

Моделирование динамического контактного взаимодействия упругопластических тел с использованием высокопроизводительных вычислений*

О.В. САДОВСКАЯ

Институт вычислительного моделирования СО РАН, г. Красноярск, Россия
e-mail: o_sadov@icm.krasn.ru

Динамическое взаимодействие упругопластических тел с заранее неизвестной, изменяющейся со временем зоной контакта описывается на основе математической модели, учитывающей конечные повороты элементов тел при малых деформациях. Контактные условия формулируются в виде квазивариационного неравенства с односторонними ограничениями, моделирующими взаимное непроникание деформированных поверхностей. Для численной реализации модели на многопроцессорных вычислительных системах разработан параллельный алгоритм сквозного счета, основанный на комбинации методов расщепления по физическим процессам и по пространственным переменным. Приводятся результаты расчетов косоугольного соударения пластин в двумерной постановке.

Динамические контактные задачи с заранее неизвестной, изменяющейся в процессе деформирования зоной контакта имеют широкую область приложений, связанную с исследованием процессов удара и пробивания преград, взрывной и гидровзрывной штамповки, механической обработки материалов. Один из подходов к моделированию контактного взаимодействия основан на формулировке граничных условий контакта с учетом сил трения в виде квазивариационных неравенств.

Пусть S_c^+ и S_c^- – части границ двух деформируемых тел в переменных Лагранжа, целиком включающие зоны контакта $S_t^\pm = \{x^\pm \in S_c^\pm \mid x^+ + u^+(t, x^+) = x^- + u^-(t, x^-)\}$ в каждый фиксированный момент времени t . Здесь u – вектор перемещений, индексами \pm помечены величины, относящиеся к разным телам. Под S_c^+ и S_c^- подразумеваются те части границ взаимодействующих тел в начальном недеформированном состоянии, материальные точки которых в каждый последующий момент времени находятся в контакте или свободны от напряжений, в то время как на оставшихся частях выполняются граничные условия достаточно общего вида, но контакт невозможен. На рис. 1 штриховыми линиями показано положение границ тел в начальный момент времени, а сплошной линией – в момент времени $t - \Delta t$. Приближенное ограничение на скорости v^\pm точек $x^+ \in S_c^+$ и $x^- \in S_c^-$ можно записать следующим образом:

$$(\tilde{v}^- - \tilde{v}^+) \hat{n} \leq \frac{1}{\Delta t} |x^+ + u_{|t-\Delta t}^+ - x^- - u_{|t-\Delta t}^-|, \quad (1)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 11-01-00053), Комплексной программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 2 “Интеллектуальные информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация” и Междисциплинарного интеграционного проекта Сибирского отделения РАН № 40.

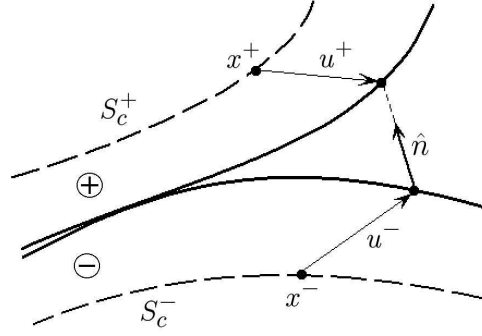


Рис. 1. Ограничение в зоне контакта двух деформируемых тел

где Δt – малый интервал времени. Данное ограничение представляет собой условие непроникания деформируемых тел друг в друга. Предполагается, что входящие в (1) точки границ связаны взаимно-однозначным соответствием, зависящим от времени как от параметра. При этом соответствии точка x^+ зоны контакта S_t^+ , связана с точкой x^- из S_t^- , определяемой равенством положений в текущий момент времени:

$$x^+ + u^+(t, x^+) = x^- + u^-(t, x^-).$$

В неконтактных областях $S_c^\pm \setminus S_t^\pm$ соответствие может быть произвольным. Единичный вектор \hat{n} , указывающий локальное направление сближения тел, равен

$$\hat{n} = \begin{cases} n^- = -n^+, & \text{если } x^\pm \in S_{t-\Delta t}^\pm, \\ \frac{x^+ + u_{|t-\Delta t}^+ - x^- - u_{|t-\Delta t}^-}{|x^+ + u_{|t-\Delta t}^+ - x^- - u_{|t-\Delta t}^-|}, & \text{если } x^\pm \notin S_{t-\Delta t}^\pm. \end{cases}$$

Правая часть (1), пропорциональная расстоянию между точками в момент времени $t - \Delta t$, имеет смысл максимально возможной скорости сближения. Выбор взаимно-однозначного соответствия для приближенного ограничения (1) при решении контактных задач является одним из этапов построения вычислительного алгоритма.

