...

Об особенностях распространения МГД волн в экваториальной широтной области

Сергей Иванович Перегудин
Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: `peregudinsi@yandex.ru`

Светлана Евгеньевна Холодова
Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики
e-mail: `kholodovase@yandex.ru`

...

Проводится исследование пространственной модели, описывающей динамику идеальной электропроводящей неоднородной вращающейся жидкости с учетом экваториальной особенности. Предлагаемая математическая модель исследуемого физического процесса представляет собой замкнутую систему уравнений в частных производных, состоящую из уравнений гидродинамики с учетом вращения Земли, силы Лоренца и соответствующих уравнений магнитной динамики с необходимыми граничными условиями. Построено аналитическое решение системы уравнений в приближении экваториальной β–плоскости, описывающее распространение волн малой амплитуды.

Целью исследования является редукция нелинейной системы уравнений в частных производных, моделирующей возмущения в идеальной электропроводной вращающейся жидкости, с учетом инерционных сил, сил тяжести, Кориолиса, Лоренца, а также неоднородностей плотности, для особого случая геометрии рассматриваемого объема, который учитывает особенности экваториальной зоны сферического слоя.

Представленные исследования могут быть использованы в астрофизике и геофизике, в частности, при изучении процессов, происходящих в жидком ядре Земли и недрах звезд. Представленные исследования являются логическим продолжением исследований, опубликованных в работах [1]–[6].

Колебания идеальной электропроводной несжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости описываются следующей системой уравнений [7]–[9]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} - g\mathbf{z} + \frac{1}{\mu\rho}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{b}\times\mathbf{b}, \tag{1}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0, \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{b} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = (\mathbf{b}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{b} - \mathbf{b}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}, \tag{2}$$

где $\mathbf{b}$ — вектор магнитной индукции, $\mathbf{v}$ — скорость жидкости в системе координат, вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, p — давление, ρ — плотность, g — величина ускорения силы тяжести. Предполагается, кроме того, что магнитная проницаемость μ постоянна.

Вблизи экватора нормальная компонента угловой скорости вращения Земли представляет собой малую величину и обращается в нуль на экваторе, и, как следствие, геострофическое приближение [6] перестает быть справедливым. Отсюда следует, что для описания природы экваториальной динамики необходим детальный анализ исходных магнитогидродинамических уравнений с учетом особенностей экваториальной области.

Итак, рассмотрим уравнения динамики волн в широтном поясе около экватора. Пусть масштаб движения в направлении север–юг достаточно мал, так что геометрия движения допускает использование локальной декартовой системы координат, причем сферичность Земли учитывается лишь в изменении параметра Кориолиса с широтой, который может быть записан как

$$f = \beta_0 y_*, \tag{3}$$

где y_* — размерное расстояние к северу от экватора, $\beta_0 = -\dfrac{2\omega}{r_0}$, r_0 — радиус жидкого сферического слоя. Действительно, используя разложение в ряд в окрестности широты $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$ и соотношение $y_* = (\theta - \theta_0)\, r_0$, получим

$$f = 2\omega\cos\theta = -\frac{2\omega\sin\theta_0}{r_0} y_* = -\frac{2\omega}{r_0} y_* = \beta_0 y_*.$$

С помощью характерных масштабов введем в рассмотрение безразмерные переменные

$$x_* = Lx, \qquad y_* = Ly, \qquad z_* = Dz, \qquad t_* = Tt,$$

где в качестве масштаба времени T выбрано время адвекции. Для компонент скорости и магнитного поля имеем

$$\mathrm{v}_{x*} = Uv_x, \quad v_{y*} = Uv_y, \quad v_{z*} = \frac{D}{L}Uv_z, \quad b_{x*} = Bb_x, \quad b_{y*} = Bb_y, \quad b_{z*} = \frac{D}{L}Bb_z.$$

Здесь D — вертикальный масштаб движения, L — горизонтальный масштаб движения, U — масштаб горизонтальной скорости, B — масштаб горизонтальных компонент магнитного поля. При малых скоростях выбор масштабов поля плотности и давления проводится с учетом равенства порядков горизонтального градиента давления и величины силы Кориолиса и предположения равенства порядков величин сил плавучести и вертикального градиента давления. Это следует из удовлетворения с большой степенью точности крупномасштабных движений приближению гидростатики [4]. Итак, будем считать, что $p_s(z)$ и $\rho_s(z)$ определяют основное состояние, на которое накладываются возмущения, обусловленные движением. Поэтому давление p_* и плотность ρ_* представимы соотношениями

$$p_* = p_s(z) + \rho_s(z)\beta_0 L^2 U p(x,y,z,t), \qquad \rho_* = \rho_s(z)\left(1 + \frac{\beta_0 L^2 U}{gD}\rho(x,y,z,t)\right). \tag{4}$$

