Задачи управления для гидродинамических моделей механики сплошной среды*

Г.В. Алексеев, Д.А. Терешко
Институт прикладной математики ДВО РАН
e-mail: `alekseev@iam.dvo.ru`

Формулируются многопараметрические задачи управления для стационарных уравнений тепловой конвекции, рассматриваемых при граничных условиях Дирихле для скорости и смешанных краевых условиях для температуры. В качестве функционала качества выбирается среднеквадратичное интегральное отклонение искомого поля скоростей или завихренности либо давления от заданного в некоторой части области течения поля. Роль управлений играют граничные функции, входящие в условие Неймана для температуры на части границы, а также плотность распределенных источников тепла. Исследуется единственность рассматриваемых экстремальных задач и выводятся оценки устойчивости решений относительно определенных возмущений как функционала качества, так и одной из граничных функций, входящих в исходную модель.

1. Введение. Постановка краевой задачи

В последнее время большое внимание уделяется исследованию задач управления термогидродинамическими процессами в сплошных средах. Интерес к этим задачам вызывается наличием актуальных приложений в промышленности, охране окружающей среды и ряде других областей. В гидродинамике задача минимизации сил сопротивления в вязкой жидкости всегда была актуальной. В тепловой конвекции интерес представляют задачи управления режимом течения вязкой теплопроводной жидкости с помощью источников тепла, а также задачи минимизации температурных градиентов либо максимальных температур в определенных частях области течения. Возможные управления осуществляются путем инжекции жидкости через некоторую часть границы области течения, либо нагреванием или охлаждением определенных ее участков Теоретическому исследованию задач управления и обратных экстремальных задач для стационарных моделей тепломассопереноса посвящено большое количество работ. Отметим среди них статьи [1-10] и книги [11, 12], в которых исследуются экстремальные задачи для стационарных уравнений тепловой конвекции и тепломассопереноса.

В работах [8-10] также разработаны численные алгоритмы решения задач граничного управления для стационарной модели тепловой конвекции. Кроме того, в этих работах (см. также [11, 12]) представлены результаты вычислительных экспериментов, связанных с минимизацией завихренности потока, уменьшением силы лобового сопротивления и устранением застойных зон за обтекаемым телом и в углах канала за счет выбора потока тепла и вектора скорости на определенных участках границы.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (код проекта 10-01-00219-а) и грантов ДВО РАН (проекты 09-I-П29-01, 09-I-ОМН-03, 09-II-СУ03-003 и 09-III-А-03-07).

Целью настоящей работы является теоретический анализ трехпараметрических экстремальных задач для уравнений тепловой конвекции

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\operatorname{grad})\mathbf{u} + \operatorname{grad} p = \mathbf{f} - \mathbf{b}T,\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$-\lambda\Delta T + \mathbf{u}\cdot\operatorname{grad} T = f \text{ в } \Omega, \tag{2}$$

рассматриваемых при следующих граничных условиях:

$$\mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{g},\ \ T|_{\Gamma_D} = \psi,\ \ \lambda(\partial T/\partial n + \alpha T)|_{\Gamma_N} = \chi. \tag{3}$$

Здесь Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, $d = 2,3$ с липшицевой границей Γ, $\mathbf{u}$ и T – скорость и температура, $p = P/\rho$, где P – давление, ρ=const – плотность среды, $\nu > 0$, $\lambda > 0$ – постоянные коэффициенты кинематической вязкости и температуроводности, $\mathbf{f}$ – объемная плотность внешних массовых сил, f – объемная плотность источников тепла, $\mathbf{g}$, ψ и α, χ – некоторые функции, заданные на границе Γ, участке Γ_D либо Γ_N, $\mathbf{b} = \beta_T\mathbf{G}$, где $\mathbf{G}$ – вектор ускорения свободного падения, а функция β_T имеет смысл коэффициента теплового расширения.

Будем предполагать, что область Ω удовлетворяет следующему условию:

(i) Ω – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^d$, $d = 2,3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, состоящей из N связных компонент $\Gamma^{(i)},\ i = 1,2,...,N$.