При наличии трения граничные условия контактного взаимодействия можно сформулировать следующим образом [1]:

$$(\tilde{v}^- - v^-) \sigma_n^- + (\tilde{v}^+ - v^+) \sigma_n^+ + F \left(\frac{\sigma_{n\hat{n}}^+ - \sigma_{n\hat{n}}^-}{2} \right) \left(|\tilde{v}_{\hat{\tau}}^+ - \tilde{v}_{\hat{\tau}}^-| - |v_{\hat{\tau}}^+ - v_{\hat{\tau}}^-| \right) \geq 0. \quad (2)$$

Здесь σ_n^\pm – вектор напряжений, действующий на площадке деформированной поверхности с нормалью n^\pm , $F(\sigma_{nn}) = \min \{f|\sigma_{nn}|, \tau_s^+, \tau_s^-\}$ – функция, определяющая предельное касательное напряжение трения скольжения, f – коэффициент трения, τ_s^\pm – пределы текучести материалов, векторы $\hat{\tau}$ и \hat{n} ортогональны друг другу. Произвольные варьируемые векторы \tilde{v}^\pm , как и векторы действительных скоростей v^\pm , удовлетворяют в зоне контакта S_c^\pm ограничению (1). Неравенство (2) является квазивариационным, так как ограничение (1) зависит от неизвестного решения u^\pm . Его можно интерпретировать как принцип минимума мощности нормального напряжения в зоне контакта. Эквивалентность неравенства (2) обобщенному закону трения установлена в [2].

Условия контакта деформируемых тел представимы в удобном для численной реализации виде:

$$(\tilde{w} - w)A(w - \bar{w}) + F(b(w - \bar{w})) \{ \omega(\tilde{w}) - \omega(w) \} \geq 0. \quad (3)$$

Приближенное ограничение (1) для скоростей приводится к общему виду

$$\tilde{w} n \leq h, \quad w n \leq h. \quad (4)$$

Вектор w состоит из компонент векторов скоростей v^+ и v^- , \tilde{w} — произвольная допустимая вариация w , A — положительно-определенная квадратная матрица, связывающая между собой скорости и напряжения, \bar{w} — вектор скорости, соответствующий постановке в зоне контакта условий свободной поверхности, n — вектор, состоящий из компонент внешних нормалей к соприкасающимся поверхностям, $b = n A$. Через $\omega(w)$ в (3) обозначен модуль разности между касательными составляющими скоростей. Эту функцию можно представить в виде $\omega(w) = \max_{\tilde{l} \in L} \{w \tilde{l}\} = w l$, где ограниченное выпуклое и замкнутое множество L состоит из векторов, ортогональных вектору нормали, длина которых не превосходит единицы: $L = \{\tilde{l} \mid \tilde{l} \perp n, |\tilde{l}| \leq 1\}$. Векторы w и \tilde{w} , входящие в неравенство (3), удовлетворяют одностороннему ограничению (4): они принадлежат выпуклому и замкнутому множеству допустимых вариаций $K = \{\tilde{w} \mid \tilde{w} n \leq h\}$.

Для численного решения неравенства (3) в каждой граничной ячейке сеточной области применяется алгоритм корректировки скоростей [2]. Это решение строится методом последовательных приближений, на каждом шаге которого решается более простое неравенство с фиксированным значением функции F : $\hat{F} = F(b(\hat{w} - \bar{w})) \geq 0$. Используется алгоритм типа Удзавы:

$$\begin{aligned} w^m &= P_K(\bar{w}^m), & \bar{w}^m &= \bar{w} - \hat{F} A^{-1} l^m, \\ l^{m+1} &= P_L(\bar{l}^m), & \bar{l}^m &= l^m + \alpha w^m, \end{aligned} \quad (5)$$

то есть на m -м шаге вектор w^m ищется как проекция вектора \bar{w}^m на множество K , а затем вектор l^{m+1} пересчитывается как проекция вектора \bar{l}^m на множество L . Начальное приближение l^0 задается произвольно. Доказано, что последовательность векторов w^m сходится к w при $m \rightarrow \infty$, если $\alpha < 2a/\hat{F}$ (α — параметр метода, $a = \min_{|w|=1} wAw$).