Параметры $\dfrac{U}{T}, \beta_0 LU, \dfrac{B^2}{\mu L\rho_s}$ имеют один порядок, откуда масштаб времени T для t_* определяется равенством

$$T = \frac{1}{\beta_0 L}. \tag{5}$$

При $U = 1$ см/сек, $r_0 = 3,5\cdot 10^8$ см, $2\omega \approx 1,4\cdot 20^{-4}$сек$^{-1}$, $D = 4\cdot 10^6$ см имеем оценку

$$\frac{\beta_0 L^2 U}{gD} = O\left(10^{-7}\right). \tag{6}$$

Оставляя в исходных уравнениях, представленных в безразмерных переменных, только линейные члены и учитывая соотношения (5), оценки (6) и представления

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'(x,y,z,t), \qquad \mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}'(x,y,z,t),$$

получим относительно возмущений уравнения в приближении экваториальной β–плоскости в виде

$$\rho_s\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}-yv_y\right)+\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{1}{\mu}\mathcal{D}b_x=0,\quad \rho_s\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+yv_y\right)+\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{1}{\mu}\mathcal{D}b_y=0,\quad \rho=-\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial\eta}{\partial z}, \tag{7}$$

$$\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_s v_z\right)+\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial b_x}{\partial x}+\frac{\partial b_y}{\partial y}+\frac{\partial b_z}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}=\mathcal{D}\mathbf{v}+\mathbf{b}_0\frac{\rho_s'}{\rho_s}v_z, \tag{8}$$

где $\eta=\rho_s p+\dfrac{1}{\mu}\left(b_{0x}b_x+b_{0y}b_y\right)$, $\mathcal{D}=\langle\mathbf{b}_0,\nabla\rangle$ — дифференциальный оператор, обозначения для возмущений скорости и индукции магнитного поля сохранены прежними.

Замыкаем систему (7)–(8) термодинамическим уравнением, линейный вариант которого в отсутствие диссипации принимает вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}-S(z)v_z=0, \tag{9}$$

где $S(z)=\dfrac{N^2D^2}{{\beta_0}^2L^4}$, N^2 — квадрат частоты Вяйсяля–Брента. Исключая функцию плотности, уравнения (7)–(9) можно представить в форме

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}-yv_y+\frac{\partial\widetilde{\eta}}{\partial x}-\frac{1}{\mu\rho_s}\mathcal{D}b_x=0,\qquad \frac{\partial v_y}{\partial t}+yv_x+\frac{\partial\widetilde{\eta}}{\partial y}-\frac{1}{\mu\rho_s}\mathcal{D}b_y=0,\qquad v_z=-\frac{1}{S(z)}\frac{\partial^2\widetilde{\eta}}{\partial t\partial z}, \tag{10}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=0,\qquad \operatorname{div}\mathbf{b}=0,\qquad \frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t}=\mathcal{D}\mathbf{v},\qquad \widetilde{\eta}=p+\frac{1}{\mu\rho_s}\left(b_{0x}b_x+b_{0y}b_y\right). \tag{11}$$

Определим функции $\widetilde{\widetilde{\eta}}(x,y,z,t)$ и $\widetilde{\mathbf{b}}(x,y,z,t)$ равенствами

$$\widetilde{\eta}(x,y,z,t)=-\left({\mathcal{D}_t}^2+y^2\right)^2\widetilde{\widetilde{\eta}}(x,y,z,t),\qquad \mathbf{b}(x,y,z,t)=\mu\rho_s\left({\mathcal{D}_t}^2+y^2\right)\widetilde{\mathbf{b}}(x,y,z,t), \tag{12}$$

