О равновесиях Вальраса и Эджворта в многорегиональных экономических системах*

В.А. Васильев
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
vasilev@math.nsc.ru

Расширенные тезисы

Введение

Работа продолжает исследования автора по вопросам эквивалентности равновесий Вальраса и Эджворта в неклассических рынках, начатые в [1]. Излагаемые в докладе результаты относятся к многорегиональным экономическим системам, изучавшимся в работах [2 - 5] и представляющим не только теоретический, но и значительный прикладной интерес. Отметим сразу же, что рассматриваемая проблематика тесно связана с задачей обоснования известной гипотезы Эджворта об асимптотической эквивалентности неблокируемых и равновесных распределений [6,7]. Показано, что найденные автором условия строгой автаркичности и ненасыщенности гарантируют совпадение нечетких ядер и вальрасовских планов анализируемых неклассических рыночных систем. На основании этого факта и полученного ранее представления равновесий Эджворта в виде элементов так называемого нечеткого $\mathbb{Q}$-ядра [5], установлен центральный результат доклада: строгая автаркичность и ненасыщенность достаточны и для совпадения множеств равновесных планов Вальраса и Эджворта. Обсуждаются также некоторые применения полученных теорем эквивалентности к отысканию условий существования вальрасовских равновесий рассматриваемых многорегиональных систем.

1 Модель $\mathcal{M}$

В докладе рассматривается модель экономического взаимодействия регионов из [2], имеющая следующий вид:

$$\mathcal{M} =< R, \{A^s, G^s, H^s, b^s, d^s\}_{s\in R} >,$$

где $R = \{1, \ldots, r\}$ - множество регионов; A^s - прямоугольная матрица размера $n_s \times l_s$, характеризующая производственный сектор региона $s \in R$; G^s и H^s - прямоугольные

*Работа выполнена при финансовой поддержке Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН "Развитие теории, методологии и прикладных экономико-математических исследований"и Российского фонда фундаментальных исследований, № 10-06-00168а.

матрицы размера $n_s \times n$, оисывающие способы вывоза и ввоза в регионе $s \in R$; b^s - вектор-столбец размерности n_s, характеризующий имеющийся ресурсно-технологический потенциал региона $s \in R$; d^s - вектор-столбец размерности n_s, описывающий затраты ресурсов и продукции, связанные с достижением целей развития региона $s \in R$.

Ресурсно-технологические возможности Z_s региона $s \in R$ определяются формулой

$$Z_s := \{z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in \mathbb{R}_+^{l_s} \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+ \mid A^s x^s + G^s u^s + H^s v^s \geq b^s + \lambda_s d^s\},$$

где неотрицательные вектор-стобцы $x^s = (x_i^s)_{i=1}^{l_s}$, $u^s = (u_j^s)_{j=1}^n$, $v^s = (v_j^s)_{j=1}^n$ указывают объёмы производства, вывоза и ввоза, соответственно, а число $\lambda_s \in \mathbb{R}_+$ - степень достижения целей регионального развития для $s \in R$ (как обычно, символом $\mathbb{R}$ обозначается множество вещественных чисел, а неравенство для векторов понимается в обычном покомпонентном смысле: $x \geq y \Leftrightarrow x_i \geq y_i,\ i = 1, \dots, m$ для любых $x = (x_1, \dots, x_m)$ и $y = (y_1, \dots, y_m)$ из $\mathbb{R}^m$). Элементы множества Z_s будем называть *планами* региона s.

Для оценки качества планов $z^s \in Z_s$ в дальнейшем используются функции t_s, сопоставляющие каждому вектору $z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s)$ его последнюю компоненту λ_s:

$$t_s(z^s) = t_s(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) := \lambda_s, \quad (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s, \quad s \in R$$

(другими словами, отображения $t_s : Z_s \to \mathbb{R}$ - целевые функции участников $s \in R$, характеризующие степень достижения целей их регионального развития).

