповерхности $\eta = 1$ выполняется условие непротекания:

$$v \equiv \frac{d\eta}{dt} = 0, \qquad v(x,1,t) = 0 \tag{4}$$

Введем на $\eta = 1$ локальные координаты ζ^i по правилу:

$$x = \zeta^1, \qquad \eta = 1, \qquad t = \zeta^2 \tag{5}$$

Тогда ковариантный вектор нормали записывается обычным способом:

$$n_i \equiv \frac{1}{2} e^{\alpha\beta} e_{ijk} \frac{\partial x^j}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial x^k}{\partial \zeta^\beta} = (0, h, 0) \tag{6}$$

Проектируя тензор вязких напряжений на вектор нормали, в длинноволновом приближении получаем:

$$\begin{gathered} \tau^{1j} n_j(x,1,t) \equiv \frac{\mu}{h} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x,1,t) = \mathcal{T}_g(x,t) \equiv \mathcal{T}_0 + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{T}(k) \hat{h}(k,t) e^{ikx} dk \\ \tau^{3j} n_j(x,1,t) = 0 \end{gathered} \tag{7}$$

Учитывая наличие скачка нормального напряжения на поверхности, в этом же приближении имеем:

$$p = \mathcal{P}_g(x,t) - 2\sigma H \equiv \mathcal{P}_0(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(k) \hat{h}(k,t) e^{ikx} dk - 2\sigma H \tag{8}$$

Здесь $\mathcal{T}_g(x,t)$ – распределение касательных напряжений газа на поверхности пленки, $\mathcal{T}_0$ – его невозмущенная составляющая, $\mathcal{T}(k)$ – Фурье-компонента составляющей, вызванной криволинейностью границы раздела, $\mathcal{P}_g(x,t)$ – распределение давления, $\hat{h}(k,t)$ – Фурье-разложение формы поверхности:

$$\hat{h}(k,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x,t) e^{-ikx} dk, \tag{9}$$

H – средняя кривизна поверхности, определяемая как свертка первой a_{ij} и второй b_{ij} квадратичных форм $H = a^{ij} b_{ij}$, σ – коэффициент поверхностного натяжения.Так как средняя кривизна является скаляром, вычислим ее в декартовых координатах:

$$H = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \tag{10}$$

Тогда система (2) принимает вид:

$$\begin{gathered} \frac{\partial (uh)}{\partial t} + \frac{\partial (u^2 h)}{\partial x} + \frac{\partial (uvh)}{\partial \eta} = \frac{\sigma}{\rho} h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{\mu}{\rho h} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - gh \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\chi}{\rho} h - \frac{h}{\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} ik \mathcal{P}(k) \hat{h}(k,t) e^{ikx} dk \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} + \frac{\partial (hv)}{\partial \eta} = 0 \end{gathered} \tag{11}$$

Здесь $\chi \equiv \frac{d\mathcal{P}_0}{dx}$ – постоянная.

2. Вывод эволюционного уравнения

Для удобства расчетов введем, по аналогии с гидродинамической функцией тока, функцию $\psi(x,\eta,t)$ так, чтобы второе уравнение системы выполнялось автоматически:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = hu, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -hv - \eta \frac{\partial h}{\partial t}$$

Тогда система (11) сводится к одному уравнению:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\psi_\eta^2}{h}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\psi_\eta(\psi_x+\eta h_t)}{h}\right)-\frac{\mu}{\rho h^2}\frac{\partial^3\psi}{\partial\eta^3}=$$

$$=\frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)-gh\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\chi}{\rho}h-\frac{h}{\rho}\int_{-\infty}^{+\infty}ik\mathcal{P}(k)\hat{h}(k,t)e^{ikx}dk, \qquad (12)$$

а граничные условия преобразуются к виду:

$$\psi(x,0,t)=0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial\eta}(x,0,t)=0$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,1,t)=0, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}(x,1,t)=\frac{h^2}{\mu}\left(\mathcal{T}_0+\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{T}(k)\hat{h}(k,t)e^{ikx}dk\right)$$

Выбрав характерные масштабы скорости – u_0, длины – l_0, толщины – h_0, времени – l_0/u_0, функции ψ, определяющей расход пленки в данном сечении, – u_0h_0 и напряжений $\mathcal{P}_g,\mathcal{T}_g$ – $\mu u_0/h_0$, можно переписать уравнение (12) в безразмерных переменных (с верхней $\tilde{}$).

