

# МОДЕЛИРОВАНИЕ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ ЭКОСИСТЕМЫ ОЗЕРА

Е.В. Пахт

ФГОУ ВПО Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет, Владивосток, 690091, Россия  
e-mail: [st-francis@mail.ru](mailto:st-francis@mail.ru)

В настоящей работе использовались, предложенные Л. А. Заде [1] идеи применения нечетких множеств для описания неопределенностей в исходных данных о состоянии биологического сообщества.

## Моделирование с неопределенностью

Модель динамической экосистемы построена на основе системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1)$$

Состояние экосистемы описывается  $n$  – мерным вектором  $x$ , компоненты которого представляют собой биомассы соответствующих блоков.

Условия (\*): функция  $f(t, x)$  непрерывна по  $(t, x)$  и непрерывно дифференцируема по  $x$  в окрестности точки  $t = 0$ . Предположим, что решение системы (1) при любом неотрицательном начальном условии существует и единственно для всех неотрицательных значений  $t$ .

Так, как начальное состояние экосистемы известно лишь с некоторой точностью, то можно предположить, что оно принадлежит замкнутому ограниченному множеству  $\Omega_0 \subset D \subset R^n_+$ . Таким образом,  $\Omega_0$  будем рассматривать, как нечеткое подмножество, представленное в виде набора пар «значение вектора  $x_t$  состояния экосистемы в заданный момент времени  $t$  – степень соответствия (близости к) реальному состоянию экосистемы в заданный момент времени  $t$ », где степень соответствия определяется некоторым интервалом значений функции принадлежности (характеристической функции) [1].

Обозначим через  $\varphi(t, x)$  функцию принадлежности состояния экосистемы заданному значению  $x$  в момент времени  $t$ . Характеристическая функция показывает степень принадлежности значения вектора  $x$  состояния экосистемы в заданный момент времени  $t$  к нечеткому подмножеству  $\Omega_t$ . Чем больше  $\varphi(t, x)$ , тем в большей степени вектор  $x \in D$  описывает состояние экосистемы в момент времени  $t \in T$ .

Через  $\chi(t, \tau, x_\tau)$  обозначим решение  $x(t)$  системы уравнений (1) в момент времени  $t$  при условии  $x(\tau) = x_\tau$ . Пусть  $\Omega_0$  замкнутая, ограниченная область в  $D$ . Тогда  $\Omega_t = \chi(t, t_0, \Omega_0)$  – также замкнутая, ограниченная область в  $D$ ,  $t_0 \in T$ .

Утверждение[2]. Пусть  $\varphi(t, x) \in C^1(R^{n+1})$ , задано начальное условие  $\varphi(t_0, x) = \varphi_0(x)$ ,  $\varphi_0 \in C^1(R^n)$  и  $\int_{\Omega_t} \varphi(t, x) dx$  не зависит от  $t$ . Тогда  $\varphi(t, x)$  вычисляется по формуле:

$$\varphi(t, x) = \varphi_0(\chi(0, t, x)) \cdot \exp\left(-\int_0^t \operatorname{div} f(\tau, \chi(\tau, t, x)) d\tau\right). \quad (2)$$

Утверждение доказывается на основе известной формулы Лиувилля [2, 4].

Теорема Лиувилля [6]. Пусть для системы (1) выполняются условия (\*).

Пусть  $V(t)$  - объем области  $\Omega_t$ . Тогда

$$\dot{V}(t) = \int_{\Omega_t} \operatorname{div} f(t, x) dx.$$

### Математические модели для экосистемы озера Большой Окуненок

Озеро Большой Окуненок расположено в Лужском районе Ленинградской области (заказник «Сяберский»). Географические координаты центра озера:  $58^{\circ}48'22''$  N (с. ш.),  $29^{\circ}5'50''$  E (в. д.). Физико - географическая характеристика: площадь водной поверхности – 5.8 га (0.058 кв.км.), средняя глубина – 2 м, максимальная глубина – 3 м. Озеро Большой Окуненок относится к разряду высокоторофных водоемов (с высоким содержанием органики)[3].

