Метод конечных элементов для решения обратной задачи для уравнения Гельмгольца

Г.Даирбаева
Казахский национальный университет им. аль-Фараби
e-mail: Lazzat.Dairbaeva@kaznu.kz

В данной работе предложен метод продолжения решения уравнения Гельмгольца в зону недоступности методом, основанном на решении специальным образом сформулированной обратной задачи. Предложенный метод позволяет "просвечивать"акустическим способом различные объекты. В качестве модельных примеров рассмотрены объекты прямоугольной формы. Предполагается, что на границе или внутри объекта располагаются излучающая и приемная антенны, а на одной из границ области имеется возможность проводить дополнительные измерения. В результате решения задачи продолжения удается восстановить значение решения уравнения Гельмгольца в зоне недоступности. Решение задачи продолжения осуществляется путем замены этой задачи на некоторую специальную обратную задачу, которая решается на основе сочетания метода конечных элементов и метода оптимизации.

1. Постановка задачи

Рассмотрим волновое уравнение в области $Q = \Omega \times (0, +\infty)$, где $\Omega \subset R^2 = \{(x, y)\}$:

$$\varepsilon v_{tt} = \Delta v - j^c,$$

где $\varepsilon > 0$. Пусть функции v, j^c допускают разделение переменных:

$$v(x, y, t) = u(x, y)T(t), \quad j^c(x, y, t) = f_1(x, y)T(t),$$

и положим $T(t) = e^{i\omega t}$.

Сделав преобразование $v = ue^{i\omega t}$, получим уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + \omega_1 u = f_1.$$

где $\omega_1 = \varepsilon\omega^2$.

В центре Области $\overline{\Omega} = [-b, b] \times [-b, b]$ расположен источник $f_1(x, y) = \theta(a - |x|)\theta(a - |y|)$ при $|x| \le a, |y| \le a$.

В области $\Omega = (-b, b) \times (-b, b)$ рассмотрим начально-краевую задачу

$$\Delta u + \omega_1 u = f_1, \qquad (x, y) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(-b, y) = f(y), \qquad y \in (-b, b), \tag{2}$$

$$u_x(-b, y) = 0, \qquad y \in (-b, b), \tag{3}$$

$$u(x, -b) = u(x, b) = 0, \qquad x \in (-b, b). \tag{4}$$

Задача (1)-(4) является некорректной, например, при $\omega_1 = 0$ хорошо известен пример Адамара.

Введем обозначения для подобластей области $\overline{\Omega}$

$$G_1 = \left\{(x, y) \in \overline{\Omega} : -b \le x \le -d, \quad -b \le y \le b\right\},$$

$$G_2 = \left\{(x,y) \in \overline{\Omega} : -d \leq x \leq d, \quad -b \leq y \leq b\right\},$$
$$G_3^+ = \{(x,y) \in \Omega : -a \leq x \leq a, \quad a \leq y \leq c\},$$
$$G_3^- = \{(x,y) \in \Omega : -a \leq x \leq a, \quad -c \leq y \leq -a\},$$
$$G_3 = G_3^+ \bigcup G_3^-,$$
$$G_4 = \left\{(x,y) \in \overline{\Omega} : d \leq x \leq b, \quad -b \leq y \leq b\right\}.$$

Здесь $G_3^+, \quad G_3^-$ являются антеннами.