где $\mathcal{D}_t=\dfrac{\partial}{\partial t}$, $\mathbf{b}=\left(b_x,b_y\right)$, $\widetilde{\mathbf{b}}=\left(\widetilde{b_x},\widetilde{b_y}\right)$. Заметим, что равенства (12) определяют функции $\widetilde{\widetilde{\eta}}$ и $\widetilde{\mathbf{b}}$ неоднозначно: если функция $\eta_0(x,y,z,t)$ удовлетворяет соотношению (12), то этому соотношению удовлетворяет и функция

$$\widetilde{\widetilde{\eta}}=\eta_0(x,y,z,t)+\left[\eta_1(x,y,z)+\eta_2(x,y,z)y\right]\cos yt+\left[\eta_3(x,y,z)+\eta_4(x,y,z)y\right]\sin yt, \tag{13}$$

где $\eta_j(x,y,z)$, $j=\overline{1,4}$ — произвольные функции; аналогично, второе равенство (12) определяет семейство функций $\widetilde{\mathbf{b}}$ вида

$$\widetilde{\mathbf{b}}=\mathbf{b}_0(x,y,z,t)+\mathbf{b}^{(1)}(x,y,z)\cos yt+\mathbf{b}^{(2)}(x,y,z)\sin yt, \tag{14}$$

где $\mathbf{b}^{(j)}$, $j=1,2$ — произвольные функции своих аргументов в рассматриваемой области.

Пусть $b_{0x}=b_{0y}=0$. Подставляя функции $\widetilde{\eta}$ и $\mathbf{b}$ из выражений (12) в первое и второе уравнения (10), получим в матричном виде соотношение

$$\begin{pmatrix}\mathcal{D}_t & -y\\ y & \mathcal{D}_t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_x\\ v_y\end{pmatrix}=\left(\mathcal{D}^2+y^2\right)^2\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\widetilde{\widetilde{\eta}}}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial\widetilde{\widetilde{\eta}}}{\partial y}\end{pmatrix}+4y\left({\mathcal{D}_t}^2+y^2\right)\begin{pmatrix}0\\ \widetilde{\widetilde{\eta}}\end{pmatrix}+\left(\mathcal{D}^2+y^2\right)\mathcal{D}\begin{pmatrix}\widetilde{b}_x\\ \widetilde{b}_y\end{pmatrix}. \tag{15}$$

Интегрирование соотношения (15) по t приводит к равенству

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_t & y \\ -y & \mathcal{D}_t \end{pmatrix} \left[\left(\mathcal{D}_t{}^2 + y^2\right) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\tilde{\tilde{\eta}}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\tilde{\tilde{\eta}}}{\partial y} \end{pmatrix} + 4y \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\tilde{\eta}} \end{pmatrix} + \mathcal{D} \begin{pmatrix} \tilde{b}_x \\ \tilde{b}_y \end{pmatrix} \right] + \tag{16}$$

$$+C_1(x,y,z) \begin{pmatrix} \cos yt \\ -\sin yt \end{pmatrix} + C_2(x,y,z) \begin{pmatrix} \sin yt \\ \cos yt \end{pmatrix}, \tag{17}$$

где $C_1(x,y,z)$ и $C_2(x,y,z)$ — произвольные функции. Подставляя функции $\tilde{\tilde{\eta}}$, $\tilde{b}_x$ и $\tilde{b}_y$ из представлений (13) и (14) в равенство (17), получим

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_t & y \\ -y & \mathcal{D}_t \end{pmatrix} \left[(\mathcal{D}^2 + y^2) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\eta_0}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\eta_0}{\partial y} \end{pmatrix} + 4y \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} + \mathcal{D} \begin{pmatrix} b_x{}^{(0)} \\ b_y{}^{(0)} \end{pmatrix} \right] +$$

$$+ \left[C_1(x,y,z) + 2y^2(\eta_1 + \eta_2 y) + y b_{0z} \left(\frac{\partial b_x{}^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial b_y{}^{(1)}}{\partial z} \right) \right] \begin{pmatrix} \cos yt \\ -\sin yt \end{pmatrix} +$$

$$+ \left[C_2(x,y,z) + 2y^2(\eta_3 + \eta_4 y) + y b_{0z} \left(\frac{\partial b_y{}^{(2)}}{\partial z} - \frac{\partial b_x{}^{(1)}}{\partial z} \right) \right] \begin{pmatrix} \sin yt \\ \cos yt \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Рассмотрим вектор $\mathbf{C}(x,y,z) = (C_2(x,y,z), -C_1(x,y,z), 0) \in \mathcal{H}_2(\Omega)$, $C_j(x,y,z) \in \mathcal{L}_2(\Omega)$, $j = 1,2$, где $\mathcal{H}_2(\Omega)$ — подпространство гильбертова пространства вещественных вектор-функций $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, определенных в ограниченной области $\Omega \in R^3$ с кусочно–гладкой границей и компонентами $v_k, k = \overline{1,3}$ из гильбертова пространства вещественных функций L_2:

$$\mathcal{H}_2(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathcal{L}_2 : \mathbf{v} = (v_1, v_2, 0)\},$$

