Решение стационарных и нестационарных задач протекания в каналах при заданном перепаде давления

Х.Милошевич
Prirodno-matematicki fakultet, Kosovska Mitrovica, Сербия
e-mail: mhrane@gmail.com

Ю.И.Шокин
ИВТ СО РАН, Россия
e-mail: dir@ict.nsc.ru

Ю.Н.Захаров, Н.А.Гейдаров, Е.А.Гуммель
Кемеровский государственный университет
e-mail: zyn@kemsu.ru e-mail: naznaz@mail.ru

Рассматриваются стационарные и нестационарные задачи о движении однородной вязкой несжимаемой жидкости в каналах при задании перехода давления на границах входа-выхода.

Введение

Практически важными являются задачи о движении воздуха в системах вентиляции в зданиях, подземных сооружениях (шахтах, метро) и т.п. Эти задачи, в силу малости скоростей движения среды и фактической её несжимаемости, можно моделировать движением вязкой однородной несжимаемой жидкостью, когда источником движения является перепад давления на концах разветвлённого канала. Детальный анализ таких течений важен, например, при оценке загазованности отдельных участков угольных шахт. Поэтому целью настоящей работы является построение метода решения стационарной и нестационарных задач о движении в канале однородной вязкой несжимаемой жидкости при задании давления на входе и выходе канала и исследование устойчивости получаемых решений.

В задачах о течении в каналах однородной вязкой несжимаемой жидкости (система уравнений Навье - Стокса) обычно рассматриваются две постановки задачи.

Одна из них является наиболее популярной и заключается в задании на твердых стенках условия прилипания, а на участках втекания и вытекания жидкости векторов скорости. Этому посвящено достаточно большое число работ (см., например, обзор в [1, 2]).

Вторая постановка заключается в задании на участках втекания - вытекания давления, а не скоростей. То есть движение жидкости в области протекания осуществляется за счет разности давлений.

Таким образом, эти задачи приходится решать в формулировке "скорость - давление а не в формулировке "вихрь - функция тока". В работе [4] показано, что для существования и единственности решения нестационарной задачи, кроме задания давления на участках втекания - вытекания, необходимо задать только одну из компонент скорости так, чтобы вектор скорости на границе втекания - вытекания был ей перпендикулярен. Однако, в этом случае отсутствие значения второй компоненты вектора скорости не позволяет без дополнительных условий на нее построить процесс численного решения таких задач. Обычно численно решаются задачи протекания в каналах с параллельными осям координат прямыми границами и прямыми углами (см. [5, 6]). В этом случае на входе и выходе задаются "естественные"краевые условия на скорости вида $v = 0, \frac{\partial u}{\partial x} = 0 (u = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 0)$, которые позволяют построить алгоритмически замкнутый численный метод решения. В этом случае условие на производную для одной из компонент вектора решения является прямым следствием условия $v = 0 (u = 0)$. Однако такое "простое"определение скоростей на границе не всегда возможно. Дело в том, что эти краевые условия на вторую компоненту являются, вообще говоря, "лишними и, для того чтобы краевая задача с ними имела решение, необходимо, чтобы они были естественным образом согласованы с решением задачи, сформулированной без таких дополнительных условий. Таким образом, задание давления на границах канала не определяет направление вектора скорости на этих границах [7]. Это обстоятельство может служить появлению таких градиентов давления, малое изменение которых может послужить существенному перестроению решения.

1. Постановка задачи

Рассмотрим двумерную задачу о протекании вязкой однородной несжимаемой жидкости в канале с заданным перепадом давления на входе и выходе

$$\begin{array}{l} \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u} \nabla \overline{u} + \nabla P = \nu \Delta \overline{u} \\ div \overline{u} = 0 \end{array} \tag{1}$$

$$P_{AB} = p_1(y), P_{CD} = p_2(y), \overline{u}_{BC} = 0, \overline{u}_{AD} = 0, \tag{2}$$

$$|(\overline{u}, \overline{n})| = |\overline{u}| \text{ на границе AB}, |(\overline{u}, \overline{n})| = |\overline{u}| \text{ на границе CD}, \tag{3}$$

где $\overline{u} = (u, v)$ - вектор скорости, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $p = p(x, y)$ - давление, $v > 0$ - коэффициент кинематической вязкости, Ω - область решения (см. рис.1).

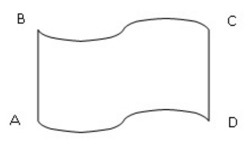

Рис. 1. Область течения

Равенства (1)-(3) означают, что вектор скорости $\overline{u}$ перпендикулярен границам AB и CD. Подобное условие используется в работе [8] как достаточное условие существования глобального решения стационарной задачи о течении вязкой жидкости в канале с заданным вектором скорости на границе.

Отметим, что на входных и выходных границах канала не поставлены условия на горизонтальную компоненту вектора скорости, что является одной из основных трудностей при решении рассматриваемой задачи.

