Бифуркация Андронова-Хопфа в сингулярно-возмущенных распределенных системах.

Камаев Д.А.
Научно-производственное объединение «Тайфун»
e-mail: kda@feerc.obninsk.org

Чепурко С.В.
Обнинский институт атомной энергетики (ИАТЭ)

Рассматривается динамическая система, состояния которой описываются определенными на множестве функциями, образующими функциональное пространство - фазовое пространство динамической системы. Динамика системы определяется эволюционным уравнением, правая часть которого зависит от скалярных параметров: бифуркационного параметра и параметра связи . При нулевом значении параметра связи система распадается на семейство не зависящих друг от друга динамических систем. Каждому элементу множества соответствует динамическая система семейства, зависящая от параметра . Относительно этого семейства предполагается, что все динамические системы имеют нулевое состояние равновесия, которое теряет устойчивость при переходе параметра через нулевое значение. Условия потери устойчивости таковы, что у каждой динамической системы происходит бифуркация рождения устойчивого цикла (бифуркация Андронова-Хопфа). В докладе обсуждаются бифуркации, происходящие в системе при ненулевом значении параметра связи. Доказано возникновение семейства периодических траекторий, а также исследована их устойчивость. В качестве примеров рассматриваются динамические системы, порождаемые дифференциальными уравнениям в частных производных.

1. Рассматривается динамическая система, состояние которой описывается функциями $u : \Omega \to R^n$, определёнными на некотором множестве Ω и образующими функциональное пространство $W(\Omega)$. Эволюция динамической системы происходит в соответствии с уравнением:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta L(u) + f(u, \alpha) \tag{1}$$

где $u = u(x,t)$, $x \in \Omega$, параметры $\beta \in (-\beta_0, \beta_0) \subset R^1$, $\alpha \in (-\alpha_0, \alpha_0) \subset R^1$, функция $f : R^n \times (-\alpha_0, \alpha_0) \to R^n$ гладко зависит от своих аргументов, L - линейный оператор в пространстве $W(\Omega)$. Если параметр связи $\beta = 0$, то рассматриваемая динамическая система распадается на множество независимых систем, описываемых уравнениями

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u, \alpha), \quad x \in \Omega \tag{2}$$

Если $\beta \neq 0$, то эти системы взаимодействуют за счёт слагаемого $\beta L(u)$ в правой части (1). Взаимодействие можно считать слабым, если мало значение параметра β. Пусть $f(0, \alpha) = 0$, и при $\alpha = 0$ в системе уравнений (2) имеет место бифуркация рождения цикла из нулевого состояния равновесия [1-2] (бифуркация Андронова-Хопфа). В докладе рассматривается вопрос рождения цикла из нулевого состояния равновесия системы (1), когда параметры $\alpha,\ \beta$ имеют одинаковый порядок малости. Дальнейшие рассуждения приведены для $n=2$. В случае $n>2$ могут быть получены аналогичные результаты с помощью метода проекций[3].

2. Представим систему уравнений (2) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}=A\left(\alpha\right)u+g\left(u,\alpha\right), \tag{3}$$

линеаризовав правую часть в точке $u=0$. Относительно спектра линейной части $A\left(\alpha\right)$ зафиксируем обычные предположения, обеспечивающие бифуркацию рождения цикла из состояния равновесия: спектру $A\left(\alpha\right)$ принадлежит пара комплексно-сопряженных собственных чисел $\lambda\left(\alpha\right),\ \bar{\lambda}\left(\alpha\right)$ вида $\lambda\left(\alpha\right)=\gamma\left(\alpha\right)+i\omega\left(\alpha\right)$, где $\gamma\left(0\right)=0,\ \nu=\frac{d\gamma}{d\alpha}\left(0\right)\neq 0,\ \omega=\omega\left(0\right)\neq 0$, остальная часть спектра $A\left(\alpha\right)$ равномерно по α отделена от мнимой оси на положительное расстояние. Зафиксируем для каждого $\alpha\in\left(-\alpha_0,\alpha_0\right)$ в R^2 систему координат $\left\{e_1\left(\alpha\right),e_2\left(\alpha\right)\right\}$, связанную со спектром оператора $A\left(\alpha\right)$ так, что в этих координатах

$$A\left(\alpha\right)=\begin{pmatrix}\gamma\left(\alpha\right) & -\omega\left(\alpha\right)\\ \omega\left(\alpha\right) & \gamma\left(\alpha\right)\end{pmatrix}.$$