В экосистеме озера учтено 36 компонентов: две группы бактерий (одиночные и агрегированные, в том числе входящие в состав детрита), четыре размерные группы потребляемого фитопланктона, синезеленые водоросли (цианобактерии), инфузории и коловратки разных трофических предпочтений, хищный и нехищный зоопланктон, включающий различные виды ракообразных разных размеров и стадий развития, личинки комаров разных видов и стадий развития, бентос среднего размера (хищный и нехищный), макробентос, три вида мальков рыб: карп и сиговые рыбы – пелядь и пелчир, взвешенный и донный детрит, растворенное в воде органическое вещество (РОВ).

Так как в системе (1) множество неопределенных параметров, использовался много-модельный подход [5], состоящий в постепенном дизагрегировании первоначальной модели, уточнении переменных. Простейшие математические модели позволяют подкрепить большую дизагрегированную модель некоторым качественным анализом, рассмотреть основные ее динамические свойства, что в значительной мере облегчает дальнейшую работу с ней.

Поскольку описывается один объект, то все модели должны быть согласованы между собой по структуре и по параметрам. Рассмотрены четыре модели. Время измеряется в сутках, плотности масс (биомасс) блоков – в  $\text{ккал}/\text{м}^2$ .

**Первая модель** отражает иерархию организмов экосистемы: выделены самые крупные ее представители – рыбы, остальные компоненты поделены на живые и «неживые» – детрит, РОВ и биогены. В схеме потоков вещества фитопланктон разного размера, синезеленые водоросли, две группы бактерий, две группы мелких коловраток, аспланхна, науплии ракообразных, две размерные группы циклопов, диаптомусы, мелкие кладоцеры, две размерные группы дафний, пять групп макробентоса представлены одним блоком ( $x_1$ ) (на основе данных о биомассах за 1986 год [3]). Объединены в один блок ( $x_2$ ) три вида рыб. РОВ и разнокачественный детрит (донный и взвешенный) объединены ( $x_3$ ) с биогенными элементами – минеральными веществами на основе углерода, кремния, фосфора и азота, участвующими в образовании органического вещества, в процессе фотосинтеза, построении растительных организмов (фитопланктона). Таким образом, пресноводная экосистема представляется основными блоками сообществ близких видов, ( $x_1$ ) и ( $x_2$ ), и совокупности близких по свойствам веществ ( $x_3$ ).

Модель M1 описывает идеализированную замкнутую по веществу систему, то есть сумма правых частей дифференциальных уравнений M1 равна нулю.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_{31}(x_3) \cdot x_1 - v_{12}(x_1) \cdot x_2 - m_1(x_1) \cdot x_1 \\ \dot{x}_2 = k_{12} \cdot v_{12}(x_1) \cdot x_2 + k_{23} \cdot v_{32}(x_3) \cdot x_2 - m_2(x_2) \cdot x_2 \\ \dot{x}_3 = (1 - k_{12}) \cdot v_{12}(x_1) \cdot x_2 + (1 - k_{23}) \cdot v_{32}(x_3) \cdot x_2 + \\ + m_1(x_1) \cdot x_1 + m_2(x_2) \cdot x_2 - v_{31}(x_3) \cdot x_1 - v_{32}(x_3) \cdot x_2. \end{cases} \quad (M1)$$

Трофические функции скорости выедания блока  $i$  на единицу биомассы блока  $j$  обозначены  $v_{ij}(x_i)$ , доля  $k_{ij}$  этой выеденной биомассы, идет на рост хищника, то есть на образование продукции блоком  $j$ . Такие же функции применяются для описания потребления биогенов фитопланктоном при фотосинтезе, а также для описания потребления планктоном и рыбами РОВ и детрита. Последний формируется за счет неусвоенной пищи и отмершей биомассы, пополняющей детрит со скоростью, определяемой функцией  $m_i(x_i)$  – удельные скорости отмирания.

