

# Математические модели и численные методы гидроразрыва пласта

В.Н. ЛАПИН, С.Г. ЧЕРНЫЙ, Д.В. ЕСИПОВ, Д.С. КУРАНАКОВ  
*ИВТ СО РАН, Новосибирск*  
e-mail: matmod@ict.nsc.ru

В работе приведен ряд моделей эволюции трещины гидроразрыва пласта. Показаны их некоторые особенности с точки зрения баланса между используемыми упрощениями рассматриваемых процессов и вычислительными возможностями. Предложены две модели процесса гидроразрыва пласта, описывающие наиболее характерные сценарии развития: распространение продольной и поперечной к скважине трещин. Показана эволюция таких трещин и влияние на нее различных параметров.

## 1. Введение

Для повышения нефтеотдачи породы применяется технология формирования в ней трещины гидроразрыва. Технология заключается в подаче жидкости в скважину под высоким давлением, которая вызывает образование и распространение трещины в породе (Рис. 1). После создания, трещина заполняется мелкими частицами – проппантом – для того чтобы предотвратить ее закрытие и локально повысить проницаемость пласта.

Поскольку непосредственная информация о развитии трещины и ее параметрах труднодоступна, при проведении гидроразрыва необходимо опираться на результаты моделирования. Сложность, самих процессов, их нелинейность и сильное взаимное влияние делают затруднительным создание общей трехмерной модели, описывающей их в полной постановке. Поэтому при моделировании гидроразрыва используются упрощенные модели, направленные на конкретные классы трещин или стадии гидроразрыва, в которых часть процессов описываются приближенно или не описываются совсем. С одной стороны, такие упрощения обедняют модель и ограничивают область ее применимости, с другой - позволяют рассчитывать процесс гидроразрыва за реальное время.

Для того, чтобы в полной мере описывать поведение трещины гидроразрыва необходимо моделировать следующие процессы: деформацию породы, ее разрушение, обусловленное распространением трещины, течение жидкости в трещине, перенос ею проппанта, утечку жидкости гидроразрыва в породу и вытеснение ею поровой жидкости [1]. После прекращения закачки необходимо также описывать процесс закрытия трещины, включающий в себя утечку жидкости в породу и оседание берегов трещины на оставшийся в трещине проппант.

В качестве примеров представлены две модели распространения трещины гидроразрыва, основанные на разных предположениях, и описывающих эти процессы в разных приближениях. Первая модель описывает поведение поперечной трещины, характерной при проведении гидроразрыва горизонтальных скважин (Рис. 1, слева). Вторая – поведение продольной трещины, которая обычно образуется при проведении гидроразрыва скважин вертикальных (Рис. 1, справа).

## 2. Деформация и разрушение породы

Деформация породы, которая определяет ширину трещины по давлению жидкости, в общем случае, в общем случае трехмерна и должна описываться в трехмерном приближении. При этом реальная порода неоднородна, анизотропна, содержит трещины, поры, заполненные жидкостью, что меняет ее свойства и напряженное состояние. Из-за высокой скорости закачки жидкости и распространения трещины также может быть значительным влияние нестационарных эффектов. Для полностью адекватного описания разрушения породы должна использоваться модель, способная предсказать направление и скорость развития трещины. Но даже в приближении хрупкого разрушения не существует устоявшегося критерия распространения. Пластические эффекты в окрестности кончика дополнительно усложняют задачу.

Очевидно, что в такой постановке полная модель деформации и разрушения породы из-за своей сложности даже если и может быть построена, то затраты вычислительных ресурсов на решение такой задачи окажутся огромными [2].

Основными направлениями упрощения являются, во-первых, использование моделей не учитывающих часть эффектов. Так наиболее широко распространенной является модель упругого равновесия [4] для описания деформации породы и модель хрупкого разрушения [3]. При описании деформации часто учитывается пористость породы [5], а при моделировании разрушения – пластические эффекты [6]. Во-вторых, введение ограничений на геометрию трещины, что позволяет использовать аналитические и полуаналитические методы решения. Так, в модели распространения радиальной трещины [8] для описания деформаций породы она представляется в виде кругового разреза, в KGD модели [9] – в виде плоского разреза бесконечной высоты, проходящего вдоль оси скважины. Это позволяет использовать аналитическое решение из теории плоских деформаций. Аналогичное решение используется в и PKN модели [10], где предполагается, что трещина прямолинейна, а в породе отсутствуют сдвиговые напряжения между плоскостями, поперечными к оси трещины. Последние две модели предполагают, что трещина распространяется только в одном направлении и а высота при этом сохраняется постоянной. Отказ от этого предположения приводит к созданию псевдо и плоских трехмерных моделей [1, 2], более близких к реальности, но требующих для решения уравнений упругости применения численных, а не аналитических методов. Преимущество этих моделей заключается в одновременном описании роста трещины как в длину, так и в высоту.