Далее мы рассмотрим решение стационарной и нестационарной задачи протекания на примере течения в развлетвлённом канале.

2. Стационарная задача

Для численного решения стационарной системы уравнений

$$\overline{u}\nabla\overline{u} + \nabla p = \nu\Delta\overline{u}, div\overline{u} = 0 \tag{4}$$

с краевым условием $(2),(3)$ построим в области Ω разнесённую прямоугольную и в общем случае неравномерную сетку Ω_h , согласованную с границей $\Gamma = AB \cup BC \cup CD \cup AD$. На Ω_h методом контрольного объёма аппроксимируем (1) разностной схемой 2 - го порядка.

Вместе с аппроксимацией краевых условий $(2)-(3)$ мы получим разностную задачу относительно вектора $\overline{u} = (u_{ij}, v_{ij}, p_{ij}), (i,j) \in J_1$. Введем также множество индексов J_1, которые соответствуют тем граничным узлам, где нет краевых условий на компоненты u_{ij} и p_{ij} вектора решения.

Количество уравнений полученной системы меньше количества неизвестных в силу того, что, во-первых, отсутствуют условия на горизонтальную компоненту вектора скорости на границах протекания (на вертикальную компоненту скорости поставлено условие (3), означающее $v = 0$ на границах AB и CD), во-вторых, нет условий на давление на части границ области.

В таком случае для вычисления u_{ij} на множестве узлов J_2 мы будем определять из первого уравнения системы (1), считая его там выполненным, путем аппроксимации его внутрь области решения, заменяя производные односторонними разностями первого или второго порядка аппроксимации. На твердых стенках BC и AD отсутствуют краевые условия на давление. Считая, что уравнение неразрывности, третье уравнение системы (1), выполнено и на этих границах области, также аппроксимируем его внутрь области решения. В итоге эти аппроксимации будут замыкать разностную схему, и в этом случае количество уравнений системы будет равно числу неизвестных.

Т.о. такую разностную задачу можно записать в виде системы билинейных уравнений размерности m

$$A(\overline{u})\overline{u} = f, \tag{5}$$

где

$$A(\overline{u})\overline{v} = A_1(\overline{u})\overline{v} + A_2\overline{v}.$$

$A_1\overline{u}$ - матрица, полученная в результате аппроксимации нелинейной части исходной дифференциальной задачи.A_2 - числовая матрица, аппроксимирующая линейную часть этой системы, f - известная правая часть, получаемая из краевых условий. Очевидно, элементы матрицы A_1 линейно зависят от компонент вектора $\overline{u} = (u_1, ..., u_m)^T$.

Полученная система (4) решалась методом $(6),(7)$ неполной аппроксимации минимальных невязок [9]

$$u^{n+1/2} = u^n - \tau_{n+1}[A(u^n)u^n - f] \tag{6}$$

$$u^{n+1} = u^{n+1/2} + \alpha_{n+1}z^n, n = 0, 1, 2\ldots \tag{7}$$

где $z^n = (z_1, ..., z_m)^T$ - некоторый ненулевой вектор, u^0 - произвольное начальное приближение из области определения оператора A, τ_{n+1}, либо числовой итерационный параметр, либо квадратная диагональная матрица,α_{n+1} - диагональная матрица итерационных параметров. В [10] показано, что если элементы матрицы α_{n+1} выбирать из условия минимума последовательности невязок, то норма невязки $\|r^n\| = \|A(u^n)u^n - f\|$ монотонно убывает и при некоторых ограничениях на оператор $A(u)$ стремится к нулю. Это обстоятельство позволяет находить хотя бы одно из решений разностной задачи. Подробнее о методе и способах выбора α_{n+1} см. [10].

Для проверки работоспособности предлагаемого метола решения стационарного уравнения Навье - Стокса была рассмотрена задача о течении в разветвляющемся канале (рис. 2).

На границах $\Gamma_1 - \Gamma_6$ заданы постоянные функции давления $p_1 - p_6$ соответственно, а также условия о нулевой касательной составляющей вектора скорости (вектор скорости перпендикулярен $\Gamma_1 - \Gamma_6$).

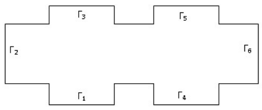

Рис. 2. Разветвляющийся канал

Итерационный процесс (6) - (7) останавливался, при выполнении условия $\frac{\|r^n\|}{\|r^0\|} \leq 10^{-4}$, где r^0 - начальная невязка,r^n - невязка на итерационном шаге n. Начальное приближение выбиралось нулевым ($u^0 \equiv 0$).

Расчеты показали, что итерационный процесс (6) - (7) сходится для всех используемых значений h, v. Отметим, что закон сохранения массы в каждом расчете выполняется с точностью порядка 0.01%.

На рис. 3 приведена картина течения при следующих значениях давления: $p_1 = p_3 = p_5 = p_6 = 0.1$, $p_2 = 0$, а $p_4 = 0.095$.