т. е. $\mathcal{H}_2(\Omega)$ — совокупность всех векторов $\mathbf{v} \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ с нулевой третьей компонентой.

В дальнейшем используется следующая теорема [10] о представлении векторов подпространства $\mathcal{H}_2(\Omega)$.

Теорема. *Для любого вектора* $\mathbf{C}(x,y,z) \in \mathcal{H}_2(\Omega)$ *найдется пара функций* $\varphi(x,y,z)$, $\psi(x,y,z) \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ *такая, что* $\mathbf{C}(x,y,z) = (\varphi_x + \psi_y, \varphi_y - \psi_x, 0)$ *где* $\varphi_x, \varphi_y, \psi_x, \psi_y$ *— частные производные функций* $\varphi(x,y,z)$ *и* $\psi(x,y,z)$.

Используя теорему и полагая в (18)

$$\Delta_2\psi(x,y,z) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}, \qquad \Delta_2\varphi(x,y,z) = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y},$$

где

$$f_1(x,y,z) = -2y^2(\eta_1 + \eta_2 y) - y b_{0z} \frac{\partial}{\partial z} \left(b_x^{(2)} + b_y^{(1)} \right),$$

$$f_2(x,y,z) = -2y^2(\eta_3 + \eta_4 y) - y b_{0z} \frac{\partial}{\partial z} \left(b_y^{(2)} - b_x^{(1)} \right),$$

получаем

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_t & y \\ -y & \mathcal{D}_t \end{pmatrix} \left[\left(\mathcal{D}^2 + y^2\right) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\tilde{\tilde{\eta}}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\tilde{\tilde{\eta}}}{\partial y} \end{pmatrix} + 4y \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\tilde{\eta}} \end{pmatrix} + \mathcal{D} \begin{pmatrix} \widetilde{b_x} \\ \tilde{b}_y \end{pmatrix} \right]. \tag{19}$$

Из третьего уравнения (11) с учетом выражения (19) получаем

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}_t\mu\rho_s\left({\mathcal{D}_t}^2+y^2\right)-\mathcal{D}_t\mathcal{D}^2 & -y\mathcal{D}^2 \\ y\mathcal{D}^2 & \mathcal{D}_t\mu\rho_s\left({\mathcal{D}_t}^2+y^2\right)-\mathcal{D}_t\mathcal{D}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{b_x} \\ \widetilde{b_y} \end{pmatrix}=$$

$$=\mathcal{D}\begin{pmatrix} \mathcal{D}_t & y \\ -y & \mathcal{D}_t \end{pmatrix}\left[\left({\mathcal{D}_t}^2+y^2\right)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\tilde{\tilde{\eta}}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\tilde{\tilde{\eta}}}{\partial y} \end{pmatrix}+4y\begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\tilde{\eta}} \end{pmatrix}\right]. \tag{20}$$

Вводя вместо функции $\tilde{\tilde{\eta}}$ функцию ξ по формуле $\tilde{\tilde{\eta}}=f^2\xi$, где

$$f={\mathcal{D}_t}^2\left(\mu\rho_s\left({\mathcal{D}_t}^2+y^2\right)-\mathcal{D}^2\right)^2+y^2\mathcal{D}^4$$

есть дифференциальный оператор, и интегрируя соотношение (20), для горизонтальных компонент поля получим выражение в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \widetilde{b_x} \\ \widetilde{b_y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathcal{D}_t\left[\mu\rho_s\left({\mathcal{D}_t}^2+y^2\right)-\mathcal{D}^2\right] & y\mathcal{D}^2 \\ -y\mathcal{D}^2 & \mathcal{D}_t\left[\mu\rho_s\left({\mathcal{D}_t}^2+y^2\right)-\mathcal{D}^2\right] \end{pmatrix}\times$$

$$\times\mathcal{D}\begin{pmatrix} \mathcal{D}_t & y \\ -y & \mathcal{D}_t \end{pmatrix}\left[\left({\mathcal{D}_t}^2+y^2\right)\begin{pmatrix} f\dfrac{\partial\xi}{\partial x} \\ 2f'_y\xi+f\dfrac{\partial\xi}{\partial y} \end{pmatrix}+4y\begin{pmatrix} 0 \\ f\xi \end{pmatrix}\right]. \tag{21}$$

Произвольные функции результата интегрирования можно исключить используемым выше методом.

