Иерархия уравнений мелкой воды: вывод, исследование, вычислительные алгоритмы*

З.И. Федотова, Г.С. Хакимзянов
Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: zf@ict.nsc.ru, khak@ict.nsc.ru

В настоящей работе представлен вывод НЛД-уравнений с учетом подвижного дна на вращающейся сфере. Вывод предваряется масштабированием полных уравнений и введением малых параметров, позволяющих вывести также и модель типа Буссинеска. Выполнена модификация НЛД-уравнений с ориентацией на создание вычислительных алгоритмов.

Введение

В многообразии приближенных моделей длинноволновой гидродинамики прослеживается несколько иерархий: по геометрии (плоскость, сфера), по нелинейности (полные НЛД-уравнения, уравнения Буссинеска, линейные модели), по учету дисперсии (полные НЛД-уравнения, классические уравнения мелкой воды) и другие.

В работе представлен вывод НЛД-уравнений с учетом подвижного дна на вращающейся сфере. Вывод предваряется масштабированием полных уравнений и введением малых параметров, позволяющих рассмотреть модели типа Буссинеска. Установлена связь между уравнениями НЛД-моделей на сфере и аналогичными уравнениями плановых НЛД-моделей. Разработанный подход осуществляет иерархическую преемственность в классе моделей мелкой воды и соответствующих численных алгоритмов в зависимости от доминирующих масштабов и геометрии моделируемого волнового процесса.

1. Уравнения Эйлера в сферических координатах и их обезразмеривание

Введем сферическую систему координат $O\lambda\theta r$ с началом в центре сферы радиуса R, вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω, вектор которой направлен на «север»; λ — долгота, отсчитываемая к «востоку» от некоторого меридиана ($0 \le \lambda < 2\pi$), $\theta = \pi/2 - \varphi$ —дополнение до широты φ ($-\pi/2 < \varphi < \pi/2$). Будем считать, что к центру сферы направлена сила ньютоновского притяжения $\mathbf{g}$. На поверхности сферы рассмотрим слой жидкости, толщина которого предполагается малой по сравнению с радиусом R, поэтому величина $g = |\mathbf{g}|$ принимается постоянной по всему слою. Тогда уравнения, описывающие течение идеальной несжимаемой жидкости в этом слое, можно записать в следующем виде [1, 2]:

$$(Jv^1)_\lambda + (Jv^2)_\theta + (Jw)_r = 0\,, \tag{1}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 10-05-91052-НЦНИа, 09-05-00294а), а также в рамках программы Государственной поддержки научных школ РФ (грант НШ-6068.2010.9) и Проекта IV.31.2.1. программы фундаментальных исследований СО РАН.

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v} + w\,\mathbf{v}_r + \nabla p = \mathbf{r}\,, \tag{2}$$

$$w_t + \mathbf{u}\cdot\nabla w + ww_r + p_r = -g + r_3\,, \tag{3}$$

где через w обозначена радиальная, или «вертикальная», составляющая скорости v^3, $\mathbf{u} = (v^1, v^2)^T$ — вектор «горизонтальной» составляющей скорости, $J = -r^2\sin\theta$ — якобиан преобразования, связывающий согласованные сферическую и декартову системы координат, $\nabla = (\partial/\partial\lambda,\ \partial/\partial\theta)$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2)^T$,

$$r_1 = 0, \quad r_2 = \left(\Omega + v^1\right)^2 r^2 \sin\theta\cos\theta\,, \quad r_3 = \left(\Omega + v^1\right)^2 r\sin^2\theta + \left(v^2\right)^2 r\,, \tag{4}$$

$\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$, при этом ковариантные компоненты скорости v_γ $(\gamma = 1,2,3)$ выражаются через контравариантные v^γ $(\gamma = 1,2,3)$ по формулам

$$v_1 = \left(\Omega + v^1\right) r^2\sin^2\theta, \qquad v_2 = r^2\, v^2, \qquad v_3 = v^3 = w. \tag{5}$$

Будем считать, что слой жидкости ограничен снизу непроницаемым подвижным дном $r = R - h(\lambda,\theta,t)$, а сверху — свободной поверхностью $r = R + \eta(\lambda,\theta,t)$. Тогда краевые условия на этих частях границы будем рассматривать в виде [2]

$$(\eta_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\eta - w)\,|_{s=\eta} = 0, \tag{6}$$

$$p|_{s=\eta} = 0, \tag{7}$$

$$(h_t + \mathbf{u}\cdot\nabla h + w)\,|_{s=-h} = 0, \tag{8}$$

где $s = r - R$.