Положим $Z_{\mathcal{M}} := \prod_{s \in R} Z_s$ и через $Z_{\mathcal{M}}(R)$ обозначим совокупность *сбалансированных планов* модели $\mathcal{M}$:

$$Z_{\mathcal{M}}(R) = \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s)_{s \in R} \in Z_{\mathcal{M}} \mid \sum_{s \in R} u^s \geq \sum_{s \in R} v^s\}.$$

Важную роль в дальнейшем играют так называемые *строго автаркические планы*, под которыми понимаются элементы множеств

$$\hat{Z}_{\mathcal{M}}(s) := \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s \mid u^s \gg v^s\}, \quad s \in R$$

(как обычно, сокращение $x \gg y$ для векторов $x, y \in \mathbb{R}^m$ означает выполнение строгих неравенств $x_i > y_i,\ i = 1, \dots, m$). Регион $s \in R$ будем называть *строго автаркическим*, если $\hat{Z}_{\mathcal{M}}(s) \neq \emptyset$.

Помимо строгой автаркичности при стоимостной характеризации коалиционно стабильных планов полезен следующий аналог ненасыщаемости индивидуальных предпочтений. Для каждого $s \in R$ положим $\widetilde{Z}_s := \mathrm{Pr}_{Z_s} Z_{\mathcal{M}}(R)$. Регион $s \in R$ будем называть *ненасыщенным,* если для него выполняется неравенство

$$\sup_{z^s \in Z_s} t_s(z^s) > \sup_{z^s \in \widetilde{Z}_s} t_s(z^s).$$

2 Равновесие Вальраса и нечеткое ядро

Следуя [2], введем одно из основных понятий работы - определение вальрасовского равновесия в модели межрегионального взаимодействия $\mathcal{M}$.

Определение 1. *Будем говорить, что план $\bar{z} = (\bar{x}^s, \bar{u}^s, \bar{v}^s, \bar{\lambda}_s)_{s \in R} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$ является вальрасовским равновесием модели $\mathcal{M}$, если существует ненулевой вектор цен $\bar{p} \in \mathbb{R}_+^n$ такой, что $\bar{p} \cdot \bar{u}^s \geq \bar{p} \cdot \bar{v}^s$ для всех $s \in R$, и при этом для любых $s \in R$ и $z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s$ справедлива импликация $\lambda_s > \bar{\lambda}_s \Rightarrow \bar{p} \cdot u^s < \bar{p} \cdot v^s$ (как обычно, выражение $x \cdot y$ означает скалярное произведение векторов x и y).*

Совокупность вальрасовских равновесий модели $\mathcal{M}$ будем обозначать через $W(\mathcal{M})$ (элементы множества $W(\mathcal{M})$ будем называть также *вальрасовскими планами* модели $\mathcal{M}$).

Для изложения основной теоремы эквивалентности приведем формулировку еще одного фундаментального понятия оптимальности в рассматриваемом классе моделей - понятия нечеткого ядра модели $\mathcal{M}$. Для формализации понятия нечеткого блокирования напомним [1,2], что элементы множества

$$\sigma_F := \{\ f = (f_1, \dots, f_r) \mid f \neq 0,\ f_s \in [0,1],\ s \in R\}$$

называются *нечеткими коалициями.* Величина компоненты f_s нечеткой коалиции f указывает степень участия региона $s \in R$ в координации усилий "большой коалиции" R. Через $R(f)$ будем обозначать носитель нечёткой коалиции $f = (f_1, \dots, f_r)$, определяемый равенством $R(f) := \{s \in R \mid f_s > 0\}$.

Определение 2. *Будем говорить, что план $\bar{z} = (\bar{z}^s)_{s\in R} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$ блокируется нечёткой коалицией $f = (f_1, \dots, f_r)$, если существуют региональные планы $z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s,\ s \in R(f)$, такие, что* (1) $t_s(z^s) > t_s(\bar{z}^s),\ s \in R(f)$, *и* (2) $\sum_{s\in R(f)} f_s u^s \geq \sum_{s\in R(f)} f_s v^s$.

Совокупность сбалансированных планов модели $\mathcal{M}$, не блокируемых никакой нечёткой коалицией f, будем обозначать через $C_F(\mathcal{M})$ и называть *нечётким ядром модели $\mathcal{M}$.*

Один из главных результатов работы заключается в следующей теореме эквивалентности вальрасовских планов и планов, не блокируемых никакой нечеткой коалицией.