Вектор $\mathbf{b}$ является решением системы (10)–(11), поэтому подстановка соответствующих выражений в первое уравнение (11) приводит к следующему уравнению для функции $\xi(x,y,z,t)$:

$$A_1\Delta_2\xi+\left(B_1-A'_{2y}\right)\xi_x+\left(A'_{1y}+B_2\right)\xi_y+\left[B'_{2y}+\tfrac{1}{S}\mathcal{D}_t\left({\mathcal{D}_t}^2+y^2\right)^2\left(2ff'_z+f^2\tfrac{\partial}{\partial z}\right)\right]\xi=0, \tag{22}$$

$$\mathrm{A}_1=\left({\mathcal{D}_t}^2+y^2\right)\mathcal{D}_tf^2+\mathcal{D}_t\left({\mathcal{D}_t}^2+y^2\right)(\mathcal{D}h_1)-y\left({\mathcal{D}_t}^2+y^2\right)(\mathcal{D}h_2),$$

$$\mathrm{A}_2=y\left({\mathcal{D}_t}^2+y^2\right)f^2+\mathcal{D}_t\left({\mathcal{D}_t}^2+y^2\right)(\mathcal{D}h_2)+y\left({\mathcal{D}_t}^2+y^2\right)(\mathcal{D}h_1),$$

$$\mathrm{B}_1=2y\left({\mathcal{D}_t}^2+y^2\right)ff'_y+4y^2f^2+\mathcal{D}_t\mathcal{D}\left[2\left({\mathcal{D}_t}^2+y^2\right)h_4+4yh_2\right]+y\mathcal{D}\left[2\left({\mathcal{D}_t}^2+y^2\right)h_3+4yh_1\right],$$

$$B_2=2\mathcal{D}_t\left({\mathcal{D}_t}^2+y^2\right)ff'_y+4y\mathcal{D}_tf^2+\mathcal{D}_t\mathcal{D}\left[2\left({\mathcal{D}_t}^2+y^2\right)h_3+4yh_1\right]-y\mathcal{D}\left[2\left({\mathcal{D}_t}^2+y^2\right)h_4+4yh_2\right],$$

$$h_1=F_1f,\quad h_2=F_2f,\qquad h_3=F_1f'_y,\qquad h_4=F_2f'_y,\qquad F_1=\left({\mathcal{D}_t}^2f_1-y^2\mathcal{D}^2\right)\mathcal{D},$$

$$\mathrm{F}_2=y\mathcal{D}_t\left(f_1+\mathcal{D}^2\right)\mathcal{D},\qquad f_1=\mu\rho_s\left({\mathcal{D}_t}^2+y^2\right)-\mathcal{D}^2,\qquad f={\mathcal{D}_t}^2+f_1^2+y^2\mathcal{D}^4$$

суть дифференциальные операторы. Функции v_z и b_z определяются из соответствующих уравнений (10) и (11).

Итак, резюмируем полученные выше результаты в виде следующего утверждения.

Утверждение. *Любое решение $\mathbf{v}(x,y,z,t)$, $\mathbf{b}(x,y,z,t)$, $p(x,y,z,t)$ пространственной задачи о малых возмущениях крупномаситабных волновых движений стратифицированной электропроводной вращающейся жидкости в экваториальной области, удовлетворяющее необходимым условиям гладкости, представимо в виде*