Выберем h_0 и u_0 так, чтобы $\tilde{h}=1$ и $\tilde{\psi}(1)=1$ для безволнового течения:

$$\tilde{\psi}(1)=\frac{3\mathcal{T}_0h_0-2\chi h_0^2}{6\mu u_0}=1, \qquad u_0=\frac{3\mathcal{T}_0h_0-2\chi h_0^2}{6\mu}$$

Введем безразмерные параметры: число Рейнольдса – Re, число Вебера – We, и отношение толщины пленки к характерной длине волны – ε:

$$Re=\frac{\rho u_0h_0}{\mu}, \qquad We=\frac{\sigma}{\rho u_0^2h_0}, \qquad Fr=\frac{u_0^2}{gh_0}, \qquad \varepsilon=\frac{h_0}{l_0}$$

В итоге, получаем систему в безразмерном виде:

$$\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial\eta\partial\tilde{t}}+\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\left(\frac{\tilde{\psi}_\eta^2}{\tilde{h}}\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\tilde{\psi}_\eta(\tilde{\psi}_{\tilde{x}}+\eta\tilde{h}_{\tilde{t}})}{\tilde{h}}\right)-\frac{1}{\varepsilon Re\tilde{h}^2}\frac{\partial^3\tilde{\psi}}{\partial\eta^3}=$$

$$=\frac{\left(3-\frac{3}{2}\mathcal{T}_0\right)\tilde{h}}{\varepsilon Re}+We\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\left(\tilde{h}\frac{\partial^2\tilde{h}}{\partial\tilde{x}^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{h}}{\partial\tilde{x}}\right)^2\right)-\frac{\tilde{h}}{Fr}\frac{\partial\tilde{h}}{\partial\tilde{x}}-\frac{\tilde{h}}{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}i\tilde{k}\tilde{\mathcal{P}}(\tilde{k})\hat{\tilde{h}}(\tilde{k},\tilde{t})e^{i\tilde{k}\tilde{x}}d\tilde{k}$$

$$\tilde{\psi}(\tilde{x},0,\tilde{t})=0, \qquad \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\eta}(\tilde{x},0,\tilde{t})=0$$

$$\frac{\partial\tilde{h}}{\partial\tilde{t}}+\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}}(\tilde{x},1,\tilde{t})=0, \qquad \frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial\eta^2}(\tilde{x},1,\tilde{t})=\tilde{h}^2\tilde{\mathcal{T}}_0+\tilde{h}^2\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\mathcal{T}}(\tilde{k})\hat{\tilde{h}}(\tilde{k},\tilde{t})e^{i\tilde{k}\tilde{x}}d\tilde{k} \qquad (13)$$

Известно, что для пленки, свободно стекающей пол вертикальной плоскости, в случае малых расходов задача сводится к одному эволюционному уравнению на возмущение толщины пленки. Для пленки, увлекаемой газом, аналогичный результат можно легко получить из уравнения (13) (ниже знак обезразмеривания $\tilde{}$ будем опускать). Вследствие малости толщины пленки по сравнению с длиной волны, функция тока $\psi(\mathrm{x},\eta,t)$ представляется в виде ряда по малому параметру ε:

$$\psi=\psi_0+\varepsilon\psi_1+...$$

В нулевом порядке находим:

$$\frac{\partial^3\psi_0}{\partial\eta^3} = -\left(3 - \frac{3}{2}\mathcal{T}_0\right)h^3, \quad \psi_0(x,0,t) = 0, \quad \frac{\partial\psi_0}{\partial\eta}(x,0,t) = 0$$
$$\frac{\partial^2\psi_0}{\partial\eta^2}(x,1,t) = h^2\mathcal{T}_0, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial\psi_0}{\partial x}(x,1,t) = 0$$

Следовательно:

$$\psi_0 = \frac{\left(3 - \frac{3}{2}\mathcal{T}_0\right)}{2}h^3\left(\eta^2 - \frac{\eta^3}{3}\right) + \frac{\mathcal{T}_0}{2}h^2\eta^2$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \left[\left(3 - \frac{3}{2}\mathcal{T}_0\right)h^2 + \mathcal{T}_0 h\right]\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \tag{14}$$