Диэлектрическая приницаемость в антеннах принимает следующие значения

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1, & \text{если } (x,y) \in G_3, \\ \varepsilon_2, & \text{если } (x,y) \in G_2 \backslash G_3, \\ \varepsilon_3, & \text{если } (x,y) \in G_1 \bigcup G_4. \end{cases}$$

На решение задачи (1)-(4) наложим условия склейки

$$\begin{gathered} \varepsilon_1 u_x (a-0,y) = \varepsilon_2 u_x (a+0,y), \quad y \in [a,c] \cup [-c,a], \\ \varepsilon_2 u_x (-a-0,y) = \varepsilon_1 u_x (-a+0,y), \quad y \in [a,c] \cup [-c,a], \\ \varepsilon_1 u_x (x,c-0) = \varepsilon_2 u_x (x,c+0), \quad x \in [-a,a], \\ \varepsilon_2 u_x (x,-c-0) = \varepsilon_1 u_x (x,-c+0), \quad x \in [-a,a]. \\ \varepsilon_3 u_x (-d-0,y) = \varepsilon_2 u_x (-d+0,y), \quad y \in [-b,b], \\ \varepsilon_2 u_x (d-0,y) = \varepsilon_3 u_x (d+0,y), \quad y \in [-b,b], \end{gathered} \tag{5}$$

2. Сведение исходной задачи к обратной задаче

Покажем, что решение исследуемой задачи (1)-(4) можно свести к решению обратной задачи по отношению к некоторой прямой (корректной) задаче.

В качестве прямой задачи будем рассматривать следующую

$$\Delta u + \omega_1 u = f_1, \qquad (x,y) \in \Omega, \tag{6}$$

$$u_x(-b,y) = 0, \qquad y \in (-b,b), \tag{7}$$

$$u(b,y) = q(y), \qquad y \in (-b,b), \tag{8}$$

$$u(x,-b) = u(x,b) = 0, \quad x \in (-b,b). \tag{9}$$

В задаче (6)-(9) по заданной функции q надо определить функцию u в Ω.

Дадим определение обобщенного решения прямой задачи (6)-(9).

Определение 1. *Функцию $u \in W_2^1(\Omega)$ будем называть обобщенным решением прямой задачи* (6)-(9), *если для любых $v \in W_2^1(\Omega)$, таких что*

$$v(b,y) = 0, \quad y \in (-b,b), \tag{10}$$

$$v(x,-b) = v(x,b) = 0, \quad x \in (-b,b) \tag{11}$$

имеет место равенство

$$-\int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v \; d\Omega + J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + \omega_1 \int\limits_{\Omega} uv \; d\Omega = \int\limits_{\Omega} f_1 v \; d\Omega. \tag{12}$$

Здесь

$$J_1 = K_1 \int\limits_{-a}^{a} u_y(x, a-0)v(x,a)dx - K_1 \int\limits_{-a}^{a} u_y(x, -a+0)v(x,-a)dx, \tag{13}$$

$$J_2 = K_2 \int\limits_{a}^{c} u_x(a-0, y)v(a,y)dy - K_2 \int\limits_{a}^{c} u_x(-a+0, y)v(-a,y)dy +$$

$$+K_2 \int\limits_{-a}^{a} u_y(x, c-0)v(x,c)dx, \tag{14}$$

$$J_3 = K_2 \int\limits_{-c}^{-a} u_x(a-0, y)v(a,y)dy - K_2 \int\limits_{-c}^{-a} u_x(-a+0, y)v(-a,y)dy -$$

$$-K_2 \int\limits_{-a}^{a} u_y(x, -c+0)v(x,-c)dx, \tag{15}$$

$$J_4 = K_3 \int\limits_{-b}^{b} u_x(-d-0, y)v(-d,y)dx - K_3 \int\limits_{-b}^{b} u_x(d+0, y)v(d,y)dy, \tag{16}$$

где

$$K_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad K_2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad K_3 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_2} \ .$$