$$p(x,y,z,t)=-\left({\mathcal{D}_t}^2+y^2\right)^2f^2\xi,\qquad \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}(x,y,z,t)=\mu\rho_s\left({\mathcal{D}_t}^2+y^2\right)\begin{pmatrix} \widetilde{b}_x \\ \widetilde{b}_y \end{pmatrix}(x,y,z,t),$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{b}_x \\ \widetilde{b}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_t f_1 & y\mathcal{D}^2 \\ -y\mathcal{D}^2 & \mathcal{D}_t f_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{D}_t & y \\ -y & \mathcal{D}_t \end{pmatrix} \mathcal{D} \left[\left({\mathcal{D}_t}^2 + y^2\right) \begin{pmatrix} f\dfrac{\partial\xi}{\partial x} \\ 2f_y'\xi + f\dfrac{\partial\xi}{\partial y} \end{pmatrix} + 4y \begin{pmatrix} 0 \\ f\xi \end{pmatrix} \right],$$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_t & y \\ -y & \mathcal{D}_t \end{pmatrix} \left[\left({\mathcal{D}_t}^2 + y^2\right) \begin{pmatrix} f^2\dfrac{\partial\xi}{\partial x} \\ 2ff_y'\xi + f^2\dfrac{\partial\xi}{\partial y} \end{pmatrix} + 4y \begin{pmatrix} 0 \\ f^2\xi \end{pmatrix} + \mathcal{D} \begin{pmatrix} \widetilde{b}_x \\ \widetilde{b}_y \end{pmatrix} \right], \quad (23)$$

$$v_z = \frac{1}{S}\mathcal{D}_t \left({\mathcal{D}_t}^2 + y^2\right)^2 \left(2ff_z'\xi + f^2\frac{\partial\xi}{\partial z}\right), b_z = \frac{1}{S}\mathcal{D}_t \left({\mathcal{D}_t}^2 + y^2\right)^2 \mathcal{D} \left(2ff_z'\xi + f^2\frac{\partial\xi}{\partial z}\right), \mathcal{D}_t = \frac{\partial}{\partial t},$$

$$\rho = \left({\mathcal{D}_t}^2 + y^2\right)^2 \left(2ff_z'\xi + f^2\frac{\partial\xi}{\partial z}\right),\ \mathcal{D} = b_{0z}\frac{\partial}{\partial z},\ f = {\mathcal{D}_t}^2 \left(\mu\rho_s \left({\mathcal{D}_t}^2 + y^2\right) - \mathcal{D}^2\right)^2 + y^2\mathcal{D}^4,$$

где функция ξ является решением уравнения (22).

Справедливо и **Обратное утверждение**, а именно: *любое решение уравнения (22) порождает решение системы (7)–(8), моделирующей малые возмущения пространственных крупномасштабных движений в стратифицированной электропроводной вращающейся жидкости в широтном поле около экватора, если построенные по формулам (23) функции* $\mathbf{v}$, $\mathbf{b}$, p, ρ *удовлетворяют в рассматриваемой области условиям гладкости.*

Список литературы

[1] *Холодова С.Е.* Волновые движения в сжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости // Журн. выч. мат. и мат. физики. 2007. Т. 47. № 12. С. 2107–2115.

[2] *Холодова С.Е.* Динамика вращающегося слоя идеальной электропроводной несжимаемой жидкости // Журн. выч. мат. и мат. физики. 2008. Т. 48. № 5. С. 882–898.

[3] *Холодова С.Е.* Квазигеострофические движения во вращающемся слое электропроводной жидкости // Прикл. мех. и техн. физика. 2009. Т. 50, № 1. С. 30–41.

[4] *Холодова С.Е.* Математическое моделирование крупномасштабных движений стратифицированной электропроводной жидкости в сферическом слое // Вестн. С-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2009. Вып. 1. С. 118–133.

[5] *Холодова С.Е.* Волновые движения в стратифицированной электропроводной вращающейся жидкости // Журн. выч. мат. и мат. физики. 2009. Т. 49. № 5. С. 916–922.

[6] *Холодова С.Е., Перегудин С.И.* Моделирование и анализ течений и волн в жидких и сыпучих средах. СПб. Изд–во СПбГУ. 2009. 455 с.

[7] *Альвен Г., Фельтхаммар К.–Г.* Космическая электродинамика. — М.: Мир, 1967. — 260 с.

[8] *Алешков Ю.З.* Математическое моделирование физических процессов. - СПб.: Изд-во СПбГУ, 2001. 264 с.

[9] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. Т. VIII. — М.: Наука, 1992. — 664 с.

[10] *Габов С.А., Свешников А.Г.* Линейные задачи нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990. 344 с.

[11] *Брагинский С.И.* Волны в устойчиво стратифицированном слое на поверхности земного ядра // Геомагн. аэроном., 3, 476–482, 1987.