Условимся о следующих обозначениях. Скалярные произведения в $L^2(\Omega)$ и $L^2(Q)$, где $Q \subset \Omega$ – подобласть области Ω, будем обозначать через $(\cdot,\cdot)$ и $(\cdot,\cdot)_Q$, норму в $L^2(\Omega)$, либо $L^2(Q)$ – через $\|\cdot\|$, либо $\|\cdot\|_Q$, скалярные произведения и норму в $H^1(Q)$ – через $(\cdot,\cdot)_{1,Q}$ и $\|\cdot\|_{1,Q}$, норму либо полунорму в $H^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}^1(\Omega)$ – через $\|\cdot\|_1$ либо $|\cdot|_1$, норму в $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ либо в $H^{1/2}(\Gamma)$ – через$\|\cdot\|_{1/2,\Gamma}$, отношение двойственности для пары X и X^* – через $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X^*\times X}$ или просто через $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Положим $\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1_0(\Omega) : \operatorname{div}\mathbf{v} = 0\}$, $L^2_0(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega) : (p,1) = 0\}$, $\mathcal{T} = \{S \in H^1(\Omega) : S|_{\Gamma_D} = 0\}$, $\tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : (\mathbf{v},\mathbf{n})_{\Gamma^{(i)}} = 0, i = 1,2,\ldots,N,\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0\}$, $\tilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma) = \{\mathbf{g} = \mathbf{v}|_\Gamma :\ \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)\}$, $\mathbf{H}^1_{\operatorname{div}}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \operatorname{div}\mathbf{u} = 0\}$. Пусть в дополнение к условию (i) выполняются условия:

(ii) $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, $\mathbf{b} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $\alpha \in L^2(\Gamma_N)$;

(iii) $\mathbf{g} \in \tilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma)$, $\chi \in L^2(\Gamma_N)$, $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, $f \in L^2(\Omega)$.

Слабая формулировка для модели (1)–(3) заключается в нахождении тройки $(\mathbf{u},p,T) \in \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)\times L^2_0(\Omega)\times H^1(\Omega)$, удовлетворяющей соотношениям (см. [12])

$$\nu(\nabla\mathbf{u},\nabla\mathbf{v}) + ((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u},\mathbf{v}) - (\operatorname{div}\mathbf{v},p) = \langle\mathbf{f},\mathbf{v}\rangle - (\mathbf{b}T,\mathbf{v})\ \ \forall\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1_0(\Omega), \tag{4}$$

$$\lambda(\nabla T,\nabla S) + \lambda(\alpha T,S)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u}\cdot\nabla T,S) = (f,S) + (\chi,S)_{\Gamma_N}\ \ \forall S \in \mathcal{T}, \tag{5}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega,\ \mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{g},\ \ T|_{\Gamma_D} = \psi. \tag{6}$$

Известно, что при выполнении условий (i)–(iii) существует по крайней мере одно решение $(\mathbf{u},p,T) \in \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)\times L^2_0(\Omega)\times H^1(\Omega)$ задачи (4)–(6) и справедливы оценки $\|\mathbf{u}\|_1 \le M_\mathbf{u}$, $\|p\| \le M_p$, $\|T\|_1 \le M_T$. Здесь $M_\mathbf{u}$, M_p и M_T – неубывающие непрерывные функции норм $\|\mathbf{b}\|$, $\|\mathbf{f}\|_{-1}$, $\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}$, $\|f\|$, $\|\chi\|_{\Gamma_N}$ и $\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}$. Если к тому же функции $\mathbf{b},\mathbf{f},\mathbf{g},f,\chi$ и ψ “малы” (либо вязкость ν “велика”) в том смысле, что

$$\gamma_0 M_\mathbf{u} + (\beta_1\gamma_1\|\mathbf{b}\|/\delta_1\lambda)M_T < \delta_0\nu, \tag{7}$$

то решение единственно. Здесь $\beta_1,\gamma_0,\gamma_1$ и β_1 – некоторые константы (см. подробнее о них в [11, с. 227, 228] и [12, с. 138, 139]).