Обратная задача к задаче (6)-(9). Обратная задача к задаче (6)-(9) заключается в определении функции q по дополнительной информации

$$u(-b, y) = f(y), \qquad y \in (-b, b). \tag{17}$$

Введем оператор

$$A: \ q\,(y) \ \mapsto \ \ u\,(-b, y)\,, \tag{18}$$

где $u(x, y)$ - решение прямой задачи (6)-(9), тогда обратную задачу (6)-(10) можно записать в операторной форме

$$Aq = f. \tag{19}$$

Для решения обратной задачи (19) рассмотрим сопряженную задачу к прямой задаче (6)-(9)

$$\Delta\psi + \omega_1\psi = f_1, \qquad (x, y) \in \Omega, \tag{20}$$

$$\psi_x(-b, y) = \mu(y), \qquad y \in (-b, b), \tag{21}$$

$$\psi(b, y) = 0, \qquad y \in (-b, b), \tag{22}$$

$$\psi(x, -b) = \psi(x, b) = 0, \quad x \in (-b, b). \tag{23}$$

Определение 2. *Функцию $\psi \in W_2^1(\Omega)$ будем называть обобщенным решением сопряженной задачи (20)-(23), если для любых $v \in W_2^1(\Omega)$, таких что*

$$v(b, y) = 0, \ \ y \in (-b, b), \tag{24}$$

$$v(x,-b) = v(x,b) = 0, \quad x \in (-b,b) \tag{25}$$

имеет место равенство

$$-\int\limits_{\Omega} \nabla\psi\nabla v \, d\Omega - \int\limits_{-b}^{b} \mu(y) v(-b,y) dy + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + \omega_1 \int\limits_{\Omega} \psi v \, d\Omega = \int\limits_{\Omega} f_1 v \, d\Omega. \tag{26}$$

Здесь I_1, I_2, I_3, I_4 имеют такой же вид, как J_1, J_2, J_3, J_4 в (13)-(15) соответственно, только вместо функции u надо взять ψ .

Для численного решения обратной задачи (19) рассмотрим метод Ландвебера.

3. Метод Ландвебера

Для обратной задачи (19)

$$Aq = f,$$

где оператор A определен в (18), рассмотрим целевой функционал

$$J(q) = \|Aq - f\|^2_{L_2(-b,b)} \ . \tag{27}$$

Применим метод Ландвебера для решения уравнения (19)

$$q_{n+1} = q_n - \alpha \, J' q_n, \tag{28}$$

$$q_0 \in L_2(-b,b), \quad \alpha \in \left(0, \|A\|^{-2}\right).$$

Здесь

$$J'q = 2A^* (Aq - f) \tag{29}$$

- градиент функционала $J(q)$, который определяется по формуле

$$J'q = \psi_x(b,y), \tag{30}$$

где $\psi(x,y)$ – решение сопряженной задачи (20)-(23) с граничным условием

$$\mu(y) = 2\left[Aq - f\right](y) = 2\left[u(-b,y) - f(y)\right].$$

Из алгоритма метода Ландвебера видно, что для вычисления приближенного решения q_n для каждого n приходится решать прямую задачу (6)-(9) и сопряженную (20)-(23). Для решения последних задач применим метод конечных элементов. Покажем применение метода конечных элементов на примере прямой задачи.

4. Метод конечных элементов (МКЭ) для прямой задачи (6)-(9)

Рассмотрим МКЭ в случае линейного восполнения на треугольниках. Приведем пример триангуляции нашей области Ω. Разобьем область Ω на 36 прямоугольников $\Omega = \bigcup_{k=1}^{36} \Omega_k$, каждый прямоугольник разобьем на 8 одинаковых прямоугольных треугольников. Пусть τ_i - произвольный такой треугольник, тогда $\Omega = \bigcup_{i=1}^{288} \tau_i$. Полученная триангуляция области Ω показана на рис.1.