Отметим, что, рассматривая сферу, мы подразумеваем идеализацию земной поверхности. При этом естественным следствием является условие сферичности поверхности воды в состоянии покоя. Динамическое условие $p = 0$ на такой поверхности означает, что вектор ∇p должен иметь только радиальную составляющую. Отсюда вытекает, что центробежной силой можно пренебречь, что и было сделано в [1].

Для вывода уравнений мелкой воды введем характерные масштабы и в уравнениях (1)—(3) перейдем к безразмерным величинам. Пусть L и h_0 — характерные масштабы в горизонтальном и вертикальном направлениях, соответственно, a_0 — характерная амплитуда волны, $\alpha = a_0/h_0$. С величиной L свяжем горизонтальный масштаб λ_0, измеренный в радианах:

$$\lambda_0 = \frac{L}{R} = \frac{\varepsilon}{\mu}\,,$$

где $\varepsilon = h_0/R \ll 1$, $\mu = h_0/L$. Масштаб времени t_0 и характерный масштаб угловой скорости распространения волны определим, соответственно как

$$t_0 = \frac{L}{\sqrt{gh_0}}\,, \qquad \omega_0 = \frac{\lambda_0}{t_0} = \frac{\varepsilon}{\mu}\,\frac{\sqrt{gh_0}}{L} = \frac{\sqrt{gh_0}}{R},$$

а за масштаб «горизонтальной» угловой скорости частиц жидкости в волне естественно принять величину $\alpha\omega_0$. В соответствии с введенными масштабами определим безразмерные переменные:

$$\overline{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad \overline{\theta} = \frac{\theta}{\lambda_0}, \quad \overline{h} = \frac{h}{h_0}, \quad \overline{s} = \frac{s}{h_0}, \quad \overline{H} = \frac{H}{h_0}, \quad \overline{\eta} = \frac{\eta}{a_0}, \quad \overline{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \overline{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega_0},$$

$$\overline{v}^\beta = \frac{v^\beta}{\alpha\omega_0}, \quad \overline{v}_\beta = \frac{v_\beta}{\alpha R\sqrt{gh_0}}\ (\beta = 1,2), \quad \overline{w} = \frac{w}{\alpha\mu\sqrt{gh_0}}, \quad \overline{p} = \frac{p}{gh_0}.$$

2. Модификация уравнений Эйлера

Первым шагом вывода уравнений НЛД-модели на сфере является переход в уравнениях Эйлера (1)—(3) к безразмерным переменным и оценка вклада каждого из слагаемых безразмерных уравнений на основе предположения о малости ε. Затем пренебрегаем членами порядка $O(\varepsilon)$ и приходим к модифицированным уравнениям Эйлера:

$$\left(\overline{J}_0\overline{v}^1\right)_{\overline{\lambda}} + \left(\overline{J}_0\overline{v}^2\right)_{\overline{\theta}} + \left(\overline{J}_0\overline{w}\right)_{\overline{s}} = 0 \tag{9}$$

$$\overline{\mathbf{v}}_{\overline{t}} + \alpha(\overline{\mathbf{u}}\cdot\overline{\nabla})\overline{\mathbf{v}} + \alpha\overline{w}\,\overline{\mathbf{v}}_{\overline{s}} + \frac{1}{\alpha}\,\overline{\nabla}\overline{p} = \overline{\mathbf{r}}, \tag{10}$$

$$\alpha\mu^2\left[\overline{w}_{\overline{t}} + \alpha\left(\overline{v}^1\,\overline{w}_{\overline{\lambda}} + \overline{v}^2\,\overline{w}_{\overline{\theta}} + \overline{w}\,\overline{w}_{\overline{s}}\right)\right] + \overline{p}_{\overline{s}} = -1, \tag{11}$$

где

$$\overline{\nabla} = \left(\partial/\partial\overline{\lambda},\ \partial/\partial\overline{\theta}\right), \quad \overline{J}_0 = -\sin\theta, \quad \overline{\mathbf{v}} = (\overline{v}_1,\overline{v}_2)^T,$$
$$\overline{\mathbf{r}} = (\overline{r}_1,\overline{r}_2)^T, \quad \overline{r}_1 = 0, \quad \overline{r}_2 = \frac{\varepsilon}{\mu}\left(2\overline{\Omega} + \alpha\overline{v}^1\right)\overline{v}^1\sin\theta\cos\theta. \tag{12}$$

