Периодизированное характеристическое уравнение для линейной системы с запаздыванием

M.A.Manin and E.N.Rosenwasser

16 марта 2011 г.

1 Постановка задачи

1.1. Вопрос об устойчивости линейного векторного дифференциального уравнения

$$\frac{dy(t)}{dt} = A\,y(t), \tag{1}$$

где: $y(t)$ - вектор размера $n \times n$; A - постоянная матрица размера $n \times n$, - сводится к изучению характеристического уравнения

$$\Delta(s) = \det[s\,I_n - A] = 0, \tag{2}$$

где: I_n - единичная матрица $n \times n$. При этом для асимптотической устойчивости уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы уравнение (2) не имело корней в замкнутой правой полуплоскости $S^+ : \Re s \geq 0$ Далее характеристическое уравнение (2), выраженное через переменную s, будем называть стандартным (СХУ).

1.2. Если рассматривать уравнение (1) как частный случай линейной периодической системы с периодом T, то можно получить эквивалентное характеристическое уравнение следующего вида

$$d(\zeta) = \det\left[I_n - \zeta\,e^{A\,T}\right] = 0. \tag{3}$$

При этом для асимптотической устойчивости системы (1) необходимо и достаточно, чтобы уравнение (3) не имело корней внутри замкнутого единичного круга R^- : $|\zeta| \leq 1$ (с центром в начале координат). Далее характеристическое уравнение (3) будем называть периодизированным (ПХУ).

1.3. Несмотря на внешнее сходство, между СХУ и ПХУ имеется принципиальное отличие, которое обусловлено наличием у ПХУ (3) свойства робастности, и которое заключается в следующем. Пусть $G(\zeta)$ - произвольная матрица размера $n \times n$, элементы которой аналитичны в области R^- . Тогда при достаточно малых $|\varepsilon|$ уравнение

$$\det\left[I_n - \zeta\,e^{A\,T} - \varepsilon\,G(\zeta)\right] = 0 \tag{4}$$

имеет в области R^- столько же корней, сколько и ПХУ (3). Это свойство связано с замкнутостью области R^- и вытекает из теории Руше [1].

СХУ (2) аналогичным свойством робастности не обладает, поскольку множество S^+ не ограничено.

1.4. В настоящей статье изучается линейное векторное дифференциально-разностное уравнение

$$\frac{dy(t)}{dt} = A\,y(t) + \nu\,B\,y(t-\tau), \tag{5}$$

где: $y(t)$ - вектор $n \times n$; A, B - постоянные матрицы размера $n \times n$; $\tau > 0$ - величина чистого запаздывания; ν - скалярный параметр, который вводится для удобства вычислений. Для уравнения (5) известно СХУ

$$\Delta^\tau(s) = \det\left[s\,I_n - A - \nu\,B\,e^{-s\tau}\right] = 0. \tag{6}$$

При этом для асимптотической устойчивости уравнения (5) необходимо и достаточно отсутствие у СХУ (6) корней в области S^+. Переодизированное характеристическое уравнение для общего случая системы (5), по-видимому, не известно. Для частного случая одноконтурной системы соответствующее ПХУ построено в [2] с использованием аппарата интегральных уравнений Фредгольма II рода.

В настоящей статье приведено общее выражение для ПХУ системы (5), не связанное с применением аппарата уравнений Фредгольма. Кроме того, в статье показано, что построенное ПХУ обладает свойством робастности, и на этой основе строятся достаточные условия асимптотической устойчивости, в некотором смысле, сколь угодно близкие к необходимым.

2 Основной результат

2.1. Т е о р е м а 1. *Для асимптотической устойчивости уравнения (5) необходимо и достаточно, чтобы периодизированное характеристическое уравнение*

$$d^\tau(\zeta) = \det\left[I_n - \zeta\,e^{(A+\zeta\nu B)\tau}\right] = 0 \tag{7}$$

не имело корней, принадлежащих замкнутому единичному кругу $R^-: |\zeta| \leq 1$. В уравнении (7) использовано обозначение

$$e^{(A+\zeta\nu B)\tau} = I_n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(A+\zeta\nu B)^m \tau^m}{m!}. \tag{8}$$

2.2. Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказывать теорему будем в несколько этапов.

2.2.1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy(t)}{dt} = A(t)\,y(t), \tag{9}$$

где: $A(t) = A(t+T)$ - непрерывная периодическая матрица размера $n \times n$.