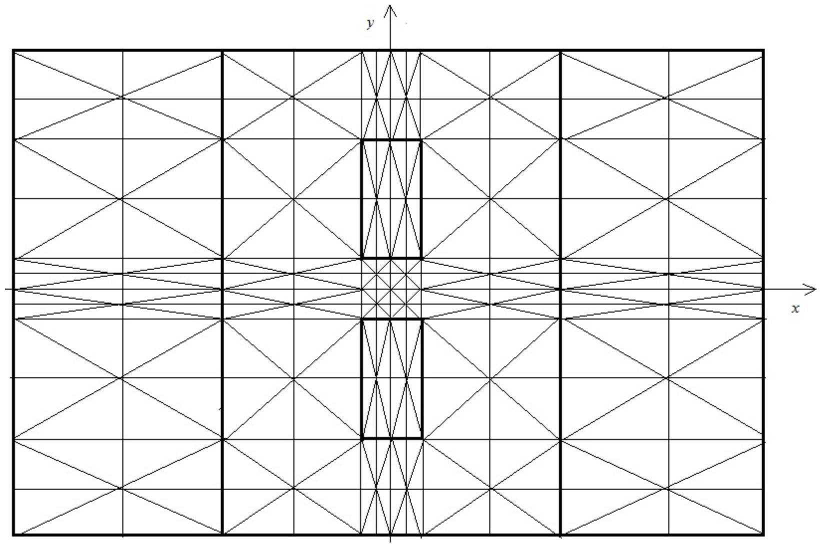

Рис. 1. Триангуляция области Ω.

Рассмотрим произвольный треугольник τ с вершинами $P_0\left(x_0, y_0\right),\ P_1\left(x_1, y_1\right), P_2\left(x_2, y_2\right)$:

$$\tau=\left\{(x, y)=P_0 \lambda_0+P_1 \lambda_1+P_2 \lambda_2: \quad \lambda_i \geq 0, \quad \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1\right\},$$

$$\lambda_i=\lambda_i(x, y), \quad i=0,1,2.$$

Если выразим $\lambda_0=1-\lambda_1-\lambda_2$, то уравнение треугольника можно записать иначе
(31)
$$\tau=\left\{(x, y)=P_0+\lambda_1\left(P_1-P_0\right)+\lambda_2\left(P_2-P_0\right): \quad \lambda_i \geq 0, \quad \lambda_1+\lambda_2 \leq 1\right\},$$

$$\lambda_i=\lambda_i(x, y), \quad i=1,2.$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ или λ_1, λ_2 называются барицентрическими координатами.

Из (31) находим

$$\lambda_1(x, y)=\frac{(x-x_0)(y_2-y_0)-(y-y_0)(x_2-x_0)}{\triangle},\ \lambda_2(x.y)=\frac{(y-y_0)(x_1-x_0)-(x-x_0)(y_1-y_0)}{\triangle},$$

где $\triangle=(x_1-x_0)(y_2-y_0)-(y_1-y_0)(x_2-x_0)$.

На треугольнике τ (31) рассмотрим линейную функцию

(32) $v(x, y)=v_0+\lambda_1(x, y)\left(v_1-v_0\right)+\lambda_2(x, y)\left(v_2-v_0\right)$, для любых $(x, y) \in \tau$,

которая однозначно определяется своими значениями $v_0=v\left(P_0\right),\ v_1=v\left(P_1\right),\ v_2= v\left(P_2\right)$ и удовлетворяет условию: $v(x,y)\Big|_{\substack{x=\pm b\\ y=\pm b}}=0$.

Ячейками нашей триангулярной координатной сетки являются прямоугольные треугольники. Рассмотрим произвольный прямоугольный треугольник (рис. 2)

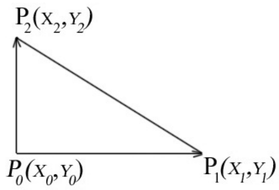

Рисунок 2. Треугольник τ.