Другим направлением повышения точности модели является отказ от предположения о прямолинейности трещины (плоские двумерные модели), что также требует использования численных методов для расчета деформации породы [11, 12]. Геометрия горизонтальных сечений и процессы в них не зависят от высоты, но учитывается искривление трещины, которое существенно влияет на распределение давления и ее ширину.

### 2.1. Деформация и разрушение породы в моделях поперечной и продольной трещин

В предлагаемой модели *поперечной* трещины предполагается, что трещина распространяется с одинаковой скоростью во все стороны и все процессы – осесимметричны. Порода считается хрупким упругим изотропным однородным телом, а ее деформация –

стационарной. Для расчета ширины трещины по известному распределению давления используется аналитическое решение [4].

$$W(r) = 4 \frac{1 - \nu}{\pi \mu} \int_0^{R_{frac}} \int_0^{R_{frac}} \frac{p(\rho) \rho}{\sqrt{x^2 - \rho^2} \sqrt{x^2 - r^2}} d\rho dx. \quad (1)$$

Здесь  $W(r)$  - ширина трещины  $p(r)$  - избыточное давление жидкости  $\nu = \lambda/2(\lambda + \mu)$  - коэффициент Пуассона породы,  $\lambda, \mu$  - коэффициенты Ламе,  $R_{frac}$  - радиус трещины.

Предлагаемая модель *продольной* трещины относится к классу плоских двумерных моделей. Ширина трещины определяется по смещениям ее берегов, рассчитанным на основе плоского деформированного состояния породы. Для расчета плоского деформированного состояния породы используется метод граничных элементов [13], в котором система уравнений упругости заменяется интегральным соотношением на границе области (трещине).

$$u_i(x') = \int_S U_{ij}(x', x) t_j(x) dS(x) - \int_S T_{ij}(x', x) u_j(x) dS(x), \quad (2)$$

где  $U_{ij}, T_{ij}$  - известные ядра,  $t_j$  - компоненты вектора усилий  $\mathbf{t} = -p\mathbf{n} + \sigma^\infty \mathbf{n}$ ,  $\sigma^\infty = \text{diag}(\sigma_1^\infty, \sigma_2^\infty)$  - тензор напряжений в породе в естественном залегании,  $x'$  - произвольная точка границы области. Далее компоненты смещений и усилий представляются в виде комбинации базисных функций. Коэффициенты разложения находятся из системы линейных уравнений, которая получается при подстановке этих функций в уравнение (3).

В качестве критерия распространения в обеих моделях используется достижение коэффициентом интенсивности напряжений  $K_I$  критического значения  $K_{Ic}$ , а критерия выбора направления, для модели продольной трещины, - условие равенства нулю второго (сдвигового) коэффициента интенсивности напряжений  $K_{II}$  [3]

$$K_I = K_{Ic}, \quad K_{II} = 0. \quad (3)$$

Значения коэффициентов интенсивности рассчитываются методом граничных элементов для модели продольной трещины и по аналитической формуле для модели поперечной трещины [3]

$$K_I = \frac{2}{\sqrt{\pi R_{frac}}} \int_0^{R_{frac}} \frac{p(\rho) \rho}{\sqrt{R_{frac}^2 - \rho^2}} d\rho. \quad (4)$$

### 3. Движение жидкости, ее утечка и перенос проппанта

Так же как и в случае деформации породы сложность моделирования движения жидкости в трещине обусловлена двумя факторами: размерностью задачи и сложностью объекта. В общем случае жидкость в трещине течет по криволинейному каналу сложной формы, то есть описывается трехмерными уравнениями движения. При этом движение жидкости может быть турбулентным [1], сама жидкость неньютоновской [7, 12]. Кроме того, жидкость используется не только для распространения трещины, но и для переноса проппанта, то есть, необходимо привлекать уравнения движения многофазной жидкости или описывать движение частиц в ней.