В качестве математической модели, описывающей динамическое деформирование упругопластических тел, рассмотрим модель, учитывающую конечные повороты элементов тел при малых деформациях [3]. Модель состоит из уравнений движения

$$\rho \dot{v}_i = \tau_{ij,j} + \rho g_i, \quad (6)$$

определяющих соотношений упругопластического деформирования в форме принципа максимума скорости диссипации энергии

$$(\tilde{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij})(\dot{\sigma}_{ij} - \lambda e \delta_{ij} - 2\mu e_{ij}) \geq 0 \quad (7)$$

и уравнения для угла поворота

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{2} \left\{ (v_{2,1} - v_{1,2}) \cos \varphi - (v_{1,1} + v_{2,2}) \sin \varphi \right\}. \quad (8)$$

Здесь ρ — плотность материала, v_i — компоненты вектора скорости, τ_{ij} и σ_{ij} — компоненты несимметричного и симметричного тензоров напряжений, g_i — компоненты вектора массовых сил, λ и μ — параметры Ламе, $e = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ — скорость деформации объема, δ_{ij} — символ Кронекера, $i, j = 1, 2$. Точка над символом означает производную

по времени, нижние индексы после запятой – производную по соответствующей пространственной координате, по повторяющимся индексам производится суммирование. Компоненты тензора скоростей деформации имеют вид

$$\begin{aligned} e_{11} &= v_{1,1} \cos \varphi + v_{2,1} \sin \varphi, & e_{22} &= v_{2,2} \cos \varphi - v_{1,2} \sin \varphi, & e_{33} &= 0, \\ e_{12} &= e_{21} = \frac{1}{2} \left\{ (v_{2,1} + v_{1,2}) \cos \varphi - (v_{1,1} - v_{2,2}) \sin \varphi \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Несимметричный тензор напряжений τ и симметричный тензор напряжений σ связаны следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{21} & \tau_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{33} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Вариационное неравенство (7) выполняется для всевозможных вариаций тензора напряжений $\tilde{\sigma}$, удовлетворяющих, как и тензор истинных напряжений σ , условию пластичности Мизеса

$$f_s(\sigma_{ij}) \leq \tau_s, \quad (11)$$

где τ_s – предел текучести материала, $f_s(\sigma_{ij}) = \sqrt{\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}/2}$ – выпуклая симметричная функция текучести, зависящая от компонент девиатора тензора напряжений σ'_{ij} .

Систему основных уравнений и неравенств (6)–(10) модели динамики упругопластической среды можно также представить в единообразной векторной форме [2]:

$$(\tilde{U} - U) \left(A \dot{U} - \sum_{i=1}^n B^i U_{,i} - G \right) \geq 0, \quad U, \tilde{U} \in W. \quad (12)$$

Здесь $U(t, x)$ – m -мерная вектор-функция, составленная из отличных от нуля компонент вектора скорости v и несимметричного тензора напряжений τ . Входящие в вариационное неравенство симметричные матрицы-коэффициенты A и B^i размерности $m \times m$ содержат параметры упругости среды, вектор G отличен от нуля при учете массовых сил, \tilde{U} – варьируемый вектор, n – пространственная размерность задачи, W – выпуклое и замкнутое множество, определяемое критерием пластичности (11). В рассматриваемом двумерном случае $U = (v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}, \tau_{12}, \tau_{21}, \varphi)$. В трехмерном случае $U = (v_1, v_2, v_3, \tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}, \tau_{23}, \tau_{32}, \tau_{31}, \tau_{13}, \tau_{12}, \tau_{21}, \varphi)$.