2. Задачи управления

Главной целью работы является анализ устойчивости задач управления для модели (4)–(6). Для того, чтобы сформулировать общую задачу управления, разобъем множество всех исходных данных задачи (1), (2) на две группы: группу фиксированных данных, куда внесем неизменяемые функции $\mathbf{f}$, $\mathbf{b}$ и α, и группу управлений, куда внесем функции χ, ψ и f. Что касается функции $\mathbf{g}$, то в дальнейшем она будет играть особую роль, поскольку устойчивость решений формулируемых ниже экстремальных задач будет исследоваться относительно малых возмущений как рассматриваемого функционала качества, так и функции $\mathbf{g}$ в норме $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$.

Пусть $X = \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$, $Y = \mathbf{H}^{-1}(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times \tilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma) \times \mathcal{T}^* \times H^{1/2}(\Gamma_D)$. Обозначим через $I : \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ слабо полунепрерывный снизу функционал качества. Будем предполагать, что управления χ, ψ и f могут изменяться в некоторых множествах $K_1 \subset L^2(\Gamma_N)$, $K_2 \subset H^{1/2}(\Gamma_D)$ и $K_3 \subset L^2(\Omega)$. Полагая $K = K_1 \times K_2 \times K_3$, $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, p, T)$, $u_0 = (\mathbf{f}, \mathbf{b}, \alpha)$, $u = (\chi, \psi, f)$, введем функционал $J : X \times K \to \mathbb{R}$ формулой

$$J(\mathbf{x}, u) = \frac{\mu_0}{2} I(\mathbf{u}, p) + \frac{\mu_1}{2}\|\chi\|^2_{\Gamma_N} + \frac{\mu_2}{2}\|\psi\|^2_{1/2,\Gamma_D} + \frac{\mu_3}{2}\|f\|^2. \tag{8}$$

Здесь μ_0, μ_1, μ_2, μ_3 – неотрицательные параметры, служащие для регулирования относительной важности каждого из слагаемых в (8). Другой целью введения параметров μ_l является обеспечение единственности и устойчивости решений исследуемых экстремальных задач. В роли $I(\mathbf{u}, p)$ обычно выступает один из следующих функционалов:

$$I_1(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_d\|^2_Q \equiv \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_d\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)},\ I_2(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_d\|^2_{1,Q} \equiv \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_d\|^2_{\mathbf{H}^1(Q)},$$

$$I_3(\mathbf{u}) = \|\mathrm{rot}\,\mathbf{u} - \zeta_d\|^2_Q,\ \ I_4(p) = \|p - p_d\|^2_Q \equiv \|p - p_d\|^2_{L^2(Q)}. \tag{9}$$

Здесь Q – некоторое подмножество области Ω, функция $\mathbf{u}_d \in \mathbf{L}^2(Q)$ (либо $\mathbf{u}_d \in \mathbf{H}^1(Q)$) моделирует измеренное или заданное в некоторой подобласти Q поле скоростей, тогда как ζ_d либо p_d описывает измеренное поле завихренности потока либо давления.

Предположим в дополнение к (i), (ii), что выполняются следующие условия:

(j) $K_1 \subset L^2(\Gamma_N)$, $K_2 \subset H^{1/2}(\Gamma_D)$, $K_3 \subset L^2(\Omega)$ – непустые выпуклые замкнутые множества;

(jj) $\mu_0 > 0$, $\mu_l > 0$ или $\mu_0 > 0$, $\mu_l \geq 0$ и K_l – ограниченное множество, $l = 1, 2, 3$.

Рассматривая функционал J на слабых решениях задачи (1)–(3), запишем соответствующее ограничение, имеющее вид ее слабой формулировки (4)–(6), в виде $F(\mathbf{x}, u, \mathbf{g}) \equiv F(\mathbf{u}, p, T, \chi, \psi, f, \mathbf{g}) = 0$. Здесь $F \equiv (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5) : X \times K \times \tilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma) \to Y$ – оператор, определенный формулами

$$\langle F_1(\mathbf{x}), \mathbf{v}\rangle = \nu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + ((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathrm{div}\,\mathbf{v}, p) - \langle\mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle + (\mathbf{b}T, \mathbf{v}),$$

$$\langle F_4(\mathbf{x}, \chi, f), S\rangle = \lambda(\nabla T, \nabla S) + \lambda(\alpha T, S)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u}\cdot\nabla T, S) - (f, S) - (\chi, S)_{\Gamma_N},$$

$$\langle F_2(\mathbf{x}), q\rangle = (\mathrm{div}\,\mathbf{u}, q),\ F_3(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = \mathbf{u}|_\Gamma - \mathbf{g},\ F_5(\mathbf{x}, \psi) = T|_{\Gamma_D} - \psi.$$