Теорема 1. *Если регионы модели $\mathcal{M}$ строго автаркические и ненасыщенные, то ее нечеткое ядро $C_F(\mathcal{M})$ совпадает с множеством вальрасовских планов $W(\mathcal{M})$.*

3 Нечеткое ядро и равновесия Вальраса и Эджворта

Переходя ко второй теореме эквивалентности, устанавливающей условия совпадения множеств вальрасовских и эджвортовских планов, напомним необходимые определения из [5], где было введено одно из основных понятий оптимальности для рассматриваемого класса моделей - понятие равновесия Эджворта. Несколько модифицируя классическое определение реплики в моделях типа Эрроу-Дебре [6,7], введём сначала определение *дробления (измельчения) модели $\mathcal{M}$*. Зафиксируем $k \geq 1$ и положим

$$R_{[k]} := \{(s,m) \mid s \in R,\ m = 1, \dots, k\}. \tag{1}$$

Далее, для каждого элемента $(s,m) \in R_{[k]}$ (понимаемого в дальнейшем как "номер" m-ой доли региона $s \in R$ исходной экономики $\mathcal{M}$) введём матрицы A^{sm}, G^{sm}, H^{sm} и векторы b^{sm}, d^{sm}, полагая

$$A^{sm} := A^s,\ G^{sm} := G^s,\ H^{sm} := H^s,\ b^{sm} := \frac{1}{k} b^s,\ d^{sm} := d^s. \tag{2}$$

Определение 3. *Модель многорегиональной экономической системы*

$$\mathcal{M}_{[k]} :=< R_{[k]}, \{A^{sm}, G^{sm}, H^{sm}, b^{sm}, d^{sm}\}_{(s,m)\in R_{[k]}} >, \tag{3}$$

параметры которой определяются соотношениями (1) *и* (2), *будем называть дроблением ранга k (k-дроблением) модели $\mathcal{M}$.*

Отметим, что в силу соотношний между параметрами модели $\mathcal{M}$ и её k-дробления $\mathcal{M}_{[k]}$, для множеств

$$Z_{sm} = \{z^{sm} = (x^{sm}, u^{sm}, v^{sm}, \lambda_{sm}) \geq 0 \mid A^{sm}x^{sm} + G^{sm}u^{sm} + H^{sm}v^{sm} \geq b^{sm} + \lambda_{sm}d^{sm}\}$$

ресурсно-технологических возможностей регионов $(s,m) \in R_{[k]}$ выполняются равенства

$$Z_{sm} = \frac{1}{k}Z_s \quad \text{для каждого} \;\; s \in R \;\; \text{и} \; m = 1, \ldots, k.$$

Обратим внимание также на то, что как и в исходной модели $\mathcal{M}$, целевые функции t_{sm} : $Z_{sm} \to \mathbb{R}$ регионов (s,m) дробления $\mathcal{M}_{[k]}$ определяются последней компонентой плана z^{sm}, согласно формуле $t_{sm}(x^{sm}, u^{sm}, v^{sm}, \lambda_{sm}) := \lambda_{sm}, \quad (s,m) \in R_{[k]}$.

Как видно из самого определения дробления ранга $k+1$, в $\mathcal{M}_{[k+1]}$ наряду с участниками исходной системы с уменьшенными в $k+1$ раз ресурсами, в равном количестве из k экземпляров представлены идентичные им доли соответствующих регионов, что усиливает уровень конкуренции в новой системе и позволяет (согласно известной гипотезе Эджворта [1, 6]) более точно оценить равновесные распределения с помощью элементов ядер дроблений. В этом смысле вводимое далее понятие равновесия Эджворта является "предельным"вариантом развития указанной идеи аппроксимации вальрасовских состояний неблокируемыми в моделях типа (3), изображающих рост конкуренции при возрастании ранга дробления регионов.