Явный по времени алгоритм численной реализации неравенства (12) строится с помощью метода расщепления по физическим процессам следующим образом: сначала на каждом временном слое решается упругая задача, а затем полученное решение корректируется для учета пластических свойств. Для решения упругой задачи применяется метод двуциклического расщепления по пространственным переменным, а на этапах расщепления в качестве разностной схемы для одномерных гиперболических систем уравнений вида $A \dot{U}^k = B^i U_{,i}^k + G^i$ ($k = \overline{1, 2n}$ – номер этапа расщепления, $i = \overline{1, n}$ – направление расщепления) используется монотонная ENO-схема типа “предиктор-корректор” с кусочно-линейными распределениями скоростей и напряжений по ячейкам [4]. Для учета необратимых пластических деформаций в расчетах используется специальная корректировка напряжений [3].

Вычислительный алгоритм реализован в виде комплекса параллельных программ для многопроцессорных вычислительных систем. Программирование выполнено на языке Fortran при помощи библиотеки передачи сообщений MPI. Расчетная область распределяется между процессорами по принципу равномерной загрузки посредством 1D, 2D

или 3D-разбиения. Распараллеливание вычислений осуществляется на этапе расщепления задачи по пространственным переменным [2]. Обмен данными между процессорами производится на шаге “предиктор” разностной схемы с использованием законтурных ячеек. Расчет контактной границы производится следующим образом: процессоры, обслуживающие приграничные области, передают необходимую информацию одному из процессоров, который производит расчет всей контактной границы в целом и рассылает результаты в обратном направлении. Для улучшения аппроксимации геометрических ограничений в зоне контакта устанавливается соответствие между граничными ячейками независимых разностных сеток взаимодействующих тел и квазивариационное неравенство (3) решается на измельченной сетке, общей для двух контактирующих поверхностей.

На рис. 2 – 4 представлены результаты расчетов по описанной вычислительной методике задачи о косом соударении пластин в двумерной постановке. Задача косоугольного соударения имеет важное прикладное значение в связи с исследованием процесса сварки металлов взрывом. Как правило, этот процесс сопровождается образованием периодических волн деформации на границе раздела пластин [5]. На основе численных расчетов установлена взаимосвязь волнообразования при сварке взрывом и механической потери устойчивости поверхностного слоя в окрестности точки контакта.

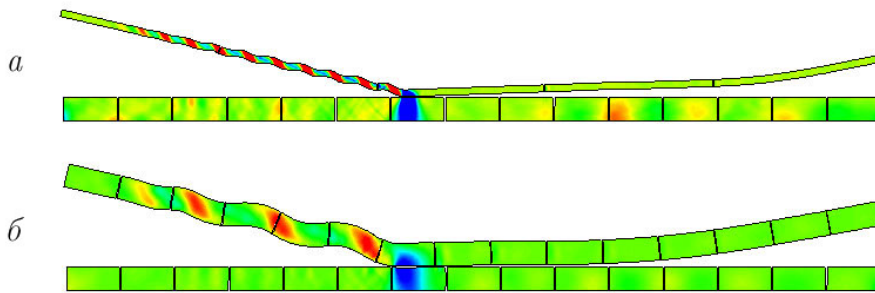


Рис. 2. Косое соударение упругих пластин: линии уровня напряжения τ_{22} ($V_c = 1$ км/с)
 а) толщины пластин $h_1 = 1$ мм, $h_2 = 3$ мм, б) пластины одинаковой толщины $h_1 = h_2 = 3$ мм

Одна из пластин неподвижна, а другая налетает на нее под углом γ с постоянной скоростью. Нижняя границалетающей пластины и верхняя граница неподвижной – зоны возможного контакта, нижняя граница неподвижной пластины закреплена, а остальные части границ обеих пластин свободны от напряжений. На рис. 2 показаны линии уровня напряжения τ_{22} при скорости точки контакта $V_c = 1$ км/с, а на рис. 3 – при $V_c = 3$ км/с (материал обеих пластин – сталь). Варьируются толщины пластин h_1