Пусть $H(t)$ - фундаментальная матрица уравнения (9), удовлетворяющая условиям

$$\frac{dH(t)}{dt} = A(t)\,H(t), \quad H(0) = I_n. \tag{10}$$

Как известно [3], матрица $H(t)$ может быть представлена с помощью ряда

$$H(t) = I_n + \int\limits_0^t A(t_1)dt_1 + \int\limits_0^t A(t_1)\Bigg[\int\limits_0^{t_1} A(t_2)dt_2\Bigg]dt_1 + \dots\,, \tag{11}$$

который сходится абсолютно (по норме) при каждом t и абсолютно на любом отрезке $[0, t]$. Данный ряд называют матрицантом. Матрицу

$$M = H(t) \tag{12}$$

называют при этом матрицей монодромии уравнения (9). Из (11) следует, что

$$M = I_n + \int\limits_0^T A(t_1)dt_1 + \int\limits_0^T A(t_1)\Bigg[\int\limits_0^{t_1} A(t_2)dt_2\Bigg]dt_1 + \dots\,. \tag{13}$$

В том случае, когда матрица $A(t)$ - постоянная, из (13) имеем

$$M = I_n + \frac{A\,T}{1!} + \frac{A^2\,T^2}{2!} + \dots = e^{A\,T} \tag{14}$$

2.2.2. Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\frac{dy(t)}{dt} = A\,y(t) + \nu\,B(t)\,y(t), \tag{15}$$

где: $B(t) = B(t + \tau)$ - непрерывная периодическая матрица; ν - скалярный параметр.

Введем обозначение

$$A_\nu(t) = A + \nu\,B(t) = A_\nu(t + T). \tag{16}$$

Матрица монодромии $M(\nu)$ уравнения (15), с учетом обозначения (16), будет иметь вид

$$M(\nu) = I_n + \int\limits_0^T A_\nu(t_1)dt_1 + \int\limits_0^T A_\nu(t_1)\Bigg[\int\limits_0^{t_1} A_\nu(t_2)dt_2\Bigg]dt_1 + \dots\,. \tag{17}$$

2.2.3. Рассмотрим наряду с (15) дифференциально-разностное уравнение

$$\frac{dy(t)}{dt} = A(t) + \nu\,B(t)\,y(t - T). \tag{18}$$

Как известно [4], уравнение (18) имеет множество решений вида

$$y(t) = e^{s\,t}\,y_T(t), \quad y_T(t) = y_T(t + T), \tag{19}$$

где: s - число, в общем случае комплексное.

Далее решения вида (19) будем называть решениями Флоке, а соответствующие числа s - показателями системы (18). Как известно [4], для асимптотической устойчивости системы (18), необходимо и достаточно, чтобы среди ее показателей не было чисел, принадлежащих области S^+ . Пусть s_0 - показатель системы (18), тогда число

$\zeta_0 = e^{-s_0 T}$ будем называть ее обратным мультипликатором. Тогда для асимптотической устойчивости уравнения (18) необходимо и достаточно, чтобы среди ее обратных мультипликаторов не было чисел, принадлежащих области R^-. В [5] показано, что множество обратных мультипликаторов системы (18) при фиксированном ν совпадает с множеством корней уравнения

$$\det\Big[I_n - \zeta\, M(\nu\,\zeta)\Big] = 0, \tag{20}$$

где

$$M(\nu\,\zeta) = M(\nu)\,|_{\nu\to\nu\,\zeta} \tag{21}$$

- матрица, полученная из (17) путем замены ν на $\nu\,\zeta$. Такая подстановка является законной, так как матрица $M(\nu)$ - целая функция аргумента ν.

2.2.4. Рассмотрим наряду с уравнением (5) дифференциально-разностное уравнение

$$\frac{dy(t)}{dt} = A\,y(t) + \nu[B + \varepsilon\, B_1(t)]\,y(t-\tau), \tag{22}$$

где: ε - дополнительный параметр; $B_1(t) = B_1(t-\tau)$ - матрица, непрерывная относительно t и периодическая с периодом τ.