Из рисунка 3 видно, что $x_0 = x_2,\ y_0 = y_1$, тогда $\triangle = (x_1 - x_0)(y_2 - y_0)$,

$$\lambda_1(x, y) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \quad \lambda_2(x, y) = \frac{y - y_0}{y_2 - y_0}.$$

А функция $v\,(x, y)$ в этом случае запишется в виде следующего линейного восполнения

$$(33)\quad v\,(x, y) = v_0 + \frac{(v_1 - v_0)\,(x - x_0)}{x_1 - x_0} + \frac{(v_2 - v_0)\,(y - y_0)}{y_2 - y_0} \text{ для любых } (x, y) \in \tau.$$

Рассмотрим $\{P_j\}_{j=1}^{N}$ – множество вершин треугольников τ_i, лежащих внутри области Ω. Зададим на каждом τ_i линейные функции v по формуле (33), равные нулю на внешней границе $\Omega :\ x = \pm b,\ y = \pm b$, однозначно определимые вектором своих значений в точках $\{P_j\}_{j=1}^{N}$.

Множество таких функций v обозначим $V_N \subset \overset{\circ}{W}{}_2^{1}(\Omega)$. Тогда имеет место следующее взаимно однозначное соответствие

$$v \in V_N \subset W_2^1(\Omega) \overset{\text{в.о.с.}}{\longleftrightarrow} (v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{n,m}) \in R^{n\times m} = R^N,$$

где $N = n \times m$ – размерность пространства V_N, здесь $v_{ij} = v\,(P_j)$. В нашем случае $N = 121$ или $N = 11 \times 11 = n \times m$, $n = 11, m = 11$.

Так как $\Omega = \bigcup_{k=1}^{36} \Omega_k$, то из равенства (12) имеем

$$(34)\quad -\sum_{k=1}^{36} \int_{\Omega_k} \nabla u \nabla v d\Omega + J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + \omega_1 \sum_{k=1}^{36} \int_{\Omega_k} uvd\Omega = \sum_{k=1}^{36} \int_{\Omega_k} f_1 v d\Omega,$$

для любого $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1}(\Omega)$. Далее для вычисления интегралов в равенстве (34) по Ω_k надо вычислить интегралы во всех ячейках триангулярной сетки, которые вошли в Ω_k. Сначала сделаем вспомогательные расчеты.

5. Вспомогательные расчеты. Общая формула для вычисления интеграла $\int_{\tilde\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega$ в случае произвольного прямоугольника $\tilde\Omega$

Рассмотрим прямоугольник $\tilde\Omega$ с центром в точке $(i, j) = (x_i, y_j)$, который разбит на 8 одинаковых прямоугольных треугольников, как показано на рис.3.

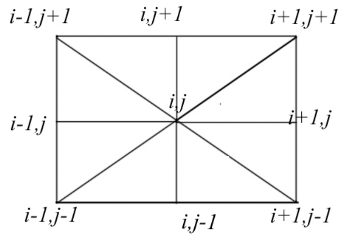

Рисунок 3. Прямоугольник $\tilde{\Omega}$.

Пусть треугольник τ_{ij}^k , $k = 1, \ldots, 8$ имеет катеты a_x, a_y.
Тогда

$$\int_{\tilde{\Omega}} \nabla u \nabla v d\Omega = \sum_{k=1}^{8} \int_{\tau_{ij}^k} \nabla u \nabla v d\Omega. \tag{35}$$

В каждом треугольнике τ_{ij}^k представим функции u, v по формуле (33):

$$v\,(x,y) = v\,(P_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\,[v\,(P_1) - v(P_0)] + \frac{y - y_0}{y_2 - y_0}\,[v\,(P_2) - v(P_0)]\,, \tag{36}$$

$$u\,(x,y) = u\,(P_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\,[u\,(P_1) - u(P_0)] + \frac{y - y_0}{y_2 - y_0}\,[u\,(P_2) - u(P_0)]\,.$$