Сформулируем следующую экстремальную задачу граничного управления:

$$J(\mathbf{x}, u) \equiv \frac{\mu_0}{2} I(\mathbf{u}, p) + \frac{\mu_1}{2}\|\chi\|^2_{\Gamma_N} + \frac{\mu_2}{2}\|\psi\|^2_{1/2,\Gamma_D} + \frac{\mu_3}{2}\|f\|^2 \to \inf,\ F(\mathbf{x}, u, \mathbf{g}) = 0,\ (\mathbf{x}, u) \in X \times K. \tag{10}$$

Анализ задачи (10) начнем с формулировки некоторых фактов, доказательство которых можно найти, например, в [11, 12]. Обозначим через $\mathbf{y}^* = (\xi, \sigma, \zeta, \theta, \zeta^t)$ элемент из сопряженного пространства $Y^* = \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times \tilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma)^* \times \mathcal{T} \times H^{1/2}(\Gamma_D)^*$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (i), (ii), (j), (jj), причем* $\mathbf{g} \in \tilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma)$. *Тогда существует по крайней мере одно решение задачи (10) при* $I = I_k$, $k = 1, 2, 3$.

Теорема 2. *Пусть при выполнении условий теоремы 1 элемент* $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}) \equiv (\hat{\mathbf{u}}, \hat{p}, \hat{T}, \hat{\chi}, \hat{\psi}, \hat{f}) \in X \times K$ *является точкой локального минимума в задаче (10), причем функционал* I *непрерывно дифференцируем в точке* $\hat{\mathbf{x}}$. *Тогда существует ненулевой множитель Лагранжа* $(\lambda_0, \mathbf{y}^*) = (\lambda_0, \xi, \sigma, \zeta, \theta, \zeta^t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times \tilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma)^* \times \mathcal{T} \times H^{1/2}(\Gamma_D)^*$ *такой, что выполняется уравнение Эйлера-Лагранжа*

$$F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}, \mathbf{g})^* \mathbf{y}^* = -\lambda_0 (\mu_0/2) I'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}) \text{ в } X^* \tag{11}$$

и принцип минимума, эквивалентный вариационному неравенству

$$(\mu_1 \hat{\chi} - \kappa\theta, \chi - \hat{\chi})_{\Gamma_N} + \langle \mu_2 \hat{\psi} - \kappa\zeta^t, \psi - \hat{\psi}\rangle_{1/2,\Gamma_D} + (\mu_3 \hat{f} - \kappa\theta, f - \hat{f}) \geq 0 \ \forall (\chi, \psi, f) \in K. \tag{12}$$

Если, кроме того, выполняется неравенство (7) для всех $u \in K$, *то однородное (при* $\lambda_0 = 0$*) уравнение (11) имеет лишь тривиальное решение* $\mathbf{y}^* \equiv (\xi, \sigma, \zeta, \theta, \zeta^t) = \mathbf{0}$, *а любой нетривиальный множитель Лагранжа, удовлетворяющий (11), является регулярным и, следовательно, имеет вид* $(1, \mathbf{y}^*)$.