Размерность задачи при моделировании обычно уменьшается путем осреднения уравнений по ширине канала. Это обусловлено тем, что после формирования трещины, ее длина и высота существенно (на порядки) превосходят ее ширину. Также пренебрегается искривлением канала, что позволяет отбросить в уравнениях инерционные члены. В результате получается двумерная модель движения жидкости в канале переменного сечения [2, 14]. Для дальнейшего упрощения задачи, вводятся ограничения на форму трещины, позволяющие перейти к одномерным уравнениям движения жидкости, как например, в классических PKN, KGD, радиальной моделях. Однако, при этом невозможно учесть неодинаковость скорости жидкости в различных направлениях, переменность высоты трещины, влияние силы тяжести. Поскольку осаждение пропанта вызвано влиянием силы тяжести и разницей плотностей жидкости и частиц, такое упрощение ограничивает область применения модели только этапом распространения трещины и не позволяет предсказывать ее ширину после закрытия.

В области упрощения уравнений движения самым простым способом является предположение об идеальности жидкости [15] Такое предположение делает задачу легко решаемой (давление вдоль трещины постоянно), однако, применимо только для описания газового разрыва или разрыва с помощью маловязкой жидкости. Следующим шагом на пути к полной модели является использование уравнений Навье-Стокса ньютоновской жидкости, как, например, в классических моделях. Это позволяет учитывать изменение давления вдоль трещины и, в то же время, позволяет находить аналитические решения для простейших случаев [16]. Однако, используемая при гидроразрыве жидкость обычно неньютоновская и для ее описания используются более сложные приближения, такие как Хершеля-Балкли [7, 12]. В некоторых работах усложнение модели жидкости идет не за счет описания особенностей жидкости, а за счет учета переноса пропанта на основе уравнений движения многофазной жидкости [16, 17]. Описание переноса пропанта позволяет рассчитывать его распределение после прекращения закачки жидкости и предсказывать ширину трещины после ее закрытия.

Утечка жидкости в породе в общем случае должна описываться на основе нестационарных моделей фильтрации неньютоновской жидкости [18], использование которых чрезмерно усложнило бы задачу. Наиболее простым вариантом является использование эмпирического закона Картера [1, 19] который связывает скорость утечки жидкости из трещины со временем утечки. Более сложные модели утечек [16, 17] для расчета этой скорости отслеживают положение границы проникновения жидкости гидроразрыва в породу и позволяют учитывать влияние изменения давления со временем на скорость утечки. При этом полагается, что жидкость фильтруется только в нормальном к трещине направлении, отсутствует смешение с поровой жидкостью, свойства породы не зависят от порового давления.

### 3.1. Движение жидкости, ее утечка в моделях поперечной и продольной трещин

В обеих предлагаемых моделях используется приближение Хершеля-Балкли неньютоновской жидкости. При этом, модели предназначены для описания распространения трещин, поэтому перенос пропанта не описывается. В модели поперечной трещины движение жидкости считается осесимметричным и описывается уравнениями [7]

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -2K \left( \frac{2n+1}{\pi n} \right)^n \frac{Q^n}{W^{2n+1} r^n} + \left( \frac{4n+2}{n+1} \right) \frac{\tau_0}{W}, \quad 0 \leq r \leq R_{front}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial(rW)}{\partial t} + \frac{\partial(rWu)}{\partial r} + \frac{1}{2\pi}Q_L(r, t) = 0, \quad 0 \leq r \leq R_{front}. \quad (6)$$

Здесь  $K$  - коэффициент вязкости,  $n$  - показатель степени,  $R_{front}(t)$  - положение фронта жидкости,  $Q_L(r, t)$  - объем жидкости теряющейся в породе на окружности радиуса  $r$  в момент времени  $t$ .

Уравнения (6), (7) дополняются граничными условиями на кончике трещины и на скважине

$$p|_{r=R_{front}} = p_{pore}, \quad Q|_{r=R_w} = Q_{in} \quad (7)$$

где  $p_{pore}$  - поровое давление в породе,  $Q_{in}$  - скорость закачки жидкости в скважину.

Также в эту подмодель включается условие для скорости фронта жидкости

$$\frac{\partial R_{front}}{\partial t} = \frac{Q(R_{front})}{2\pi R_{front} \cdot W(R_{front})}. \quad (8)$$

Течения жидкости в модели продольной трещины описывается уравнениями

$$\frac{\partial p}{\partial l} = -\frac{2K}{W} \left( \frac{4n+2}{nW^2} Q \right)^n, \quad 0 \leq l \leq L_{frac}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial l} + Q_L(l, t) = 0, \quad 0 \leq l \leq L_{frac}. \quad (10)$$