3. Вывод НЛД-уравнений

В моделях мелкой воды искомыми величинами являются $H = \eta + h$ — полная глубина слоя жидкости и $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\lambda,\theta,t)$ — вектор скорости в приближенной модели. Возьмем в качестве $\mathbf{c}$ усредненную по глубине «горизонтальную» составляющую скорости

$$\mathbf{c} = (c^1,c^2)^T = \frac{1}{H}\int\limits_{-h}^{\eta}\mathbf{u}\,ds. \tag{13}$$

Уравнение неразрывности НЛД-модели на сфере получается после интегрирования модифицированного уравнения (9) с учетом краевых условий (6), (8), приведенных к безразмерной форме. В результате, с использованием оператора дивергенции в сферических координатах

$$\overline{\nabla}\cdot\overline{\mathbf{c}} = \frac{\left(\overline{J}_0\overline{c}^1\right)_{\overline{\lambda}} + \left(\overline{J}_0\overline{c}^2\right)_{\overline{\theta}}}{\overline{J}_0}, \quad \overline{\mathbf{c}} = (\overline{c}^1,\overline{c}^2)^T = \frac{\mathbf{c}}{\alpha\omega_0},$$

приходим к следующему виду НЛД-уравнения неразрывности:

$$\overline{H}_{\overline{t}} + \alpha\overline{\nabla}\cdot(\overline{H}\overline{\mathbf{c}}) = 0\,, \quad \overline{H} = \overline{h} + \alpha\overline{\eta}\,. \tag{14}$$

Вывод НЛД-уравнений движения опирается на предположение о безвихревом характере течения. Это условие для безразмерных переменных записывается как

$$\overline{\mathbf{v}}_{\overline{s}} = \mu^2\overline{\nabla}\overline{w}. \tag{15}$$

Далее мы будем работать только с безразмерными величинами, причем для упрощения обозначений опустим над ними черту.

Равенство (15) наводит на мысль, что для вывода приближенной модели можно использовать разложение компонент скорости в ряды по степеням параметра μ^2:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \mu^2\mathbf{u}^1 + O(\mu^4), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mu^2\mathbf{v}_1 + O(\mu^4), \quad w = w_0 + \mu^2 w_1 + O(\mu^4), \tag{16}$$

где $\mathbf{u}=(v^1,v^2)^T$, $\mathbf{v}=(v_1,v_2)^T$, $\mathbf{u}^k=(v^{k1},v^{k2})^T$, $\mathbf{v}_k=(v_{k1},v_{k2})^T$ $(k=0,1)$. Определив для удобства

$$\mathbf{V}_0=\begin{pmatrix}\Omega/\alpha\ \sin^2\theta\\ 0\end{pmatrix},\quad M=\begin{pmatrix}\sin^2\theta & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

из соотношений (5), записанных в безразмерном виде, получим представления

$$\mathbf{v}=\mathbf{V}_0+M\mathbf{u},\quad \mathbf{v}_0=\mathbf{V}_0+M\mathbf{u}^0,\quad \mathbf{v}_1=M\mathbf{u}^1. \tag{17}$$

Следующим шагом является выражение функций $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и w через «скорость» НЛД-модели $\mathbf{c}$ на основе разложения (16).

Подстановка второго из разложений (16) в соотношение (15) приводит к выводу о том, что функция $\mathbf{v}_0$ не зависит от «вертикальной» координаты s. В силу второго из равенств (17) таким же свойством обладает и функция $\mathbf{u}^0$. Далее путем интегрирования по глубине уравнения неразрывности (9) и подходящих преобразований удается получить следующие выражения:

$$w=-\frac{1}{\alpha}Dh-(s+h)\nabla\cdot\mathbf{c}+O(\mu^2), \tag{18}$$

$$\mathbf{u}=\mathbf{c}+\mu^2M^{-1}\mathbf{V}_1+O(\mu^4), \tag{19}$$

$$\mathbf{V}_1=\Big(\frac{H}{2}-(s+h)\Big)\Big(\frac{\nabla Dh}{\alpha}+\nabla h(\nabla\cdot\mathbf{c})\Big)+\Big(\frac{H^2}{6}-\frac{(s+h)^2}{2}\Big)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{c}),\quad D=\frac{\partial}{\partial t}+\alpha\mathbf{c}\cdot\nabla.$$

С учетом первой из формул (17) получаем, что

$$\mathbf{v}=\mathbf{V}_0+M\mathbf{c}+\mu^2\mathbf{V}_1+O(\mu^4). \tag{20}$$

Формулы (18)—(20) позволяют получить формулу для явного вычисления давления и осуществить вывод уравнений движения в НЛД-модели.

