

О равновесиях Вальраса и Эджворта в многорегиональных экономических системах*

В.А. Васильев

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
vasilev@math.nsc.ru

ПРЕЗЕНТАЦИЯ

*Работа выполнена при финансовой поддержке Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН "Развитие теории, методологии и прикладных экономико-математических исследований" и Российского фонда фундаментальных исследований, № 10-06-00168а.

★

1 Модель \mathcal{M}

В докладе рассматривается модель экономического взаимодействия регионов из [2]:

$$\mathcal{M} = \langle R, \{A^s, G^s, H^s, b^s, d^s\}_{s \in R} \rangle,$$

где

$R = \{1, \dots, r\}$ - множество регионов;

A^s - прямоугольная матрица размера $n_s \times l_s$, характеризующая производственный сектор региона $s \in R$;

G^s и H^s - прямоугольные матрицы размера $n_s \times n$, описывающие способы вывоза и ввоза в регионе $s \in R$;

b^s - вектор-столбец размерности n_s , характеризующий имеющийся ресурсно-технологический потенциал региона $s \in R$;

d^s - вектор-столбец размерности n_s , описывающий затраты ресурсов и продукции, связанные с достижением целей развития региона $s \in R$.

★

Ресурсно-технологические возможности Z_s региона s (планы региона $s \in R$):

$$Z_s := \{z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \geq 0 \mid A^s x^s + G^s u^s + H^s v^s \geq b^s + \lambda_s d^s\},$$

где

$$x^s = (x_i^s)_{i=1}^{l_s}, \quad u^s = (u_j^s)_{j=1}^n, \quad v^s = (v_j^s)_{j=1}^n -$$

объёмы производства, вывоза и ввоза, соответственно,

$$\lambda_s \in \mathbb{R}_+ -$$

степень достижения целей регионального развития для $s \in R$.

Целевые функции регионов $s \in R$:

$$t_s(z^s) = t_s(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) := \lambda_s, \quad (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s, \quad s \in R.$$

Сбалансированные планы модели \mathcal{M} :

$$Z_{\mathcal{M}}(R) = \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s)_{s \in R} \in \prod_{s \in R} Z_s \mid \sum_{s \in R} u^s \geq \sum_{s \in R} v^s\}.$$

★

Строго автаркические планы регионов $s \in R$:

$$Z_{\mathcal{M}}^0(s) := \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s \mid u^s \gg v^s\}, \quad s \in R.$$

Строго автаркический регион s :

$$Z_{\mathcal{M}}^0(s) \neq \emptyset.$$

Ненасыщенный регион s (ниже используется сокращение $\widehat{Z}_s := \text{Pr}_{Z_s} Z_{\mathcal{M}}(R)$):

$$\sup_{z^s \in Z_s} t_s(z^s) > \sup_{z^s \in \widehat{Z}_s} t_s(z^s).$$

Р.Т.В.- ограниченный регион s :

$$\|z^s\| \leq K_s \quad \text{для всех } z^s \in Z_s.$$

★

2 Равновесие Вальраса и нечеткое ядро

Вальрасовские планы

Определение 1. Будем говорить, что план $\bar{z} = (\bar{x}^s, \bar{u}^s, \bar{v}^s, \bar{\lambda}_s)_{s \in R} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$ является вальрасовским равновесием модели \mathcal{M} , если существует ненулевой вектор цен $\bar{p} \in \mathbb{R}_+^n$ такой, что

$$\bar{p} \cdot \bar{u}^s \geq \bar{p} \cdot \bar{v}^s$$

для всех $s \in R$, и при этом для любых $s \in R$ и $z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s$ справедлива импликация

$$\lambda_s > \bar{\lambda}_s \Rightarrow \bar{p} \cdot u^s < \bar{p} \cdot v^s.$$

Совокупность вальрасовских равновесий модели \mathcal{M} будем обозначать через $W(\mathcal{M})$.