Здесь  $p(l, t)$ ,  $W(l, t)$ ,  $Q(l, t)$  - давление жидкости, ширина трещины и поток жидкости через сечение трещины на расстоянии  $l$  от скважины,  $L_{frac}(t)$  - длина трещины в момент времени  $t$ . В настоящей модели считается, что жидкость заполняет трещину вплоть до кончика. Замыкание уравнений осуществляется с помощью граничного условия для скорости закачки

$$Q(0, t) = Q_{in}(t) \quad (11)$$

и уравнения баланса

$$\int_0^{L_{frac}(t)} W(l, t) dl = Q_{in}t - \int_0^t \int_0^{L_{frac}(\tau)} Q_L(l, \tau) dl d\tau. \quad (12)$$

Для описания утечки жидкости в обеих моделях используется эмпирический закон Картера [1, 19]. Кроме простоты, его достоинством является то, что для использования достаточно значения одного параметра, методики определения которого уже хорошо отработаны, тогда как, более сложные модели требуют информации и свойствах породы, которая не всегда доступна. Согласно закону Картера, объем, утекающий через берега поперечной и продольной трещин рассчитывается, соответственно, как

$$Q_L(r, t) = 2 \int_0^{2\pi} u_L(r, \varphi, t) r d\varphi = \frac{4\pi r C_L}{\sqrt{t - t_{exp}(l)}}, \quad Q_L(l, t) = \frac{2C_L}{\sqrt{t - t_{exp}(l)}}, \quad (13)$$

где  $C_L$  эмпирический коэффициент утечек,  $t$  - текущее время, а  $t_{exp}$  - время достижения кончиком трещины точки на расстоянии  $r, l$  от скважины.

#### 4. Результаты расчетов: эволюция поперечной трещины

Разработанная модель поперечной радиальной трещины использовалась для описания ее эволюции трещины и определения влияния различных параметров гидроразрыва. Так на Рис. 2 показаны зависимости длины и ширины трещины от времени при различных значениях расхода в скважину. Стоит отметить, тот факт, что интенсивность закачки жидкости не влияет на давление в скважине. Повышение скорости закачки требует больших мощностей насосов, однако позволяет сократить время процесса и количество утекающей в породу жидкости гидроразрыва.

#### 5. Результаты расчетов: эволюция продольной трещины

Модель поперечной трещины позволяет описать процесс выхода трещины на магистральное направление. Было рассмотрено распространение трещины из перфораций, находящихся под углами 30, 60 и 90 к нему (Рис. 3). Видно, что траектория трещины выходит на становится прямолинейной на расстоянии не более 10 диаметров скважины.

На Рис. 3 показаны зависимости ширины трещины и давления от времени для каждого из углов. Меньшая ширина при больших углах перфорирования обусловлена пережатием трещины в окрестности скважины на участке искривленной траектории. Такое пережатие препятствует проникновению пропанта в трещину и может вызвать остановку всего процесса.

#### Список литературы

- [1] Reservoir stimulation (third edition) // Editors: Michael J. Economides (University of Houston, USA), Kenneth G. Nolte (Schlumberger Tech. Corp., USA), John Wiley & Sons, LTD, 2000.
- [2] Adachi J., Siebrits E., Peirce A., Desroches J. Computer simulation of hydraulic fractures // Internal Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences. 2007. Vol. 44. P. 739–757.
- [3] Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения, М. Наука, 1974, 640 С.
- [4] Слепян Л.И. Механика трещин. – Л. Судостроение, – 1990. – 296С.
- [5] A.P.S. Selvadurai, A.T. Manuari Computational modeling of steady crack extension in poroelastic media // Int. J. Solid Structures, – Vol 35, No 34-35, – 1998, – p. 4869-4885.
- [6] S. Jiangbo, Sunjun, D. Zengjie, Z. Huijue The finite element analysis of deformation and stress triaxiality of a mixed I+II mode elasticplastic crack tip // Int. J. of Fracture, – 87, N 47, – 1997.
- [7] R. Majidi, S.Z. Miska, M.Yu, L.G. Thompson *Modeling of drilling fluid losses in naturally fractured formations* // SPE114630
- [8] Алексеенко О.П., Вайсман А.М. Рост почти заполненной осесимметричной трещины гидроразрыва при малых и больших утечках // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2004. N. 3. С. 1–11.
- [9] Geertsma J., de Klerk F. A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures // J. Petrol Technol. 1969. N. 12. P. 1571–1581.
- [10] Nordgren R.P. Propagation of a vertical hydraulic fracture // Soc. Petrol. Eng. Journal. 1972. Vol. 12. N. 4. P. 306–314.

