Сравнение сложности вычисления функций q-значной логики двумя классами ветвящихся программ

М. С. Громов

Новосибирский Государственный университет

mgtriffid@gmail.com

Детерминированной ветвящейся программой от переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется ориентированный граф без контуров с одной входной вершиной и двумя выходными вершинами, одна из которых помечена нулем, а другая – единицей. Все невыходные вершины помечены переменными из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Под сложностью детерминированной ветвящейся программы понимается число вершин программы, помеченных переменными. Булева функция $f(x_1, ..., x_n)$ принимает значение 1 на наборе $(a_1, \ldots, a_n)$, если существует путь от входной вершины к выходной вершине, помеченной единицей, который из вершин, помеченных переменной x_i, проходит по дугам, помеченным a_i.

Это определение можно естественным образом расширить на случай q-значной логики. Теперь число выходных вершин равно q, из каждой вершины, кроме выходных, выходит ровно q дуг. Такая ветвящаяся программа будет реализовывать функцию $f : \{0, \ldots, q-1\}^n \to \{0, \ldots, q-1\}$.

Будем рассматривать ветвящиеся программы, у которых порядок переменных, которые встречаются на пути от входной вершины до выходной, не зависит от пути, то есть для любого аргумента в процессе работы программы переменные встречаются в фиксированном порядке. Программы такого вида называются упорядоченными ветвящимися программами (англ. Ordered Decision Diagram)

Другое ограничение на структуру программы – ограничение на число проверок переменных в цепи, когда в любой цепи, идущей от входной вершины к выходной, вершины, помеченные любой переменной, встречаются не более k раз. Такие программы называются ветвящимися k-программами (англ. Read-k-times-only decision diagram).

Пусть K – некоторый класс ветвящихся программ. Сложностью вычисления функции f в классе K называется сложность минимальной программы из класса K, вычисляющей функцию f. Эта величина обозначается $C_K(f)$

Рассмотрим два класса ветвящихся программ: $1ODD$ — класс упорядоченных ветвящихся 1-программ и $2ODD$ — класс упорядоченных ветвящихся 2-программ.

Ясно, что класс $1ODD$ является подмножеством класса $2ODD$, поскольку если переменная встречается на пути не более одного раза, то тем более и не более двух раз.

Рассмотрим последовательность функций $F_1, F_2, \ldots, F_N, \ldots$ q-значной логики, $q \geqslant 3$, где функция F_N определяется следующим образом: F_N зависит от N^2 переменных и принимает значение 1, если аргумент как слово в алфавите $\{0, \ldots, q-1\}$ содержит подслово вида XX длины $2N$, и принимает значение 0, если такого подслова в аргументе нет.

Например, функция $F_4\,(x_1, x_2, \ldots, x_{15}, x_{16})$ принимает значение 1 на наборе $(1, 0, 4, 1, 3, 2, 4, 0,$ поскольку в слове 1041324032401131 имеется подслово 32403240, но она принимает значение 0 на наборе $(1, 4, 5, 1, 2, 4, 3, 1, 2, 1, 3, 5, 1, 0, 0, 2)$, несмотря на наличие подслова 00, так как его длина 2, а не 8, как требуется.

В настоящей работе даны полиномиальная верхняя оценка сложности функции F_N в классе упорядоченных ветвящихся 2-программ и сверхполиномиальная нижняя оценка сложности функции F_N в классе упорядоченных ветвящихся 1-программ.

Полиномиальная верхняя оценка. Сложность $C_{2ODD}(F_N)$ вычисления функции F_N в классе упорядоченных ветвящихся 2-программ не превосходит $(N(q{+}1){+}1)(N^2{-}2N)$.

Сверхполиномиальная нижняя оценка. Сложность $C_{1ODD}(F_N)$ вычисления функции F_N в классе упорядоченных ветвящихся 1-программ превосходит 2^{N-1}.

Очевидным следствием этих двух оценок является следующая

ТЕОРЕМА Существует последовательность функций q-значной логики $(q \geqslant 3)$, для которых сложность реализации в классе упорядоченных 1-программ превосходит в сверхполиномиальное (от количества переменных) число раз сложность реализации в классе упорядоченных 2-программ.