Тогда из (35) и (36) имеет место формула

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{\Omega}} \nabla u \nabla v d\Omega = \frac{1}{2a_x a_y} \Big\{ \Big[& 4(a_x^2 + a_y^2)u_{i,j} - 2a_x^2 u_{i,j+1} - 2a_y^2 u_{i-1,j} - 2a_x^2 u_{i,j+1} - 2a_y^2 u_{i+1,j} \Big] v_{i,j} + \\
& + \Big[-2a_y^2 u_{ij} + 2(a_x^2 + a_y^2)u_{i+1,j} - a_x^2 u_{i+1,j+1} - a_x^2 u_{i+1,j-1} \Big] v_{i+1,j} + \\
& + \Big[-2a_y^2 u_{ij} + 2(a_x^2 + a_y^2)u_{i-1,j} - a_x^2 u_{i-1,j-1} - a_x^2 u_{i-1,j+1} \Big] v_{i-1,j} + \\
& + \Big[-2a_x^2 u_{ij} + 2(a_x^2 + a_y^2)u_{i,j+1} - a_y^2 u_{i-1,j+1} - a_y^2 u_{i+1,j+1} \Big] v_{i,j+1} + \\
& + \Big[(a_x^2 + a_y^2)u_{i-1,j-1} - a_y^2 u_{i,j-1} - a_x^2 u_{i-1,j} \Big] v_{i-1,j-1} + \\
& + \Big[(a_x^2 + a_y^2)u_{i+1,j+1} - a_y^2 u_{i,j+1} - a_x^2 u_{i+1,j} \Big] v_{i+1,j+1} + \\
& + \Big[-2a_x^2 u_{ij} + 2(a_x^2 + a_y^2)u_{i,j-1} - a_y^2 u_{i-1,j-1} - a_y^2 u_{i+1,j-1} \Big] v_{i,j-1} + \\
& + \Big[(a_x^2 + a_y^2)u_{i+1,j-1} - a_x^2 u_{i+1,j} - a_y^2 u_{i,j-1} \Big] v_{i+1,j-1} + \\
& + \Big[(a_x^2 + a_y^2)u_{i-1,j+1} - a_x^2 u_{i-1,j} - a_y^2 u_{i,j+1} \Big] v_{i-1,j+1} \Big\}.
\end{aligned} \tag{37}$$

Далее применяя формулу (37) к каждой области Ω_k, $k = \overline{1,36}$, получим

$$\sum_{k=1}^{36} \int_{\Omega_k} \nabla u \nabla v d\Omega = \sum_{i=1}^{11} \left(L_{i,i-1} \overrightarrow{u}_{i-1} + L_{i,i} \overrightarrow{u}_i + L_{i,i+1} \overrightarrow{u}_{i+1}, \overrightarrow{v}_i \right) \,, \tag{38}$$

где $\overrightarrow{u}_0 = 0$, $\overrightarrow{u}_{12} = 0$. Здесь $\overrightarrow{u}_i = (u_{1i}, u_{2i}, \ldots, u_{11i})^T$, $\overrightarrow{v}_i = (v_{1i}, v_{2i}, \ldots, v_{11i})^T$,
L_{ij} – квадратные матрицы 11-го порядка.

Замечание 1. Отметим, что

$$L_{1,1}=L_{11,10},\quad L_{1,2}=L_{11,11}, \tag{39}$$

$$L_{i,i-1}=L_{i+8,i+7},\quad L_{i,i}=L_{i+8,i+8},\quad L_{i,i+1}=L_{i+8,i+9}\ , i=\overline{2,5}.$$

Т.е. достаточно вычислить следующие матрицы:

(40)

$$L_{1,1},\ L_{1,2}; L_{2,1},\ L_{2,2},\ L_{2,3}; L_{3,2},\ L_{3,3},\ L_{3,4};\ \ L_{4,3},\ L_{4,4},\ L_{4,5}; L_{5,4},\ L_{5,5},\ L_{5,6};\ \ L_{6,5},\ L_{6,6},\ L_{6,7}.$$

А далее воспользоваться формулами (39).

Замечание 2. Матрицы $L_{i,j}$ являются либо трехдиагональными с ненулевой главной диагональю и двумя с ней соседними ненулевыми диагоналями, либо диагональными с главной ненулевой диагональю.