В соответствии с пунктом 3 доказательства множество обратных мультипликаторов уравнения (22) совпадает с множеством корней уравнения

$$d^\tau(\zeta,\varepsilon) = \det\Big[I_n - \zeta\, M(\nu\,\zeta,\varepsilon)\Big] = 0, \tag{23}$$

где

$$M(\nu\,\zeta,\varepsilon) = \left[I_n + \int\limits_0^\tau A_\nu(t_1,\varepsilon)dt_1 + \int\limits_0^\tau A_\nu(t_1,\varepsilon)\left[\int\limits_0^{t_1} A_\nu(t_2,\varepsilon)dt_2\right]dt_1 + \ldots\;\right]|_{\nu\to\nu\,\zeta} \tag{24}$$

и

$$A_\nu(t,\varepsilon) = A + \nu\,B + \nu\,\varepsilon\,B_1(t). \tag{25}$$

Правая часть ряда (24) является целой функцией параметра ε . Поэтому уравнение (23) определяет множество обратных мультипликаторов уравнения (22) при всех ε и, в частности, при $\varepsilon = 0$. Но при $\varepsilon = 0$ уравнение (22) переходит в уравнение (5). Поэтому можно утверждать, что если $s_1, s_2, \ldots$ - последовательность корней СХУ (6), то множество чисел $\zeta_1 = e^{-s_1\tau}, \zeta_2 = e^{-s_2\tau}, \ldots$ будет совпадать с множеством корней уравнения

$$d^\tau(\zeta) = \det\Big[I_n - \zeta\, H(\nu\,\zeta, 0)\Big] = 0. \tag{26}$$

Но при $\varepsilon = 0$ из (24) следует, что

$$\begin{aligned} M(\nu\,\zeta,0) &= \left[I_n + \int\limits_0^\tau (A+\nu\,B)dt_1 + \int\limits_0^\tau (A+\nu\,B)\left[\int\limits_0^{t_1}(A+\nu\,B)dt_2\right]dt_1 + \ldots\;\right] = \\ &= I_n + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(A+\nu\,B)^m\,\tau^m}{m!} = e^{(A+\nu\,B)\,\tau}\,|_{\nu\to\nu\,\zeta} = e^{(A+\zeta\,\nu\,B)\,\tau}. \end{aligned} \tag{27}$$

Отсюда следует, что уравнение (26) совпадает с уравнением (7).

2.2.5. Корни $s_1, s_2, \ldots$ уравнения (6) являются показателями системы (5). Из предыдущих пунктов следует, что числа $e^{-s_1\tau}, e^{-s_2\tau}, \ldots$ являются обратными мультипликаторами системы (5), рассматриваемой в качестве периодической системы с периодом τ. Поскольку условием асимптотической устойчивости системы (5) является условие

$$\Re s_i < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{28}$$

то это равносильно требованию

$$|\zeta_i| > 1, \quad i = 1, 2, \ldots . \qquad \otimes \tag{29}$$

Здесь и далее символ $\otimes$ обозначает окончание доказательства.

3 Вычисление характеристической функции

Функцию

$$d^\tau(\zeta) = \det\left[I_n - \zeta\, e^{(A+\zeta\,\nu\,B)\,\tau}\right] \tag{30}$$

будем называть периодизированной характеристической функцией системы (5).

Для проведения практических вычислений целесообразно преобразовать представление (8) к более удобному виду. Отметим, что из (8) следует

$$\frac{d}{dt}\, e^{(A+\nu\,B)\,t} = (A + \nu\,B)\, e^{(A+\nu\,B)\,t}, \tag{31}$$

причем

$$e^{(A+\nu\,B)\,t}\,|_{t=0} = I_n. \tag{32}$$

Правая часть уравнения (31) является аналитической функцией аргумента ν. Поэтому матрица $e^{(A+\nu\,B)\,t}$ может быть представлена сходящимся рядом

$$e^{(A+\nu\,B)\,t} = U_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \nu^i\, U_i(t). \tag{33}$$

Отсюда, при $\nu = 0$, имеем

$$U_0(t) = e^{A\,t}. \tag{34}$$

Для вычисления матриц $U_i(t)$ при $i > 0$ обозначим $e^{(A+\nu\,B)\,t} = x(t,\nu)$ Тогда уравнение (31) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\, x(t,\nu) = A\, x(t,\nu) + f_\nu(t), \quad f_\nu(t) = \nu\, B\, x(t,\nu). \tag{35}$$

Интегрируя уравнение (35) при начальном условии $x(0,\nu) = I_n$ находим

$$x(t,\nu) = \int\limits_0^t e^{A\,(t-u)} f_\nu(u) du + e^{A\,t}, \tag{36}$$

или, что равносильно,

$$x(t,\nu) = \nu \int\limits_0^t e^{A\,(t-u)} B\, x(u,\nu) du + e^{A\,t}. \tag{37}$$

Соотношение (37) можно рассматривать как интегральное уравнение Вольтерра относительно вектора $x(t,\nu)$. Из свойств уравнений Вольтерра [6] следует справедливость представления (33). Подставляя разложение (33) в левую и правую часть (37) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ν в левой и правой частях, находим, что при $i>0$

$$U_i(t) = \int\limits_0^t e^{A\,(t-u)} B\, U_{i-1}(u)du. \tag{38}$$

Дифференцируя это соотношение по t, получим также

$$\frac{d}{dt}U_i(t) = A\,U_i(t) + B\,U_{i-1}(t), \qquad U_i(0) = O_{nn}. \tag{39}$$

где O_{nn} - нулевая матрица размера $n \times n$.