Избегая громоздкой символики, положим $Z_{[k]} := Z_{\mathcal{M}_{[k]}} = \prod_{(s,m)\in R_{[k]}} Z_{sm}$ и, как и ранее, через $Z(R_{[k]})$ будем обозначать совокупность сбалансированных планов модели $\mathcal{M}_{[k]}$:

$$Z(R_{[k]}) := \{(z^{sm})_{(s,m)\in R_{[k]}} \in Z_{[k]} \mid \sum_{(s,m)\in R_{[k]}} u^{sm} \geq \sum_{(s,m)\in R_{[k]}} v^{sm}\}.$$

Наконец, для $k \geq 1$ черз $z_{[k]}$ обозначим *k-дробление плана* $z = (z^s)_{s\in R} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$, представляющее собой сбалансированный (что будет видно из дальнейших пояснений) план модели $\mathcal{M}_{[k]}$, построенный из региональных составляющих z^s плана z по формуле:

$$(z_{[k]})^{sm} := \frac{1}{k}z^s, \quad s \in R, \; m = 1, \ldots, k.$$

Как вытекает непосредственно из определения дробления $z_{[k]}$, задаваемый им план устанавливает одинаковые региональные планы $\frac{1}{k}z^s$ однотипным[1] участникам модели $\mathcal{M}_{[k]}$. Отсюда, в силу сбалансированности z, и получается неравенство

$$\sum_{(s,m)\in R_{[k]}} u^{sm} = \sum_{s\in R} u^s \geq \sum_{s\in R} v^s = \sum_{(s,m)\in R_{[k]}} v^{sm},$$

доказывающее сбалансированность плана $z_{[k]}$ в модели $\mathcal{M}_{[k]}$.

Завершая описание конструкции, лежащей в основе понятия равновесия Эджворта, напомним [2,4] еще определение обычного (то есть порождаемого обычными коалициями $T \subseteq R$) блокирования и обычного ядра в модели $\mathcal{M}$.

Определение 4. *Коалиция $T \subseteq R$ блокирует $\bar{z} = (\bar{z}^s)_{s\in R} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$, если у неё имеется такой план $(z^s)_{s\in T} = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s)_{s\in T} \in \prod_{s\in T} Z_s$, для которого выполняются соотношения (1) $t_s(z^s) > t_s(\bar{z}^s)$, $s \in T$, и (2) $\sum_{s\in T} u^s \geq \sum_{s\in T} v^s$.*

[1] Участники (s,m) и (s',m') модели $M_{[k]}$ называются *однотипными,* если $s = s'$

Множество всех планов $z \in Z_{\mathcal{M}}(R)$, которые не блокируются никакой коалицией $T \subseteq R$, будем обозначать через $C(\mathcal{M})$ и называть *ядром модели* $\mathcal{M}$.

Определим, наконец, одно из главных понятий оптимальности, изучаемых в работе - равновесие Эджворта модели межрегионального взаимодействия[2].

Определение 5. *План $\bar{z} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$ называется равновесием Эджворта модели $\mathcal{M}$, если все его k-дробления содержатся в ядрах соответствующих дроблений модели $\mathcal{M}$:*

$$\bar{z}_{[k]} \in C(\mathcal{M}_{[k]}) \quad \textit{для каждого} \quad k \geq 1.$$

Совокупность равновесий Эджворта модели $\mathcal{M}$ будем обозначать через $E(\mathcal{M})$.

Учитывая, что для нечеткого ядра и равновесий Эджворта имеет место вложение $C_F(\mathcal{M}) \subseteq E(\mathcal{M})$ (см.[5]), нижеследующая теорема, устанавливающая эквивалентность вальрасовских и эджвортовских равновесий для обширного класса межрегиональных экономических систем, в формальном плане является усилением теоремы 1.

Теорема 2. *Если все регионы системы $\mathcal{M}$ строго автаркические и ненасыщенные, то множество ее вальрасовских равновесий совпадает с множеством равновесий Эджворта*

$$W(\mathcal{M}) = E(\mathcal{M}).$$

4 Некоторые приложения теорем эквивалентности

Помимо отмечавшейся уже значимости теорем эквивалентности в вопросах кооперативной характеризации вальрасовских равновесий (в терминах неблокируемости по отношению к некоторым классам коалиций), большой интерес представляют и возможности получения новых теорем существования равновесий Вальраса, основанные на применении нетрадиционного для этой проблематики аппарата теории кооперативных игр. В частности, как показывает работа [5], исследование условий существования равновесий Эджворта допускает прямое применение традиционных средств равновесного анализа и теории игр, включая известную теорему Скарфа об условиях непустоты обычных ядер [7]. Следовательно, новые условия существования равновесий Вальраса могут быть получены комбинацией теоремы 2 настоящей работы и теоремы 2 из [5].