**Вторая модель** сосредоточена на живой составляющей экосистемы: активно и неактивно движущиеся организмы. В результате сильных упрощений реальной картины построенная модель (M2) не дает точного описания какой-либо конкретной ситуации, но позволяет провести исследование общих свойств объекта. Вторая модель (незамкнутая) представляет взаимодействие планктона ( $x_1$ ) и рыб ( $x_2$ ):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = q(x_1) - v_{12}(x_1) \cdot x_2 - m_1(x_1) \cdot x_1 \\ \dot{x}_2 = k_{12} \cdot v_{12}(x_1) \cdot x_2 - m_2(x_2) \cdot x_2. \end{cases} \quad (M2)$$

В третьей и четвертой моделях реализованы разные гипотезы о трофических взаимодействиях.

Общей закономерностью для водных экосистем является существование двух главных путей переноса энергии – «планктонный» (фитопланктон – нехищный зоопланктон – хищный зоопланктон – рыбы) и «детритно - бактериальный» (отмирающие остатки организмов – детрит – растворенное органическое вещество – микрофлора) [3].

**Третья модель.** Третья модель (незамкнутая), отражающая «планктонный» путь, получена следующим преобразованием: из первого блока первой модели (M1) выделены фитопланктон и синезеленые водоросли, образующие блок ( $y_1$ ), остальные компоненты объединены в блок ( $y_2$ ), три вида рыб образуют блок ( $y_3$ ). РОВ, разнокачественный детрит, и биогенные элементы рассматриваемые в первой модели (M1), не включены в третью модель (M3). Переменные моделей (M1) – (M2) и модели (M3) связаны следующим образом:  $x_1 = y_1 + y_2$ ,  $x_2 = y_3$ .

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = q(y_1) - v_{12}(y_1) \cdot y_2 - m_1(y_1) \cdot y_1 \\ \dot{y}_2 = k_{12} \cdot v_{12}(y_1) \cdot y_2 - v_{23}(y_2) \cdot y_3 - m_2(y_2) \cdot y_2 \\ \dot{y}_3 = k_{23} \cdot v_{23}(y_2) \cdot y_3 - m_3(y_3) \cdot y_3. \end{cases} \quad (M3)$$

Значения коэффициентов смертности  $m_1^{(0)}$  и  $m_2^{(0)}$  вычислены из условия равновесности наблюдаемого состояния системы и условия равенства удельной смертности модели M2 и средней взвешенной удельных смертностей модели M3.

**Четвертая модель.** Так как среди рыб, образующих блок ( $y_3$ ) только в рацион пеляди входят синезеленые водоросли, то эта трофическая связь не была включена в модель (M3). Добавление этой связи с учетом того, что пелядь составляет 14.5% биомассы блока ( $y_3$ ) и синезеленые водоросли – 15% биомассы блока ( $y_1$ ), в первое и третье уравнения модели (M3) приводит к появлению новых слагаемых, соответствующих перетоку энергии из блока ( $y_1$ ) в блок ( $y_3$ ), получим следующую модификацию третьей модели (M3):

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = q(y_1) - v_{12}(y_1) \cdot y_2 - v_{13}(y_1) \cdot y_3 - m_1(y_1) \cdot y_1 \\ \dot{y}_2 = k_{12} \cdot v_{12}(y_1) \cdot y_2 - v_{23}(y_2) \cdot y_3 - m_2(y_2) \cdot y_2 \\ \dot{y}_3 = k_{13} \cdot v_{13}(y_1) \cdot y_3 + k_{23} \cdot v_{23}(y_2) \cdot y_3 - m_3(y_3) \cdot y_3. \end{cases} \quad (M4)$$

Свойства функций во всех моделях предполагаются одинаковыми. Трофические функции  $v(x)$  и функции роста биомассы  $q(x)$  в соответствии с их общими свойствами [7] предполагаются неотрицательными и равными нулю в нуле, строго возрастающими, вогнутыми. Функции  $v(x)$  и  $q(x)$  характеризуют взаимодействия между различными трофическими уровнями. Описание этих взаимодействий представлено функцией Моно [8]:  $v(x) = v^{(0)} \cdot g(x, x_0)$ ,  $q(x) = q^{(0)} \cdot g(x, x_0)$ , где  $g(x, x_0) = \frac{x}{(x_0 + x)}$ . Функция  $m_i(x_i) = m_i^{(0)}$  [8] предполагается постоянной и определяет удельную скорость отмирания вида  $i$  по причинам не связанным с трофическими отношениями.