Эти соотношения могут быть использованы для практического вычисления матрицы $U_i(t)$ при $i>0$.

4 Исследование устойчивости

4.1. С учетом разложения (33), ПХУ (7) можно представить в виде

$$d^\tau(\zeta) = \det\left[I_n - \zeta\, e^{A\,\tau} - \nu\,\zeta^2 \sum_{i=1}^{\infty} \nu^{i-1}\,\zeta^{i-1}\,U_i(\tau)\right] = 0. \tag{40}$$

Далее ПХУ (40) будем называть точным. Разворачивая определитель, из (40) получим точное ПХУ в виде

$$d^\tau(\zeta) = \det\left[I_n - \zeta\, e^{A\,\tau}\right] + \nu\,\zeta^2 \sum_{i=0}^{\infty} \nu^i\,\zeta^i\,d_i(\nu) = 0, \tag{41}$$

где $d_i(\nu)$ - полином относительно ν.

Непосредственное использование уравнения (41) является затруднительным. Поэтому при решении прикладных задач естественно ограничиться в (41) конечной суммой, что приводит к приближенному ПХУ вида

$$d_N^\tau(\zeta) = \det\left[I_n - \zeta\, e^{A\,\tau}\right] + \nu\,\zeta^2 \sum_{i=0}^{N} \nu^i\,\zeta^i\,d_i(\nu) = 0. \tag{42}$$

Целью данного раздела является обоснование подхода, использованного в (42).

4.2. **Т е о р е м а 2.** *Пусть, при фиксированном ν, СХУ (6) не имеет корней, лежащих на мнимой оси. Тогда существует $N_0 \ge 0$ такое, что при $N > N_0$ приближенное ПХУ не имеет корней на единичной окружности и имеет внутри данной окружности столько же корней, сколько имеет точное ПХУ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом сделанных предположений имеем

$$d_{\min} = \min_{|\zeta|=1} |d^\tau(\zeta)| > 0. \tag{43}$$

Введем обозначение

$$\bar{\Delta}^{\tau}_{N+1}(\zeta) = d^{\tau}(\zeta) - d^{\tau}_{N}(\zeta). \tag{44}$$

Поскольку ряд в правой части (41) сходится на окружности $|\zeta| = 1$ абсолютно и равномерно, то существует число $N_0 \geq 0$ такое, что при $N > N_0$ имеем

$$\max_{|\zeta|=1} |\bar{\Delta}^{\tau}_{N+1}(\zeta)| < \frac{d_{\min}}{2}. \tag{45}$$

Поэтому на окружности $|\zeta| = 1$ при $N > N_0$ имеем

$$\min_{|\zeta|=1} |d^{\tau}_{N}(\zeta)| = \min_{|\zeta|=1} |d^{\tau}(\zeta) - \bar{\Delta}^{\tau}_{N+1}(\zeta)| \geq \min_{|\zeta|=1} |d^{\tau}(\zeta)| - \max_{|\zeta|=1} |\bar{\Delta}^{\tau}_{N+1}(\zeta)| > \frac{d_{\min}}{2}. \tag{46}$$

Отсюда видно, что полином $d^{\tau}_{N}(\zeta)$ не имеет корней на единичной окружности. Кроме того, при $N > N_0$ имеем

$$\min_{|\zeta|=1} |d^{\tau}_{N}(\zeta)| > \max_{|\zeta|=1} |\bar{\Delta}^{\tau}_{N+1}(\zeta)|. \tag{47}$$

Отсюда в силу теоремы Руше следует, что функции $d^{\tau}_{N}(\zeta)$ и $d^{\tau}(\zeta) = d^{\tau}_{N}(\zeta) + \bar{\Delta}^{\tau}_{N+1}(\zeta)$ имеют внутри окружности $|\zeta| = 1$ одинаковое число корней. $\otimes$

4.3. С л е д с т в и е. *Пусть при фиксированных N и ν справедлива оценка (47). Тогда точное ПХУ не имеет корней на окружности $|\zeta| = 1$ и имеет внутри этой окружности столько же корней, сколько имеет полином $d^{\tau}_{N}(\zeta)$. Если точное ПХУ не имеет корней на окружности $\zeta = 1$, то существует такое N_1, что при $N > N_1$ выполнена оценка (47).*

Сформулированные утверждения дают возможность построить достаточные условия асимптотической устойчивости, которые при $N \to \infty$ сколь угодно близки к необходимым.