Итак, региональные планы $\bar{z}^s = (\bar{x}^s, \bar{u}^s, \bar{v}^s, \bar{\lambda}_s)$ образуют вальрасовское равновесие модели \mathcal{M} тогда и только тогда, когда они сбалансированы (то есть когда системный план $(\bar{z}^s)_{s \in R}$ принадлежит множеству $Z_{\mathcal{M}}(R)$), и при некоторых ненулевых ценах $\bar{p} \in \mathbb{R}_+^n$ планы \bar{z}^s доставляют максимальное значение целевым функциям t_s на **бюджетных множествах**

$$B_s(\bar{p}) = \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s \mid \bar{p} \cdot u^s \geq \bar{p} \cdot v^s\}, \quad s \in R.$$

★

Нечеткое ядро и вальрасовские планы

$$\sigma_F := \{ f = (f_1, \dots, f_r) \mid f \neq 0, f_s \in [0, 1], s \in R \}$$

(элементы множества σ_F называются **нечеткими коалициями**). **Носитель нечёткой коалиции** $f = (f_1, \dots, f_r)$ определяется равенством $R(f) := \{s \in R \mid f_s > 0\}$.

Определение 2. Будем говорить, что план $(\bar{z}^s)_{s \in R} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$ блокируется нечёткой коалицией $f = (f_1, \dots, f_r)$, если существуют региональные планы $z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s$, $s \in R(f)$, такие, что

- (1) $t_s(z^s) > t_s(\bar{z}^s)$, $s \in R(f)$,
- (2) $\sum_{s \in R(f)} f_s u^s \geq \sum_{s \in R(f)} f_s v^s$.

Совокупность сбалансированных планов модели \mathcal{M} , не блокируемых никакой нечёткой коалицией f , будем обозначать через $C_F(\mathcal{M})$ и называть **нечётким ядром модели \mathcal{M}** .

Теорема 1. Если регионы модели \mathcal{M} строго автаркические и ненасыщенные, то ее нечеткое ядро $C_F(\mathcal{M})$ совпадает с множеством вальрасовских планов $W(\mathcal{M})$.

★

3 Равновесия Вальраса и Эджворта

Дробление (измельчение) модели \mathcal{M} .

Зафиксируем $k \geq 1$ и положим

$$R_{[k]} := \{(s, m) \mid s \in R, m = 1, \dots, k\}. \quad (1)$$

Для каждого $(s, m) \in R_{[k]}$ (понимаемого в дальнейшем как "номер" m -ой доли региона $s \in R$ исходной экономики \mathcal{M}) введём матрицы A^{sm} , G^{sm} , H^{sm} и векторы b^{sm} , d^{sm} , полагая

$$A^{sm} := A^s, \quad G^{sm} := G^s, \quad H^{sm} := H^s, \quad b^{sm} := \frac{1}{k}b^s, \quad d^{sm} := d^s. \quad (2)$$

Определение 3. *Модель многорегиональной экономической системы*

$$\mathcal{M}_{[k]} := \langle R_{[k]}, \{A^{sm}, G^{sm}, H^{sm}, b^{sm}, d^{sm}\}_{(s,m) \in R_{[k]}} \rangle, \quad (3)$$

параметры которой определяются соотношениями (1) и (2), будем называть k -дроблением модели \mathcal{M} .

Наконец, для $k \geq 1$ через $z_{[k]}$ обозначим k -дробление плана $z = (z^s)_{s \in R} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$, представляющее собой сбалансированный план модели $\mathcal{M}_{[k]}$, построенный из региональных составляющих z^s плана z по формуле:

$$(z_{[k]})^{sm} := \frac{1}{k}z^s, \quad s \in R, m = 1, \dots, k.$$

★

Равновесие Эджворта модели \mathcal{M} .

Завершая описание конструкции, лежащей в основе понятия равновесия Эджворта, напомним определение обычного (то есть порождаемого обычными коалициями $T \subseteq R$) блокирования и обычного ядра в модели \mathcal{M} .

Определение 4. Коалиция $T \subseteq R$ блокирует $\bar{z} = (\bar{z}^s)_{s \in R} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$, если у неё имеется такой план $(z^s)_{s \in T} = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s)_{s \in T} \in \prod_{s \in T} Z_s$, для которого выполняются соотношения

$$(1) \quad t_s(z^s) > t_s(\bar{z}^s), \quad s \in T,$$

$$(2) \quad \sum_{s \in T} u^s \geq \sum_{s \in T} v^s.$$

Множество всех планов $z \in Z_{\mathcal{M}}(R)$, которые не блокируются никакой (обычной) коалицией $T \subseteq R$, будем обозначать через $C(\mathcal{M})$ и называть **ядром модели \mathcal{M}** .