Предположим, что средние оценки биомасс блоков ([3], таблица № 6) определяют равновесное состояние экосистемы: суммарная плотность биомассы планктона и бентоса составляет 25.3 ккал/м<sup>2</sup>, для рыб – 15.8 ккал/м<sup>2</sup>.

Неизвестные коэффициенты  $v^{(0)}$ ,  $q^{(0)}$  и параметры смертности  $m^{(0)}$  выбраны так, что это состояние является равновесием во всех моделях.

Сделаны расчеты функции принадлежности по формуле (2) для всех моделей. Для некоторого начального состояния задается эллипсоид (или эллипс). На ограниченном этой поверхностью (линией) множестве определяются ненулевые значения начальной функции  $\varphi_0(x)$  принадлежности в виде параболоида, в двухмерном случае, с максимальным значением в центре и нулевым – на границе эллипса.

### Расчеты

Для иллюстрации динамических свойств решений в моделях выбраны различные начальные состояния и проведено сравнение решений во всех моделях.

В модели М1 выбраны несколько начальных состояний с различным биомассами детритного блока. Во всех случаях траектории движения функции принадлежности стремятся к соответствующим асимптотически устойчивым положительным равновесиям на кривой равновесий, представляющей собой однопараметрическую кривую (с параметром  $x_1$ , меняющимся на некотором интервале положительных значений). Но нечеткость начального состояния делает эту устойчивость мало значащей, так как небольшие отклонения начальных значений дают значительные расхождения устойчивых состояний на линии равновесий. В модели М2 из всех выбранных начальных состояний решение стремится к асимптотически устойчивому равновесному решению  $x_3^* = (25.3; 15.8)$ , которое лежит на линии положительных равновесий модели М1. Начальные значения функции принадлежности характеризуют на траекторию и время перехода в устойчивое равновесное состояние. Устойчивое положительное равновесие  $y_4^* = (14.7; 10.5; 15.8)$  в модели М3 совпадает (с учетом соответствий между фазовыми переменными) с равновесием  $x_3^* = (25.3; 15.8)$  модели М2. В модели М4 два асимптотически устойчивых вырожденных равновесных решения  $y_3^* = (9.2; 11.2; 0)$  и  $y_5^* = (14.7; 0; 623.3)$ . Модель М4 имеет также неустойчивое положительное равновесие  $y_4^* = (14.7; 10.5; 15.8)$ . Это приводит к медленному разделению начального односвязного множества положительных значений функции принадлежности на два непересекающихся множества (рис. 1). Каждая из частей движется к одному из устойчивых равновесий, то есть система вырождается. При этом так, как неустойчивость положительного равновесия являет-

ся слабой, то поведение решений вблизи этого равновесия оказывается похожим во всех моделях, а именно решения с начальными условиями в малой окрестности этого неустойчивого положительного равновесия остаются вблизи него и через сто лет.