5 Пример

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение первого порядка

$$\frac{dy(t)}{dt} = a\, y(t) + b\, y\,(t - \tau). \tag{48}$$

В этом случае точное ПХУ будет иметь вид

$$1 - \zeta\, e^{a\tau}\, e^{\zeta\,\nu\, b\,\tau} = 1 - \zeta\, e^{a\tau} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\zeta\,\nu\, b\,\tau)^i}{i\,!} \right) = 0. \tag{49}$$

Применим к ПХУ (49) следствие к теореме 2 при $N = 0$ и $a \neq 0$. В таком случае имеем

$$\begin{aligned} d^{\tau}_{0}(\zeta) &= 1 - \zeta\, e^{a\tau}, && (50)\\ \bar{\Delta}^{\tau}_{1}(\zeta) &= \zeta\, e^{a\,\tau} \Big(e^{\zeta\,\nu\, b\,\tau} - 1 \Big). && (51) \end{aligned}$$

Поскольку, при $\zeta = 1$, имеем $z = e^{j\,\varphi} = \cos\varphi + j\,\sin\varphi$, то непосредственное вычисление дает

$$\min_{|\zeta|=1} |d_0^\tau(\zeta)| = \Big(e^{a\tau} - 1\Big)\,\mathrm{sign}\,a > 0. \tag{52}$$

Для дальнейших вычислений отметим, что при $|\zeta| = 1$ имеем, выделяя вещественную и мнимую часть в (51),

$$\begin{aligned} \Re\bar{\Delta}_1^\tau(\zeta) &= e^{a\tau}\Big(e^{\nu\,b\,\tau\,\cos\varphi}\cos\left(\varphi + \nu\,b\,\tau\,\sin\varphi\right) - \cos\varphi\Big); \\ \Im\bar{\Delta}_1^\tau(\zeta) &= e^{a\tau}\Big(e^{\nu\,b\,\tau\,\cos\varphi}\sin\left(\varphi + \nu\,b\,\tau\,\sin\varphi\right) - \sin\varphi\Big). \end{aligned} \tag{53}$$

Применяя формулу конечных приращений [7], отсюда можно получить

$$\begin{aligned} &\max_{|\zeta|=1} |\Re\bar{\Delta}_1^\tau(\zeta)| < e^{(a+|\nu|\,|b|)\,\tau}\,|\nu|\,|b|\,\tau \\ &\max_{|\zeta|=1} |\Im\bar{\Delta}_1^\tau(\zeta)| < e^{(a+|\nu|\,|b|)\,\tau}\,|\nu|\,|b|\,\tau. \end{aligned} \tag{54}$$

Поэтому

$$\max_{|\zeta|=1} |\bar{\Delta}_1^\tau(\zeta)| < \sqrt{2}\,e^{(a+|\nu|\,|b|)\,\tau}\,|\nu|\,|b|\,\tau. \tag{55}$$

В итоге получаем следующий результат: пусть выполнено неравенство

$$\Big(e^{a\tau} - 1\Big)\,\mathrm{sign}\,a < |\nu|\,\sqrt{2}\,e^{(|\nu|\,|b|)\,\tau}\,|b|\,\tau. \tag{56}$$

Тогда, при $a < 0$, точное ПХУ (49) не имеет корней на окружности $\zeta = 1$ и внутри нее. Это означает, что уравнение (48) асимптотически устойчиво. При $a > 0$ точное ПХУ не имеет корней на окружности $\zeta = 1$ и имеет один корень внутри нее. Это означает, что уравнение (48) неустойчиво.

Отметим в заключение, что увеличение числа N приводит к усилению полученных результатов.

Список литературы

[1] Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: ОГИЗ Гостехиздат, 1948.

[2] Lampe B.P., Rosenwasser E.N. Periodised characteristic equation and stability analysis of linear systems with delay. // Romania, 2009.

[3] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

[4] Stokes A. A Floquet theory for functional differential equations. // Journal of National academy of science USA. 1962. №8 (48). P. 1330-1334.

[5] Зверкин А.И. Дифференциально-разностные уравнения с периодическими коэффициентами. // Беллини Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

[6] Привалов И.И. Интегральные уравнения. М.: ОНТИ НКТП СССР, 1937.

[7] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: ОГИЗ Гостехиздат, 1948.