Пусть $B\left(\alpha\right)$ - матрица перехода от системы $\left\{e_1\left(\alpha\right),e_2\left(\alpha\right)\right\}$ к исходной системе координат. В таком случае, если $u=v_1e_1\left(\alpha\right)+v_2e_2\left(\alpha\right)$, то система уравнений (3) может быть записана в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\begin{pmatrix}\gamma\left(\alpha\right) & -\omega\left(\alpha\right)\\ \omega\left(\alpha\right) & \gamma\left(\alpha\right)\end{pmatrix}v+g_1\left(v,\alpha\right) \tag{4}$$

(4) где $v=\left(v_1,v_2\right),\quad g_1\left(v,\alpha\right)=B^{-1}\left(\alpha\right)g\left(B\left(\alpha\right)v,\alpha\right)$.

Перенормируем систему (4) при помощи замены $v\Rightarrow\varepsilon v,\quad \alpha\Rightarrow\varepsilon\alpha,\quad \beta\Rightarrow\varepsilon\beta$, $0<\varepsilon<<1$, и перейдём в V-пространстве к полярным координатам: $v_1=\rho\cos\left(\phi\right)$, $v_2=\rho\sin\left(\phi\right)$.

Тогда система (4) будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\rho\\ \phi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \omega\end{pmatrix}+\varepsilon\left[\beta\Lambda\left(\rho,\phi\right)L_1\begin{pmatrix}\rho\cos\left(\phi\right)\\ \rho\sin\left(\phi\right)\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}\nu\rho\\ -\frac{d\omega(0)}{d\alpha}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\rho^2J_3^1\left(\phi,\varepsilon\alpha\right)\\ \rho J_3^2\left(\phi,\varepsilon\alpha\right)\end{pmatrix}\right]+$$

$$+\varepsilon^2\begin{pmatrix}\rho^3J_4^1\left(\phi,\varepsilon\alpha\right)\\ \rho^2J_4^2\left(\phi,\varepsilon\alpha\right)\end{pmatrix}+\left(\varepsilon^2\alpha^2\right)+\left(\varepsilon^3\right), \tag{5}$$

где $L_1\left(v\right)=B^{-1}\left(\alpha\right)LB\left(\alpha\right)v$; $\Lambda\left(\rho,\phi\right)=\begin{pmatrix}\cos\left(\phi\right) & \sin\left(\phi\right)\\ -\rho^{-1}\sin\left(\phi\right) & \rho^{-1}\cos\left(\phi\right)\end{pmatrix}$;

$J_k^m\left(\phi,\varepsilon\alpha\right)$ - однородные тригонометрические многочлены степени $k=3,4$ для каждого $m=1,2$.

Если оператор L обладает следующим свойством: выражение $\Lambda\left(\rho,\phi+t\right)L_1\begin{pmatrix}\rho\cos\left(\phi+t\right)\\ \rho\sin\left(\phi+t\right)\end{pmatrix}$ 2π-периодично по независимой переменной t, то в этом случае по аналогии с [2] можно формально применить к системе (5) процедуру усреднения и получить усредненную систему уравнений, которая позволяет проанализировать поведение решений в системе (1) в окрестности нулевого состояния равновесия при изменении параметров $\alpha,\ \beta$. В докладе рассматривается применение приведенной схемы рассуждений к распределенному уравнению Лиенара:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\beta\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-u+\alpha\frac{\partial u}{\partial t}-\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^3,\quad x\in\left(0,1\right),$$

с однородными краевыми условиями второго рода, а также в классе периодических по x функций с периодом 1.

Список литературы

[1] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Е. Теория колебаний. 1956. М., С. 918.

[2] Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и её приложения. 1980. М., С. 368

[3] Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. Пер с англ. Под ред. Суинни Х., Голлаба Дж. 1984. М.: Мир, С. 344