Для выражения давления через переменные НЛД–модели проинтегрируем уравнение (11) по «вертикальной» координате. Учитывая динамическое условие (7) и равенство $\mathbf{u}=\mathbf{c}+O(\mu^2)$, вытекающее из (19), а также формулу (18) для w, получаем следующую формулу для давления:

$$p=H-(s+h)-\alpha\mu^2\left[\Big(H-(s+h)\Big)R_2+\left(\frac{H^2}{2}-\frac{(s+h)^2}{2}\right)R_1\right]+O(\mu^4), \tag{21}$$

где

$$R_1=D\left(\nabla\cdot\mathbf{c}\right)-\alpha\left(\nabla\cdot\mathbf{c}\right)^2,\quad R_2=\frac{1}{\alpha}D^2h. \tag{22}$$

Вывод уравнений движения НЛД-модели основан на интегрировании уравнения (10) по толщине слоя воды и привлечении полученных выше выражений (18)—(20) и формулы для давления (21). Также используются уравнение неразрывности (14) и динамическое условие (7). В результате довольно трудоемких вычислений удается получить уравнение движения НЛД-модели:

$$\mathbf{v}_t+\alpha(\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{v}+\nabla\eta=\mu^2\left[\frac{1}{H}\nabla\left(\frac{H^3}{3}R_1+\frac{H^2}{2}R_2\right)-\nabla h\left(\frac{H}{2}R_1+R_2\right)\right]+\mathbf{r}+O(\mu^4). \tag{23}$$

Здесь для удобства введен новый вектор $\mathbf{v}=(v_1,v_2)^T$, который в отличие от (17) не зависит от s и определяется через среднюю скорость: $v_1=\alpha^{-1}\left(\Omega+\alpha c^1\right)\sin^2\theta,\quad v_2=c^2$.

4. Уравнения Буссинеска

В теории Буссинеска предполагается, что $\alpha = O(\mu^2)$. Это означает, что оставаясь в пределах точности НЛД-модели членами порядка $\alpha\mu^2$ можно пренебречь. Нетрудно видеть, что выражение R_1 можно записать в виде $R_1 = (\nabla \cdot \mathbf{c})_t + O(\alpha)$. Обратив внимание на то, что из уравнения неразрывности (14) вытекает соотношение $h_t = O(\alpha)$, получим следующее выражение для R_2: $R_2 = \alpha^{-1} h_{tt} + \mathbf{c}_t \cdot \nabla h + O(\alpha)$. Применяя эти подстановки и приведение подобных, получим уравнения модели Буссинеска, которые после отбрасывания членов порядка $O(\alpha\mu^2)$ и возврата к размерным переменным примут вид:

$$H_t + \nabla \cdot (H\mathbf{c}) = 0, \tag{24}$$

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{c} \cdot \nabla)\mathbf{v} + g\nabla\eta - \mathbf{r} = \frac{h}{2}\nabla\left(\nabla \cdot h\mathbf{c}_t\right) - \frac{h^2}{6}\nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{c}\right)_t + \frac{h}{2}\nabla h_{tt}, \tag{25}$$

где

$$\mathbf{c} = (c^1, c^2)^T, \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2)^T, \quad v_1 = \left(\Omega + c^1\right) R^2 \sin^2\theta, \quad v_2 = R^2 c^2, \tag{26}$$

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2)^T, \quad r_1 \equiv 0, \quad r_2 = \left(2\Omega + c^1\right) c^1 R^2 \sin\theta \cos\theta\ . \tag{27}$$

Отбрасывая в выписанных уравнениях слагаемые, описывающие вклад дисперсии (слагаемые, содержащие третьи производные), получаем классическую модель мелкой воды первого приближения.

5. Связь НЛД-моделей на плоскости и сфере

Чтобы установить связь между полученными НЛД-уравнениями на вращающейся сфере и известными НЛД-моделями на плоскости, перейдем к координатам на поверхности сферы. Для этого в некоторой окрестности точки (λ_0, θ_0) рассмотрим преобразование координат:

$$x = R\sin\theta_0\left(\lambda - \lambda_0\right), \quad y = -R\left(\theta - \theta_0\right), \quad u = \dot{x} = Rc^1 \sin\theta_0, \quad v = \dot{y} = -Rc^2\ .$$

Пусть в направлении широты область мала, т. е. мала величина $\delta = \theta - \theta_0$. Переходя в НЛД-уравнениях к новым переменным и предполагая ограниченность функций $\operatorname{ctg}\theta$, $\sin^{-1}\theta$, u, v, H и их производных, а также пренебрегая в НЛД-уравнениях членами, имеющими порядок $O(\delta)$ или $O\left(1/R\right)$, получаем известные плановые НЛД-уравнения на плоскости [3].