6. Вспомогательные расчеты. Общая формула для вычисления интеграла $\int_{\tilde\Omega} uvd\Omega$ в случае произвольного прямоугольника $\tilde\Omega$

Поступая аналогично, как в пункте 4.1, можно получить следующую формулу

$$\begin{aligned}\int_{\tilde\Omega} uvd\Omega=\sum_{k=1}^{8}\int_{\tau_{ij}^{(k)}} uvd\Omega = = \frac{a_x a_y}{24}\,\{&(16u_{i,j}+2u_{i,j-1}+2u_{i,j+1}+2u_{i-1,j-1}+2u_{i-1,j}+\\
&+2u_{i-1,j+1}+2u_{i+1,j}+2u_{i+1,j-1}+2u_{i+1,j+1})v_{ij}+\\
&+\left(2u_{i,j}+4u_{i,j-1}+u_{i-1,j-1}+u_{i+1,j-1}\right)v_{i,j-1}+\\
&+\left(2u_{i,j}+4u_{i-1,j-1}+u_{i,j-1}+u_{i-1,j}\right)v_{i-1,j-1}+\\
&+\left(2u_{i,j}+4u_{i-1,j}+u_{i-1,j-1}+u_{i-1,j+1}\right)v_{i-1,j}+\\
&+\left(2u_{i,j}+4u_{i-1,j+1}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}\right)v_{i-1,j+1}+\\
&+\left(2u_{i,j}+4u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}+u_{i+1,j+1}\right)v_{i,j+1}+\\
&+\left(2u_{i,j}+4u_{i+1,j+1}+u_{i,j+1}+u_{i+1,j}\right)v_{i+1,j+1}+\\
&+\left(2u_{i,j}+4u_{i+1,j}+u_{i+1,j}+u_{i+1,j-1}\right)v_{i+1,j}+\\
&+\left(2u_{i,j}+4u_{i+1,j-1}+u_{i+1,j}+u_{i,j-1}\right)v_{i+1,j-1}\}\,.\end{aligned} \tag{41}$$

Далее применяя формулу (41) к каждой области $\Omega_k,\quad k=\overline{1,36}$, получим

$$\sum_{k=1}^{36}\int_{\Omega_k} uvd\Omega=\sum_{i=1}^{11}\left(N_{i,i-1}\overrightarrow{u}_{i-1}+N_{i,i}\overrightarrow{u}_{i}+N_{i,i+1}\overrightarrow{u}_{i+1},\overrightarrow{v}_{i}\right)\ , \tag{42}$$

где $\overrightarrow{u}_0=0,\quad \overrightarrow{u}_{12}=0.$

Замечание 3. Отметим, что

$$N_{1,1}=N_{11,10},\quad N_{1,2}=N_{11,11}, \tag{43}$$

$$N_{i,i-1} = N_{i+8,i+7}, \quad N_{i,i} = N_{i+8,i+8}, \quad N_{i,i+1} = N_{i+8,i+9}\ , i = \overline{2,5}.$$

Т.е. достаточно вычислить следующие матрицы:

$$N_{1,1},\ N_{1,2}; N_{2,1},\ N_{2,2},\ N_{2,3}; N_{3,2},\ N_{3,3},\ N_{3,4};\ \ N_{4,3},\ N_{4,4},\ N_{4,5}; \tag{44}$$
$$N_{5,4},\ N_{5,5},\ N_{5,6};\ \ N_{6,5},\ N_{6,6},\ N_{6,7}.$$

Замечание 4. Матрицы $N_{i,j}$ являются либо трехдиагональными с ненулевой главной диагональю и двумя с ней соседними ненулевыми диагоналями, либо диагональными с главной ненулевой диагональю.