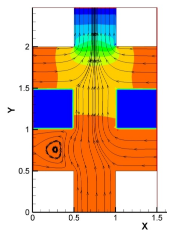

Рис. 3. Течение в развлетвляющемся канале. $p_1 = p_3 = p_5 = p_6 = 0.1, p_2 = 0, Re = 80$

Как видно из рисунка в левом нижнем ответвлении жидкость втекаемой и вытекаемой из области решения и поэтому поставить какое - либо условие на вектор скорости на границе Γ_4 крайне затруднительно.

Правильность результатов, полученных при решении стационарной задачи можно проверить, решая соответствующую нестационарную задачу (1).

3. Нестационарная задача

Главной проблемой при решении данной задачи является то, что на входе и выходе из канала поставлено граничное условие на давление, а не на скорость. Так как для решения уравнений движения с помощью неявной схемы необходимо задать скорость на входе и выходе. Для реализации схемы продельно - поперечной прогонки мы использовали следующий алгоритм. Мы считаем, что так как на входах и выходах канала не задаётся значение одной из компонент , то там справедливо соответствующее уравнение движения системы (1). Затем аппроксимируем это уравнение внутрь области решения. В нашем слачае мы это делаем с первым порядком по трём точкам, включая граничную.

В итоге матрица коэффициентов системы для прогонки в обоих направлениях будет иметь следующую структуру. То есть, кроме трёх диагоналей, в первой и последней строке матрицы есть по одному ненулевому элементу. Исключая в первой и последней строке по одному элементу мы получим трёхдиагональную систему, которая решается обычной прогонкой. На рис. 4 приведены картины течения в развлетвлённом канале для различных моментов времени следует отметить, что рис. 5b характеризует стационарное решение качественно и количественно соответствующее решение

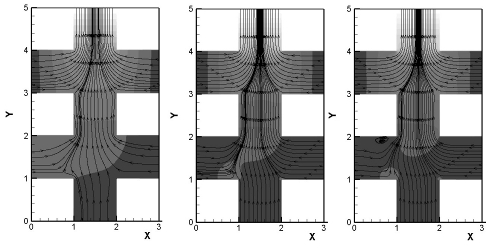

Рис. 4. *a*) $t_1 = 0.06$; *b*) $t_2 = 7.98$; *c*) $t_3 = 12$

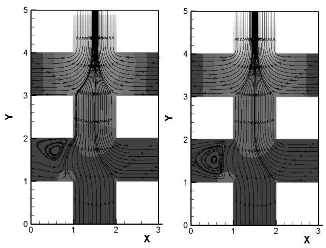

Рис. 5. *a*) $t_4 = 15.96$; *b*) $t_5 = 19.74$

Список литературы

1. Роуч. П. *Вычислительная гидродинамика*, М.: Мир, 1980. 612 с.

2. Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А. *Численное моделирование процессов тепло - и массообмена*, М.: Наука, 1984. 288 с.

3. Мошкин Н. П. *Метод численного решения задачи протекания в переменных "функция тока, вихрь"*// Численные методы механики сплошной среды: сб. научн. тр. / Новосибирс. 1984. Т. 15, № 3. с. 98 - 114.

4. Рагулин В. В. *К задаче о протекании вязкой жидкости сквозь ограниченную область при заданном перепаде давления или напора*// Динамика сплошной среды: сб. научн. тр. / Новосибирск. 1976. Вып 27. с. 78 - 92.

5. Кузнецов Б.Г., Мошкин Н.П., Смагулов Ш. *Численное исследование течения вязкой несжимаемой жидкости в каналах при заданных перепадах давлений* // Численные методы динамики вязкой жидкости: Сб. ИТПМ СО АН СССР. / Новосибирск. 1983. С. 203-207.

6. Moshkin N., Yambangwi D.*Steady viscous incompressible flow driven by a pressure difference in a planar T-junction channel* // Intern. J. of Comput. Fluid Dyn. 2009. Vol. 23, N 3. P 259-270.

7. Гейдаров Н.А., Захаров Ю.Н., Шокин Ю.И.*Решение стационарной задачи о течении вязкой жидкости в канале, вызванном заданным перепадом давлений, при наличии внутренних источников* // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15, № 5. С. 14-23.

8. Leray J. *Etude de diverses equations integrals non lineaires et de quelques problemes que pose l'hydrodynamique* // J. Math. Pures Appl. 1933. seris 9, 12. P. 1-82.

9. Захаров Ю.Н., Егорова Е., Толстых М.А., Шокин Ю.И. *Метод минимальных невязок решения одного класса нелинейных уравнений* / Красноярск, 1991 (Препр. ВД СО АН СССР №9 -91).

10. Захаров Ю. Н. *Градиентные итерационные методы решения задач гидродинамики*/ Новосибирск: Наука, 2004. 239 с.

11. Патанкар С. *Численные методы решения задач тепломеханики и динамики жидкости*, М.: Энергоатомиздат, 1984. 149 с.