Переходя к формулировке теоремы существования равновесия Вальраса, опирающейся на кооперативную характеризацию равновесных планов, указанную в теоремах 1 и 2, приведем некоторые условия непустоты множества $E(\mathcal{M})$, найденные в [5]. Напомним [4,5], что однородная составляющая $\mathcal{M}_0$ модели $\mathcal{M}$ отличается от нее только тем, что ресурсно-технологический потенциал каждого из регионов модели $\mathcal{M}_0$ равен нулю: $b^s = 0$ для каждого $s \in R$.

Определение 6. *Будем говорить, что модель $\mathcal{M}$ не имеет "рога изобилия", если множество сбалансированных планов однородной составляющей $\mathcal{M}_0$ этой модели исчерпывается нулевым планом: $Z_{\mathcal{M}_0}(R) = \{0\}$.*

Отметим, что отсутствие "рога изобилия" в смысле определения 6 означает, как и в классических моделях равновесного анализа, что при нулевом экономическом потенциале возможна лишь нулевая хозяйственная активность.

[2]Аналогичное понятие вводилось и изучалось ранее лишь для классической модели Эрроу-Дебре и некоторых её модификаций, указанных, например, в [1,7]

Еще одно используемое в дальнейшем условие представляет собой некоторое ослабление требования ограниченной трансферабельности модели $\mathcal{M}$ из [5], эквивалентное так называемой $\mathcal{P}$*-регулярности* этой модели. Напомним, что план $\bar{z} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$ является Парето-оптимальным (слабо Парето-оптимальным), если не существует плана $z \in Z_{\mathcal{M}}(R)$ такого, что $t(z) > t(\bar{z})$ ($t(z) \gg t(\bar{z})$). Здесь используется сокращение $t(z) := (t_1(z^1), \ldots, t_r(z^r))$, а соотношение $t(z) > t(\bar{z})$ означает, как обычно, что $t(z) \geq t(\bar{z})$ и $t(z) \neq t(\bar{z})$.

Определение 7. *Будем говорить, что модель* $\mathcal{M}$ *является* $\mathcal{P}$*-регулярной, если* $P'(\mathcal{M}) = P(\mathcal{M})$, *где* $P(\mathcal{M})$ *- множество Парето-оптимальных, а* $P'(\mathcal{M})$ *- слабо Парето-оптимальных планов из* $Z_{\mathcal{M}}(R)$.

Опираясь на теорему 2 и упоминавшийся уже результат из [5], касающийся условий существования равновесия Эджворта модели $\mathcal{M}$, получаем новые условия существования вальрасовских равновесий в многорегиональных экономических системах, не включающие, в отличие от [8], требования ограниченности множеств $Z_s,\ s \in R$.

Теорема 3. *Если* $\mathcal{M}$ *является* $\mathcal{P}$*-регулярной и не имеет "рога изобилия", а ее регионы - строго автаркические и ненасыщенные, то в* $\mathcal{M}$ *существует равновесие Вальраса.*

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Vasil'ev V.A. On Edgeworth equilibria for some types of nonclassic markets. Siberian Advances in Mathematics. 1996. V. 6, № 3. P. 96–150.

[2]. Рубинштейн А.Г. Моделирование экономических взаимодействий в территориальных системах. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние. 1983.

[3]. Гранберг А.Г., Суслов В.И., Суспицын С.А. Многорегиональные системы: экономико-математическое исследование. Новосибирск: Наука. Сиб. Науч. Изд-во. 2007.

[4]. Васильев В.А., Суслов В.И. О неблокируемых состояниях многорегиональных экономических систем. Сибирский журнал индустриальной математики. 2009. Т. XII, № 4(40). С. 23–34.

[5]. Васильев В.А., Суслов В.И. Равновесие Эджворта в одной модели межрегиональных экономических отношений. Сибирский журнал индустриальной математики. 2010. Т. XIII, № 1(41). С. 18–33.

[6]. Гильденбранд В. Ядро и равновесие в большой экономике: Пер. с англ. М.: Наука. 1986.

[7]. Алипрантис К., Браун Д., Бёркеншо О. Существование и оптимальность конкурентного равновесия. М.: Мир. 1995.

[8]. Васильев В.А. О существовании вальрасовского равновесия в модели межрегиональных экономических отношений. Дискретный анализ и исследование операций (в печати).