Определение 5. План $\bar{z} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$ называется **равновесием Эджворта модели \mathcal{M}** , если все его k -дробления содержатся в ядрах соответствующих дроблений модели \mathcal{M} :

$$\bar{z}_{[k]} \in C(\mathcal{M}_{[k]}) \quad \text{для всех } k \geq 1.$$

Совокупность всех равновесий Эджворта модели \mathcal{M} будем обозначать через $E(\mathcal{M})$.

★

Эквивалентность равновесий Вальраса и Эджворта

Учитывая, что для нечеткого ядра и равновесий Эджворта имеет место вложение $C_F(\mathcal{M}) \subseteq E(\mathcal{M})$, нижеследующая теорема эквивалентности является усилением теоремы 1.

Теорема 2. *Если все регионы системы \mathcal{M} строго автаркические и ненасыщенные, то множество ее вальрасовских равновесий совпадает с множеством равновесий Эджворта*

$$W(\mathcal{M}) = E(\mathcal{M}).$$

★

4 Некоторые приложения теорем эквивалентности

Напомним [4,5], что однородная составляющая \mathcal{M}_0 модели \mathcal{M} отличается от нее только тем, что ресурсно-технологический потенциал каждого из регионов модели \mathcal{M}_0 равен нулю: $b^s = 0$ для каждого $s \in R$.

Определение 6. Будем говорить, что модель \mathcal{M} не имеет "рога изобилия", если множество сбалансированных планов однородной составляющей \mathcal{M}_0 этой модели исчерпывается нулевым планом: $Z_{\mathcal{M}_0}(R) = \{0\}$.

Отметим, что отсутствие "рога изобилия" в смысле определения 6 означает, как и в классических моделях равновесного анализа, что при нулевом экономическом потенциале возможна лишь нулевая хозяйственная активность.

★

Еще одно, чисто техническое условие регулярности, используемое для получения новой теоремы существования вальрасовских равновесий рассматриваемых экономических систем.

Определение 7. Будем говорить, что модель \mathcal{M} является \mathcal{P} -регулярной, если $P'(\mathcal{M}) = P(\mathcal{M})$, где $P(\mathcal{M})$ - множество Парето-оптимальных, а $P'(\mathcal{M})$ - слабо Парето-оптимальных планов из $Z_{\mathcal{M}}(R)$.

Опираясь на теорему 2 и упоминавшийся уже результат из [5], касающийся существования равновесия Эджворта модели \mathcal{M} , получаем новые условия существования вальрасовских равновесий в многорегиональных экономических системах, не включающие, в отличие от [8], требования ограниченности множеств Z_s , $s \in R$.

Теорема 3. Если \mathcal{M} является \mathcal{P} -регулярной и не имеет "рога изобилия", а ее регионы - строго автаркические и ненасыщенные, то в \mathcal{M} существует равновесие Вальраса.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Vasil'ev V.A. On Edgeworth equilibria for some types of nonclassic markets. *Siberian Advances in Mathematics*. 1996. V. 6, № 3. P. 96–150.

[2]. Рубинштейн А.Г. Моделирование экономических взаимодействий в территориальных системах. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние. 1983.

[3]. Гранберг А.Г., Суслов В.И., Суспицын С.А. Многорегиональные системы: экономико-математическое исследование. Новосибирск: Наука. Сиб. Науч. Изд-во. 2007.

[4]. Васильев В.А., Суслов В.И. О неблокируемых состояниях многорегиональных экономических систем. *Сибирский журнал индустриальной математики*. 2009. Т. XII, № 4(40). С. 23–34.

[5]. Васильев В.А., Суслов В.И. Равновесие Эджворта в одной модели межрегиональных экономических отношений. *Сибирский журнал индустриальной математики*. 2010. Т. XIII, № 1(41). С. 18–33.

[6]. Гильденбранд В. Ядро и равновесие в большой экономике: Пер. с англ. М.: Наука. 1986.

[7]. Алипрантис К., Браун Д., Бёркеншо О. Существование и оптимальность конкурентного равновесия. М.: Мир. 1995.

[8]. Васильев В.А. О существовании вальрасовского равновесия в модели межрегиональных экономических отношений. *Дискретный анализ и исследование операций* (в печати).