В (11) и (12) $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}, \mathbf{g})^* : Y^* \to X^*$ обозначает оператор, сопряженный к оператору (производной Фреше) $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}, \mathbf{g}) \in \mathcal{L}(X, Y)$, а κ – вспомогательный размерный параметр с размерностью $[\kappa] = L_0^2/(T_0^2 K_0^2)$, выбранной так, что размерности величин ξ, σ, θ сопряженного состояния $\mathbf{y}^*$ совпадают с размерностями величин $\mathbf{u}, p$ и T основного состояния $\mathbf{x}$. Будем предполагать, что функция $\mathbf{g}$ может изменяться в некотором множестве $G \subset \tilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma)$. Обозначим через $(\mathbf{x}_1, u_1) \equiv (\mathbf{u}_1, p_1, T_1, \chi_1, \psi_1, f_1) \in X \times K$ произвольное решение задачи (10) для заданной функции $\mathbf{g} = \mathbf{g}_1 \in G$. Через $(\mathbf{x}_2, u_2) \equiv (\mathbf{u}_2, p_2, T_2, \chi_2, \psi_2, f_2) \in X \times K$ обозначим решение близкой к (10) задачи

$$\tilde{J}(\mathbf{x}, u) \equiv \frac{\mu_0}{2}\tilde{I}(\mathbf{u}, p) + \frac{\mu_1}{2}\|\chi\|^2_{\Gamma_N} + \frac{\mu_2}{2}\|\psi\|^2_{1/2,\Gamma_D} + \frac{\mu_3}{2}\|f\|^2 \to \inf,\ F(\mathbf{x}, u, \tilde{\mathbf{g}}) = 0,\ (\mathbf{x}, u) \in X \times K, \tag{13}$$

полученной заменой функционала I в (10) близким функционалом $\tilde{I}$, а функции $\mathbf{g}$, входящей в уравнение $F(\mathbf{x}, u, \mathbf{g}) = 0$ в (10), – заменой близкой функцией $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{g}_2 \in G$.

В силу результатов раздела 1 справедливы оценки

$$\|\mathbf{u}_i\|_1 \leq M^0_{\mathbf{u}},\ \ \|p_i\| \leq M^0_p,\ \ \|T_i\|_1 \leq M^0_T,\ \ i = 1, 2, \tag{14}$$

где

$$M^0_{\mathbf{u}} = \sup_{u \in K, \mathbf{g} \in G} M_{\mathbf{u}}(u_0, u, \mathbf{g}),\ \ M^0_p = \sup_{u \in K, \mathbf{g} \in G} M_p(u_0, u, \mathbf{g}),\ \ M^0_T = \sup_{u \in K, \mathbf{b} \in G} M_T(u_0, u, \mathbf{g}).$$

Введем безразмерные аналоги $\mathcal{R}e$, $\mathcal{R}a$ и $\mathcal{P}$ широко используемых в гидромеханике безразмерных чисел Рейнольдса, Рэлея и Прандтля по формулам

$$\mathcal{R}e = \frac{\gamma_0 M^0_{\mathbf{u}}}{\delta_0 \nu},\ \mathcal{R}a = \frac{\beta_1}{\delta_0 \nu}\frac{\gamma_1 M^0_T}{\delta_1 \lambda},\ \mathcal{P} = \frac{\delta_0 \nu}{\delta_1 \lambda}$$

и предположим, что выполняется условие

$$\mathcal{R}e + \mathcal{R}a \equiv \frac{\gamma_0 M^0_{\mathbf{u}}}{\delta_0 \nu} + \frac{\beta_1}{\delta_0 \nu}\frac{\gamma_1 M^0_T}{\delta_1 \lambda} < 1/2. \qquad (15)$$

Обозначим через $(1, \mathbf{y}^*_i)$, где $\mathbf{y}^*_i \equiv (\xi_i, \sigma_i, \zeta_i, \theta_i, \zeta^t_i) \in \mathbf{H}^1_0(\Omega) \times L^2_0(\Omega) \times \tilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma)^* \times \mathcal{T} \times H^{1/2}(\Gamma_D)^*$, $i = 1, 2$, отвечающие решениям $(\mathbf{x}_i, u_i)$ нетривиальные множители Лагранжа.