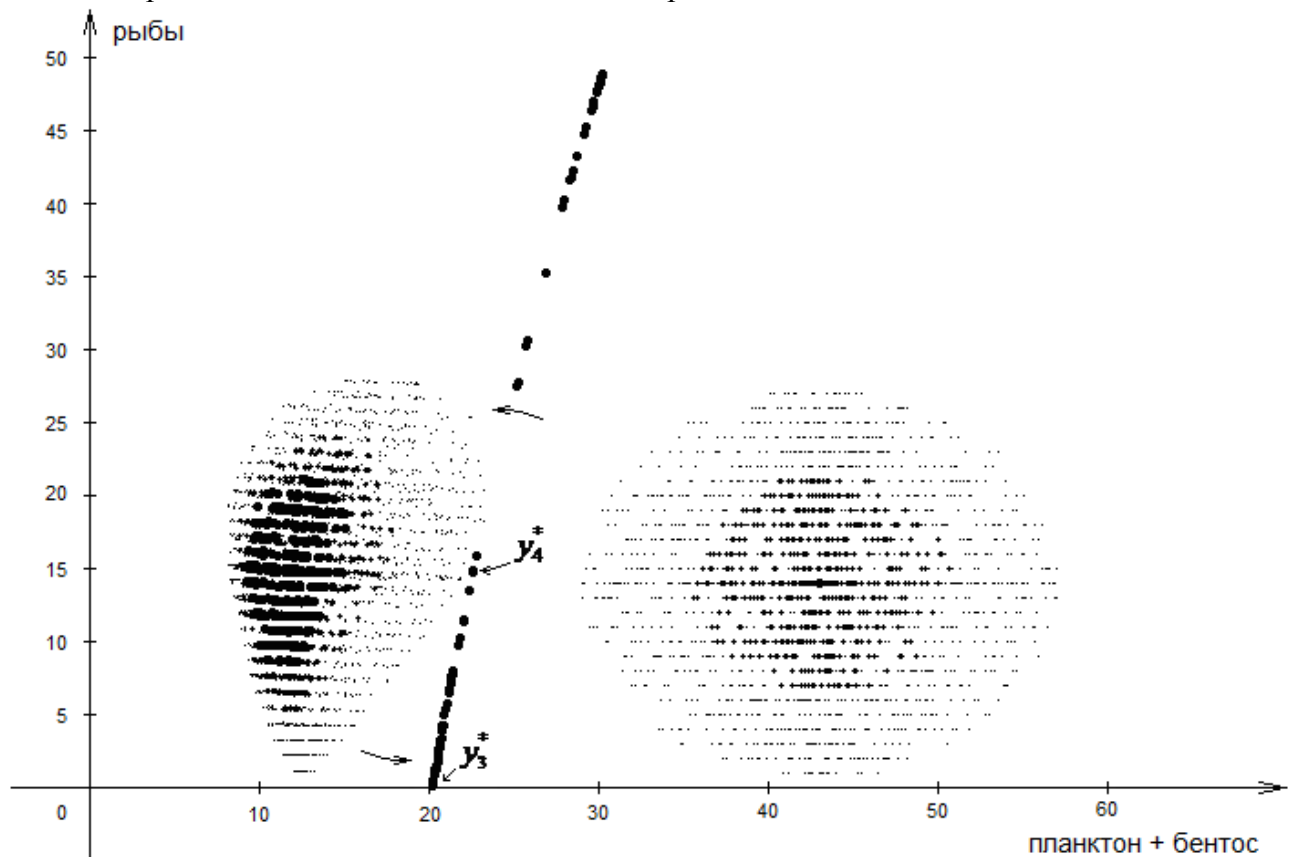


Рис. 1. Точки ненулевых значений функции принадлежности  $\varphi(t, x)$  для четвертой модели М4. Координаты центра начального множества (24.9, 18.1, 14). Стрелками показаны направления смещения образа эллипсоида во времени. Время указано в тыс. суток.