Рассматривая уравнения (24), (25) на стационарном дне и пренебрегая силой Кориолиса, после указанной процедуры получаем известные уравнения Перегрина.

6. Подход к построению вычислительного алгоритма

Для построения численного алгоритма предпринята модификация уравнений Буссинеска. Из уравнений движения НЛД-модели, записанных при $\alpha = O(\mu^2)$ в виде

$$v_{1,t} + \eta_\lambda = O(\mu^2), \quad v_{2,t} + \eta_\theta = O(\mu^2), \tag{28}$$

вытекают соотношения

$$v_{1,t\theta} - v_{2,t\lambda} = O(\mu^2), \quad c^1_t = \frac{v_{1,t}}{J_0^2} = -\frac{\eta_\lambda}{J_0^2} + O(\mu^2), \quad c^2_t = v_{2,t} = -\eta_\theta + O(\mu^2).$$

Эти соотношения, вместе с равенством $h_t = O(\alpha)$, приводят к системе уравнений, имеющей в размерных переменных следующий вид:

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{v} + g\nabla\eta - \mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h^2}{3}\nabla^2(\mathbf{v}-\mathbf{v}_0)\right) + \mathbf{q}\,, \tag{29}$$

где

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} \Omega R^2\sin^2\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = -g\frac{h}{2}\nabla h\,\nabla^2\eta - g\frac{h}{2}\nabla\left(\frac{\eta_\lambda h_\lambda}{R^2\sin^2\theta} + \frac{\eta_\theta h_\theta}{R^2}\right) - g\frac{h^2}{3}\boldsymbol{\zeta} + \frac{h}{2}\nabla h_{tt}\,,$$

$$\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1,\zeta_2)^T, \quad \zeta_1 \equiv 0, \quad \zeta_2 = -\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\left(2\eta_{\lambda\lambda}\,\mathrm{ctg}\,\theta + \eta_\theta\right), \quad \nabla^2\eta = \frac{\eta_{\lambda\lambda}}{R^2\sin^2\theta} + \frac{(\eta_\theta\,\sin\theta)_\theta}{R^2\sin\theta}\,,$$

∇^2 — оператор Лапласа в сферических координатах. Остальные величины в (29) определяются согласно формулам (26), (27).

Таким образом, уравнения (24), (29) представляют новый вариант уравнений Буссинеска на сфере. Отметим, что преобразования выполнены исключительно на основе следствий из НЛД-уравнений.

Для вычислительного алгоритма удобнее использовать линейную скорость с компонентами $u = R\ c^1\sin\theta,\quad v = R\ c^2$. В этих переменных уравнения Буссинеска можно записать в следующем виде:

$$(HR\sin\theta)_t + (Hu)_\lambda + (Hv\sin\theta)_\theta = 0, \tag{30}$$

$$U_t = -uu_\lambda - vu_\theta\,\sin\theta - g\eta_\lambda - (2\Omega R\sin\theta + u)\,v\cos\theta + q_1\,, \tag{31}$$

$$V_t = -uv_\lambda - vv_\theta\,\sin\theta - g\eta_\theta\,\sin\theta + (2\Omega R\sin\theta + u)\,u\cos\theta + q_2\,\sin\theta\,, \tag{32}$$

$$U = u\,R\sin\theta - \frac{h^2}{3}\nabla^2\left(u\,R\sin\theta\right)\,, \quad V = v\,R\sin\theta - \frac{h^2\,R\sin\theta}{3}\nabla^2 v\,. \tag{33}$$

Решение этой системы уравнений можно получить с помощью двухслойной разностной схемы, состоящей из двух шагов: на каждом временном слое сначала решаются уравнения первого порядка (30)—(32) и находятся величины H, U, V, а затем для определения компонент скорости u, v привлекаются эллиптические уравнения (33) с вычисленной на первом шаге правой частью U, V. Получающийся при расщеплении уравнений движения оператор Лапласа выполняет роль регуляризатора численного решения.

Предложены и другие подходы к построению численного алгоритма для решения полученной системы уравнений Буссинеска (24), (29).

Список литературы

[1] Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Нелинейно-дисперсионные уравнения мелкой воды на вращающейся сфере // Вычисл. технологии. 2010. Т. 15, № 3. С. 135–145.

[2] Хакимзянов Г.С. Численное моделирование течений жидкости с поверхностными волнами / Г.С. Хакимзянов, Ю.И. Шокин, В.Б. Барахнин, Н.Ю. Шокина. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001.

[3] Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Нелинейно-дисперсионные уравнения мелкой воды на нестационарном дне // Вычисл. технологии. 2008. Т. 13, № 4. С. 114–126.