- [11] Atkinson C., Eftaxiopoulos D.A. Numerical and analytical solutions for the problem of hydraulic fracturing from a cased and cemented wellbore // International Journal of Solids and Structures. 2002. N. 39. P. 1621–1650.
- [12] Cherny S., Chirkov D., Lapin V., Muranov A., Bannikov D., Miller M., Willberg D. Two-dimensional modeling of the near-wellbore fracture tortuosity effect // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 2009. Vol. 36. N. 6. P. 992–1000.
- [13] Brebbia C.A. The Boundary Element Method for Engineers. – Pentech Press: London, 1978.
- [14] Barree R.D. A new look at fracture-tip screen-out behavior // J. of Petr. Tech., – 43, No. 2, – 1991, – p. 138-143.
- [15] Зубков В.В., Кошелев В.Ф., Линьков А.М. Численное моделирование инициирования и роста трещин гидроразрыва // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2007. N. 1. С. 45–63.
- [16] Ивашнев О.Е., Смирнов Н.Н. Формирование трещины гидроразрыва в пористой среде // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1. Математика механика. 2003. N. 6. С. 28–36.
- [17] Татосов А.В. Модель закачки пропанта в трещину гидроразрыва // Вычислительные технологии. 2005. Т. 10. N. 6. С. 91-101.
- [18] К.С. Басниев, И.Н. Кочина, В.М. Максимов Подземная гидромеханика, М. Недра, 1993., 416 с.
- [19] Carter R.D. Derivation of the general equation for estimating of extent of the fracturing area // App. I of Optimum fluid Characteristics for fracture extension, Drilling and production practice, G.C. Howard and C.R. Fast, NY, USA, American petr. institute, 1957, 261-269.

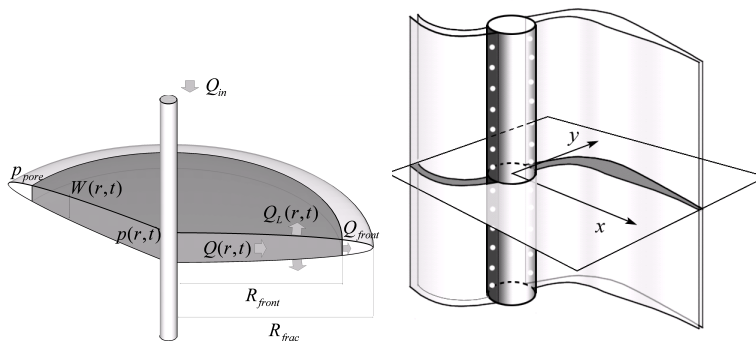


Рис. 1. Схема поперечной радиальной (слева) и плоской продольной (справа) трещин.

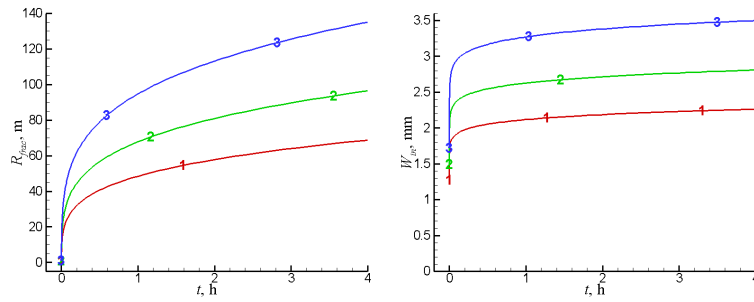


Рис. 2. Зависимости длины и ширины трещины от времени при различных значениях расхода в скважину: 1 – 20 барр/час, 2 – 40 барр/час, 3 – 80 барр/час.

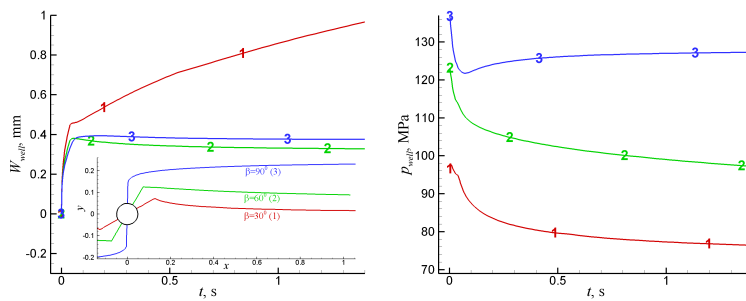


Рис. 3. Зависимости давления и ширины трещины от времени при различных углах перфорирования: 1 –  $\beta = 30^\circ$  2 –  $\beta = 60^\circ$  3 –  $\beta = 90^\circ$