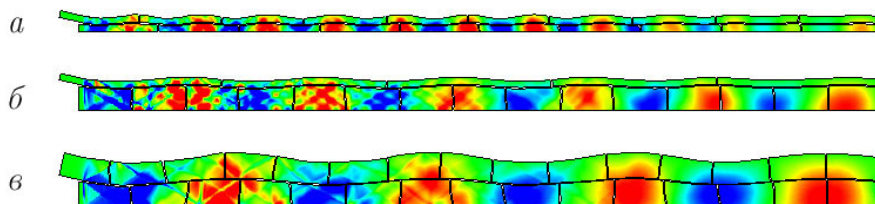


Рис. 3. Косое соударение упругих пластин: линии уровня напряжения τ_{22} ($V_c = 3$ км/с)
 а) $h_1 = h_2 = 1$ мм, б) $h_1 = 1$ мм, $h_2 = 3$ мм, в) $h_1 = h_2 = 3$ мм

и h_2 , длины пластин всюду равны 10 см, угол соударения $\gamma = 13^\circ$. Метаемая пластина движется в направлении справа налево, материал считается упругим. Результаты, представленные на рис. 2а, 3а и 3б, получены на 20 процессорах, а на рис. 2б и 3в – на 30 процессорах. Размерности сеток в пластинах 5000×50 или 5000×150 ячеек. При упругом взаимодействии с медленной скоростью (рис. 2) происходит потеря устойчивости верхней пластины перед точкой контакта, а в случае большой скорости (рис. 3) устойчивость теряет нижняя пластина за точкой контакта. Область потери устойчивости увеличивается с течением времени. Длины характерных волн и их амплитуда зависят от толщины верхней и нижней пластины, соответственно. В первом случае сцепление пластин за точкой контакта не учитывается, со временем правый край метаемой пластины отражается от контактной поверхности и отлетает вверх; во втором случае контактные поверхности пластин склеиваются за точкой контакта.

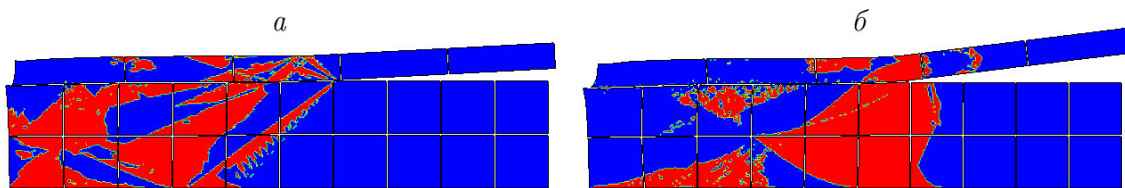


Рис. 4. Косое соударение упругопластических пластин: конфигурации пластических зон
 а) $V_c = 4$ км/с, $\gamma = 3^\circ$, б) $V_c = 2$ км/с, $\gamma = 7^\circ$

На рис. 4 представлены результаты расчетов для упругопластических пластин. Показаны конфигурации пластических зон при разных углах соударения и скоростях точки контакта. Расчеты выполнены на 25 процессорах, сетки – 2000×100 и 2000×400 ячеек. Длины пластин 10 см, толщины верхней и нижней пластин 0.5 см и 2 см, верхняя пластина движется слева направо. Анализ результатов показал, в частности, что конфигурация зоны пластичности существенно зависит от скорости точки контакта: если V_c больше скорости пластических ударных волн c_f , то пластическая зона концентрируется за точкой контакта (рис. 4а); если же $V_c < c_f$, то она забегает вперед и охватывает некоторую область впереди точки контакта (рис. 4б).

Расчеты проводились на кластерах МВС–1000М ИВМ СО РАН (г. Красноярск) и МВС–100К МСЦ РАН (г. Москва).

Список литературы

- [1] КРАВЧУК А.С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М.: МГАПИ, 1997.
- [2] САДОВСКАЯ О.В., САДОВСКИЙ В.М. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред. М.: Физматлит, 2008.
- [3] САДОВСКИЙ В.М. Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Физматлит, 1997.
- [4] КУЛИКОВСКИЙ А.Г., ПОГОРЕЛОВ Н.В., СЕМЕНОВ А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
- [5] Волнообразование при косых соударениях: Сб. статей / под ред. И.В. Яковлева и др. Новосибирск: Изд-во Института дискрет. матем. и информатики, 2000.