7. Вычисление граничных интегралов J_1, J_2, J_3, J_4

Применяя формулу (36) к (13)-(15), получим

$$J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = \sum_{i=1}^{11} (M_{i,i-1}\overrightarrow{u}_{i-1} + M_{i,i}\overrightarrow{u}_i + M_{i,i+1}\overrightarrow{u}_{i+1}, \overrightarrow{v}_i). \tag{45}$$

8. Вычисление интеграла $\int_{\tilde{\Omega}} f_1 v d\Omega$

$$\int_{\tilde{\Omega}} f_1 v d\Omega = \sum_{k=1}^{8} \int_{\tau_{ij}^{(k)}} f_1 v d\Omega\ . \tag{46}$$

Применим формулу (36) для v в (46), далее полученную формулу применим к каждой области $\Omega_k,\ k = \overline{1,36}$ и сложим по k от 1 до 36. В результате получим

$$\sum_{k=1}^{36} \int_{\Omega_k} f_1 v d\Omega = \sum_{i=1}^{11} (\overrightarrow{F}_i, \overrightarrow{v}_i)\ , \tag{47}$$

где $\overrightarrow{F}_i = (F_{1,i}, \ldots, F_{11,i})^T, \quad F_{i,j} = F_{ij}(f_1)$.

9. Сведение решения прямой задачи (6)-(9) к матричной прогонке

Сложим (38), (42), (45), (47):

$$\sum_{i=1}^{11} (L_{i,i-1}\overrightarrow{u}_{i-1} + L_{i,i}\overrightarrow{u}_i + L_{i,i+1}\overrightarrow{u}_{i+1}, \overrightarrow{v}_i) + \sum_{i=1}^{11} (\ N_{i,i-1}\overrightarrow{u}_{i-1} + N_{i,i}\overrightarrow{u}_i + N_{i,i+1}\overrightarrow{u}_{i+1}, \overrightarrow{v}_i) +$$

$$+\sum_{i=2}^{10} (\ M_{i,i-1}\overrightarrow{u}_{i-1} + M_{i,i}\overrightarrow{u}_i + M_{i,i+1}\overrightarrow{u}_{i+1}, \overrightarrow{v}_i) = \sum_{i=1}^{11} (F_i, \overrightarrow{v}_i), \tag{48}$$

для любых $\overrightarrow{v}_i \in V_{N_1}, \quad N_1 = 11$. Здесь $\overrightarrow{u}_0 = 0$, $\overrightarrow{u}_{12} = 0$.

Тогда получим линейную систему вида

$$\begin{gathered} -\ C_1\overrightarrow{u}_1 + B_1\overrightarrow{u}_2 = -G_1\ , \\ A_i\overrightarrow{u}_{i-1} - C_i\overrightarrow{u}_i + B_i\overrightarrow{u}_{i+1} = \ -G_i\ , \qquad i = \overline{2,10}, \\ A_{11}\overrightarrow{u}_{10} - C_{11}\overrightarrow{u}_{10} = -G_{11}, \end{gathered} \tag{49}$$

где

$$C_1 = -L_{11} - w_1 N_{11}, \quad B_1 = L_{12} + w_1 N_{12}, \quad G_1 = -F_1\ ,$$

$$A_i = L_{i,i-1} + w_1 N_{i,i-1} + M_{i,i-1}\ , \tag{50}$$
$$C_i = -L_{i,i} - w_1 N_{i,i} - M_{i,i},$$
$$B_i = L_{i,i+1} + w_1 N_{i,i+1} + M_{i,i+1},$$
$$G_i = -F_i,$$
$$A_{11} = L_{11,9} + w_1 N_{11,9}, \qquad C_{11} = -L_{11,11} - w_1 N_{11,11}\ , \qquad G_{11} = -F_{11}.$$

Таким образом, решение прямой задачи (6)-(9) свели к решению линейной алгебраической системы (49), которую решаем матричной прогонкой.

Аналогично решаем сопряженную задачу (20)-(23).

Список литературы

[1] Larry J.Segerlind, Applied finite element analysis. New York, 1984.
[2] Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.