Представим основной результат на примере задачи управления

$$J(\mathbf{u}, \chi, \psi, f) \equiv \frac{\mu_0}{2}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_d\|^2_Q + \frac{\mu_1}{2}\|\chi\|^2_{\Gamma_N} + \frac{\mu_2}{2}\|\psi\|^2_{1/2,\Gamma_D} + \frac{\mu_3}{2}\|f\|^2 \to \inf,$$

$$F(\mathbf{x}, u, \mathbf{g}) = 0, \quad \mathbf{x} = (\mathbf{u}, p, T) \in X, \quad u = (\chi, \psi, f) \in K, \qquad (16)$$

отвечающую функционалу качества $I_1(\mathbf{u})$. Обозначим через $(\mathbf{x}_1, u_1) \equiv (\mathbf{u}_1, p_1, T_1, \chi_1, \psi_1, f_1)$ решение задачи (16), отвечающее заданным функциям $\mathbf{u}_d \equiv \mathbf{u}^{(1)}_d \in \mathbf{L}^2(Q)$ и $\mathbf{g} = \mathbf{g}_1 \in G$, через $(\mathbf{x}_2, u_2) \equiv (\mathbf{u}_2, p_2, T_2, \chi_2, \psi_2, f_2)$ обозначим решение задачи (16), отвечающее возмущенным функциям $\tilde{\mathbf{u}}_d \equiv \mathbf{u}^{(2)}_d \in \mathbf{L}^2(Q)$ и $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{g}_2 \in G$.

Теорема 3. *Пусть при выполнении условий (i), (ii), (j) и (15) шестерка* $(\mathbf{u}_i, p_i, T_i, \chi_i, \psi_i, f_i)$ *является решением задачи (16), отвечающим заданным функциям* $\mathbf{u}_d \equiv \mathbf{u}^{(i)}_d \in \mathbf{L}^2(Q)$ *и* $\mathbf{g}_i \in G$, $i = 1, 2$, *где* $Q \subset \Omega$ *– произвольное открытое подмножество, и пусть параметры* a, b, c_1, c_2 *и* c_3 *определяются соотношениями*

$$a = 2\delta_0 \nu \gamma (1 + C_d \beta_0^{-1})(\mathcal{R}e + \mathcal{R}e^0)(2\mathcal{R} + 2\mathcal{R}a + 1),\ c_1 = \left(\frac{\gamma_2}{\delta_1 \lambda}\right)^2 M,\ c_2 = C_1^2(\mathcal{N} + 1)^2 M,$$

$$b = 8\gamma_0 \gamma C_0^2 (2\mathcal{R} + 1)^2 \frac{\mathcal{R}e + \mathcal{R}e^0}{(1 - 2\mathcal{R}a)^2}\left[3 + \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0}\right)^2 \mathcal{P}^2 \mathcal{R}a^2\right],\ c_3 = \left(\frac{\gamma_4}{\delta_1 \lambda}\right)^2 M,$$

в которых величины $\gamma, M, \mathcal{N}$ *и* $\mathcal{R}e^0$ *определены формулами*

$$\gamma = \frac{\gamma_4^2}{\gamma_0},\ M = 8\gamma_0 \gamma \left(\frac{\beta_1}{\delta_0 \nu}\right)^2 \frac{\mathcal{R}e + \mathcal{R}e^0}{(1 - 2\mathcal{R}a)^2}\left[12 + \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0}\right)^2 \mathcal{P}^2\right],$$

$$\mathcal{N} = \frac{\lambda + \gamma_1 M^0_{\mathbf{u}} + \lambda \gamma_3 \|\alpha\|_{\Gamma_N}}{\delta_1 \lambda},\ \mathcal{R}e^0 = \frac{\gamma_0}{\delta_0 \nu \gamma_4}\max(\|\mathbf{u}^{(1)}_d\|_Q, \|\mathbf{u}^{(2)}_d\|_Q).$$

Предположим, что выполняются условия

$$\mu_1(1 - \varepsilon) \ge \mu_0 c_1,\ \mu_2(1 - \varepsilon) \ge \mu_0 c_2,\ \mu_3(1 - \varepsilon) \ge \mu_0 c_3,\ \varepsilon = \text{const} > 0.$$