Для первого порядка разложения, имеем:

$$\frac{\partial^3\psi_1}{\partial\eta^3} = Reh^4\left(\left(3 - \frac{3}{2}\mathcal{T}_0\right)\eta\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\left(3 - \frac{3}{2}\mathcal{T}_0\right)^2}{2}\eta^2h^2\frac{\partial h}{\partial x} + \left(3 - \frac{3}{2}\mathcal{T}_0\right)\frac{\eta^2}{2}\mathcal{T}_0h\frac{\partial h}{\partial x}\right) -$$
$$-WeRe\varepsilon^2h^3\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{1}{Fr}h^3\frac{\partial h}{\partial x} + h^3\int_{-\infty}^{+\infty} ik\mathcal{P}(k)\hat{h}(k,t)e^{ikx}dk$$

Вычисление функции тока на свободной поверхности дает:

$$\psi_1(x,1,t) = -Reh^4\left(\left(3 - \frac{3}{2}\mathcal{T}_0\right)\frac{5}{24}\frac{\partial h}{\partial t} + \left(3 - \frac{3}{2}\mathcal{T}_0\right)^2\frac{3}{40}h^2\frac{\partial h}{\partial x} + \left(3 - \frac{3}{2}\mathcal{T}_0\right)\frac{3}{40}\mathcal{T}_0h\frac{\partial h}{\partial x}\right) +$$
$$+\frac{WeRe}{3}\varepsilon^2h^3\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - \frac{1}{3Fr}h^3\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{h^3}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} ik\mathcal{P}(k)\hat{h}(k,t)e^{ikx}dk + \frac{h^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{T}(k)\hat{h}(k,t)e^{ikx}dk$$

Подставляя эволюционное уравнение (14), полученное в нулевом порядке, приходим к выражению:

$$\psi_1(x,1,t) = \frac{2}{15}Reh^6\left(3 - \frac{3}{2}\mathcal{T}_0\right)^2\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{2}{15}\left(3 - \frac{3}{2}\mathcal{T}_0\right)Reh^5\mathcal{T}_0\frac{\partial h}{\partial x} +$$
$$+\frac{WeRe}{3}\varepsilon^2h^3\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - \frac{1}{3Fr}h^3\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{h^3}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} ik\mathcal{P}(k)\hat{h}(k,t)e^{ikx}dk + \frac{h^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{T}(k)\hat{h}(k,t)e^{ikx}dk$$

Используя соответствующее граничное условие, получим искомое эволюционное уравнение для толщины пленки:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \left[\left(3 - \frac{3}{2}\mathcal{T}_0\right)h^2 + \mathcal{T}_0h\right]\frac{\partial h}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{15}Reh^6\left(3 - \frac{3}{2}\mathcal{T}_0\right)^2\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{2 - \mathcal{T}_0}{5}Reh^5\mathcal{T}_0\frac{\partial h}{\partial x} +\right.$$
$$\left.+\frac{h^3}{3}\left(WeRe\varepsilon^2\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - \frac{1}{Fr}\frac{\partial h}{\partial x} - \int_{-\infty}^{+\infty} ik\mathcal{P}(k)\hat{h}(k,t)e^{ikx}dk\right) + \frac{h^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{T}(k)\hat{h}(k,t)e^{ikx}dk\right) = 0 \tag{15}$$

3. Заключение

Выведена новая система уравнений для моделирования динамики длинноволновых возмущений на поверхности тонкого горизонтального слоя вязкой жидкости, обдуваемого турбулентным потоком газа. Продемонстрировано, что система сводится к одному уравнению для специальной функции, аналогичной гидродинамической функции тока, с соответствующими граничными условиями. В случае малых числах Рейнольдса система сведена к нелинейному интегро–дифференциальному уравнению для толщины пленки.

Список литературы

[1] Гешев П.И., Ездин Б.С. Расчет профиля скорости и формы волны на стекающей пленке жидкости // В кн.: Гидродинамика и тепломасообмен течений жидкости со свободной поверхностью. Новосибирск. 1985. С. 49-57.

[2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

[3] Алексеенко С.В., Архипов Д.Г., Цвелодуб О.Ю. Дивергентная система уравнений для пленки жидкости, стекающей по вертикальной плоскости // Доклады РАН. 2011. Т.436. №1. С. 43-46.