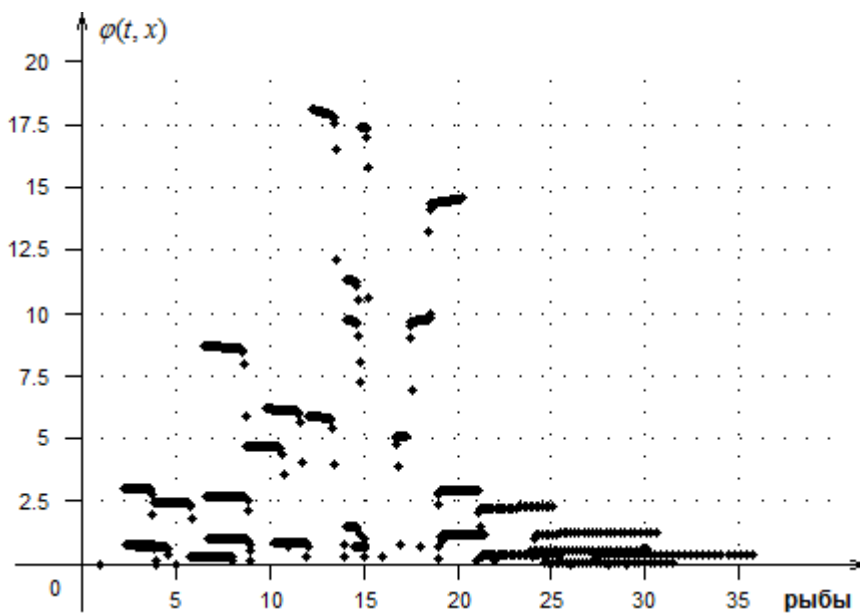


Рис. 2. Ненулевые значения функции принадлежности  $\varphi(t, x)$  для четвертой модели М4. Координаты центра начального множества (24.9, 18.1, 14).

Учет неопределенности состояния системы позволяет проследить начальный момент и последующий процесс разделения множества (рис. 2).

Начальные множества положительных значений функции принадлежности «размываются» и порождают разные возможности эволюции системы – от вырождения до более или менее устойчивого сосуществования всех частей экосистемы. Заметим, время этого вырождения велико (более сотни лет).

Все четыре модели частично согласованы между собой в динамике – существует положительное равновесное решение, общее для второй, третьей и четвертой моделей и принадлежащее множеству равновесных решений первой модели. Это равновесие устойчиво в первых трех моделях и неустойчиво в последней модели. В первой модели множество возможных состояний системы распределяется вдоль многообразия положительных равновесий, во второй и третьей модели решение довольно медленно приближается к устойчивым равновесиям, а в четвертой модели решение длительное время (более сотни лет) находится вблизи положительного равновесия, хотя оно неустойчиво.

Значительный временной интервал, необходимый для достижения равновесного состояния, во всех четырех моделях показывает, что опытные данные среднесезонных значений биомасс компонентов экосистемы, рассмотренные в качестве равновесных значений, не могут достоверно характеризовать состояние изменяющейся экосистемы в фиксированный момент времени. В этих условиях некоторым специальным образом заданная функция принадлежности может указать на степень близости определенного состояния биологического сообщества к действительному в заданный момент времени.

Исследование решений в модели M1 показало значительное влияние бактериально-детритного пути переноса энергии для экосистемы озера Большой Окуненок, обусловленное тем, что разнокачественный детрит занимает важное место в рационе большей части обитателей озера, в том числе рыб.

Все расчеты показывают, что нынешнее состояние озера Большой Окуненок может незначительно меняться, но заметные изменения могут произойти только за достаточно большое время (сто лет и более).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Zadeh L.A. Biological applications of the theory of fuzzy sets and systems // *Biocybernetics of the central nervous system*. Ed. L.C. Proctor, L. C. Littke. Boston: Brown & Co. 1969. P. 199 – 206.
2. Абакумов А.И. Неопределенность данных в математической экологии. // *Дальневосточный математический журнал*. 2000. Т. 1, № 1. С. 38 – 42.
3. Казанцева Т.И. Балансовая модель экосистемы мелкого высокоэвтрофного озера. // *Журнал общей биологии*. 2003. Т. 64, № 2. С. 128 – 145.
4. Абакумов А.И., Пахт Е.В. Моделирование при неопределенности данных (на примере водной экосистемы). // *Информатика и системы управления*. 2009. № 2(20). С. 3 – 10.
5. Абакумов А.И., Гиричева Е.Е. Многомодельный подход к исследованию водных экосистем. // *Известия Самарского научного центра РАН*. 2009. Т.11, № 1(7). С. 1399 – 1402.
6. Chorin A.J., Marsden J.E. *A mathematical introduction to fluid mechanics*. Third Edition. N.Y.: Springer-Verlag New York, Inc., 1992. P. 182.
7. Свиричев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. С. 352.
8. Monod J. The growth of bacterial cultures. *Ann. Rev. Microbiol.* 1949. V. 11. N. 2. P. 371 – 394.