Тогда $\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_Q \le \|\mathbf{u}^{(1)}_d - \mathbf{u}^{(2)}_d\|_Q + (a\|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|_{1/2,\Gamma} + b\|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|^2_{1/2,\Gamma})^{1/2}$ *и справедливы следующие оценки устойчивости:*

$$\|\chi_1 - \chi_2\|_{\Gamma_N} \le \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon \mu_1}}\Delta,\ \|\psi_1 - \psi_2\|_{1/2,\Gamma_D} \le \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon \mu_2}}\Delta,\ \|f_1 - f_2\| \le \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon \mu_3}}\Delta,$$

$$\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_1 \le \frac{2\beta_1 d}{\delta_0 \nu (1 - 2\mathcal{R}a)}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\Delta + \frac{C_0(2\mathcal{R} + 1)\|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|_{1/2,\Gamma}}{1 - 2\mathcal{R}a},$$

$$\|T_1 - T_2\|_1 \le \frac{d}{1 - 2\mathcal{R}a}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\Delta + \frac{C_0(2\mathcal{R} + 1)}{1 - 2\mathcal{R}a}\frac{\gamma_1 M^0_T}{\delta_1 \lambda}\|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|_{1/2,\Gamma},$$

$$\|p_1 - p_2\| \leq \frac{(2\mathcal{R}+1)}{\beta_0(1-2\mathcal{R}a)}\left[\beta_1 d\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\Delta + \delta_0\nu C_0(\mathcal{R}+\mathcal{R}a)\|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|_{1/2,\Gamma}\right].$$

Здесь константы d и Δ определяются формулами

$$d = \left[\frac{\gamma_2}{\delta_1\lambda\sqrt{\mu_1}} + \frac{C_1(\mathcal{N}+1)}{\sqrt{\mu_2}} + \frac{\gamma_4}{\delta_1\lambda\sqrt{\mu_3}}\right],$$

$$\Delta = \|\mathbf{u}_d^{(1)} - \mathbf{u}_d^{(2)}\|_Q + (a\|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|_{1/2,\Gamma} + b\|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|^2_{1/2,\Gamma})^{1/2}.$$

Аналогичные результаты справедливы для других функционалов в (9).

Список литературы

[1] Gunzburger M.D., Hou L., Svobodny T.P. Thse approximation of boundary control problems for fluid flows with an application to control by heating and cooling // Comput. Fluids. 1993. Vol. 22. P. 239–251.

[2] Ito K., Ravindran S.S. Optimal control of thermally convected fluid flows // SIAM J. Sci. Comput. 1998. Vol. 19, N 6. P. 1847–1869.

[3] Алексеев Г.В. Разрешимость стационарных задач граничного управления для уравнений тепловой конвекции // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 982–998.

[4] Lee H.-C., Imanuvilov O.Yu. Analysis of optimal control problems for the 2-D stationary Boussinesq equations // J. Math. Anal. Appl. 2000. Vol. 242. P. 191–211.

[5] Алексеев Г.В. Коэффициентные обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса // Журн. вычисл. матем. матем. физ. 2007. Т. 47, № 6. С. 1055–1076.

[6] Алексеев Г.В., Соболева О.В., Терешко Д.А. Задачи идентификации для стационарной модели массопереноса // Прикл. мех. техн. физ. 2008. Т. 49, № 4. С. 24–35.

[7] Алексеев Г.В., Хлуднев А.М. Устойчивость решений экстремальных задач граничного управления для стационарных уравнений тепловой конвекции // Сиб. журн. индустр. матем. 2010. Т. 13, № 4. С. 5–18.

[8] Алексеев Г.В., Терешко Д.А. Экстремальные задачи граничного управления для стационарной модели тепловой конвекции // Докл. АН. 2010. Т. 430, № 2. С. 173–178.

[9] Алексеев Г.В., Терешко Д.А. Экстремальные задачи граничного управления для стационарных уравнений тепловой конвекции // Прикл. мех. техн. физ. 2010. Т. 51, № 4. С. 72-84.

[10] Alekseev G., Tereshko D., Pukhnachev V. Boundary control problems for Oberbeck-Boussinesq model of heat and mass transfer // Advanced Topics in Mass Transfer / Ed. Mohamed El-Amin. Rijeka: Intech, 2011. P. 485–512.

[11] Алексеев Г.В., Терешко Д.А. Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008. 365 с.

[12] Алексеев Г.В. Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики. М.: Научный мир, 2010. 412 с.