О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ РОСТА БИОМАССЫ

М.М. Бухурова
Учреждение Российской Академии наук Научно - исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН
(г. Нальчик)

При разработке различных систем автоматизированного прогнозирования урожайности важное место занимают математические модели роста и развития основных сельхозкультур, участвующих в севообороте. В качестве математической модели рассматривается обобщенное уравнение Ферхюльста-Вольтерра [1]:

$$\frac{d}{dt}m(t) = m(t)[\varepsilon(t) + q(t)m(t) + \lambda D_{0t}^{-\nu}m(t)], \tag{1}$$

где $D_{0t}^{-\nu}$ - оператор дробного интегрирования Римана-Лиувилля порядка - ν, $0 < \nu < 1$, $\varepsilon(t), q(t)$- непрерывные на временном сигменте $0 \leq t \leq T$ функции, учитывающие различные факторы среды обитания сельскохозяйственной культуры, $D_{0t}^{-\nu}m(t)$ - выражает влияние наследственных факторов отдельной культуры.

Задача Коши для уравнения (1) ставится следующим образом.

Задача Коши. *Найти положительное решение $m = m(t)$ уравнения (1), непрерывное на $0 \leq t \leq T$ и удовлетворяющее начальному условию*

$$m(0) = m_0. \tag{2}$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{dt}m(t) - \overline{m}q(t)m(t) = \overline{m}[\varepsilon(t) + \lambda D_{0t}^{-\nu}m(t)], \tag{3}$$

где

$$\overline{m} = \frac{1}{T}\int_0^T m(t)dt. \tag{4}$$

Следуя А.М. Нахушеву [2] точное решение задачи (2) -(3) можно интерпритировать как приближенное решение задачи (1)-(2). Функция $m(t)$, являющаяся решением задачи (2)-(3) удовлетворяет следующему интегральному уравнению

$$m(t) = f(t) - \mu\int_0^t K(t,\eta)m(\eta)d\eta = f(t), \tag{5}$$

где $K(t,\eta) = \int_\eta^t \frac{exp[a(t)-a(\xi)]}{(\xi-\eta)^{1-\nu}}d\xi$,

$f(t) = m_0 exp[a(t)] + \overline{m}\int_0^t exp[a(t)-a(\xi)]\varepsilon(\xi)d\xi$,

$a(t) = \overline{m}\int_0^t q(\xi)d\xi, \mu = \frac{\overline{m}\lambda}{\Gamma(\nu)}$.

Уравнение (5) является уравнением Вольтерра 2 рода, единственное решение которого имеет вид:

$$m(t) = f(t) + \mu\int_0^t R(t,\eta;\mu)f(\eta)d\eta, \tag{6}$$

где $R(t,\eta;\mu)$-резольвента ядра $K(t,\eta)$.

Функция $m(t)$, определяемая равенством (6), можно считать приближенным решением задачи (1)-(4), при этом значение $\overline{m}$ однозначно определяется из (3) и (6).

Список литературы

[1] Нахушев А.М., Казиев В.М., Энеева Л.А., Ананчина Г.А., Нахушева З.А. К вопросу автоматизированного прогнозирования урожайности основных сельхозкультур в условиях орошения и степной зоны. Сб.: САПР и АСПР в мелиорации, Нальчик, 1983, с.156.

[2] Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его

приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения. 1982. Т.18,№1.С.77-81.